

95048

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEVHADA DELİK VE ÇENTİK PROBLEMİNİN
FOTOELASTİSİTE YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

İnşaat Müh. Yücel ATAÇ

F.B.E İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Sinan Çağdaş

İSTANBUL, 2000

Prof. Sinan Çağdaş

Prof. Sinan Çağdaş

ÖZLİK

Prof. Dr. Faruk Yükseler

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. FOTOELASTİSİTEYE GENEL BİR BAKIŞ.....	1
1.1 Giriş.....	1
1.2 Işık ile İlgili Kavramlar	1
1.2.1. Işığın Davranışı	2
1.2.2. Işığın Yayılma Şekli.....	2
1.2.3. Işığın Dalga Hareketi ve Denklemleri.....	4
1.2.4. Işığın Polarizasyonu, Polarize Işık.....	7
1.2.5. Düzlem Polarizörler (Linear Polarizörler).....	10
1.2.6. Dalga Plakları	11
1.2.7. Bir Düzlem Polarizör ile Bir Dalga Plağının Kombinasyonu	13
1.2.8. Bir Polariskopta Optik Elemanların Aranjmanı.....	16
2. FOTOELASTİSİTE TEORİSİ	19
2.1 Fotoelastisiteye Giriş.....	19
2.2 Düzlem Polariskopta Yüklenmiş Bir Modelin İncelenmesi	21
2.3 Dairesel Bir Polariskopta Yüklenmiş Modelin İncelenmesi	26
2.4 Bir Dairesel Polariskopta Aydınlik Saha Aranjmanı ile Yüklenmiş Modelin İncelenmesi	31
2.5 Bir Fotoelastik Analizde Beyaz Işık Kaynağı Kullanılması.....	32
3. İZOKROMATLARIN VE İZOKLİNİKLERİN AYRI AYRI İNCELENMESİ ..	36
3.1 Giriş.....	36
3.2.1. İzokromatlar.....	36
3.2.2. Serbest Bir Sınırdaki Gerilme Durumu	37
3.2.3. Basit Çekme veya Basit Basınç Halinde İzokromatlar	40
3.2.4. Basit Eğilme Durumunda İzokromatlar	42
3.2.5. Kesmeli Eğilmede İzokromatlar	45
3.3 İzoklinikler.....	46
3.3.1. Giriş.....	46
3.3.2. İzokromatların ve İzokliniklerin Teşhis Edilmesi ve Aralarındaki Farklar.....	49
3.3.3. İzoklinikler Hakkında Bazı Özellikler	49
3.3.4. Gerilme Trajektörleri.....	52
4. ASAL GERİLMELERİN AYRI AYRI BULUNMASI.....	55
4.1 Giriş.....	55

4.2	Kayma Farkı Metodu ile Asal Gerilmelerin Ayrı Ayrı Bulunması	55
5.	MODEL MALZEMESİ	61
5.1	Fotoelastisitede Kullanılan Model Malzemesinde Aranılan Özellikler	61
5.2	Model Malzemesinin Hazırlanması	62
5.3	Model Kanunları	63
6.	ANİ KESİT DEĞİŞMESİ VE GERİLME YIĞILMASI PROBLEMİNİN ELASTİSİTE TEORİSİ YARDIMIYLA İNCELENMESİ	66
6.1	Giriş.....	66
6.2	Elastisite Teorisi Hakkında Ön Bilgiler	66
6.2.1.	Düzlemsel Gerilme Problemleri	66
6.2.2.	Düzlemde Gerilme Probleminin Polar Koordinatlarla İncelenmesi	77
7.	DENEYLER	89
7.1	Giriş.....	89
7.2	Model Malzemesinin (f) Fotoelastisite Sabitinin Bulunması	89
7.3	Eksenel Çekme Kuvvetine Maruz; Ortasında Delik Bulunan Levha Probleminin, Fotoelastik Analizi	91
7.3.1.	Gerilmenin Maksimum Olduğu Kesitte σ_1 ve σ_2 Asal Gerilmelerinin Ayrı Ayrı Bulunması	91
7.4	Levhada Çentik Probleminin Fotoelastik Analizi.....	96
7.4.1.	Gerilmenin Maksimum Olduğu Kesitte Asal Gerilmelerin Ayrı Ayrı Bulunması	96
8.	SONUÇLAR.....	101
	KAYNAKLAR	102
	EKLER	103
	ÖZGEÇMİŞ	109

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	Işık vektörü.....	2
Şekil 1.2	Işığın yayılması.....	3
Şekil 1.3	Anizotrop ortamda ışığın yayılması.....	3
Şekil 1.4	Işığın kırılması.....	4
Şekil 1.5	Işığın hareketi	4
Şekil 1.6	Işığın faz farkı	6
Şekil 1.7	Basit ışığın yayılması	7
Şekil 1.8	Polariskop.....	8
Şekil 1.9	Lineer polarize ışık.....	9
Şekil 1.10	Dairesel polarize ışık	9
Şekil 1.11	Işığın polarizörde ayrışması	10
Şekil 1.12	Çift kırıcı plak	11
Şekil 1.13	Dalga plağı.....	14
Şekil 1.14	Düzlem polarize ışığın oluşması.....	14
Şekil 1.15	Düzlem polariskop	16
Şekil 1.16	Dairesel polariskop	17
Şekil 2.1	Yüklenmiş modelin incelenmesi.....	21
Şekil 2.2	Yüklenmiş model	22
Şekil 2.3	Işığın analizörde ayrışması.....	23
Şekil 2.4	Karanlık saha aranjmanı.....	26
Şekil 2.5	Modelde ayrışma.....	27
Şekil 2.6	Çeyrek dalga plağında ayrışma	28
Şekil 2.7	Analizörde ayrışma.....	30
Şekil 2.8	Analizör	31
Şekil 2.9	Renk skalası.....	35
Şekil 3.1	Serbest sınırlar ve yüke maruz sınırlar	38
Şekil 3.2	Singüler noktalar	38
Şekil 3.3	Mohr dairesi.....	39
Şekil 3.4	Bir eksenli çekme hali.....	40
Şekil 3.5	İzokromat mertebesi – kuvvet diyagramı	41
Şekil 3.6	Basit eğilme durumu	43
Şekil 3.7	İzokromatlık mertebesi.....	44
Şekil 3.8	Kesmeli eğilme durumu	45
Şekil 3.9	İzokromatların durumu.....	45
Şekil 3.10	Moment diyagramı.....	45
Şekil 3.11	Kesme kuvveti diyagramı	45
Şekil 3.13	Model üzerinde polarizör ve analizör eksenleri	46
Şekil 3.14	Model üzerinde polarizör ve analizör eksenleri	46
Şekil 3.15	Ortasında delik bulunan çekme durumu	47
Şekil 3.16	İzoklinikler.....	48
Şekil 3.17	İzokliniklerin dağılımı.....	48
Şekil 3.18	Serbest sınırda izoklinikler.....	49
Şekil 3.19	İzokliniklerin gösterilişi	50
Şekil 3.20	İzoklinik parametreleri	50
Şekil 3.21	Simetri eksenli olması durumu.....	50
Şekil 3.22	Tekil yük altında levhanın durumu	51
Şekil 3.23	İzoklinik parametreleri	52
Şekil 3.24	Gerilme trajektörleri.....	52
Şekil 3.25	S_1 ve S_2 trajektörleri.....	53

Şekil 3.23	S_1 ve S_2 trajektörleri.....	53
Şekil 4.1	Asal gerilmeler.....	55
Şekil 4.2	İki boyutlu elemanlarda denge denklemi.....	56
Şekil 4.3	Diferansiyel eğrileri.....	57
Şekil 4.4	Kayma farkı metodu ile asal gerilmeler.....	58
Şekil 6.1	Çeşitli kesitler.....	66
Şekil 6.2	Düzlem gerilme durumları.....	66
Şekil 6.3	Düzlem gerilme durumları.....	66
Şekil 6.4	Düzlem gerilme durumları.....	66
Şekil 6.5	Düzlem gerilme durumları.....	66
Şekil 6.6	Gerilme halinin transformasyonu.....	69
Şekil 6.7	Gerilme halinin diferansiyel denklemleri.....	70
Şekil 6.8	Şekil değiştirme hali.....	72
Şekil 6.9	Kartezyen koordinat sistemi.....	77
Şekil 6.10	Polar koordinat sistemi.....	77
Şekil 6.11	Kartezyen koordinat sisteminin polar koordinat sistemine dönüşümü.....	79
Şekil 6.12	Levhada delik durumu.....	81
Şekil 6.13	Gerilme eğrileri.....	84
Şekil 6.14	Howland eğrileri.....	85
Şekil 6.15	Howland eğrileri.....	86
Şekil 6.16	Çekme kuvvetine maruz delikli levha.....	87
Şekil 6.17	Howland çözümü eğrileri.....	87
Şekil 6.18	Yığılma gerilmesi faktörü eğrileri.....	88
Şekil 7.1	Kalibrasyon eğrisi.....	90
Şekil 7.2	Ortası delik levha.....	91
Şekil 7.3	Tam ve yarım mertebe izoklinikleri.....	92
Şekil 7.4	İzoklinikler.....	92
Şekil 7.5	Deneyin gerilme eğrileri.....	93
Şekil 7.6	Çentikli levha.....	97
Şekil 7.7	Tam ve yarım mertebe izoklinikleri.....	98
Şekil 7.8	İzoklinikler.....	98
Şekil 7.9	Deneyin gerilme eğrileri.....	99

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 1.1	Optik elemanların aranjmanı.....	18
Çizelge 5.1	Fotoelastik model malzemelerine ait optik ve mekanik özellikler.....	62
Çizelge 7.1	Deney verileri.....	90



ÖNSÖZ

Bu teze başladığım andan itibaren yardım ve ilgisini esirgemeyen, bana her konuda destek veren değerli hocam Sn. Prof. Sinan Çağdaş'a saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.



ÖZET

Bu tezde, deneysel gerilme analizlerinden biri olan “fotoelastisite” yöntemi detaylı olarak ele alınmış; bu bağlamda fotoelastisitede kullanılan ışık ile ilgili fiziksel bilgiler ve elastisitede levha analizindeki gerilme-şekil değiştirme problemleri kısa bir şekilde açıklanarak, fotoelastisitede kullanılabilir hale getirilmiştir.

Fotoelastisite yöntemiyle deneysel olarak incelenmiş olan levhada delik ve çentik problemleri ayrıca elastisite teorisi yardımıyla da çözümlenmiş; iki farklı yöntemin karşılaştırılmasıyla ortaya çıkan neticelerin küçük farklar oluşturması nedeniyle, ihmal edilebilir olduğu görülmüştür. Bu da komplike bir konstrüksiyonun yapımına geçilmeden önce modele uygun bir form verilmek suretiyle gerilme yığılmalarının önlenebilir olduğunu somut olarak göstermiştir. Ayrıca gerilmelerin olmadığı yerlerden malzeme çıkartılmasını olanaklı kılarak konstrüksiyonun daha hafif ve ekonomik olmasını da pratik olarak beraberinde getirmiştir.



ABSTRACT

In this thesis, the method of photoelasticity that is one of the experimental stress analysis has been considered. With this method, the physical properties of light used in photoelasticity and the stress-strain problems in the plate analysis in elasticity is briefly defined and used in photoelasticity.

Notch and hole problems in plate were analysed both with photoelasticity method and elasticity theory. The results of these two methods were compared and it was seen that the differences between the results were negligible. This shows that, before starting construction, the model can be formed in such a way to avoid the stress concentration. Also materials can be substituted from the places where there is no stress. So that the constructions would become lighter and economic.



1. FOTOELASTİSİTEYE GENEL BİR BAKIŞ

1.1. Giriş

Bilindiği gibi mukavemet teorileri genel olarak Elastisite teorilerine dayanır. Elastisite teorisi levhalarda ve hacimsel elemanlarda gerilme ve şekil değiştirme analizini matematiksel olarak yapar. Elastisite teorisindeki diferansiyel denklemlerin integralini almak, basit durumlarda bile oldukça zor bir iştir. Hatta bazı durumlarda bu denklemlerin integrasyonu mümkün değildir.

Bu nedenle, mukavemet problemlerinin çözümü için, ortaya atılmış bir takım hipotezleri kullanarak, bunların gerçeğe uygunluğu ve hangi sınırlarda geçerli olduğu incelenmelidir.

Ayrıca, komplike bir konstrüksiyonun yapımına geçilmeden önce, araştırma yapılarak ona uygun bir form verilmesiyle gerilme yığılmaları önlenabilir ve gerilmelerin sıfır olduğu yerlerden malzeme çıkartılarak, konstrüksiyonun hafif olması sağlanabilir. Böylece ekonomiklik ve güvenlik faktörlerine tam olarak uyulmuş olur.

İşte yukarıda açıklanan zorunluluklar deneysel metodların önem kazanmasına neden olmuştur. Bu amaçla zamanımıza kadar birçok deneysel metod geliştirilmiştir. Örnek olarak: Beggs Deformatörü, Strain Gage, Stress Coat, Fotoelastisite verilebilir. Bunlar içinde en popüler olan Fotoelastisitede şu yol takip edilir:

Önce inşa edilecek konstrüksiyonun, şeffaf malzemedan (polyester, araldit gibi) bir modeli yapılır. Bu modelin konstrüksiyon ile aynı biçimde olması ve benzerlik kanunlarına uyulması gerekir. Model, konstrüksiyonun maruz kalacağı yüklere uygun ve model kanunlarına uyan kuvvetlere maruz bırakılır. Böylece yüklenmiş model, bir fotoelastisite cihazı içine koyulup incelenirse;

- Modelin bütün sahası üzerinde gerilme dağılımını görmek,
- Model üzerinde herhangi bir noktada gerilmelerin doğrultularını ve şiddetini bulmak mümkün olur.

1.2. Işık İle İlgili Kavramlar

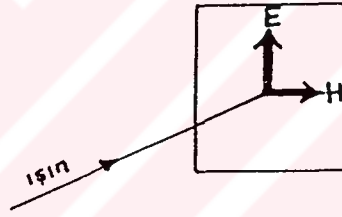
Fotoelastisitenin en önemli unsurlarından biri ışıktır. Bu nedenle fotoelastisite teorisine geçmeden önce ışık hakkında ön bilgiler vermek gerekmektedir.

1.2.1. Işığın Davranışı

Işık hakkında en eski teori, Newton tarafından geliştirilmiş olan zerresel teoridir. Bu teoriye göre; bir ışık kaynağı son derece küçük zerreler yayar. Bu zerrelerin hareketi ise mekanik kanunlarına göre oluşur. Bu teori ışığın yansıma ve kırılmasını açıklamaya yeterli gelir. Fakat ışığın polarizasyonunu açıklayamaz. Daha sonra Maxwell tarafından ortaya atılan Elektromanyetik teori'ye göre, ışık elektro/manyetik dalgaların titreşimlerinden ibarettir.

Bilindiği gibi bir elektro-manyetik alanda, bir elektrik alanı ve bir mıknatıs alanı gözönüne almak gerekir. Bu iki alanın birer vektör ile gösterilmesi mümkündür. Bu iki vektör ışın doğrultusuna dik bir düzlem içerisinde olup, birbirlerine diktir. Şekil 1.1'de (E) elektrik alanını, (H) mıknatıs alanını göstermektedir.

Elektro-manyetik teoriye göre, ışık hareketi belirli bir zamanda şiddet ve yön itibariyle bir vektörle gösterilebilecektir. Bu vektöre ışık vektörü denilecektir. Yukarıda açıklanan (E) ve (H) vektörlerinden biri, ışık vektörü olarak kabul edilebilir.

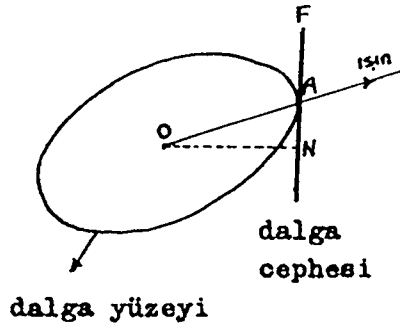


Şekil 1.1 Işık vektörü

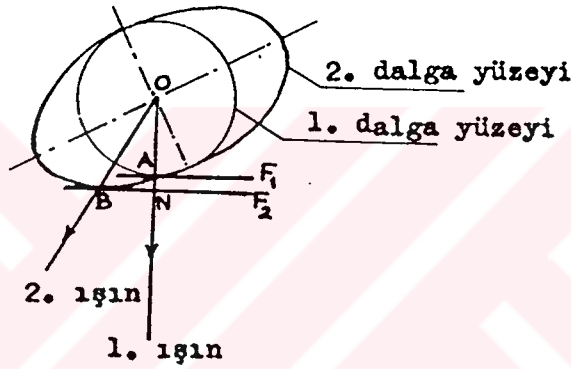
1.2.2. Işığın Yayılma Şekli

Herhangi bir ışık kaynağından çıkan ışınlar her doğrultuda yayılır. Işığın homojen bir ortamda yayılma hızı sabittir. Fakat bir ortamdan başka bir ortama geçildiğinde, bu hız değişir. Işığın havadaki yayılma hızı: $v = 300000 \text{ km/sn}$ 'dir. Işığın herhangi bir (i) ortamındaki hızı (v_i) ise $n = v/v_i$ oranına (i) ortamına ait kırılma indisi denir. Işığın havadaki hızı, diğer ortamlardaki yayılma hızından daha büyük olduğundan, (n) kırılma indisi birden büyüktür.

Aşağıda görüldüğü gibi O noktasında bir ışık kaynağı düşünelim. Işık O noktasından her istikamete yayılır. $t = 0$ anında, O noktasından çıkan ışınların bir (t) anında, ulaştıkları noktaların geometriyi bir yüzeydir. Bu yüzeye (t) anına ait dalga yüzeyi denir. Dalga yüzeyi üzerinde bir (A) noktasından bu yüzeye çizilen (F) teğet düzlemine dalga cephesi, OA doğrultusuna ışık ışını ve O noktasından bu dalga cephesine indirilen dik doğruya dalga normali denir. ON/t dalga cephesinin ilerleme hızıdır (Şekil 1.2).



Şekil 1.2 Işığın yayılması

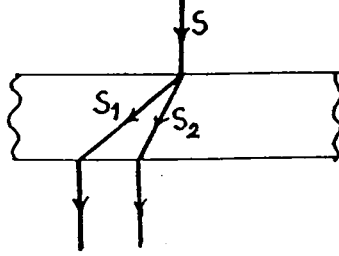


Şekil 1.3 Anizotrop ortamda ışığın yayılması

Işığın yayıldığı ortam homojen ve izotrop bir ortam ise, dalga hızı her doğrultuda aynı olacağından dalga yüzeyi bir küreden ibaret olur. Işığın yayıldığı ortam kuvars, mika gibi bir anizotropik ortam ise, bir dalga yüzeyi yerine, Şekil 1.3'de görüldüğü gibi, birbirinden farklı iki dalga yüzeyi meydana gelir. Bir anizotropik ortamda (O) ışık kaynağından çıkan ışın dalgaları bir (t) zamanı sonunda, biri küresel diğeri elipsoid olan iki dalga yüzeyi meydana getireceklerdir.

Küresel dalga yüzeyinin A noktasındaki teğet düzlemi (F_1), birinci dalga yüzeyinin dalga cephesi ve O noktasından bu düzleme indirilen ON diği ise dalga normali olacaktır. Bu dalga düzlemine ait ışık ışını (1. Işın), dalga normali ile çakışacaktır. Elipsoid dalga yüzeyinin B noktasındaki teğet düzlemi (F_2) ikinci dalga yüzeyine ait dalga cephesi ve OB doğrultusu da bu dalga düzlemine ait ışık ışını (2. Işın) olacaktır.

Birinci dalga cephesinin hızı OA/t , ikinci dalga cephesinin hızı ON/t olacaktır. Bu suretle meydana gelen iki dalga cephesinin hızları birbirinden farklıdır. Böylece, bir anizotropik ortama giren bir (S) ışını, Şekil 1.4'te görüldüğü gibi, (S_1) ve (S_2) gibi iki ışına ayrılır. Bu iki ışının hızları, dolayısıyla (n) kırılma indisleri birbirinden farklıdır. Bu hadiseye çift kırılma denir.

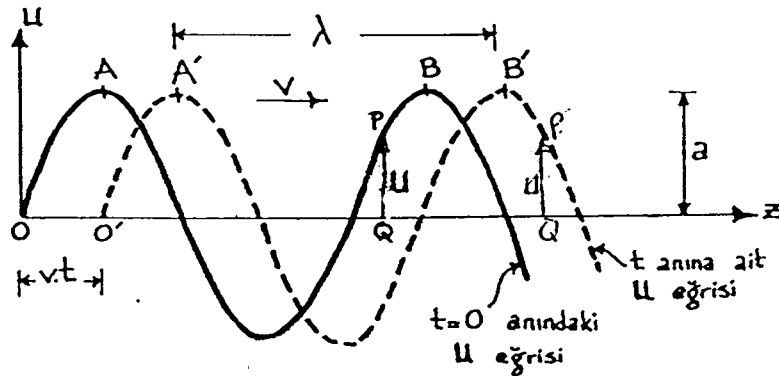


Şekil 1.4 Işığın kırılması

1.2.3. Işığın Dalga Hareketi ve Denklemleri

Elektro-manyetik teoride ışık hareketinin, her doğrultuda yayılan elektromanyetik dalgaların titreşimlerinden oluştuğunu söylemiştik. Bu titreşim hareketi tıpkı, su içine atılan bir taş parçasının meydana getirdiği dalga hareketine benzer. Taşın atıldığı nokta merkez olmak üzere her doğrultuda yayılan dalgaların en önemli özelliği, bu dalgaların yayılma doğrultusuna dik yönlere titreşim yaptırır. Bu hareketin diğer bir özelliği, enerjinin komşu zerrelere iletilmesi ve bu zerrelere aynı hareketi yaptırmasıdır. Bu hareketin diğer bir özelliği, enerjinin komşu zerrelere iletilmesi ve bu zerrelere de aynı hareketi yaptırmasıdır. Dolayısıyla, dalga formunda bir değişim olmaz.

Işık hareketi de aynen bu harekete benzer. Bir ışık kaynağından yayılan ışık, çok sayıda çapraz dalgaların birleşimi olarak düşünülebilir (Şekil 1.5).



Şekil 1.5 Işığın hareketi

Şimdi bu hareketi inceleyelim. Kartezyen koordinat takımındaki bir Q noktasında, herhangi bir (t) anında ışık vektörü büyüklüğü (u) ile ve yayılma eksenini boyunca pozisyonunu (z) ile gösterelim. O_z eksenini üzerinde çeşitli Q noktalarından, bu eksene çizilen dikler üzerinde, QP=U olarak ışık vektörlerinin şiddetleri alınır, bir eğri elde edilir. Bu eğriye (t) anına ait dalga şekli denir.

Havada (v) hızıyla yayılan dalgaların t = 0 anındaki denklemi : U= f (z) kabul edilirse, herhangi bir (t) anında dalga şekli (v.t) kadar ilerlemiş olacağından, dalga şeklinin denklemi: U=f(z-v.t) şeklinde olur. Maddi ortamlar içinde dalga şekli genellikle bir sinüs eğrisi ile verilir. Şu halde:

$$U = a \cdot \sin \varphi \quad (1.1)$$

şeklinde yazılır. Yayılma esnasında dalga şeklini değiştirmedikinden, (φ) açısının:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(z - v.t) + e \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür. Burada:

φ : yayılmanın fazı

λ : dalga boyu

v : ışığın yayılma hızı

a: genlik (amplitüd)

e: başlangıç şartlarına bağlı bir sabit

1.2. denklemde başlangıç şartlarını e = 0 olacak şekilde seçersek ve (1.1) denklemde yerine koyarsak, maddi bir ortamda yayılan dalganın denklemi;

$$U = a \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - v.t) \quad (1.3)$$

Işık vektörünün sinüzoidal eğrisi üzerinde, A ve B noktaları gibi eşlenik iki nokta arasındaki (λ) uzaklığına dalga boyu denir. Bu (λ) dalga boyunu katetmek için gerekli (T) zamanı periyot olarak tarif edilir. Şu halde:

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (1.4)$$

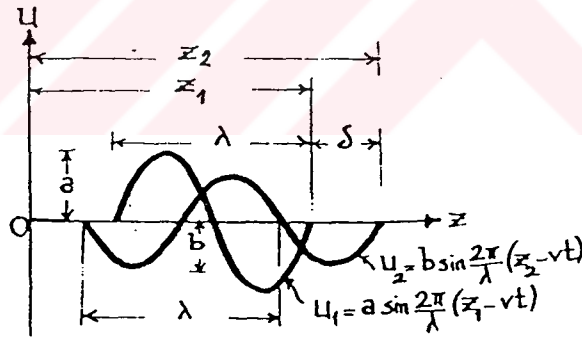
olur. Işık vektörünün frekansı saniyedeki titreşim sayısıdır. Diğer bir deyişle frekans, periyodun tersidir. Frekans (F) ile gösterirsek:

$$F = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \quad (1.5)$$

Dalga teorisine göre renk özelliği, dalga kompartımanının frekansından ileri gelir. Her farklı frekans, farklı bir renk doğurur. Deneysel olarak gösterilmiştir ki ışığın dalga boyu ve hızı, ışığın yol aldığı ortama bağlıdır. Fakat frekans, ortamdan ortama değişmez. Her ortam için sabit bir değerdedir. Böylece, ışık şuasının rengi, bir ortamdan başka bir ortama geçildiğinde değişmez. Bu sebeple renk, dalga uzunluğundan daha çok, frekansın bir fonksiyonudur. Göz tarafından görülebilen tayftaki renklerin dalga boyları şöyledir: Mor 4000 Å⁰, Mavi 4500 Å⁰, Yeşil 5200 Å⁰, Sarı 5700 Å⁰, Kırmızı 6500 Å⁰. Dalga boyu birimi Angstrom'dur ve (Å⁰) sembolü ile gösterilir. Bir Angstorm, 10⁻⁸ cm.dir. Bir dalga boyunda ve frekansında olan ışığa, monokromatik (tek renk) ışık denir.

Beyaz ışık, tayfta görülen renklerin karışmasından meydana gelir.

Lineer ve açısal faz farkı:



Şekil 1.6 Işığın faz farkı

Şekil 1.6'da görüldüğü gibi, genlikleri (a) ve (b) olan ve aynı dalga uzunluğuna sahip, iki dalga düşünelim. Herhangi bir anda (z) koordinatları arasındaki fark, lineer faz farkı olarak tarif edilir. Bu tarife göre lineer faz farkı:

$$\delta = z_2 - z_1 \text{ olur}$$

$$U_1 = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z_1 - vt) = a \sin \varphi_1$$

$$U_2 = b \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z_2 - vt) = b \cdot \sin \varphi_1$$

alırsak, açısal faz farkı olan (Δ) yı:

$$\Delta = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ olarak tanımlarız.}$$

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (z_1 - vt) - \frac{2\pi}{\lambda} (z_2 - vt) = \frac{2\pi}{\lambda} (z_1 - z_2) \text{ olarak bulunur.}$$

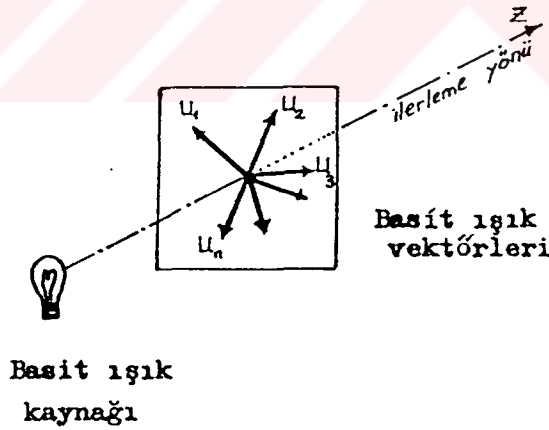
$z_1 - z_2 = \delta$ olduğundan, (Δ) açısal faz farkı:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta \quad (1.6)$$

bulunur. 1.6. bağıntısı lineer faz farkı ile açısal faz farkı arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

1.2.4. Işığın Polarizasyonu, Polarize Işık

Herhangi bir lambadan yayılan basit ışıkta, ışık vektörü hiçbir şekilde sınırlandırılmamıştır ve ilerleme doğrultusuna dik önlerde çok sayıda elektromanyetik dalgaların titreşimlerinden oluşurlar. (Şekil 1.7) Böylece basit ışıkta, ışık vektörünün yönü, çeşitli noktalarda, $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ gibi başka başka olacaktır.



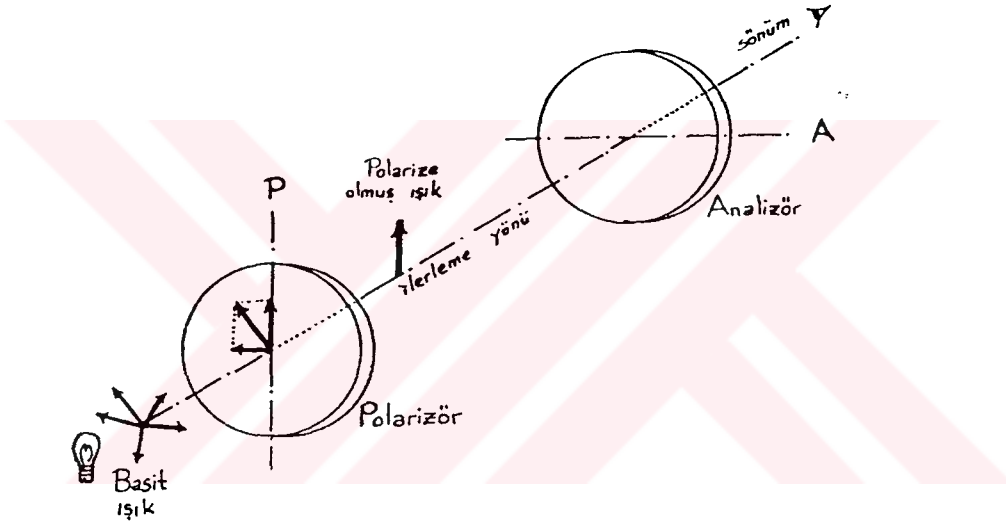
Şekil 1.7 Basit ışığın yayılması

Özel olarak, bu ışık vektörlerinin daima bir doğrultuya paralel olması sağlanırsa, bu şartı sağlayan ışığa polarize ışık denir.

Polarize ışık elde etmek için birçok metodlar denenmiştir. Örnek olarak: 57° açı ile gelen ışığın yansıma yolu ile polarizasyonu, Nicol prizmaları, Glan-Thomson prizmaları, Ahrens prizmalarını kullanarak ışığın polarizasyonunu gösterebiliriz. Bu yollardan polarize ışık elde etmek, hem zor hem de prizmaların büyük olmaları sebebiyle pratik değildi. Daha sonraları

polaroid filitre'lerin kullanılması, polarize ışık elde etmeyi oldukça pratik bir hale getirdi. Polaroid filitreler, bir doğrultuda ışık geçirme özelliğine, diğer doğrultuda ise ışığı emme (absorbe etme) özelliğine sahip kristal plaklardır. Böyle bir polaroid filitre, bir basit ışık kaynağı önüne konulursa, ışık vektörlerinin sadece polaroid filitrenin optik eksenine paralel olan bileşenleri, filtreden geçecek diğer bileşenleri ise absorbe edilmiş olacaktır. Böylece organize edilmiş ışığa, titreşimlerin daima bir düzlemde olması sebebiyle düzlem polarize veya lineer polarize ışık denir.

Şayet diğer bir polaroid filitre ışığın yolu üzerine konulursa ve bu filitrenin arkasından bakılırsa, ışığın tam bir sönümü ancak, birinci filitrenin (P) polarize ekseninin, ikinci filitrenin (A) polarize eksenine dik olduğu zaman elde edilir.



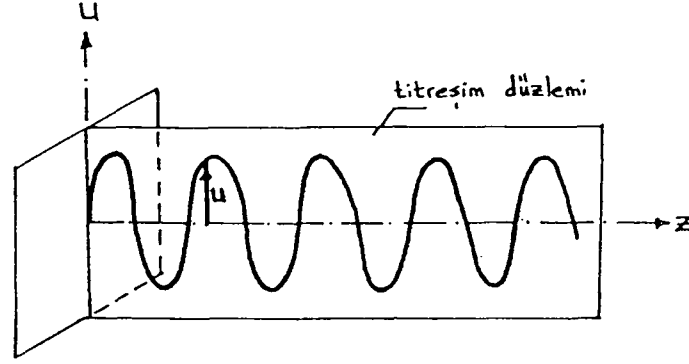
Şekil 1.8 Polariskop

Birinci filtreye Polarizör, ikinci filtreye ise Analizör adı verilir. (Şekil 1.8) Fotoelastisitede kullanılan üç tip polarize ışık vardır. Bunlar:

1. Düzlem polarize ışık
2. Dairesel polarize ışık
3. Eliptik polarize ışık

1. Düzlem polarize (lineer polarize) ışık

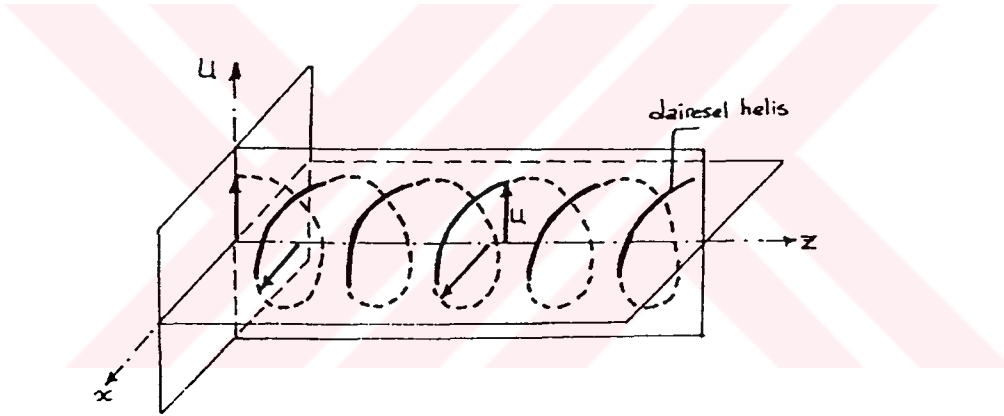
Işık vektörünün titreşiminin bir düzlem içerisinde sınırlandırılması ile elde edilir. U ışık vektörü titreşim düzleminde bir sinüs eğrisi çizer. (Şekil 1.9)



Şekil 1.9 Lineer polarize ışık

Bu durumda ışık vektörü daima (U_z) düzleminde titreşim yapacaktır. Bu şekilde ışık vektörünün sadece belirli bir düzlemde titreşimine imkan verilirse düzlem polarize ışık elde edilmiş olur.

2. Dairesel polarize ışık



Şekil 1.10 Dairesel polarize ışık

Işık vektörünün (U_z) ve (xz) düzlemlerinde titreşim yaparak, z eksenini boyunca ilerlemesiyle meydana gelir. Bu durumda ışık vektörünün tepesi daireysel bir helis çizer. Yani bu hareket, (U_z) ve (xz) düzlemlerindeki titreşim hareketi ile, z eksenini boyunca ilerleme hareketinin kombinasyonundan meydana gelir.

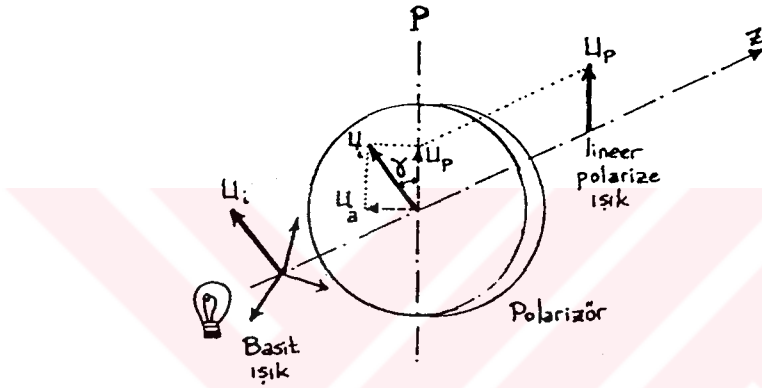
3. Eliptik polarize ışık

Işık vektörünün tepesi, z eksenini boyunca ilerleyen bir eliptik helis çizer. Gerçekte polarize ışığın genel durumunu gösterir. Düzlem ve daireysel polarize ışık bu durumun özel halleridir. Elipsin büyük ve küçük eksenleri birbirine eşit olduğu zaman eliptik polarize ışık, daireysel polarize ışık olur.

Pratikte, düzlem polarize ışık, düzlem polarizör olarak bilinen bir tek optik eleman vasıtasıyla meydana getirilebilir. Halbuki dairesel veya eliptik polarize ışık elde etmek için, iki optik elemanın kullanılması gereklidir. Şimdi bu elemanlar ayrı ayrı ele alınacaktır.

1.2.5. Düzlem Polarizörler (Lineer Polarizörler)

Düzlem polarizörler, ışık vektörü bileşenlerinden polarizörün optik eksenine doğrultusunda olanları geçiren, diğer doğrultudaki bileşenleri ise absorbe eden optik elemanlardır. Bir basit ışık kaynağından çıkan $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3, \dots, \vec{U}_i$ ışık vektörlerini gözönüne alalım. Bunlardan mesela \vec{U}_i ışık vektörünün polarize geldiğini düşünelim. (Şekil 1.11)



Şekil 1.11 Işığın polarizörde ayrışması

Bu \vec{U}_i ışık vektörü polarizöre çarptığında iki bileşene ayrılır. Biri polarizörün (P) optik eksenine doğrultusunda U_p bileşeni, diğeri bu eksene dik U_a bileşenidir. \vec{U}_i ışık vektörünün polarizörün optik eksenine ile yaptığı açı γ ise:

$$U_a = U_i \cdot \sin \gamma$$

$$U_p = U_i \cdot \cos \gamma \quad (1.7)$$

olacaktır. Diğer taraftan polarizör, z eksenine boyunca herhangi bir noktada tesbit edilmişse (1.3) denklemine göre U_i ışık vektörü:

$$U_i = a \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \text{ şeklinde olur. (1.5) denklemine göre } \frac{v}{\lambda} = F \text{ olduğundan:}$$

$$U_i = a \cdot \sin 2\pi Ft = a \cdot \sin \omega t \quad (1.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\omega = 2\pi F$ değerine açısal frekans denir. U_i 'nin (1.8) denklemindeki değeri (1.7) denkleminde yerine konulursa:

$$U_a = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin \gamma$$

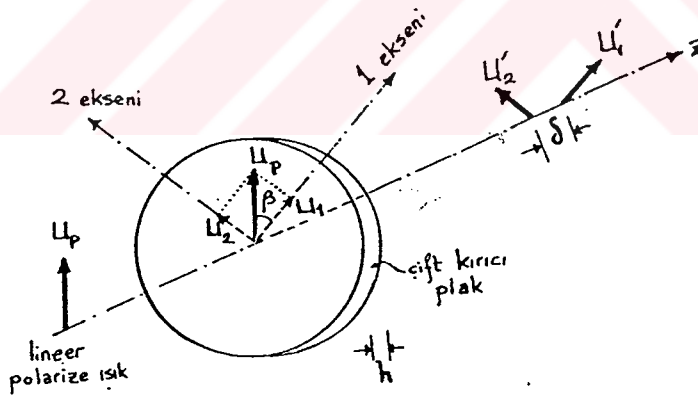
$$U_p = a \cdot \sin \omega t \cdot \cos \gamma \quad (1.9)$$

bulunur.

Böylece (1.9) denklemleri ile bulunan U_p ve U_a ışık vektörü bileşenlerinden sadece U_p bileşeni polarizörden geçer, U_a bileşeni ise absorbe olur.

1.2.6. Dalga Plakları

Bölüm 1.2.2.'de kuvars, kalsit vs gibi anizotropik malzemelerde, gelen bir ışık ışınının iki ışına ayrıldığını görmüş ve bu özelliğe çift kırılma demiştik. Böyle malzemeler, ışık vektörünü iki dik bileşene ayırmak ve herbir bileşenini farklı hızlarda iletmek özelliğine sahiptir. Bu özelliği gösteren malzemeye çift kırıcı malzeme denir. Bu malzemelerde (1) ve (2) ile gösterilmiş iki optik eksen vardır. (Şekil 1.12)



Şekil 1.12 Çift kırıcı plak

Işık (1) eksenini boyunca v_1 hızı ile ve (2) eksenini boyunca v_2 hızıyla ilerler. $v_1 > v_2$ olduğundan (1) eksenine hızlı eksen, (2) eksenine yavaş eksen denir. Bu çift kırıcı plağı bir düzlem polarizörün önüne koyalım. Polarizörden çıkan U_p lineer polarize ışığın, (1) eksenini ile β açısı yaptığını farz edelim. Bu U_p ışık vektörü çift kırıcı plağa çarptığında, (1) ve (2) eksenleri boyunca U_1 ve U_2 bileşenlerine ayrılır. Bu bileşenlerin büyüklüğü:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_p \cdot \cos \beta = a \cdot \sin \omega t \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ U_2 &= U_p \cdot \sin \beta = a \cdot \sin \omega t \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (1.10)$$

$a \cdot \cos \gamma = k$ ile gösterirsek (1.10) denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_1 &= k \cdot \sin \omega t \cdot \cos \beta \\ U_2 &= k \cdot \sin \omega t \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bu bileşenlerden U_1 bileşeni (1) eksenini boyunca v_1 hızıyla, U_2 bileşeni ise (2) eksenini boyunca v_2 hızıyla ilerler. v_1 ve v_2 birbirinden farklı olduğundan, bu bileşenler plaktan farklı zamanlarda çıkar. Diğer bir deyişle, bir bileşen diğer bileşene göre zaman bakımından geri bırakılır. v_1 hızı v_2 hızından büyük olduğundan U_1 bileşeni plaktan daha önce çıkar. Böylece U_1 ve U_2 bileşenleri arasında bir (δ) lineer geri kalma miktarı meydana gelir. (Şekil 1.12) Her iki bileşenin plağı kat etmek için gerekli zamanı sırasıyla h/v_1 ve h/v_2 olacağından, bu bileşenler arasındaki relatif geri kalma:

$$\delta = h \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \text{ olacaktır. (Burada } v \text{ ışığın havadaki yayılma hızı)}$$

Bu ifadeyi $\delta = h \left(\frac{v}{v_1} - \frac{v}{v_2} \right)$ şeklinde yazarsak ve,

$$n_1 = \frac{v}{v_1} \text{ (hızlı eksen boyunca kırılma indisi)}$$

$$n_2 = \frac{v}{v_2} \text{ (yavaş eksen boyunca kırılma indisi)}$$

olduğuna dikkat edersek:

$$\delta = h(n_1 - n_2) \quad (1.12)$$

bulunur. Lineer ve açısal faz farkı arasındaki (1.6) bağıntısını gözönüne alırsak:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h(n_1 - n_2) \quad (1.13)$$

bulunur. (1.13) denklemi, bir çift kırıcı plak tarafından meydana getirilen açısal faz geri kalmasını gösterir. Buradan görüldüğü gibi bu faz geri kalması, plağın (h) kalınlığına, ışığın (λ) dalga boyuna, ve $(n_1 - n_2)$ ile tarif edilen plağın fiziksel özelliklerine bağlı olur.

Çift kırıcı plak, $\frac{\pi}{2}$ 'lik bir açısal faz geri kalması meydana getirecek şekilde dizaynlanırsa, bu

plağa çeyrek dalga plağı denir. Bu durumda $\Delta = \frac{\pi}{2}$ olduğundan (1.13) denkleminde

$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$ bulunur, buradan lineer geri kalma miktarı:

$$\delta = \frac{\lambda}{4} \text{ olarak elde edilir.}$$

Çift kırıcı plak, π ve 2π 'lik bir faz geri kalması meydana getirecek şekilde dizaynlanırsa, bu plağa yarım ve tam dalga plağı denir.

Şimdi tekrar plaktan çıkan ışık vektörü bileşenlerini gözönüne alalım. Bu bileşenleri U_1' ve U_2' ile gösterelim. Bu bileşenler arasında Δ açısal az geri kalması meydana geleceğinden (1.11) denkleminde faydalanarak:

$$U_1' = k \cdot \cos \beta \cdot \sin(\omega t + \Delta)$$

$$U_2' = k \cdot \sin \beta \cdot \sin \omega t \quad (1.14)$$

Bu iki bileşen tarafından meydana getirilen ışık vektörünün büyüklüğü:

$$U' = \sqrt{(U_1')^2 + (U_2')^2} = k \sqrt{\cos^2 \beta \cdot \sin^2(\omega t + \Delta) + \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \omega t} \quad (1.15)$$

olarak ifade edilir. Çıkan ışık vektörünün (1) eksenine yaptığı açı:

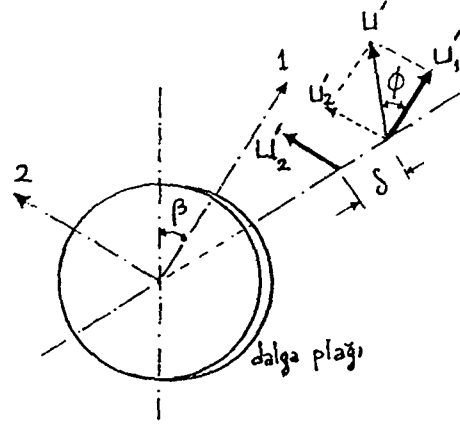
$$\tan \phi = \frac{U_2'}{U_1'} = \frac{k \cdot \sin \beta \cdot \sin \omega t}{k \cdot \cos \beta \cdot \sin(\omega t + \Delta)} = \tan \beta \cdot \frac{\sin \omega t}{\sin(\omega t + \Delta)} \quad (1.16)$$

Böylece (1.15) ve (1.16) denklemlerinden görüldüğü gibi, dalga plağından çıkan ışık vektörünün büyüklüğü ve dönme açısı, dalga plağı vasıtasıyla kontrol edilebilir. Kontrol faktörü, Δ açısal faz farkı ve β sapma açısıdır.

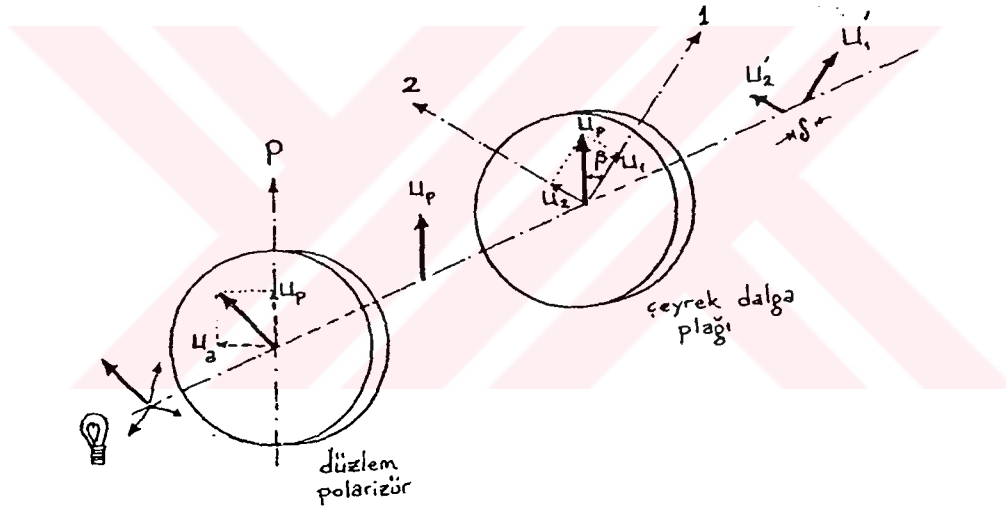
1.2.7. Bir Düzlem Polarizör İle Bir Dalga Plağının Kombinasyonu

Bir düzlem polarizör ile bir dalga plağının kombinasyonunda, çıkan ışık daima polarize ışıktır. Fakat polarizasyon tipi düzlem, dairesel veya eliptik olabilir. Bu kombinasyonda

polarize ışığın tipini tayin eden faktörler, Δ açısal faz farkı ile, β sapma açısıdır. (Şekil 1.14)



Şekil 1.13 Dalgı plağı



Şekil 1.14 Düzlem polarize ışığın oluşması

A. Düzlem Polarize Işık

β açısı sıfıra eşit olursa Δ açısal faz farkı sınırlanmazsa, bu durumda çıkan ışık vektörünün büyüklüğü ve doğrultusu (1.15) ve (1.16) denklemlerinden:

$$U' = k \cdot \sin(\omega t + \Delta)$$

$$\tan \phi = 0 \rightarrow \phi = 0$$

(1.17)

olarak bulunur. $\phi = 0$ olması nedeniyle, ışık vektörü dalgı plağından geçerken döndürülmez. Bu sebeple ışık, düzlem polarize olarak çıkar. Bu durumda dalgı plağının tek fonksiyonu,

ışığı Δ 'ya eşit bir faz farkında geri bırakmasıdır. Aynı sonuçlar $\beta = \frac{\pi}{2}$ alınarak da elde edilebilir. Bunun anlamı şudur:

Şayet polarizörün (P) optik eksenini, dalga plağının (1) veya (2) eksenlerinden biri ile çakıştırırsa, dalga plağından çıkan ışık, düzlem (lineer) polarize ışıktır.

B. Dairesel Polarize Işık

Şayet dalga plağı, $\Delta = \frac{\pi}{2}$ lik (çeyrek dalga plağı) bir faz farkı meydana getirecek şekilde

seçilirse ve $\beta = \frac{\pi}{4}$ olacak şekilde düzenlenirse, bu durumda çıkan ışık vektörünün büyüklüğü

(1.15) denkleminde:

$$U' = k \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin^2 \frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 \omega t} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \quad (1.18)$$

Böylece (1.18) denklemi, dalga plağından çıkan ışık vektörünün büyüklüğünün sabit olduğunu gösterir. (1.16) denklemini kullanırsak:

$$\tan \phi = \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin \omega t}{\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)} = 1 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \tan \omega t \text{ bulunur. Buradan:}$$

$$\phi = \omega t \quad (1.19)$$

bulunur. Şu halde ışık vektörünün dönme açısı, t zamanı ile artar. (1.18) ve (1.19) denklemleri, ışık vektörünün z eksenini boyunca ilerlerken bir dairesel helis çizdiğini gösterir.

C. Eliptik Polarize Işık

Şayet dalga plağı $\Delta = \frac{\pi}{2}$ 'lik bir faz farkı oluşturacak şekilde seçilirse ve β açısı, $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

veya bunların katlarından herhangi bir açı olarak seçilirse, (1.15) denkleminde, çıkan ışık vektörünün büyüklüğü:

$$U' = k \sqrt{\cos^2 \beta \cdot \sin^2 \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \omega t} = k \sqrt{\cos^2 \beta \cos^2 \omega t + \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \omega t} \quad (1.20)$$

olacaktır. Çıkan ışık vektörünün dönme açısı, (1.16) denkleminde:

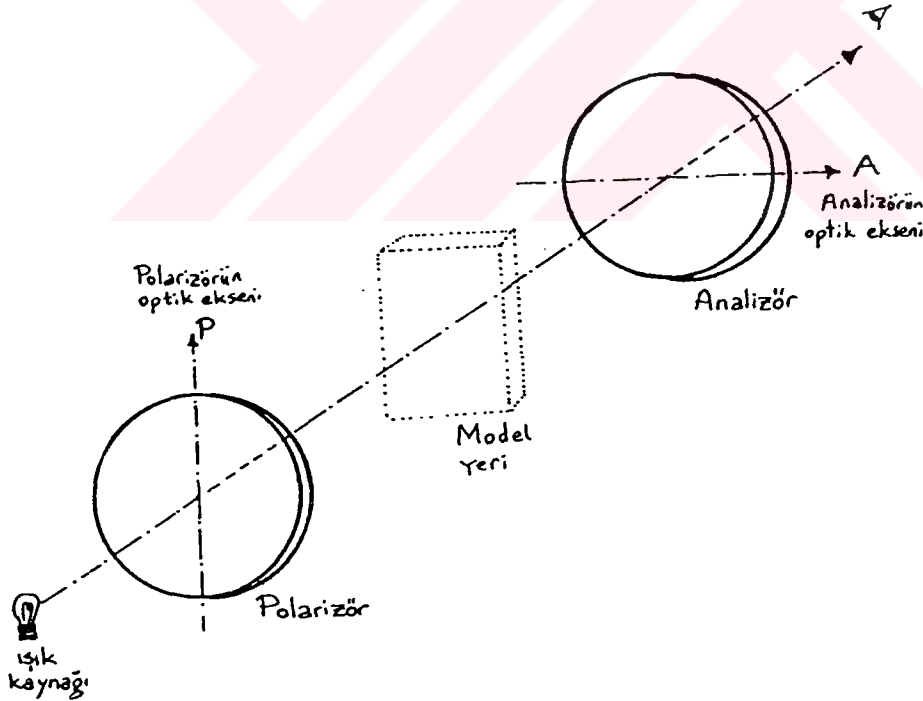
$$\tan \phi = \tan \beta \cdot \frac{\sin \omega t}{\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \tan \beta \cdot \tan \omega t \quad (1.21)$$

1.2.8. Bir Polariskopta Optik Elemanların Aranjanı

A. Düzlem (Lineer) Polariskop

Düzlem polariskop, iki düzlem polarizör ve bir ışık kaynağından meydana gelmiş bir sistemdir. Bu düzlem polarizörlerden ışık kaynağı tarafında olanına polarizör, diğerine ise analizör denir.

Düzlem polariskopta genellikle, polarizör ve analizörün optik eksenleri birbirine dik olacak şekilde oluşturulur. Böylece polarizörün meydana getirdiği lineer polarize ışık, analizörün optik eksenine bu doğrultuya dik olduğundan, analizörden geçemez. Böylece analizörün arkasından bakıldığında karanlık bir saha görülür. Şayet analizörün eksenini polarizörün eksenine paralel olarak oluşturulursa, bu durumda analizörün arkasından bakıldığında aydınlık bir saha görülür. Fotoelastik model bu iki optik elemanın arasına konur (Şekil 1.15).

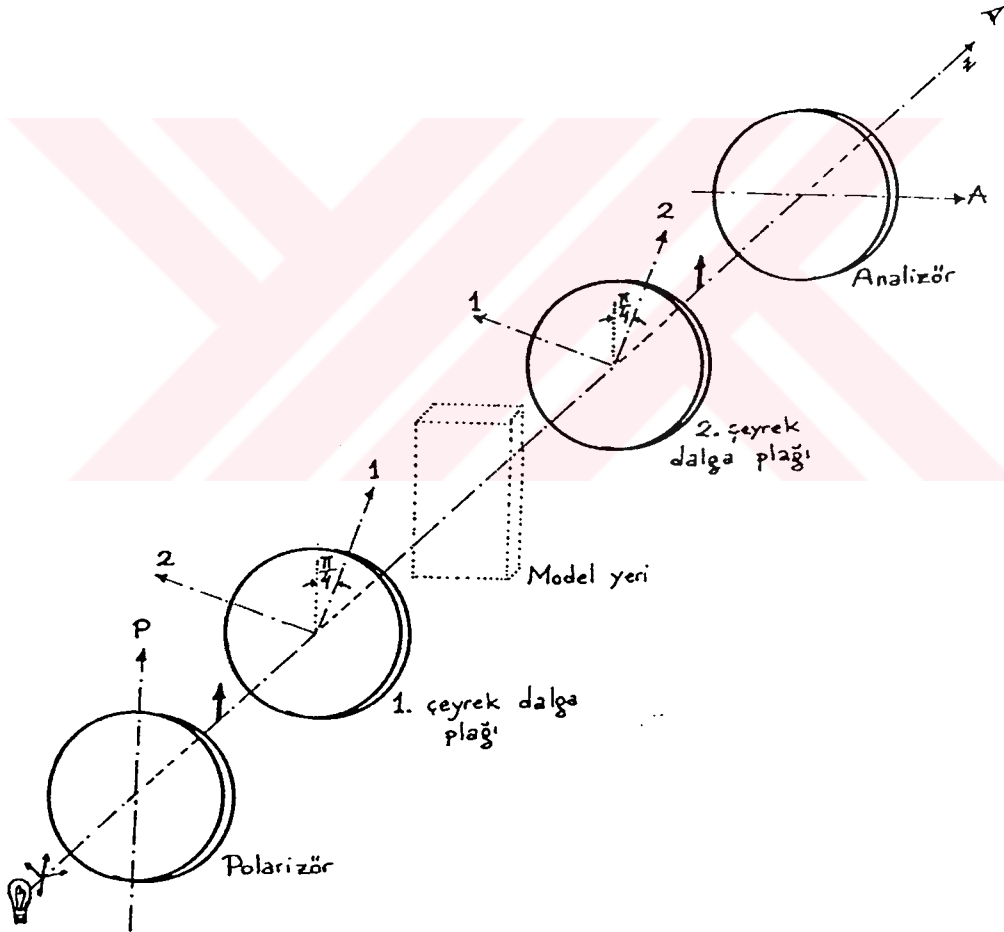


Şekil 1.15 Düzlem polariskop

B. Dairesel Polariskop

Dairesel polariskop, dört optik eleman ve bir ışık kaynağından meydana gelir. Işık kaynağı tarafındaki birinci eleman polarizördür. Polarizör, ışık kaynağından gelen basit ışığı, lineer

polarize ışık şekline çevirir. Polarizörden sonraki ikinci eleman, bir çeyrek dalga plağıdır. Bu çeyrek dalga plağının eksenleri polarizörün eksenleri ile $\beta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapacak şekilde yerleştirilmiştir. Yukarıda incelediğimiz gibi bu durumda çeyrek dalga plağı, lineer polarize ışığı dairesel polarize ışığa çevirecektir. Bu çeyrek dalga plağı önüne ikinci bir çeyrek dalga plağı yerleştirilir. Yalnız bu ikinci çeyrek dalga plağının hızlı eksenini, birinci çeyrek dalga plağının yavaş eksenine paralel olacak şekilde düzenlenir. Bu ikinci çeyrek dalga plağının fonksiyonu dairesel polarize ışığı, tekrar lineer polarize ışığa çevirmektir. Son optik eleman analizördür. Bunun optik eksenini polarizörün optik eksenine diktir. Optik elemanların bu aranjmanına dairesel polariskop denir, ve bu oluşumda karanlık saha elde edilir (Şekil 1.16).



Şekil 1.16 Dairesel polariskop

Bu optik elemanların 4 tip aranjmanı vardır. Bu aranjmanlar tabloda gösterilmiştir. Bu aranjmanlardan en çok (A) ve (B) aranjmanları kullanılır. Şekil 1.16'daki durum (A) aranjmanına bir örnek olarak verilmiştir.

Çizelge 1.1 Optik elemanların aranjmanı

Aranjman	Çeyrek Dalga Plağı	Polarizör ve Analizör	Saha
A	Çapraz	Çapraz	Karanlık
B	Çapraz	Paralel	Aydınlık
C	Paralel	Çapraz	Aydınlık
D	Paralel	Paralel	Karanlık



2. FOTOELASTİSİTE TEORİSİ

2.1. Fotoelastisiteye Giriş

Fotoelastisite teorisi, 1816 yılında David Brewster'in, izotrop ve saydam bir cisim gerilmeye maruz bırakıldığı zaman geçici olarak çift kırılma özelliği gösterdiğini keşfetmesiyle başlamıştır. 1841 yılında Franz Neumann, çift kırılmada meydana gelen iki ışık dalgasının hızlarının, modeldeki asal şekil değiştirmeleriyle orantılı olduğunu ifade etti. 1853 yılında Maxwell, meseleyi gerilme açısından ele aldı. Yüklenmiş bir modelde asal gerilmelerin, ışık dalgasının hızlarıyla orantılı olduğunu ortaya koydu.

Şeffaf ve izotrop malzemeden yapılmış fotoelastik bir model ele alalım. Başlangıçta modelin herhangi bir yüke maruz olmadığını düşünelim. Malzeme izotropik olduğundan, model üzerinde her noktada kırılma indisi aynıdır. Modelin yüksüz durumdaki bu kırılma indisine n_0 diyelim. Şimdi modeli bir yüke maruz bırakalım. Böylece modelde bir düzlem gerilme durumu meydana gelir. Bu gerilme durumu model üzerinde her noktada başka başkadır. Bu sebeple yüklenmiş bir model gerilme bakımından anizotrop bir özellik gösterir.

Bu yüklenmiş modeli bir polariskopta incelersek, optik özellikleri bakımından da modelin yapısının değiştiğini görürüz. Bu yüklenmiş model, Bölüm 1.2.6.'da incelenmiş olan çift kırıcı malzemenin özelliklerini gösterir. Böylece modelin (1) hızlı eksen ve (2) yavaş eksen boyunca kırılma indisleri sırasıyla n_1 ve n_2 olur.

Brewster, yüklenmiş bir modelin çift kırıcı bir malzeme özelliği gösterdiğini ve gerilme doğrultularının, bu çift kırıcı hale gelmiş modelin (1) hızlı eksen ve (2) yavaş eksenle çakıştığını keşfetmiştir.

Maxwell, kırılma indislerindeki bu değişmelerin, modelde meydana gelmiş gerilmelerle lineer orantılı olduğunu ortaya atmış ve aşağıdaki bağıntıları çıkarmıştır:

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 \\ n_2 - n_0 &= c_1 \sigma_2 + c_2 \sigma_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

n_0 = yüklenmemiş modeldeki kırılma indisi

n_1 = (1) hızlı eksen boyunca kırılma indisi

n_2 = (2) yavaş eksen boyunca kırılma indisi

σ_1 ve σ_2 = sırasıyla (1) ve (2) eksenleri boyunca meydana gelmiş asal gerilmeler.

c_1 ve c_2 = gerilme-optik sabitleridir.

2.1. denklemlerini taraf tarafa çıkartırsak:

$$n_1 - n_2 = (c_1 - c_2) (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.2)$$

bulunur. Yüklenmiş model geçici olarak dalga plağı özelliği gösterdiğinden dolayı,

Bölüm 1.2.6'daki 1.13 denkleminde:

$$n_1 - n_2 = \frac{\lambda \Delta}{2\pi h} \quad (2.3)$$

ifadesini buluruz. (2.2) ve (2.3) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan:

$$(c_1 - c_2)(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\lambda \Delta}{2\pi h} \text{ bulunur. } (c_1 - c_2) = c \text{ ile gösterirsek:}$$

$$C(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\lambda \Delta}{2\pi h} \quad (2.4)$$

bulunur.

C'ye gerilme-optik sabiti denir. C'nin birimi Brewster'dir.

1 Brewster = 10^{-13} cm²/din dir.

Böylece, (2.4) denkleminde görüldüğü gibi, modelde herhangi bir noktadaki asal gerilmeler arasındaki fark, açısal faz geri kalması Δ ve kullanılan ışığın dalga boyu λ ile doğru orantılı, modelin h kalınlığı ile ters orantılıdır. (2.4) denkleminde:

$$\frac{\Delta}{2\pi} = N \quad (2.5)$$

$$\frac{\lambda}{C} = f \quad (2.6)$$

ile gösterirsek:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{h} \cdot N \quad (2.7)$$

ifadesini elde ederiz.

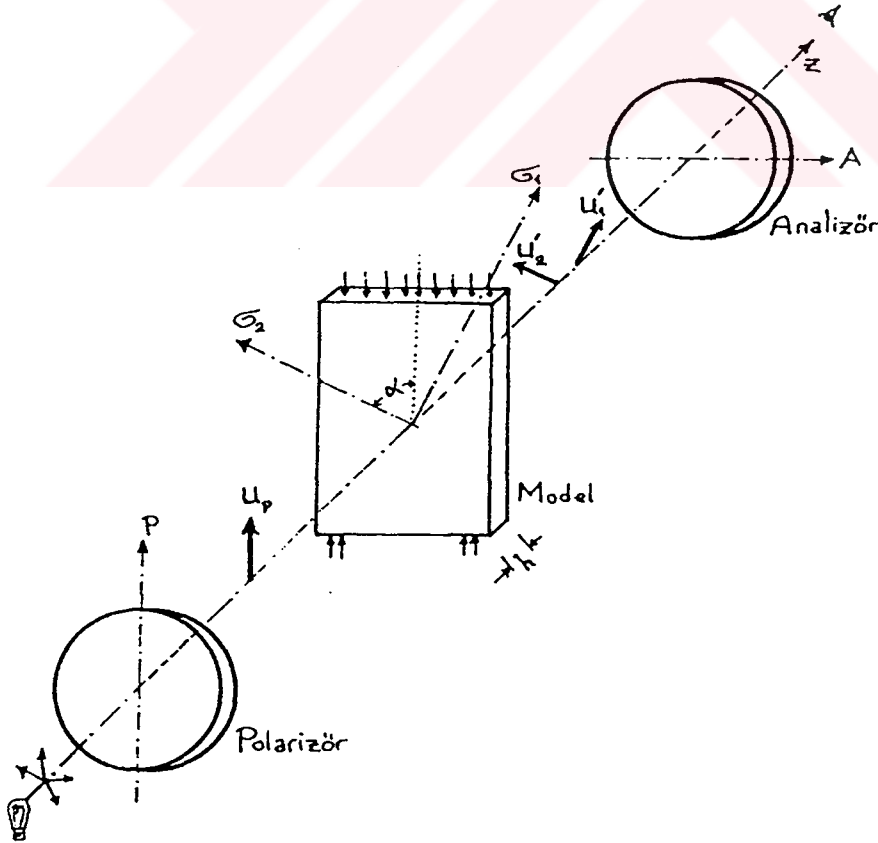
Bu formüldeki N değerine relatif geri kalma, f değerine ise malzemenin fotoelastisite katsayısı denir. f fotoelastisite katsayısının boyutu : kg/cm^2 'dir.

Kullanılan modelin C gerilme-optik sabiti bellidir. Bu sabit malzemeyi imal eden firma tarafından verilebilir, veyahutta deneyle bulunabilir. Kullanılan ışığın dalga boyu (λ) değeri de bilinen bir değerdir. Bu iki değer belli olduğuna göre malzemenin fotoelastisite katsayısı (2.6) denklemiyle bulunabilir. Böylelikle, şayet her noktadaki faz geri kalmasını Δ 'yı ölçebilirsek, model üzerinde her noktada asal gerilmelerin farkını bulmamız mümkün olur.

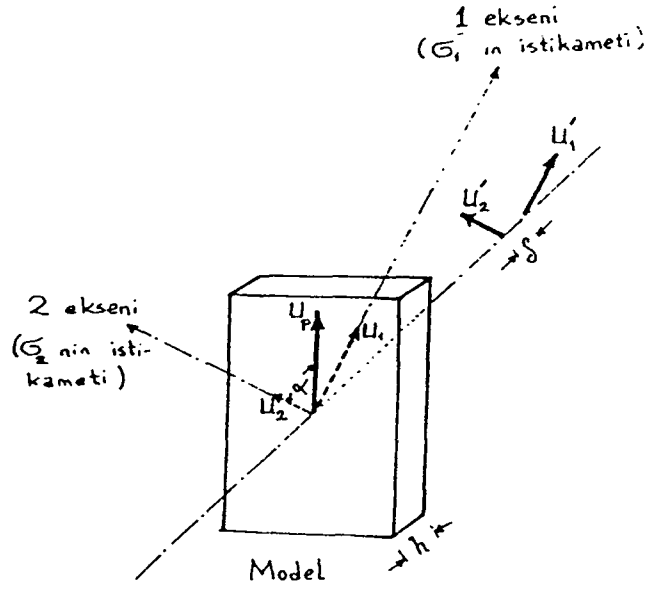
İşte fotoelastisitenin en önemli cihazı olan polariskop, bu açısal faz geri kalmalarını ölçen bir alettir.

2.2. Düzlem Polariskopta Yüklenmiş Bir Modelin İncelenmesi

Yüklenmiş modelin polarizörle analizör arasında konulduğunu düşünelim. Işık kaynağından çıkan basit ışık, polarizörden geçtikten sonra düzlem (lineer) polarize ışık (U_p ışık vektörü) olarak ilerleyecektir. Polarizörün (P) optik eksenini ile z yayılma doğrultusundan geçen düzlem içinde titreşim yapan bu polarize ışığın denkleminin:



Şekil 2.1 Yüklenmiş modelin incelenmesi



Şekil 2.2 Yüklenmiş model

$U_p = k \sin \omega t$ şeklinde olduğunu, Bölüm 1.2.5'de görmüştük. Bu polarize ışık, modele (Şekil 2.2) de görüldüğü gibi çarptığında, modelin bir dalga plağı özelliği göstermesi nedeniyle, (1) ve (2) optik eksenleri boyunca U_1 ve U_2 bileşenlerine ayrılır.

Bu bileşenlerin büyüklüğü:

$$U_1 = k \sin \omega t \sin \alpha \quad (2.8)$$

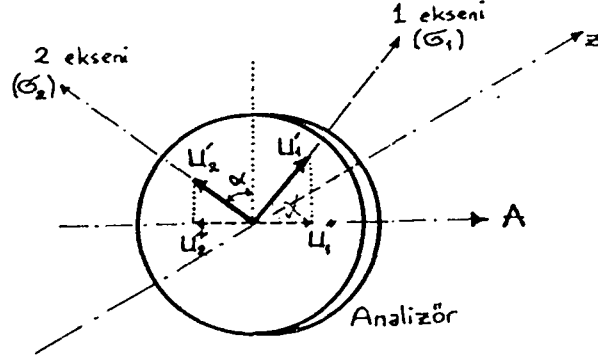
$$U_2 = k \sin \omega t \cos \alpha$$

Dalga plağı özelliği sebebiyle, bu iki bileşen modelde farklı hızlarda (1 eksenini boyunca v_1 ve 2 eksenini boyunca v_2 hızıyla) ilerleyecektir. v_1 hızı v_2 hızından büyük olduğundan, U_2 ışık vektörü bileşeni modelden çıkarken, U_1 ışık bileşenine göre geri kalacaktır. Bu iki bileşen arasındaki Δ relatif faz farkının, iki bileşen arasında eşit olarak bölündüğünü varsayarsak, modelden çıkan ışık vektörü bileşenlerinin büyüklükleri:

$$U_1' = k \sin \alpha \sin \left(\omega t + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (2.9)$$

$$U_2' = k \cos \alpha \sin \left(\omega t - \frac{\Delta}{2} \right)$$

olacaktır. Modelden çıkan U_1' ve U_2' ışık vektörü bileşenleri, z yayılma eksenini boyunca ilerleyecektir. Bu bileşenler Şekil 2.3'de görüldüğü gibi Analizöre çarptığında, U_1'' ve U_2'' yatay bileşenlerine ve buna dik düşey bileşenlere ayrılacaktır.



Şekil 2.3 Işığın analizörde ayrışması

Işık vektörünün düşey bileşenleri analizör tarafından absorbe edilecek, sadece yatay bileşenleri analizörden geçecektir. Yüklenmiş model konmadan önce, polarizör ve analizörün optik eksenleri birbirine dik olduğundan, analizörün arkasından bakıldığında karanlık bir saha görünecekti. Halbuki yüklenmiş model konduktan sonra, ışık vektörünün yatay bileşenleri sebebiyle aydınlık noktalar görülebilecektir (Şekil 2.3'den):

$$U_a = U_1'' - U_2'' = U_1' \cos \alpha - U_2' \sin \alpha \text{ olacaktır.}$$

(2.9) denklemlerini yerine koyarsak:

$$U_a = k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left[\sin \left(\omega t + \frac{\Delta}{2} \right) - \sin \left(\omega t - \frac{\Delta}{2} \right) \right]$$

$$U_a = k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left[\sin \omega t \cdot \cos \frac{\Delta}{2} + \cos \omega t \cdot \sin \frac{\Delta}{2} - \sin \omega t \cdot \cos \frac{\Delta}{2} + \cos \omega t \cdot \sin \frac{\Delta}{2} \right]$$

$$U_a = k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left[2 \cos \omega t \cdot \sin \frac{\Delta}{2} \right] = k \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos \omega t \cdot \sin \frac{\Delta}{2} \quad (2.10)$$

Göz tarafından görülen ışığın şiddeti, analizörden çıkan ışık vektörünün karesi ile orantılıdır. Bu nedenle, analizörden çıkan ışığın I şiddeti:

$$I = k^2 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2} \cdot \cos^2 \omega t \quad (2.11)$$

olacaktır.

Şimdi, (2.11) denklemini tahkik edelim ve bu büyüklüğün hangi hallerde sıfır ($I=0$) olduğunu, yani sönüm olduğunu görelim.

1. Durum: Frekansın Tesiri

$\cos^2 \omega t = 0$ olması için: $\omega t = (2m+1) \frac{\pi}{2}$ olmalıdır. ($m = 0, 1, 2, \dots$ gibi tam sayılardır). Bu şart sağlanırsa $I = 0$ olur. Fakat ışığın açısal frekansı (ω), 10^{15} rad/sn gibi yüksek bir değer olduğu için, gözle veya herhangi bir cihazla bu sönümü kaydetmek olası değildir. Bu sebeple fotoelastik çalışmalarda bu tesir göz ardı edilir. O halde (2.11) denklemi: $I = K \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}$ şeklinde yazılabilir. (2.12)

2. Durum: Asal Gerilme Doğrultularının Tesiri

(2.12) ifadesindeki $\sin^2 2\alpha = 0$ yani $2\alpha = m\pi$ olursa: $I = 0$ olur ve sönüm elde edilir. ($m = 1, 2, 3, \dots$ gibi tam sayılardır) $2\alpha = m\pi$ şartını, $\alpha = m \frac{\pi}{2}$ şeklinde yazarsak:

$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{2}$ 'nin herhangi bir tam katına eşit olduğu zaman sönüm elde edilir. Bunun anlamı şudur: Model üzerinde herhangi bir noktada σ_1 ve σ_2 asal gerilmelerinin doğrultularından biri, polarizörün veya analizörün optik eksenine çakıştığı zaman bu noktada sönüm elde edilir. Dolayısıyla bu nokta karanlık görünür. Böylece analizör belirli açılar kadar döndürülerek, modelde hangi noktalarda sönüm olduğu bulunabilir. Bu sönüm noktalarında, asal gerilme doğrultuları, analizörün veya polarizörün optik eksenine çakışır. Analizörün α dönme açısı belli olduğuna göre, sönüm elde edilen noktalardaki asal gerilme doğrultuları da belli olmuş olur. Analizör, $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 90^\circ$ gibi onbeşer derecelik açılar kadar döndürülür. Analizörün her döndürülmesinde, modelde nerelerde sönüm olduğu tespit edilir. Asal gerilme doğrultuları aynı olan noktalarda, bu doğrultularla analizörün optik eksenine çakışınca, aynı anda yalnız bir noktada değil, sürekli çizgiler veya bantlar halinde sönüm olacaktır. Bu tipteki sönüm çizgilerine izoklinik denilecektir. İzoklinikler asal gerilme doğrultuları aynı olan noktaların geometrik yerleridir. Her izoklinik üzerinde asal gerilme doğrultusu belli bir değer eşittir.

3. Durum: Asal Gerilme Farklarının Etkisi

(2.12) denkleminde $\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0$ olduğu zaman $I = 0$ olur.

$\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0$ olması için, $\frac{\Delta}{2} = m\pi$ olması gerekir. ($m = 0, 1, 3, \dots$ gibi)

Buradan:

$$\frac{\Delta}{2\pi} = m \text{ bulunur.} \quad (2.13)$$

(2.5) ve (2.7) denklemlerinden:

$$\frac{\Delta}{2\pi} = N = \frac{h}{f}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.14)$$

olarak bulunur.

$$N = \frac{h}{f}(\sigma_1 - \sigma_2) = m \text{ dir.} \quad (2.15)$$

Şu halde:

$$N = \frac{h}{f}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0,1,2,3,\dots \quad (2.16)$$

olması halinde sönüm olacak demektir.

$N = 0, 1, 2, 3, \dots$ şartlarını sağlayan yerlerde siyah çizgiler veya bantlar meydana gelecektir. Bu tipteki sönüm çizgilerine izokramat denir. Her izokramat üzerinde $(\sigma_1 - \sigma_2)$ asal gerilmeler farklı sabit bir değere eşit olacaktır.

Böylece modelin h kalınlığı, f fotoelastisite katsayısı belli olduğuna ve izokromatlar üzerinde $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ değerlerine ise izokromat mertebesi denir.

Monokromatik (tek renk) ışıkla çalıştığımız zaman, izoklinikler ve izokromatlar modelin tümü üzerinde siyah bantlar halinde görüleceğinden bunları birbirine karıştırmak mümkündür. Halbuki beyaz ışık kaynağı ile çalıştığımızda izokromatlar renkli olarak görülür, buna mukabil izoklinikler siyah bantlar halinde gözlenir.

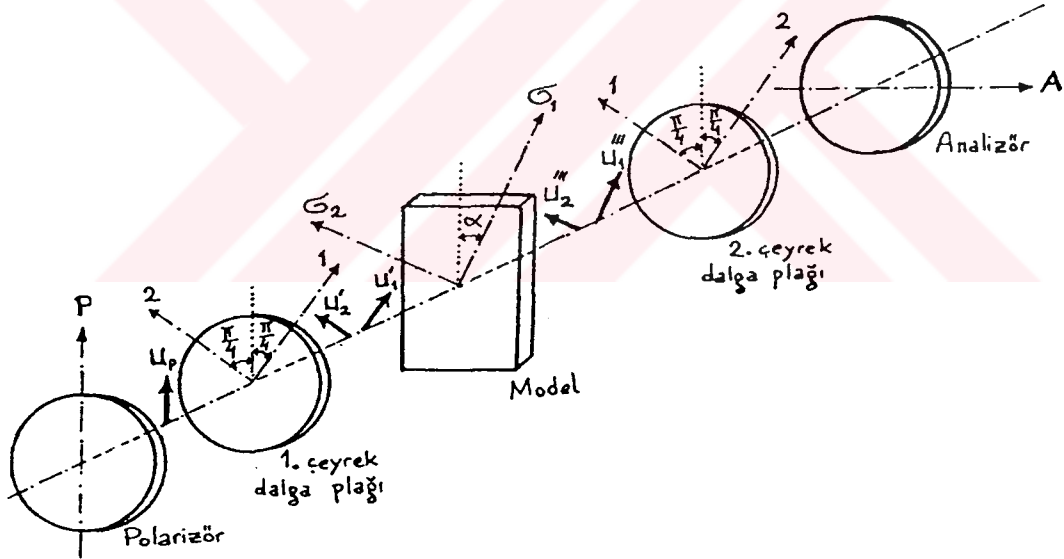
2.3. Dairesel Bir Polariskopta Yüklü Modelin İncelenmesi (Karanlık Saha Aranjmanı)

Bölüm 1.2.8.B'de incelediğimiz 1 polarizör, 1 analizör ve 2 çeyrek dalga plağından oluşan dairese polariskop içine, yüklü modelin konulduğunu düşünelim. Bu durumda optik olay, lineer polariskopta meydana gelen optik olaydan farklı olacaktır. Bu dairese polariskopta modeli incelersek, model üzerinde sadece izokromatları görürüz. Bu şekilde izokromatlarla izokliniklerin birbirine karışması önlenmiş olur.

Bölüm 1.2.6'daki (1.14) denklemlerini gözönüne alırsak, birinci dalga plağından çıkan ışık vektörü bileşenleri:

$$U_1' = k \cdot \cos \beta \cdot \sin(\omega t + \Delta)$$

$$U_2' = k \cdot \sin \beta \cdot \sin \omega t \quad \text{şeklindedir.}$$

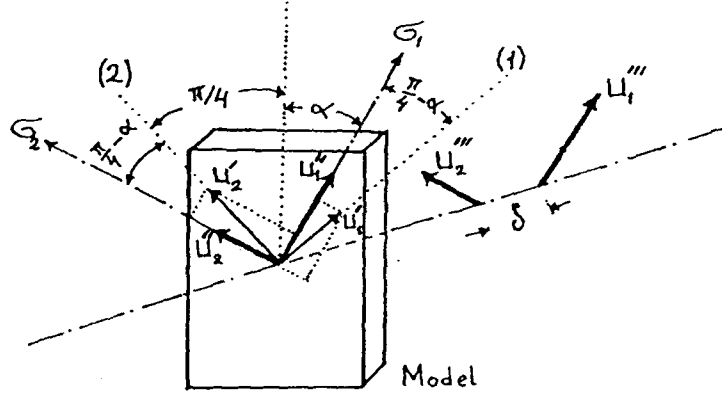


Şekil 2.4 Karanlık saha aranjmanı

Diğer taraftan dairese polariskopta çeyrek dalga plakları:

$$\beta = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \Delta = \frac{\pi}{2} \text{ olacak şekilde düzenlendiğinden:}$$

$$\begin{aligned}
 U_1' &= k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot k \cdot \cos \omega t \\
 U_2' &= k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \omega t
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$



Şekil 2.5 Modelde ayrışma

olacaktır. Birinci çeyrek dalga plağından çıkan bu ışık vektörü bileşenleri modele çarptıkları zaman U_1'' ve U_2'' gibi iki yeni bileşene ayrılır. (Şekil 2.5) Bu bileşenler (σ_1) ve (σ_2) asal gerilmeler doğrultusunda olan bileşenlerdir.

$$U_1'' = U_1' \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + U_2' \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)
 \tag{2.18}$$

$$U_2'' = U_2' \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + U_1' \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

olarak bulunur. (2.17) denklemlerini (2.18) de yerine koyarsak:

$$U_1'' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos \omega t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right]
 \tag{2.19}$$

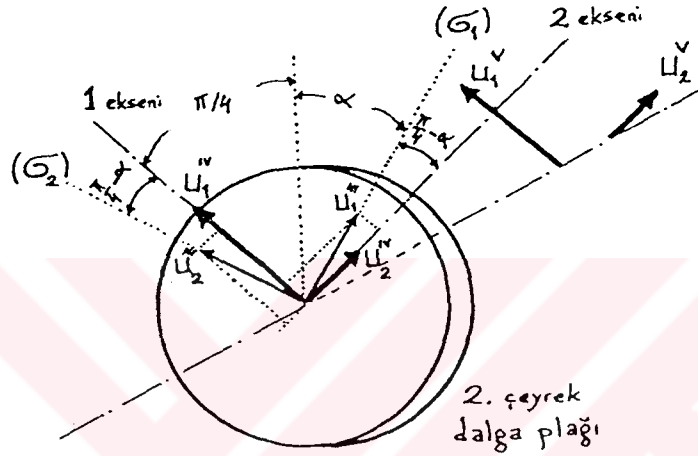
$$U_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\sin \omega t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos \omega t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right]$$

Yüklenmiş bir model dalga plağı özelliği gösterdiğinden dolayı, U_1'' ve U_2'' ışık vektörü bileşenleri, model içinde farklı hızlarda ilerler ve aralarında bir Δ faz geri kalması meydana

gelerek modelden dışarı çıkarlar. Şayet bu faz geri kalması, U_1'' ne $\frac{\Delta}{2}$ eklenerek, U_2'' ne $\frac{\Delta}{2}$ çıkartılarak hesap yapılırsa:

$$U_1'' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right]$$

$$U_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (2.20)$$



Şekil 2.6 Çeyrek dalga plağında ayrışma

Modelden çıkan ışık vektörü bileşenleri U_1'' ve U_2'' , ikinci çeyrek dalga plağına çarptıkları zaman, bu dalga plağının (1) ve (2) eksenleri boyunca U_1''' ve U_2''' bileşenlerine ayrılır. Şekil 2.6'dan görüldüğü gibi, bu bileşenler:

$$U_1''' = U_1'' \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + U_2'' \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \quad (2.21)$$

$$U_2''' = U_1'' \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + U_2'' \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

(2.19) denklemlerini (2.20) de yerine koyarsak:

$$U_1''' = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[\sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \\
U_2^v &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \right. \\
& \left. \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (2.22)
\end{aligned}$$

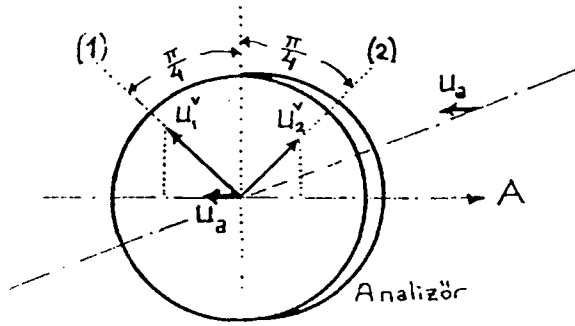
olarak bulunur. Çeyrek dalga plağına çarptığı zaman U_1^v ve U_2^v bileşenlerine ayrılan ışık vektörü, çeyrek dalga plağı içinde (1) ve (2) eksenleri boyunca farklı hızlarda ilerler. Dolayısıyla bir bileşen diğerine göre faz geri kalmasına maruz kalır. Çeyrek dalga plakları $\Delta = \frac{\pi}{2}$ faz geri kalması meydana getirecek şekilde dizaynlandığı için, çeyrek dalga plağından

çıkan U_1^v ve U_2^v ışık vektörü bileşenleri.

$$\begin{aligned}
U_1^v &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \right. \\
& \left. \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \\
U_1^v &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[-\sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \right. \\
& \left. \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \\
U_2^v &= \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[\cos\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \right. \\
& \left. \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Böylece çeyrek dalga plağından çıkan U_1^v ve U_2^v ışık bileşenleri analizöre doğru ilerleyecektir. Bu bileşenler analizöre çarptıklarında, analizörün (A) optik eksenini ve buna dik eksen doğrultusunda bileşenlere ayrılacaktır. Analizörün (A) optik eksenine dik doğrultudaki

düsey bileşen absorbe olacaktır. Analizörün optik eksenini doğrultusundaki yatay bileşen ise, U_a ışık vektörü verecek şekilde, analizör tarafından iletilecektir.



Şekil 2.7 Analizörde ayrışma

$$U_a = U_1^v \cos \frac{\pi}{4} - U_2^v \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (U_1^v - U_2^v) \quad (2.24)$$

(2.23) denklemleri (2.24) de yerine konursa:

$$U_a = \frac{1}{2} . k . \sin \frac{\Delta}{A} [\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha - \omega t)] \quad (2.25)$$

bulunur. Göz tarafından görülen ışığın I şiddeti, analizörden çıkan U_a ışık vektörünün karesi ile orantılıdır. Şu halde:

$$I = K . \sin^2 \frac{\Delta}{2} [\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha - \omega t)]^2 \quad (2.26)$$

bulunur. $(\frac{1}{2} s^2 = K$ ile ifade edilmiştir).

Şimdi (2.26) denklemini inceleyelim. Sönüm olması yani $I = 0$ için, $\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0$ veya

$[\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha - \omega t)]^2 = 0$ olması gerekir. Daha önce de görüldüğü gibi, ışığın açılal frekansı çok yüksek olduğundan, $[\cos(\alpha + \omega t) - \sin(\alpha - \omega t)]^2 = 0$ ifadesinin meydana getirdiği sönümün herhangi bir fotoğraf cihazıyla kaydedilmesi mümkün değildir. Bu sebeple bu terim ihmal edilir ve (2.26) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$I = K . \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.27)$$

$I = 0$ olması için:

$$\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0 \text{ veya } \frac{\Delta}{2} = m\pi \text{ olmalıdır. (m= 0, 1, 2, 3....gibi tamsayı)}$$

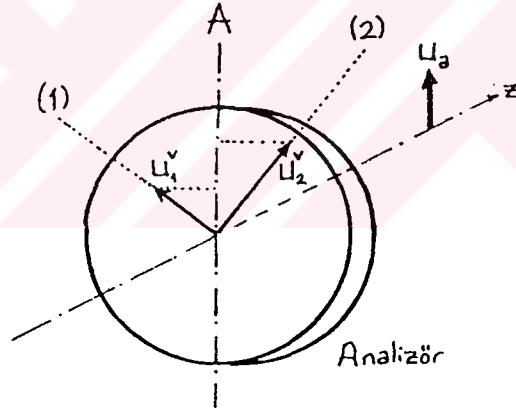
Buradan:

$$\frac{\Delta}{2\pi} = m \quad \text{ve } N = m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ bulunur.}$$

(2.27) denkleminde, (2.12) denklemindeki $(\sin^2 2\alpha)$ terimi olmadığı için, böyle bir dairesel polariskop aranjmanı ile sadece izokromatları görürüz.

2.4. Bir Dairesel Polariskopta Aydınlık Saha Aranjmanı İle Yüklenmiş Modelin İncelenmesi

Karanlık saha aranjmanında, polarizörün eksenini analizörün eksenine diktir. Aydınlık saha aranjmanında ise, analizörün ve polarizörün optik eksenleri birbirine paraleldir. Dairesel polariskop, karanlık saha aranjmanından, aydınlık saha aranjmanına, analizörün 90° döndürülmesiyle çevrilebilir.



Şekil 2.8 Analizör

Bu durumda analizörden geçecek olan ışık vektörü:

$$U_a = U_1^v \cos \frac{\pi}{4} + U_2^v \cos \frac{\pi}{4} \quad (2.28)$$

olacaktır. (2.23) denklemlerini (2.28) denkleminde yerine koyup gerekli kısaltmaları yaparsak:

$$U_a = 2k \cdot \cos \omega t \cdot \cos \frac{\Delta}{2} \quad (2.29)$$

bulunur. Işığın I şiddeti U_a 'nın karesi ile orantılı olduğundan:

$$I = K \cdot \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.30)$$

bulunur. (Burada $(2k)^2 = K$ 'dır).

Aynı şekilde $I = 0$ şartını ararken açısal frekansı içeren terimi ihmal edersek:

$$I = K \cdot \cos^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.31)$$

buluruz. $I = 0$ olması için:

$$\cos^2 \frac{\Delta}{2} = 0 \text{ veya } \frac{\Delta}{2} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \text{ olmalıdır. (m = 0, 1, 2, \dots \text{ gibi tamsayı)}$$

$$\frac{\Delta}{2\pi} = m + \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\frac{\Delta}{2\pi} = N \text{ değerine izokromat mertebesi demiştik. O halde sönüm için:}$$

$$N = m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \text{ olmalıdır.}$$

Karanlık saha aranjmanında $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ olması halinde sönüm elde ediliyordu. Bu durumda izokromat mertebeleri : $0, 1, 2, 3, \dots$ oluyordu. Halbuki aydınlık saha aranjmanında

$$N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \text{ olacaktır.}$$

2.5. Bir Fotoelastik Analizde Beyaz Işık Kaynağı Kullanılması

Fotoelastisitenin esas denklemi olan (2.7) denklemini tekrar ele alalım:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{h} \cdot N$$

Buradaki f , fotoelastisite sabiti, $f = \frac{\lambda}{c}$ olarak tarif edilmiştir.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\lambda}{c \cdot h} \cdot N \text{ haline getirirsek:}$$

$$\frac{c.h}{\lambda} \sigma_1 - \sigma_2 = N \quad (2.32)$$

bulunur.

Şayet, fotoelastik analizde monokromatik (tek renk) ışık kullanılıyorsa λ değeri sabit bir sayı olacaktır. Monokromatik ışık elde etmek için en iyi yol, bir sodyum lambası veya $\lambda = 5461 \text{ A}^0$ dalga boyunda bir yeşil ışık veren Merkuri-Vapor lambası kullanmaktır.

Böylece, fotoelastik analizlerde monokromatik ışık kullanılması halinde $\frac{c.h}{\lambda}$, sabit bir değere eşit olacaktır. Şayet monokromatik ışık kaynağı ile bir modeli dairesel polariskopta incelersek, sönüm şartına göre:

$N = \frac{\Delta}{2\pi} = m = 0, 1, 2, 3, \dots$ olması halinde sönüm olacaktır. Bu şartı sağlayan yerlerde siyah çizgiler (izokromatlar) meydana gelecektir. Beyaz ışık kullanılırsa siyah izokromatlar yerine renkli izokromatlar görülecektir. $\frac{c.h}{\lambda}$ değeri de sabit bir değere eşit olmayacaktır. Fakat iki boyutlu bir gerilme haline maruz bir modelde $(\sigma_1 - \sigma_2)$ asal gerilmelerin farkı, sıfırdan oldukça büyük değerlere kadar değişebilir. Böylece asal gerilmelerin değişkenliği sebebiyle, (2.32) denkleminde göre, bütün dalga boylarındaki ışığın sönümü sağlanabilir.

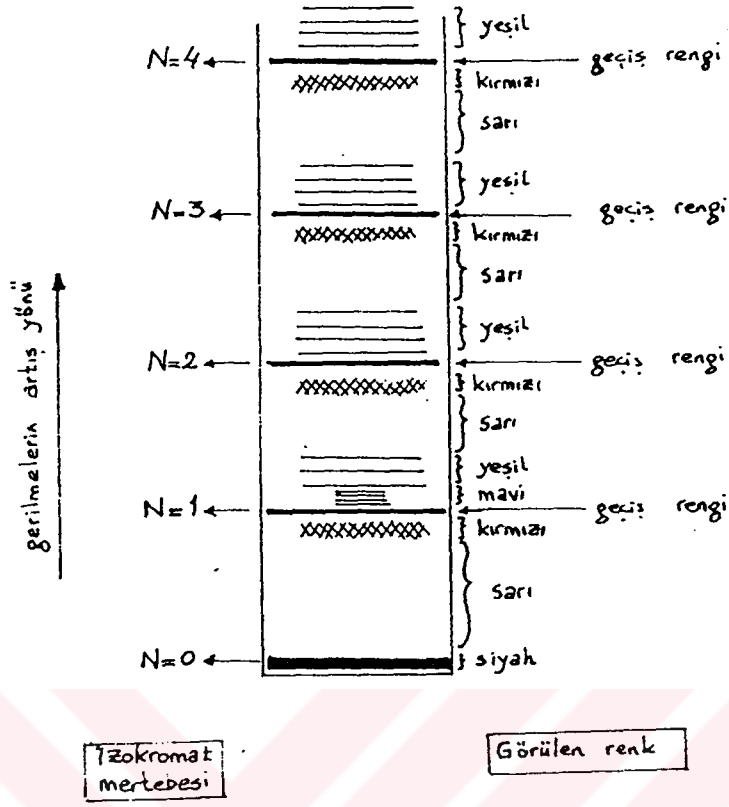
Beyaz ışığı meydana getiren renkler, $\lambda = 3900 \text{ A}^0$ olan mor renkten, $\lambda = 7700 \text{ A}^0$ olan kırmızıya kadar değişik dalga boylarında olduğundan dolayı bütün renkler aynı anda sönmez. Renkler bir sıra dahilinde sönerler. Modeldeki gerilmenin artırılmasıyla tayftaki renkler sıra ile sönerler ve geri kalan renklerin karışımından meydana gelen karışık renk dizisi gözlenmiş olur. Bu dizi sırasıyla: Sarı, koyu kırmızı, koyu mavi ve yeşildir. Bu renk dizisine 1. Mertebe renkleri denir. 1.mertebe renkleri oluşurken, kırmızıdan maviye geçiş rengi gayet belirli olur. Bu geçiş rengi, tayftaki sarı rengin ($\lambda = 5893 \text{ A}^0$) sönmesine denk düşer. Bu renk, kırmızı ve mavi arasına sıkışmış ince bir çizgiden oluşur. Geçiş rengi belirli bir dalga boyuna ($\lambda = 5893 \text{ A}^0$) denk düştüğünden, gözlem bakımından çok önemlidir. Böylece beyaz ışıkla çalışmalarda izokromatların mertebelerini tayin ederken bu geçiş renginden faydalanılır.

Modeldeki gerilmeyi artırmaya devam edersek, tayftaki renklerin ikinci defa aynı sırada kaybolduğu görülür. Bir farkla ki, bu defa geri kalan renklerde bir donukluk olur. Mesela 1.mertebe renklerini elde ederken, $\lambda = 3900 \text{ A}^0$ değerine eşit olacak şekilde modeli gerilmeye maruz bıraktığımızda, tayftaki mor renk sönecektir. Gerilmeyi artırdığımız zaman, sırasıyla

taftaki diğer renkler sönecek ve geri kalan renklerin karışımı sarı, koyu kırmızı, koyu mavi ve yeşil renkleri verecektir. Modeli $\lambda = 2 \times 3900 = 7800 \text{ A}^0$ değerinde dalga boyu verecek şekilde bir gerilmeye maruz bırakırsak, bu durumda mor renk ikinci defa sönecektir. Mor rengin bu ikinci defa sönmesi sırasında, koyu kırmızının dalga boyu 7800 A^0 değerine yakın olduğundan, aynı anda kırmızı rengin birinci sönümü elde edilecektir. Bu suretle, 1.mertebe renklerinden sonraki durumda, bazı renklerin 2.defa sönmesine mukabil, aynı anda başka renklerin sönümü de gerçekleşeceğinden, geri kalan renklerde donukluk meydana gelecektir.

Böylece, geri kalan renklerin meydana getirdiği renk dizisi: Sarı, kırmızı, yeşil olacaktır. Bu renklere 2.mertebe renkleri denir.

Modeli yüklemeye devam edersek geri kalan renklerdeki donukluk daha da artacak ve 5.veya 6.mertebelerden sonra göz, renk seçemeyerek beyaz görecektir. Özetlersek: beyaz ışıkla çalışmalarda, renkli izokromatlar gözlemlenir. Sadece sıfır mertebesindeki izokromat siyah görünür. Bu renkli izokromatlardan gerilmelerin dağılımı belli olur. Modele tatbik edilen kuvvetlerin artırılmasıyla sarı, kırmızı, mavi, yeşil renk görülür. Kırmızı ile mavi arasındaki geçiş rengi $N = 1$ izokromatına denk düşer. Kuvveti artırmaya devam edersek, tekrar sarı, kırmızı, yeşil renk görülür. Kırmızı ile yeşil arasındaki geçiş rengi $N = 2$ izokromatına denk düşer. Yüklemeyi artırmaya devam edersek, yine aynı sırada sarı, kırmızı, yeşil renk gözlemlenir ve bu durumdaki geçiş rengi $N = 3$ izokromatına denk düşer. Bu şekilde Şekil 2.9'da görülen renk skalaları kullanılarak izokromat mertebeleri tayin edilmiş olur.



Şekil 2.9 Renk skalası

3. İZOKROMATLARIN VE İZOKLİNİKLERİN AYRI AYRI İNCELENMESİ

3.1. Giriş

Bir fotoelastik analizde, önce uygun bir model yapılır. Bu model bir polariskop içine yerleştirilir. Model yüke maruz bırakılıp tetkik edildiğinde, modelin üzerinde siyah ve renkli bantların meydana geldiğini görürüz. Bu bantlar, Bölüm 2'de görüldüğü gibi iki tip'idi. Bunların birinci tipine izokromatlar demiştik. İzokromatlar, asal gerilme farkları aynı olan noktaların geometrik yerini gösteriyordu. İkinci tip ise, izoklinikler idi. İzoklinikler, asal gerilme istikametleri aynı olan noktaların geometrik yerini gösteriyordu.

3.2.1. İzokromatlar

Bölüm 2.3'de, bir dairesel polariskopta karanlık saha aranjmanı ile yüklenmiş bir modeli tetkik etmiştik. Bu durumda analizörden çıkan ışığın şiddeti:

$I = K \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}$ olarak bulunmuştu. Sönüm şartı için:

$\frac{\Delta}{2\pi} = m$ olması gerekiyordu. ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$ tam sayılar)

Fotoelastisitenin esas denklemine göre:

$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{h} \cdot N$ idi. Buradaki N değeri:

$N = \frac{\Delta}{2\pi}$ olarak tarif edilmişti. Şu halde sönüm için:

$N = m = 0, 1, 2, 3, \dots$ olması gerekecektir. Bu, N değerlerine izokromat mertebeleri denir. Bu durumda şayet monokromatik ışıkla çalışıyorsak, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ şartını sağlayan yerlerde siyah izokromatlar görülecektir. Bu izokromatlar üzerinde asal gerilmeler farkı, daima sabit bir değere eşit olacaktır. Böylece biz, model malzemesinin f ve h değerlerini biliyorsak, her izokromat üzerindeki $(\sigma_1 - \sigma_2)$ asal gerilmeler farkını hesaplayabiliriz demektir.

Şayet monokromatik ışık yerine beyaz ışık kullanılırsa, bu durumda siyah izokromatlar yerine renkli izokromatlar görülecektir.

Bölüm 2.4'de ise, bir dairesel polariskopta aydınlık saha aranjmanını incelemiştik. Bu aranjmanda analizörden çıkan ışığın şiddeti:

$I = K \cdot \cos^2 \frac{\Delta}{2}$ olarak bulunmuştur.

Sönüm şartı, yani $I = 0$ olması için:

$\frac{\Delta}{2\pi} = m + \frac{1}{2}$ olmalıdır. $\frac{\Delta}{2\pi} = N$ olduğundan,

$N = m + \frac{1}{2} = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ olmalıdır.

Karanlık saha izokromatlarında mertebeler: $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

Aydınlık saha izokromatlarında mertebeler: $N = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$

Şimdi tekrar (2.7) denklemine dönelim. Bu denklem iki halde sifıra eşit olur.

a) $N = 0$ ise, yani izokromat mertebesi sifıra eşit ise: $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ olur. Bu şartı sağlayan noktalara izotrop noktalar demir. Bu noktalarda $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ dir.

b) $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ ise denklem yine sifıra eşit olur. Bu şartı sağlayan noktalara singüler noktalar denir.

İster monokromatik ışıkla, ister beyaz ışıkla çalışmalarda, bu izotrop ve singüler noktalar daima siyah gözüktür. Ayrıca bu noktalar, yüklemenin şekli değişmeksizin, yükün şiddetinin azaltılması veya çoğaltılmasıyla yerlerini değiştirmezler.

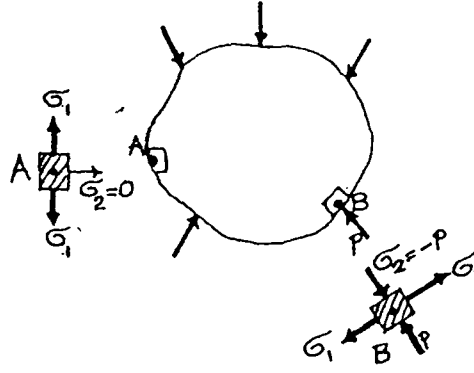
3.2.2. Serbest Bir Sınırdaki Gerilme Durumu

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi, herhangi bir tarzda yüklere maruz bir levhanın serbest sınırındaki gerilme durumunu inceleyelim. Serbest sınırdaki bir (A) noktasında şekilde görülen taralı elemanı ele alalım. Bu elemanın denge şartından: Elemanın sınıra dik gerilmesi $\sigma_2 = 0$ ve sınıra teğet σ_1 gerilme bileşenleri ise, birbirine eşit ve zıt yönlü olmalıdır.

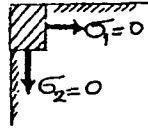
Böylece bir serbest sınırdaki, sınıra dik asal gerilme sifıra eşit, sınıra teğet asal gerilme ise sifirdan farklı bir değere eşit oluyor. Bu durumda (2.7) fotoelastisite denklemi:

$$\sigma_1 - 0 = \frac{f}{h} \cdot N \quad \text{veya} \quad \sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot N \quad (3.1)$$

şeklini alır. Bu (3.1) denkleminde faydalanarak, serbest bir sınırdaki asal gerilme, fotoelastik analizden faydalanılmak suretiyle, doğrudan hesaplanabilir.



Şekil 3.1 Serbest sınırlar ve yüke maruz sınırlar



Şekil 3.2 Singüler noktalar

Şayet sınır, serbest bir sınır olmayıp yüke maruz bir sınırsa (B noktasındaki gibi) (bu durumda sınıra dik olan σ_2 gerilmesi sıfıra eşit olmaz. Fakat bu gerilmenin değeri, sınıra dik olan yük bileşeni P'ye eşit olacaktır. Yani:

$\sigma_2 = -p$ dir Buradaki (-) işaret basıncı gösterir.

Bu durumda fotoleastisite denklemini yazarsak:

$$\sigma_1 - (-p) = \frac{f}{h} \cdot N \quad \text{veya} \quad \sigma_1 = -p + \frac{f}{h} \cdot N \quad (3.2)$$

olarak bulunur.

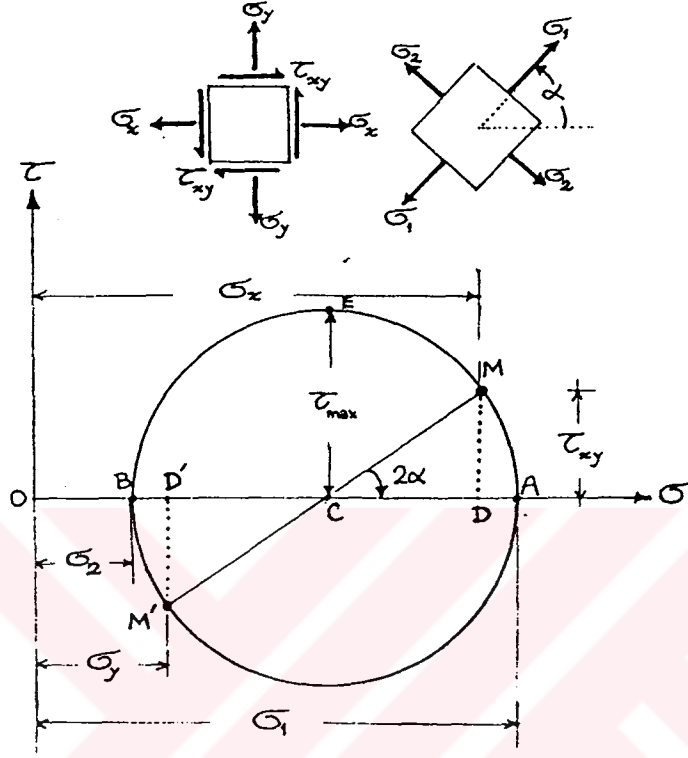
Böylece sınır serbest bir sınır değilse, fakat sınıra tesir eden yükün değeri belli ise (2.2) denkleminde faydalanarak, sınıra teğet gerilme bulunabilir.

Şayet serbest sınır (yüksüz sınır), Şekil 3.2'de görüldüğü gibi dik bir köşe şeklinde ise, taraflı elemanın dengesini düşünersek:

$\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ olarak bulunur. Bu durum, izokromat mertebesi $N = 0$ değerine denk düşer.

Şimdi iki eksenli gerilmeye maruz bir elemanı gözönüne alalım. Bu elemandaki gerilme durumu, Şekil 3.3'de görüldüğü gibi, Mohr dairesiyle gösterilebilir. Bilindiği gibi, bu

dairede her nokta bir gerilme durumuna tekabül etmektedir. Mesela, Mohr dairesindeki M noktası, σ_x ve τ_{xy} gerilmelerine maruz yüzeyi göstermektedir. σ_1 , ve σ_2 asal gerilmeleri, x doğrultusuyla α ve $\alpha + \frac{\pi}{2}$ açılarını yapar.



Şekil 3.3 Mohr dairesi

Mohr dairesinden aşağıdaki bağıntıları kolayca çıkarabiliriz.

$$\sigma_x = OD = OD' + DD' = \sigma_y + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \quad (3.3)$$

$$\sigma_x = OD = OC + CD = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = OD' = OC - CD' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = MD = CM \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

$$\max \tau_{xy} = EC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.5)$$

ve asal gerilmeler ise:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.6)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Fotoelastisite denkleminin her iki tarafını da 21'le bölersek:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{f}{2h} \cdot N \text{ buluruz (3.5) denkleminde}$$

$$\max \tau_{xy} = \frac{f}{2h} \cdot N \text{ bulunur.} \quad (3.7)$$

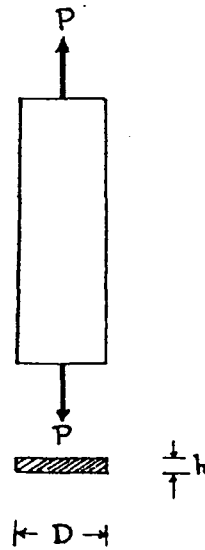
Şu halde (3.7) denklemine göre, levhanın iç kısımlarında her noktada max. kayma gerilmesi fotoelastik bilgiye göre bulunabilir.

3.2.3. Basit Çekme Veya Basit Basınç Halinde İzokromatlar

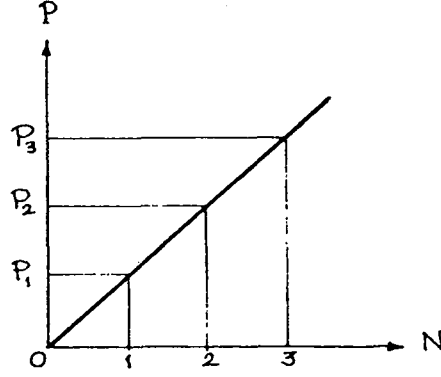
Kesit alanı $D \cdot h$ olan bir fotoelastik malzemeyi aksenal P çekme kuvvetine maruz bırakalım. Bu modeli bir polariskop içine yerleştirelim. Kesit alanı sabit olduğundan, modelin her noktasındaki gerilme:

$$\sigma_1 = \frac{P}{Dh} = \text{sabit olacaktır.}$$

Modelde bir aksenli gerilme olduğundan $\sigma_2 = 0$ 'dır. (Şekil 3.4)



Şekil 3.4 Bir aksenli çekme hali



Şekil 3.5 İzokromat mertebesi – kuvvet diyagramı

Şu halde fotoelastisite esas denklemi:

$$\sigma_1 - 0 = \frac{f}{h} \cdot N \quad \text{veya} \quad \sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot N \text{ şeklinde olacaktır.}$$

P kuvvetini sıfırdan başlayıp, gittikçe arttırdığımızı düşünelim. Modeli polariskopta tetkik edersek şu hususları gözlemleriz: (Monokromatik ışık ve karanlık saha aranjmanı durumunda)

1. $P = 0$ durumunda model tamamen karanlık görünür.
2. P kuvvetini yavaş yavaş arttırdığımızda, modelin aydınlandığını ve P'nin belirli bir değerinde bu aydınlığın max. olduğunu görürüz.
3. P kuvvetini artırmaya devam edersek, modeldeki aydınlığın tekrar azalmaya başladığını ve nihayet $P = P_1$ gibi bir değerde, modelin tekrar tamamen karanlık olduğunu görürüz.
4. P kuvvetini artırmaya devam edersek modelde tekrar aydınlanma ve $P = P_2$ değerinde ise, tekrar karanlık görünür.

5. Bu periyod kuvvetin artırılmasıyla tekrarlanır.

$P = 0$ durumunda izokromat mertebesi $N = 0$,

$P = P_1$ durumunda izokromat mertebesi $N = 1$,

$P = P_2$ durumunda izokromat mertebesi $N = 2$,

.....

$P = P_n$ durumunda izokromat mertebesi $N = n$ olacaktır.

Böylece her karanlık durumda, izokromat mertebeleri $N = 0, 1, 2, \dots$ şeklinde olacağından ve modele tatbik edilen P kuvvetleri belli olduğundan:

$\sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot N$ formülünden gerilme kolayca hesaplanır.

Şayet monokromatik ışık yerine beyaz ışık kullanıyorsak: $P = 0$ durumunda model yine karanlık görünecektir. Bu durumda $N = 0$ dır. P kuvvetini yavaş yavaş artırdığımızda, önce modelde sarı renk hakim olacaktır. Kuvveti artırmaya devam edersek sırasıyla, koyu mavi, koyu kırmızı, yeşil renk hakim olacaktır (1. Mertebe renkleri). Mavi ile kırmızı arasındaki, $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ na tekabül eden donuk kırmızı renge geçiş rengi demiştik. Böylece bu geçiş rengini elde ettiğimiz kuvvet, $P = P_1$ ise, bu durumda izokromat mertebesi $N = 1$ olacaktır.

Kuvveti artırmaya devam edersek sırasıyla, sarı, kırmızı ve tekrar yeşil renk hakim olur. (2. Mertebe renkleri) Burada geçiş rengi kırmızı ile yeşil arasındadır. Bu geçiş rengine tekabül eden kuvvet $P = P_2$ ise, bu durumda izokromat mertebesi $N = 2$ olacaktır. Kuvveti artırmaya devam edersek tekrar sarı, kırmızı ve yeşil renk hakim olacak (3. Mertebe renkleri) ve bu periyod devam edecektir.

Bir çekme modeli ile, fotoelastik malzemenin f fotoelastisite katsayısının bulunması:

Çekme modeline tatbik edilen kuvvet, bir mekanik veya elektriksel cihazla ölçülebiliyorsa, modeldeki:

$\sigma_1 = \frac{P}{Dh}$ gerilmesi biliniyor demektir. Bu gerilme değerini

$\sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot N$ denkleminde yerine koyarsak:

$\frac{P}{Dh} = \frac{f}{h} \cdot N$ buradan $f = \frac{P}{D \cdot N}$ bulunur.

Bu formülde tatbik edilen P yükü, modelin D genişliği ve izokromat mertebesi N belli olduğuna göre, model malzemesinin (f) fotoelastisite katsayısı hesaplanabilir.

3.2.4. Basit Eğilme Durumunda İzokromatlar

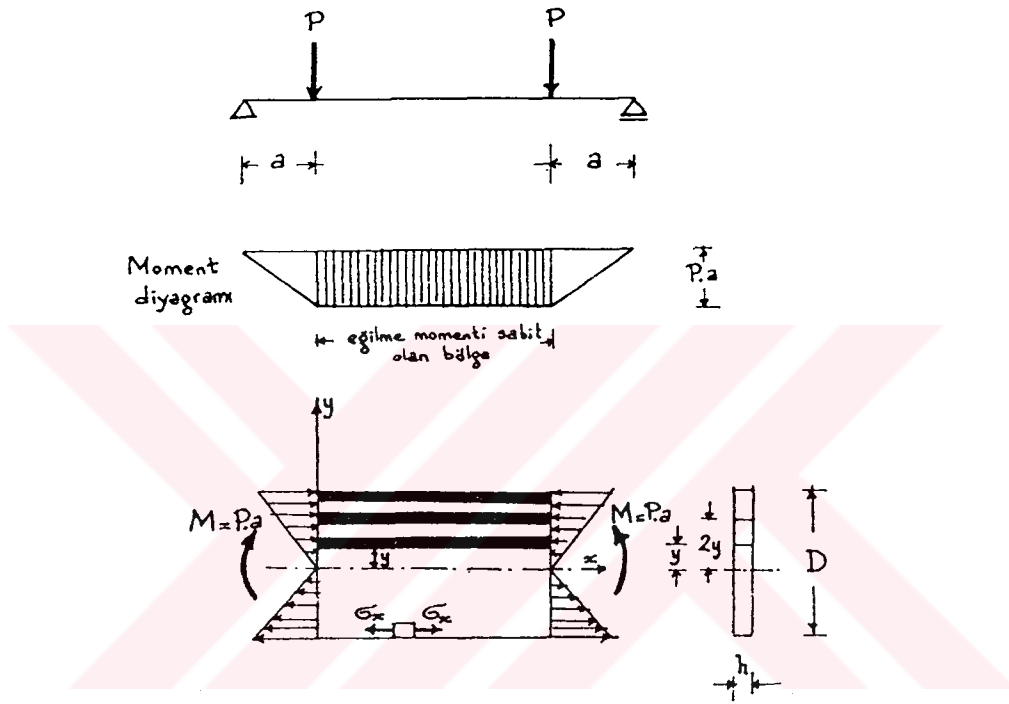
Şekil 3.6'da, eşit P kuvvetlerine maruz basit kiriş gösterilmiştir. Kirişin eğilme momenti diyagramı altına çizilmiştir. Bu diyagramın taralı kısmında eğilme momenti sabit ve $(P \cdot a)$ değerine eşittir. Böylece kirişin bu bölgedeki basit eğilmeye maruzdur. (Kiriş fotoelastik malzemededen imal edilmiştir).

Şekil 3.6'da alt tarafta, kirişin boyuna kesiti gösterilmiştir. Mukavemet teorilerinden bilindiği gibi, böyle bir basit eğilme probleminde:

$$\sigma_x = \frac{M}{J} \cdot y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ 'dır.}$$

Böylece boyuna eksene paralel gerilmeler, bu eksenenden olan mesafelerle doğru orantılıdır. Boyuna eksene dik olan doğrultudaki gerilmeler sıfırdır. $y=0$ eksenidir.

Bu kirişte boyuna gerilme σ_x bir asal gerilmedir (Fotoelastisite denkleminde asal gerilmeler σ_1 ve σ_2 ile gösterilmiştir)



Şekil 3.6 Basit eğilme durumu

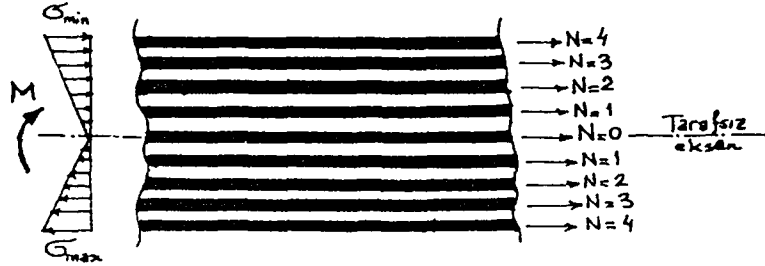
$$\sigma_1 = \frac{M}{J} \cdot y \quad \text{ve} \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{olur (2.7) denkleminde:}$$

$$\sigma_1 - 0 = \frac{f}{h} \cdot N \quad \text{veya} \quad \sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot N \quad \text{olarak bulunur.}$$

Şimdi kirişi dairesel bir polariskop içine yerleştirelim. Monokromatik ışık kullandığımızı ve karanlık saha aranjmanı ile çalıştığımızı fark edersek, modelde tarafsız eksene paralel ve aralarındaki mesafeler eşit olan siyah izokromatlar görülür. Tarafsız eksen üzerinde $\sigma_1 = 0$ olduğundan, (3.2) denkleminde göre bu $N = 0$ izokromatına denk düşer. Tarafsız eksenenden sonraki ilk izokromat, $N = 1$ mertebesindedir. Bu izokromat üzerinde her noktada:

$\sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot 1 = \frac{f}{h}$ değerinde bir gerilme vardır. Bundan sonraki izokromat $N = 2$ mertebesindedir ve bu izokromat üzerindeki gerilme değeri:

$\sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot 2 = \frac{2f}{h}$ olacaktır. Bundan sonraki izokromatlar da sırasıyla: $N = 3, 4, 5, \dots$ mertebelerinde olacaktır. Böylece, $N = 0$ izokromatından başlayarak, 1, 2, 3, 4, 5, ... diye sayarak her izokromatın mertebesi bulunabilir. (Şekil 3.7)



Şekil 3.7 İzokromatlık mertebesi

Siyah bantlar arasındaki bölgeler beyaz görünecektir. Bu beyaz bantlarda izokromat mertebeleri $N = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$ olarak devam edecektir. Bu şekilde max. gerilmenin meydana geldiği ve en üst lifteki izokromat mertebesi tayin edilerek, max. gerilme değeri bulunabilir.

Şayet monokromatik ışık yerine beyaz ışık kullanılırsa, $N = 0$ izokromatına tekabül eden tarafsız eksen yine siyah görünecek, fakat bundan sonraki izokromatlar renkli olacaktır. Tarafsız eksenden sonra sarı, kırmızı, mavi renkte bantlar görülecek, mavi ve kırmızı arasındaki geçiş rengine tekabül eden bölge, $N = 1$ mertebesindeki izokromat olacaktır. Sonra tekrar sarı, kırmızı, yeşil bantlar görülecek, kırmızı ile yeşil arasındaki geçiş rengi, $N = 2$ mertebesindeki izokromat olacaktır.

Basit eğilme deneyi ile fotoelastik malzemenin f fotoelastisite katsayısının tayini:

Kirişe tesir eden P kuvvetleri belli ise, $M = P \cdot a$ momenti de belli demektir. Kirişin kesiti $h \cdot D$ olduğundan atalet momenti:

$J = \frac{hD^3}{12}$ dir. En büyük gerilme en üst liflerde olacağından:

$$\max \sigma_1 = \frac{M}{J} \cdot \frac{D}{2} = \frac{6M}{hD^2} \quad \text{olur.}$$

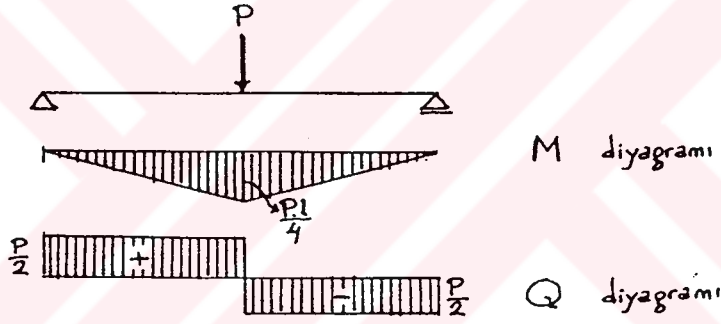
Bu değeri fotoelastisite denkleminde yerine koyarsak:

$$\frac{6M}{h.D^2} = \frac{f}{h}.N \text{ buradan} \quad f = \frac{6M}{N.D^2} \text{ bulunur.}$$

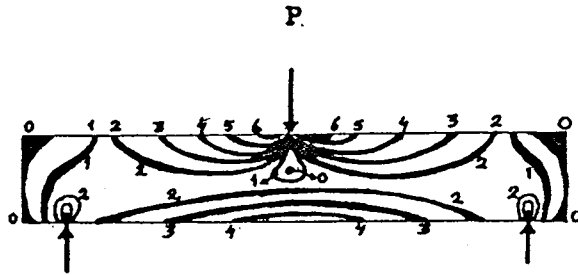
(buradaki N değeri en üst lifteki izokromat mertebesidir.

3.2.5. Kesmeli Eğilmede İzokromatlar

Şekil 3.8’de görüldüğü gibi, ortasından bir P kuvvetine maruz basit kiriş ele alalım. Bu kirişin eğilme momenti (M) ve kesme kuvveti (Q) diyagramları yukarıda gösterilmiştir. Kirişin her kesitinde hem eğilme momenti hem kesme kuvveti olacaktır. Bu kirişin, bir fotoelastik malzemeden yapıldığını varsayarsak ve bunu bir polariskopta tahkik edersek, izokromatların basit eğilmedekinden farklı olduğunu görürüz. (Şekil 3.9) Şöyle ki: Burada tarafsız eksen kaybolmuş bunun yerine izotrop nokta teşekkül etmiştir. Burada izokromat mertebelerinin tayininde, izotrop nokta (N=0)’dan faydalanılır. İzotrop noktadan itibaren diğer izokromatlar sırasıyla, 1, 2, 3, 4....olarak devam eder.



Şekil 3.8 Kesmeli eğilme durumu



Şekil 3.9 İzokromatların durumu

Aynı şekilde serbest köşelerde de $N = 0$ olduğundan, bu köşeler de izokromat mertebelerinin tayininde önemli bir done teşkil ederler.

3.3. İzoklinikler

3.3.1. Giriş

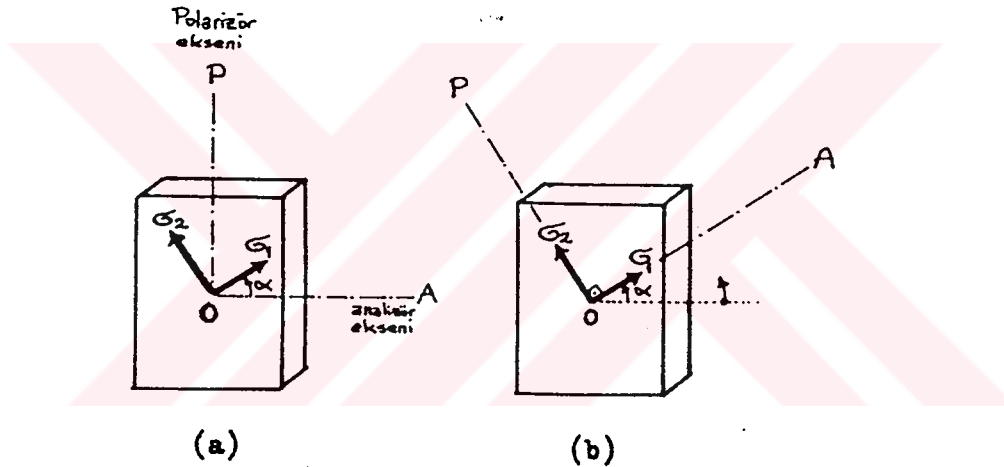
Bölüm 2.2'de, bir düzlem polariskop ile yüklenmiş bir modeli incelemiştik. Bu durumda, analizörden çıkan ışığın şiddeti:

$$I = K \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2} \text{ olarak bulunmuştur.}$$

Analizörden çıkan ışığın sönüm şartı, yani $I = 0$ için:

$$a) \sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0 \rightarrow \frac{\Delta}{2} = m\pi \quad \text{veya,}$$

$$b) \sin^2 2\alpha = 0 \rightarrow 2\alpha = m\pi \quad \text{olması gerekir.}$$



Şekil 3.14 Model üzerinde polarizör ve analizör eksenleri

a) Şıkkındaki sönüm izokromatları gösterecektir ki bu durum daha önce incelendi.

b) Şıkkındaki sönüm şartı için: $2\alpha = m\pi \rightarrow \alpha = m \cdot \frac{\pi}{2}$ olmalıdır. (Burada $m = 0,1,2,3,\dots$ tam sayı)

Bunun anlamı şudur: Model üzerinde, herhangi bir noktada asal gerilme doğrultularından biri analizör veya polarizör eksenine ile çakıştığında, o noktada sönüm elde edilecek demektir.

Şekil 3.14.a da, yüklenmiş model üzerinde bir 0 noktasındaki asal gerilmeler gösterilmiştir.

Bu asal gerilmelerin analizör eksenine yaptığı açılar α ve $\alpha + \frac{\pi}{2}$ olsun. Analizörden bu 0 noktasına baktığımızda, bu noktadan geçen ışığın sönümü, yani bu noktanın karanlık

görünmesi için, analizörün Şekil 3.14.b'de görüldüğü gibi trigonometrik yönde α açısı kadar döndürülmesi gerekecektir. Bu durumda analizör eksenini, σ_1 gerilmesinin doğrultusuyla çakışmış olacaktır. Bu pozisyonda analizörün α dönme açısı, σ_1 'in yatayla yaptığı açıyı verir. σ_2 'nin doğrultusu ise, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ olur. Analizörün dönme açısı skala üzerinden doğrudan okunabilir. Analizörün bu α dönme açısına, izoklinik parametresi denir.

Pratikte izokliniklerin elde edilmesinde iki yol kullanılır.

1.Yol: Model üzerinde belirli noktalar seçilir ve bu noktalarda ayrı ayrı sönüm elde edilinceye kadar analizör döndürülür. 0 noktada sönüm elde edildiğinde analizörün α dönme açısı okunur. Bu α açısı o noktaya ait izoklinik parametresini verir.

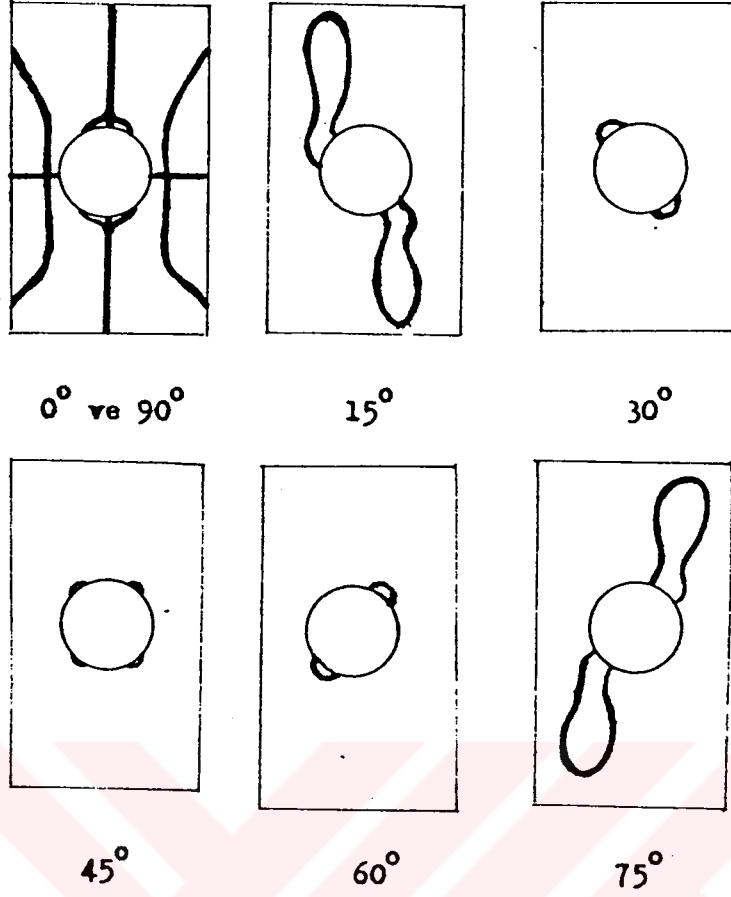
2. Yol: Analizör 5° 'lik, 10° 'lik veya 15° 'lik açılarda döndürülür. Analizörün her pozisyonunda, nerelerde sönüm çizgileri meydana geldiği tesbit edilir. Bu tesbit işi ya model üzerine yağlı kalemle çizmek suretiyle yapılır, ya da fotoğraf çekmek suretiyle halledilir.

Model üzerinde, analizörün her dönme pozisyonunda tesbit edilmiş olan izoklinikler, tek bir resim üzerinde gösterilirse, modelin tümü üzerinde asal gerilme doğrultuları aynı olan noktaları görmüş oluruz.

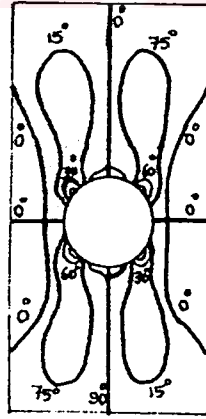


Şekil 3.15 Ortasında delik bulunan çekme durumu

Şekil 3.15'de görüldüğü gibi ortasında delik bulunan aksenal çekme kuvvetine maruz bir fotoelastik modeli, düzlem polariskop içine yerleştiririm. Analizörü 15° 'lik açılar (0° , 15° , 30°gibi) kadar döndürelim. Her dönme pozisyonundaki izoklinikleri tesbit edelim. (Şekil 3.16) Bu izoklinikleri, Şekil 3.17'de görüldüğü gibi, tek bir resim üzerinde gösterelim ve her izokliniğin parametresini üzerine yazalım. Böylece modelin tümü üzerinde, asal gerilme doğrultuları aynı olan noktaları görmüş oluruz.



Şekil 3.16 İzoklinikler



Şekil 3.17 İzokliniklerin dağılımı

İzoklinikler, fotoelastik analizde iki şekilde kullanılır:

1. İzokliniklerden faydalanılarak, asal gerilme doğrultularını gösteren gerilme trajektörlerinin çizilmesi mümkün olur.

2. İzoklinikler ayrıca, gerilmelerin ayrı ayrı bulunmasında kullanılan kayma farkı metodunda da kullanılır.

3.3.2. İzokromatların ve İzokliniklerin Teşhis Edilmesi ve Aralarındaki Farklar

Bir düzlem polariskopta, bir fotoelastik modeli incelerken şayet monokromatik ışık kullanılıyorsa, hem izokromatlar hem de izoklinikler siyah gözükeceğinden, bunları birbirine karıştırmak mümkün olabilir. Fakat monokromatik ışık yerine beyaz ışık kullanırsak, izokromatlar renkli olarak görünür. Buna mukabil izoklinikler yine siyah görülür. Böylece birbirinden ayırmak mümkün olur. Bu yüzden izoklinikleri incelerken beyaz ışık ile çalışmak daha uygun olur.

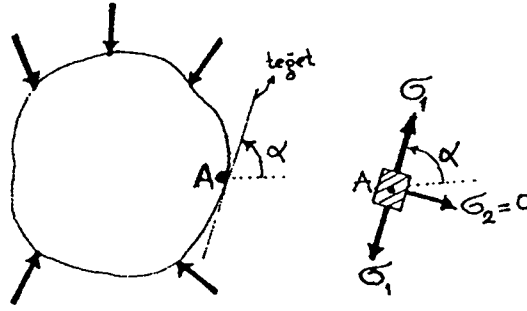
Modelde yükü sabit tutup, analizörü döndürdüğümüz takdirde izokromatlar sabit kalır. İzoklinikler ise hareket ederler. Aksine, analizörü sabit tutup, modeldeki yükü değiştirirsek, izoklinikler sabit kalır. İzokromatlar ise hareket ederler.

İzotrop ve singüler noktalar ise, analizörün dönmesiyle veya yükün değiştirilmesiyle etki almazlar.

3.3.3. İzoklinikler Hakkında Bazı Özellikler

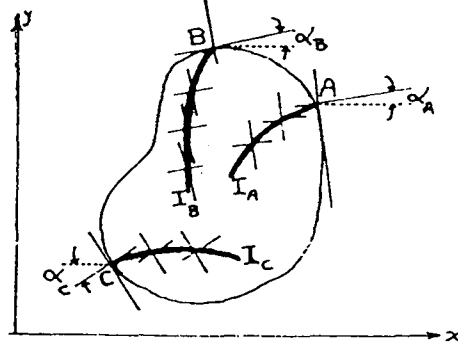
1) Serbest sınırdaki izoklinikler:

Bölüm 3.21'de serbest bir sınırda asal gerilmelerden birinin mevcut olduğunu, diğer asal gerilmenin sifira eşit olduğunu görmüştük. Böyle bir sınırda, asal gerilme sınıra teğet olup, dik doğrultuda sifira eşittir. Şu halde, serbest bir sınırda herhangi bir A noktasında gerilme doğrultusu, o noktadan sınıra çizilen teğet ile çakışacak demektir. (Şekil 3.18)



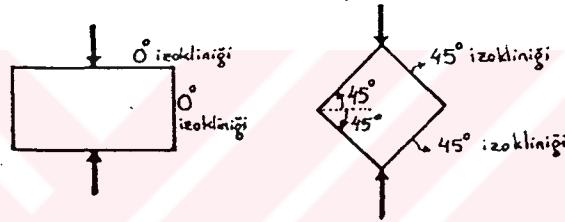
Şekil 3.18 Serbest sınırdaki izoklinikler

Bu durumda, A noktasından geçen izokliniğin parametresi, bu noktadan sınıra çizilen teğetin eğimine eşit olacaktır.



Şekil 3.19 İzokliniklerin gösterilişi

Şekil 3.19'da bir levhanın sınırında A, B, C noktalarından geçen I_A , I_B , I_C izoklinikleri gösterilmiştir. Bu izokliniklerin parametreleri sırasıyla α_A , α_B , α_C olsun. Ayrıca bu noktalardan sınıra çizilen teğet ve normal doğrultuları gösterilmiştir.

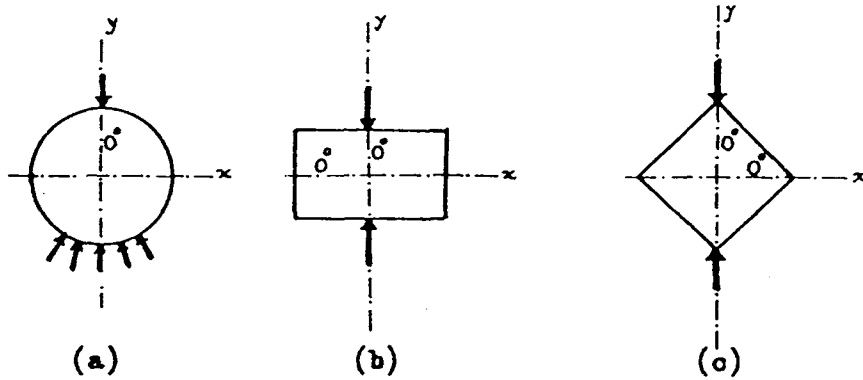


Şekil 3.20 İzoklinik parametreleri

Serbest sınır üzerindeki bu noktalarda, teğetin yatayla yaptığı açılar, izokliniğin parametresine eşit olacaktır. Serbest sınır bir doğru ise bu doğru, parametresi bu doğrunun eğimine eşit bir izokliniği gösterecektir. (Şekil 3.20).

2) Cismin simetri eksenine sahip olması halinde izoklinikler:

Şayet bir cisimde, bir eksene göre geometrik yönden ve yük bakımından bir simetri varsa, bu simetri eksenini 0° izokliniğini gösterir.



Şekil 3.21 Simetri eksenini olması durumu

Şekil 3.21a'da görülen disk geometrik bakımdan x ve y eksenlerine göre simetriktir. Yük bakımından ise, y eksenine göre simetrik, fakat x eksenine göre değildir. Bu suretle sadece y eksenini 0^0 izokliniğini gösterir. Şekil 3.21.b ve c'de ise geometrik ve yük bakımından her iki eksene göre simetri olduğundan bu eksenler 0^0 izokliniğini gösterir. Çünkü, simetri eksenlerinde kayma gerilmeleri sıfırdır. Ayrıca mohr dairesinden görülebileceği gibi:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad (3.8)$$

$\tau=0$ olduğundan, $\tan 2\alpha=0$ ve buradan: $\alpha=0$ bulunur. Şu halde simetri ekseninin izokliniklik parametresi 0^0 olacak demektir. Asal gerilme doğrultularından biri bu simetri eksenine ile çakışır. Diğeri ise buna dik olur.

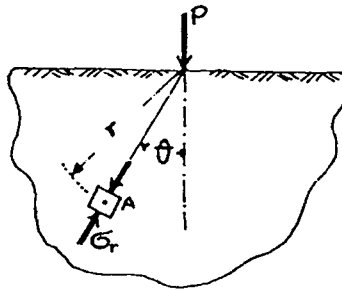
3) İzotrop ve singüler noktalarda izoklinikler:

İzotrop noktaları $\sigma_1 - \sigma_2$ olan noktalar şeklinde tarif etmiştik. Mohr dairesinden:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad \text{idi.} \quad \sigma_1 - \sigma_2 \text{ koyarsak} \quad \tau = 0 \text{ olur.}$$

(3.8)'den $\tan 2\alpha = \frac{0}{0}$ olur. Böyle noktalarda α açısı belirsiz olacaktır. Şu halde, izotrop noktalarda her doğrultu, bir asal gerilme doğrultusudur. Bu noktalardan sonsuz sayıda izoklinik geçecektir. Aynı şart, singüler noktalar için de geçerlidir.

4) Münferit yükler altında izoklinikler:

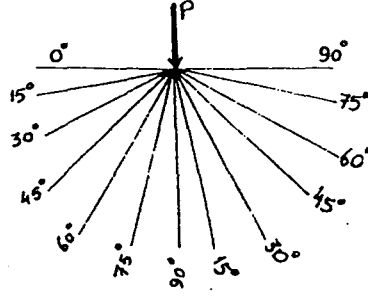


Şekil 3.22 Tekil yük altında levhanın durumu

Şekil 3.22'de görülen, bir P münferit kuvvetine maruz levhanın herhangi bir A noktasındaki radyal gerilme:

$$\sigma_r = -\frac{2p \cdot \cos\theta}{\pi t r} \text{ dir. Burada } t \text{ levha kalınlığı,}$$

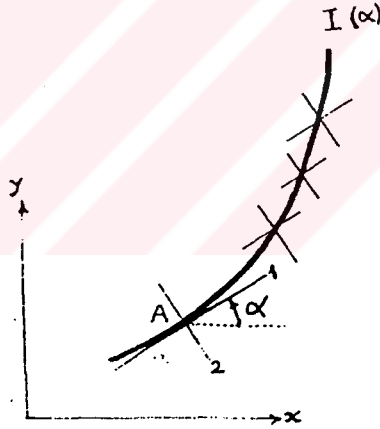
r ve θ polar koordinatlardır. θ açısı 0° ile 90° arasında değişeceğinden, farklı parametrelerdeki izoklinikler, yükün tatbik noktasında kesişeceklerdir. (şekil 3.23)



şekil 3.23 İzoklinik parametreleri

3.3.4. Gerilme Trajektörleri

İzoklinikler fotoelastisite yoluyla elde edildikten sonra, bunlardan faydalanıp gerilme trajektörlerinin çizim yoluyla elde edilmesi mümkün olur.

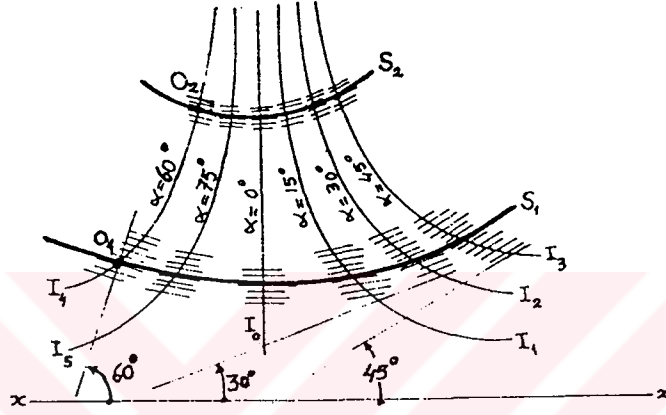


şekil 3.24 Gerilme trajektörleri

şekil 3.24’de görüldüğü gibi, bir I izokliniği ele alalım. Bu izokliniğin parametresi α olsun. İzoklinik üzerindeki bir A noktasında asal gerilme doğrultularını elde etmek için, bu noktadan yatayla α açısı yapan (1) doğrusunu ve buna dik (2) doğrusunu çizeriz. Bu durumda 1 ve 2 doğrultuları, A noktasındaki asal gerilme doğrultularını verir. Aynı şekilde izoklinik üzerinde başka noktalar alıp bu noktalardan 1. Ve 2 doğrultularına paralel çizgiler çizeriz. Böylece her izoklinik üzerinden, onun parametresine eşit, paralel çizgiler ve dik çizgiler çizersek ve bu çizgilere zarf olan eğrileri gösterirsek, gerilme trajektörlerini elde etmiş oluruz.

1. Yol:

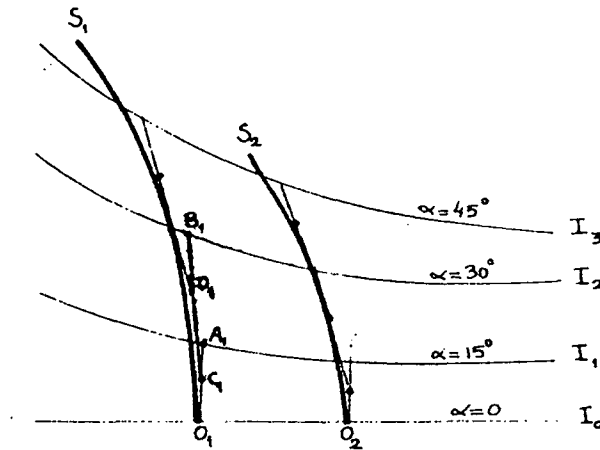
Şekil 3.25’de görülmektedir. İzoklinik parametreleri her izoklinik üzerine yazılmıştır. Her izoklinik üzerine, onun kendi parametresine göre, xx yatay eksenine eşit açı yapacak olan, paralel çizgiler serisi çizilir. Bundan sonra, izoklinik üzerindeki herhangi bir O_1 noktasından başlayarak, bu paralel doğrulara teğet olacak şekilde, S_1 trajektörü çizilir. Bundan sonra, izoklinik üzerindeki herhangi bir O_1 noktasından başlayarak, bu paralel doğrulara teğet olacak şekilde S_1 trajektörü çizilir. Aynı şekilde diğer bir O_2 noktasından başlayarak S_2 trajektörü çizilir.



Şekil 3.25 S_1 ve S_2 trajektörleri

Bu şekilde izoklinikler üzerinde alınan çeşitli noktalardan geçen trajektörler çizilerek, cisim üzerinde her noktada asal gerilme doğrultularını gösteren çizgiler elde edilmiş olur. Diğer asal gerilme doğrultusunu gösteren trajektörler, bu S_1, S_2, \dots trajektörlerine dik olan eğriler olacaktır.

2. Yol:



Şekil 3.23 S_1 ve S_2 trajektörleri

Şekil 3.26'da görüldüğü gibidir. Bu metodta: I_0 izokliniği üzerindeki bir O_1 noktasından geçen dik bir doğru çizilir. Bu dik doğrunun I_1 izokliniğini kestiği A_1 noktası bulunur. O_1A_1 'in orta noktası olan C_1 noktasından düşeyle, I_1 izokliniğinin parametresi olan $\alpha = 15^\circ$ 'lik açı yapan bir doğru çizilir. Bu doğrunun I_2 izokliniğini kestiği B_1 noktası bulunur. A_1B_1 'in orta noktası D_1 'den, I_2 'nin parametresi olan $\alpha = 30^\circ$ 'lik bir açı, düşey doğrultudan itibaren alınır. Bu işe bu şekilde devam edilerek, bu doğrulara teğet olan eğri çizilirse S_1 gerilme trajektörü elde edilmiş olur. Aynı şekilde I_0 izokliniği üzerinde ki diğer bir O_2 noktasından geçen S_2 gerilme trajektörü çizilir. Bu şekilde devamla diğer gerilme trajektörleri de çizilebilir.



4. ASAL GERİLMELERİN AYRI AYRI BULUNMASI

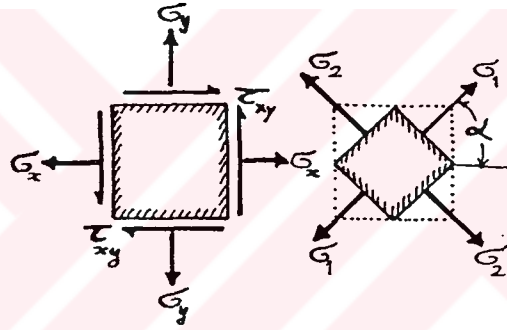
1. Giriş

Bilindiği gibi iki boyutlu elastisitede, herhangi bir noktadaki gerilme durumu, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gibi üç büyüklük ile tarif edilir. Bu gerilme bileşenleri:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (4.1)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



Şekil 4.1 Asal gerilmeler

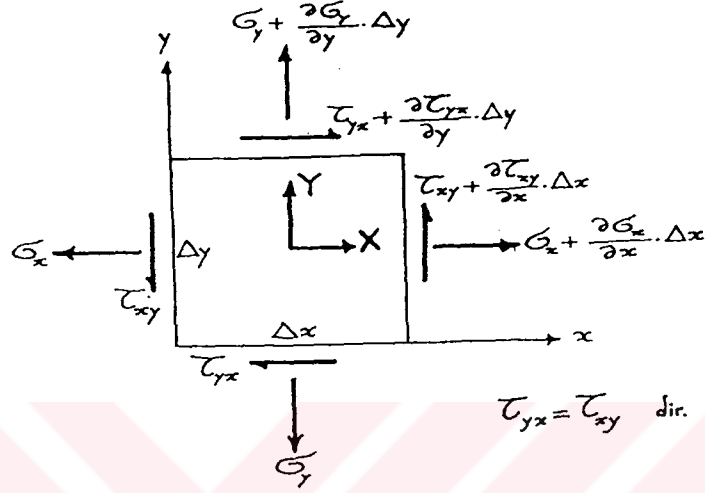
Bir noktadaki gerilme durumunun belli olması için bu üç büyüklüğün ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) veya (4.1) denkleminde $(\sigma_1 - \sigma_2)$, $(\sigma_1 + \sigma_2)$, (α) değerlerinin bilinmesi gerekir. Halbuki biz fotoelastik analiz ile iki tip veri elde edebiliyoruz. Bu verilerden birincisi $(\sigma_1 - \sigma_2)$ asal gerilmeler farkını veren izokromatlar, ikincisi ise (α) asal gerilme doğrultularını veren izokliniklerdir. Şu halde, model üzerinde herhangi bir noktada gerilme durumunun belirli olabilmesi için, ilave bir bilgiye daha ihtiyaç vardır. Bu ilave bilgiyi temin edebilmek için birtakım yöntemler geliştirilmiştir. Bu bölümde, bu yöntemleri ele alacağız.

4.2. Kayma Farkı Metodu ile Asal Gerilmelerin Ayrı Ayrı Bulunması

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi, iki eksenli gerilme durumuna maruz bir eleman gözönüne alalım. Burada (X) ve (Y), x ve y yönündeki birim hacimdeki kitle kuvvetlerini göstermektedir. Bu elemana x ve y yönünde tesir eden kuvvetlerin toplamının sıfır olduğunu yazarsak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

denklemlerini buluruz.



Şekil 4.2 İki boyutlu elemanlarda denge denklemi

Bu iki denklem elastisitede iki boyutlu elemanlarda denge denklemidir. Karşılaşılan birçok hallerde, kitle kuvvetleri, tatbik edilen yüklere oranla küçük olduğundan, bunların tesiri ihmal edilebilir. Bu durumda $X = 0$, $Y = 0$ olabileceğinden, 4.2 denklemleri:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

şeklini alır.

Bu denklemlerin integrasyonundan:

$$(\sigma_x)_p = (\sigma_x)_o - \int_o^p \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \quad (4.4)$$

bulunur.

$$(\sigma_y)_p = (\sigma_y)_o - \int_o^p \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy$$

Burada $(\sigma_x)_p, (\sigma_y)_p$ herhangi bir (p) noktasındaki x ve y yönünde olan gerilme bileşenlerini, $(\sigma_x)_o, (\sigma_y)_o$ ise, gerilme değerleri bilinen bir noktadaki x ve y yönünde olan gerilmeleri

göstermektedir. $\int_o^p \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx$ değerine gelince, bu integral değeri $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = f_1(y)$ eğrisinin x eksenini

ile kapsadığı alanı göstermektedir. (Şekil 4.3.a). $\int_o^p \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy$ değeri ise $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = f_2(x)$ eğrisinin y

ekseni ile kapadığı alanı göstermektedir (Şekil 4.3.b) integraller içeren (4.4.) denklemlerini sonlu elemanların toplamları şeklinde ifade edersek:

$$(\sigma_x)_p = (\sigma_x)_o - \sum \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta y} \cdot \Delta x \quad (4.5)$$

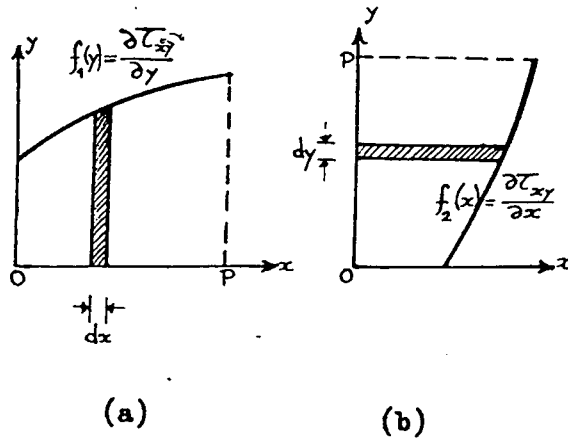
denklemlerini elde ederiz.

$$(\sigma_y)_p = (\sigma_y)_o - \sum \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x} \cdot \Delta y$$

Şayet $\Delta x = \Delta y$ olarak seçilirse, bu durumda:

$$(\sigma_x)_p = (\sigma_x)_o - \sum \Delta \tau_{xy} \quad (4.6)$$

$$(\sigma_y)_p = (\sigma_y)_o - \sum \Delta \tau_{xy}$$

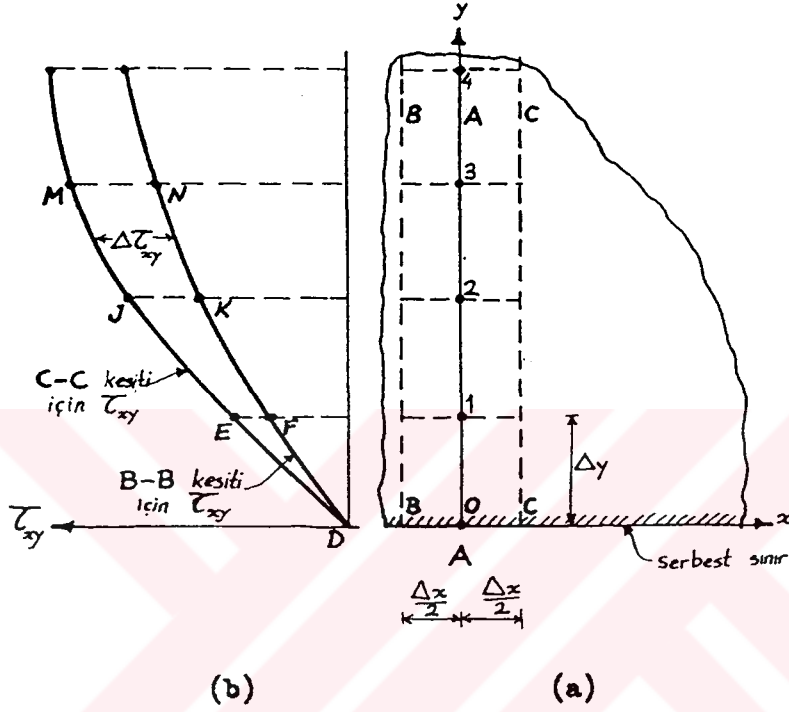


Şekil 4.3 Diferansiyel eğrileri

Bu denklemler vasıtasıyla, sadece polariskopla bulunmuş donelerden yani izokromat ve izokliniklerden faydalanarak, model üzerindeki herhangi bir noktadaki asal gerilmelerin ayrı ayrı bulunması mümkün olur. Şöyle ki: fotoelastik analizle asal gerilmeler farkı $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ve

bu asal gerilmelerin doğrultusu (α) bulunabilir. (3.4) denklemine göre herhangi bir noktadaki kayma gerilmesi.

$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$ dir. Böylece izokromat ve izokliniklerden faydalanılarak bu denklem vasıtasıyla her noktada (τ_{xy}) kayma gerilmeleri hesaplanabilir.



Şekil 4.4 Kayma farkı metodu ile asal gerilmeler

Kayma farkı metodu ile asal gerilmelerin ayrı ayrı bulunmasında şu yol takip edilir:

1. Model üzerinde asal gerilmelerin tayin edilmesi istenen yerde A-A çizgisi çizilir. (Şekil 4.4.a) y eksenini bu A-A çizgisi ile çakışacak şekilde bir O_{xy} dik koordinat sistemi seçilir. Koordinat sisteminin (0) orijini serbest sınır üzerinde seçilmiştir. A-A doğrusu, eşit aralıklarda bir sayıya bölünecek şekilde, (Δy) uzunluğunda kısımlara ayrılır.

2. A-A çizgisinin her iki tarafında, eşit uzaklıkta B-B ve C-C çizgileri çizilir. Öyle ki bu B-B ve C-C çizgileri arasındaki Δx mesafesi Δy 'ya eşit olacak şekilde düzenlenmiştir. Böylece y doğrultusundaki gerilmeler:

$\sigma_y = (\sigma_y)_0 - \sum \Delta\tau_{xy}$ formülünden elde edilebilir. Bu formüldeki (σ_y) değeri 0 noktasındaki (σ_y) değeridir. bu nokta sınır üzerinde olduğundan $(\sigma_y)_0$ değeri belli demektir. $(\Delta\tau_{xy})$ değeri ise, B-B ve C-C kesitlerindeki kayma gerilmeleri arasındaki farktır. $(\Delta\tau_{xy})$ yerine

yaklaşık olarak, (Δy) dilimlerinin orta noktalarındaki B-B ve C-C kesitlerine ait kayma gerilmeleri arasındaki fark alınabilir. (Δy) değeri küçük seçilirse bu yaklaşıklık azalır.

3. Fotoelastik donelerden faydalanarak, izokromat ve izokliniklerin B-B ve C-C çizgilerini kestiği noktalar bulunur ve bu noktalardaki, izokromat mertebeleri ve izoklinik parametreleri

tesbit edilir. $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ ve (α) ayrı ayrı y eksenini boyunca çizilir.

4. Bu eğrilerden $\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$ formülünden faydalanarak, B-B ve C-C kesitlerine ait (τ_{xy}) eğrileri çizilir. (Şekil 4.4.b)

5. Her (Δy) diliminin orta noktalarına denk düşen, B-B ve C-C kesitlerine ait kayma gerilmeleri arasındaki fark $(\Delta\tau_{xy})$ 'yi gösterir.

6. Böylece, $\sigma_y = (\sigma_y)_0 - \sum \Delta\tau_{xy}$ formülünden faydalanılarak, bir evvelki noktada (σ_y) değeri belli ise, herhangi bir noktadaki y doğrultusundaki gerilme kolayca bulunabilir. Örnek olarak 1 noktasındaki y yönündeki gerilme:

$(\sigma_y)_1 = (\sigma_y)_0 - (\Delta\tau_{xy})_1$ olarak bulunur. Burada $(\sigma_y)_0$ değeri (0) noktasındaki y yönündeki gerilme değeridir, $(\Delta\tau_{xy})_1$ ise (01) uzunluğunun orta noktasındaki B-B ve C-C kesitlerine ait kayma gerilmeleri arasındaki farktır, yani:

$$(\Delta\tau_{xy})_1 = (\tau_{xy})_{c-c} - (\tau_{xy})_{B-B} \text{ 'dir.}$$

(1) noktasındaki gerilme belli olduktan sonra (2) noktasındaki gerilme:

$(\sigma_y)_2 = (\sigma_y)_1 - (\Delta\tau_{xy})_2$ den bulunur. Bu şekilde devam edilerek 3,4,5....noktalarındaki gerilmeler bulunabilir.

7. Böylece A-A kesiti üzerinde 0,1,2,3... noktalarında y yönünde olan (σ_y) gerilmeleri bulunduktan sonra, aynı noktalarda x yönündeki (σ_x) gerilmeleri (3.3) denklemine göre:

$$\sigma_x = \sigma_y + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha = \sigma_y + \frac{f}{h} N \cdot \cos 2\alpha \text{ bağlantısından bulunur.}$$

8. 0,1,2,3....noktalarında (σ_x) ve (σ_y) gerilmeleri bulunduktan sonra, aynı noktalardaki asal gerilmeler:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y + \frac{f}{h}N)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y - \frac{f}{h}N) \text{ bağıntılarından bulunur.}$$



5. MODEL MALZEMESİ

5.1. Fotoelastisitede Kullanılan Model Malzemesinde Aranılan Özellikler

Fotoelastisite deneylerinde kullanılacak model malzemesinin aşağıdaki özelliklere sahip olması istenir:

- a) Malzeme, ışığı geçirme özelliğine sahip olmalıdır. (Yani şeffaf olmalı)
- b) Malzeme, yüklenmemiş durumda izotrop olmalıdır.
- c) Yüklenmiş durumda malzeme, optik bakımından çift kırıcı özellik göstermelidir.
- d) Fotoelastik malzeme, uygun araçlarla kesilebilir ve işlenebilir olmalıdır.
- e) Malzeme, şekil değiştirmeye ve gerilmeye karşı oldukça hassas olmalıdır. Bunun için malzemenin (f) fotoelastisite katsayısının küçük olması gerekir.
- f) Malzeme, gerilme-şekil değiştirme ($\sigma - \varepsilon$) bakımından lineer bir özellik göstermelidir.
- g) Malzeme, yüksek elastisite modülü ve yüksek nihai mukavemet göstermelidir.
- h) Malzeme, artık gerilmelerden ve kenar tesirlerinden bağımsız olmalıdır. Yüklenmemiş durumda polariskopta incelendiğinde, malzemede hiçbir izokromat görülmemelidir.
- i) Ufak sıcaklık değişimlerinde malzemenin optik ve fiziksel özellikleri değişmemelidir.
- j) Malzeme aşırı derecede krip yapmamalıdır. Krip olayının önüne geçmek için, modeli yükledikten sonra en geç yarım saat içinde deney neticelerini almalıdır. Ayrıca, modeli nihai yüke kadar yükleyip, tekrar yükü boşaltarak ve bu işi birkaç defa yaparak, krip olayının önüne geçilmiş olunur.
- k) Malzeme ucuza temin edilebilmelidir.

Bu şartların hepsine sahip olan bir ideal model malzemesi bulunmamakla beraber, bu şartların çoğunluğuna vakıf olan malzemeler vardır. Bugün fotoelastik araştırmalarda en çok kullanılan model malzemeleri, Polyester ve Araldit'dir. Diğerleri Tablo 5.1'de mevcuttur.

Çizelge 5.1 Fotoelastik model malzemelerine ait optik ve mekanik özellikler

Malzeme	Elastisite Modülü Kg/cm ² (E)	Emniyet Gerilmesi Kg/cm ² (σ_{em})	Poison oranı (ν)	Fotoelastisite katsayısı (f) Kg/cm
Cam	600.000-700.000	300	0,23	-150 ~500
Flexiglas	28.000-32.000	200	0,35	-110~230
Selüloid	14.000-27.000	150		39 ~ 68
Cellon	17.000	130		50
Dekorit	25.000-38.000	400		12 ~14
Araldit B	32.000-38.000	400	0,33	10.5 ~11.4
Bakalit	42.000-48.000	400	0,36	14~15,5
Catalin 800	15.000-20.000	150		9~10
CR-39	17.000-22.000	200		14~15
Polyester	24.000		0,38	7 ~8

5.2. Model Malzemesinin Hazırlanması

Model yapmak için seçilen malzemede önce, artık gerilme ve kenar tesirleri olup olmadığının görülmesi için bu malzeme polariskop içinde tetkik edilir. Şayet artık gerilme varsa, malzeme fırın içinde bir süre 70⁰-80⁰ sıcaklıkta tutulur. Tekrar polariskoba yerleştirilip bakılır, şayet yine gerilme varsa aynı işleme devam edilir.

Model malzemesindeki artık gerilme böylece halledildikten sonra, malzeme üzerine istenilen malzeme çizilir. Modelin dış çizgilerinden itibaren 0,5 cm daha büyük olacak şekilde, bir elektrikli testere ile malzemedan modeli keseriz. Yapılacak fotoelastik modelin alüminyumdan bir şablonu yapılır. Kestiğimiz model, alüminyum şablon üzerine çift taraflı yapıştırıcı ile yapıştırılır. Sonra, bu fazlalıklar yüksek devirli torna aletiyle alınır. Böylece kenarları son derece düzgün ve kenar tesirleri olmayan bir model hazırlanmış olur.

Bu hazırlanmış modelde, zamanla artık gerilmelerin meydana gelmemesi için, deneyin mümkün mertebe çabuk yapılması icap eder. Buna imkan yoksa, malzemeler havası alınmış bir cam fanusta muhafaza edilir.

5.3. Model Kanunları

Fotoelastisite çalışmalarında, herhangi bir konstriksiyonun şeffaf malzemedeki bir modeli yapılır. Bu modelden elde edilecek neticelerin, esas konstriksiyonda geçerli olabilmesi için, yapılacak modelin benzerlik şartlarına uyması gerekir.

Örnek olarak modelin geometrik boyutlarıyla, esas konstriksiyonun geometrik boyutları arasında benzerlik olmalıdır. Bu benzerlik oranı, uzunluk ölçeğini verir. Bu ölçeği α ile gösterelim:

$$\alpha = \frac{\text{esas konstriksiyonda uzunluk}}{\text{modelde uzunluk}} = \frac{L_o}{L_m}$$

ve aynı şekilde:

$$\alpha = \frac{\text{esas konstriksiyonda yükseklik}}{\text{modelde yükseklik}} = \frac{d_o}{d_m}$$

Aynı zamanda, esas konstriksiyona tesir eden kuvvetlerle, modele tesir eden kuvvetler arasında da benzerlik olmalıdır. Bu benzerlik oranı kuvvetler ölçeğini verir. Bu ölçeği β ile gösterirsek:

$$\beta = \frac{\text{esas konstriksiyona tesir eden kuvvet}}{\text{modele tesir eden kuvvet}} = \frac{P_o}{P_m} \text{ olacaktır.}$$

Aynı şekilde gerilmeler, şekil değiştirmeler arasında da benzerlik münasebetleri olmalıdır.

$\sigma = E.\varepsilon$, $P = \sigma.d.L = E.\varepsilon.d.L$ şeklinde yazılabildiğinden:

$\varepsilon = \frac{P}{E.\varepsilon.d.L}$ olur. Diğer taraftan birim şekil değiştirme tarifine göre, modeldeki ve esas

konstriksiyondaki birim boydaki şekil değiştirmeler sırasıyla:

$$\varepsilon_o = \frac{\Delta L_o}{L_o} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta L_m}{L_m} \text{ dir. Bunları birbirine bölersek:}$$

$$\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_m} = \frac{L_m}{L_o} \cdot \frac{\Delta L_o}{\Delta L_m} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \quad \text{veya} \quad \varepsilon_o = \varepsilon_m \text{ olur.}$$

$$\frac{P_o}{E_o d_o L_o} = \frac{P_m}{E_m d_m L_m} \quad \text{veya} \quad \frac{P_o}{P_m} = \frac{E_o}{E_m} \cdot \frac{d_o}{d_m} \cdot \frac{L_o}{L_m} \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{E_o}{E_m} = \mu \text{ ile gösterirsek (elastisite modülleri ölçeği)}$$

$\beta = \mu \alpha^2$ bağıntısı elde edilir. Gerilmeler cinsinden ifade edersek:

$$\alpha = \frac{P}{dL} \text{ olduğundan } \frac{\sigma \cdot dL}{P} = 1 \text{ olur. Şu halde:}$$

$$\frac{\sigma_o d_o L_o}{P_o} = \frac{\sigma_m d_m L_m}{P_m} \quad \text{veya} \quad \frac{\sigma_o}{\sigma_m} = \frac{P_o}{P_m} \cdot \frac{d_m}{d_o} \cdot \frac{L_m}{L_o} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_m} = \gamma \text{ (gerilmeler ölçeği) ile gösterirsek:}$$

$$\gamma = \beta \cdot \frac{1}{\alpha^2} \text{ bağıntısı bulunur. } \beta \text{ yerine yukarıdaki değeri koyarsak:}$$

$$\gamma = \mu \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \mu \text{ bulunur. Şu halde gerilmeler ölçeği,}$$

elastisite modülleri ölçeğine eşit olmalıdır.

Şayet sistem üç eksenli gerilmeye maruz ise, ayrıca poisson oranlarının da eşit olması, yani $\gamma_o = \gamma_m$ olması gerekir.

Bazı durumlarda E ve ν 'nün gerilme dağılışı üzerine tesiri olmaz. İki boyutlu sistemlerde, elastisite teorisinde uygunluk şartı:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(\nu + 1) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \text{ şeklindedir.}$$

Bu gerilme denklemi E'den bağımsızdır. Dolayısıyla E, gerilme dağılımı üzerine tesir etmez. Diğer elastik sabit ν poisson oranının tesiri, kitle kuvvetlerinin dağılımına bağlıdır. Şayet

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0 \text{ ise, bu durumda poisson oranının tesiri de olmayacak demektir.}$$

Gerilmenin uygunluk denkleminin sağ tarafı üç halde sıfır olabilir:

- a) $X = Y = 0$ (kitle kuvvetlerinin olmaması hali)
- b) $X = c_1 = \text{sabit}$, $Y = c_2 = \text{sabit}$ (kitle kuvvetlerinin sabit olması hali)
- c) $X = c_1 \cdot x$; $Y = -c_2 \cdot y$ (kitle kuvvetlerinin x ve y 'nin lineer fonksiyonları olması)

Bu üç şarttan biri mevcutsa, gerilme uygunluk denkleminin sağ tarafı sıfır olacağından, gerilme dağılımı üzerinde ν 'nün tesiri olmayacaktır.

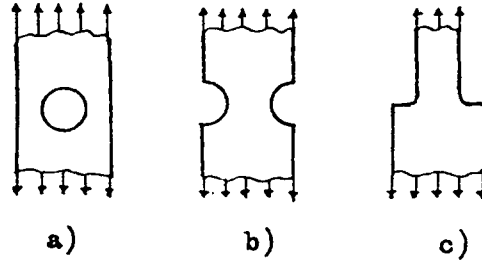
Yukarıdaki uygunluk denkleminde iki istisna vardır. Birinci istisna, iki boyutlu cisim çok bağlı ise bu denklem tatbik edilemez. İkinci istisna ise, cisim üzerinde delikler varsa ve bu deliklere tesir eden kuvvetlerin toplamı sıfır değilse, yine bu denklem tatbik edilemez. Bu hallerde gerilme dağılımının üzerine, E ve ν 'nün tesiri vardır.



6. ANİ KESİT DEĞİŞMESİ VE GERİLME YIĞILMASI PROBLEMİNİN ELASTİSİTE TEORİSİ YARDIMI İLE İNCELENMESİ

6.1. Giriş

Bu bölümde esas itibarıyla üç tip kesit değişmesi problemi ele alınacak ve bu problemlerin çözümüne yarayacak elastisite teorisi hakkında ön bilgiler verilecektir.



Şekil 6.1 Çeşitli kesitler

Bahis konusu üç tip problem:

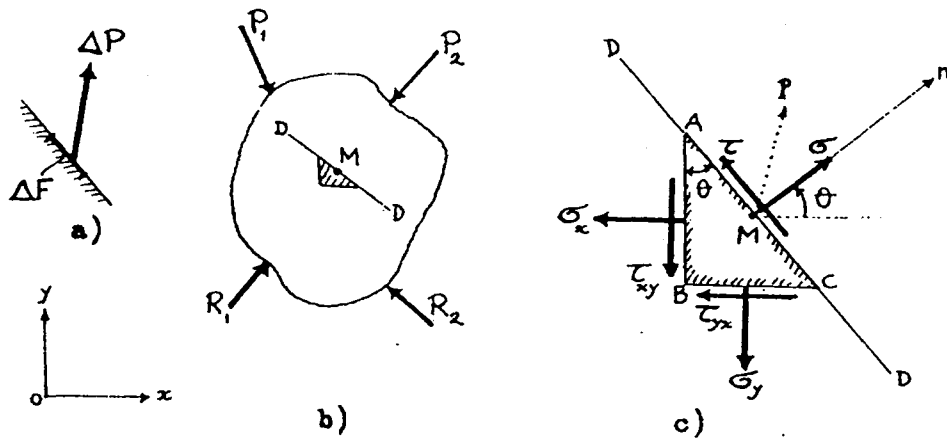
Şekil 6.1.a'da görülen levhada delik problemi,

Şekil 6.1.b'de görülen levhada çentik problemi,

Şekil 6.1.c'de görülen levha genişliğinin ani değişmesi problemidir.

6.2. Elastisite Teorisi Hakkında Ön Bilgiler

6.2.1. Düzlemsel Gerilme Problemleri



Şekil 6.2. Düzlem gerilme durumları

Şekil 6.2.b’de görüldüğü gibi herhangi bir tarzda yüklenmiş bir levha düşünelim. Levhanın bir M noktasındaki ΔF alanına isabet eden kuvvet ΔP ise:

$$P = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} \text{ değerine M noktasındaki gerilme denir (Şekil 6.2.a).}$$

Bu M noktasındaki gerilmeden bahsedebilmek için, bu noktadan geçen ve levhaya dik olan herhangi bir D-D düzleminin (veya bu düzlemin yatayla yaptığı θ açısının) verilmesi gereklidir.

Bu M noktasındaki gerilmenin (p 'nin), D-D düzleminin normali ve teğeti doğrultusundaki bileşenlerini σ ve τ ile gösterelim.

Şekil 6.2.c’de görüldüğü gibi, noktaya çok yakın olacak şekilde, levhadan ABC üçgen elemanı kesip çıkaralım. Bu elemanda:

AB yüzüne tesir eden gerilmeleri σ_x, τ_{xy}

BC yüzüne tesir eden gerilmeleri σ_y, τ_{yx} ile gösterelim.

AC yüzüne tesir eden gerilmeleri (σ ve τ gerilme bileşenleri)

Yukarıdaki dört gerilmeye ve düzlemin normalinin yatayla yaptığı θ açısına bağlayalım. Bunun için, bu elemana tesir eden bütün kuvvetlerin, normal yönünde olan izdüşümlerinin toplamının sıfır olduğunu yazarsak σ normal gerilmesini buluruz. Aynı şekilde, kuvvetlerin teğet yönündeki izdüşümlerinin toplamının sıfır olduğunu yazarsak τ koyma gerilmesini buluruz. Ayrıca, bütün kuvvetlerin M noktasına göre momentlerinin toplamının sıfır olduğunu yazarsak:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ bulunur.} \quad (6.1)$$

Levhanın kalınlığını 1 kabul edersek, normal yönündeki izdüşüm denklemi:

$$\sigma \cdot AC = \sigma_x \cdot AB \cdot \cos \theta - \sigma_y \cdot BC \cdot \sin \theta - \tau_{xy} \cdot AB \cdot \sin \theta - \tau_{yx} \cdot BC \cdot \cos \theta = 0$$

Bu ifadeyi AC ile bölersek ve $AB/AC = \cos \theta$, $BC/AC = \sin \theta$ olduğunu dikkate alırsak:

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (6.2)$$

olur.

$$\text{Buradan: } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \quad (6.3)$$

Aynı şekilde teğet yönünde izdüşüm denklemini yazarsak:

$$\tau = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + \sigma_y \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + \tau_{xy} \cdot \cos^2 \theta - \tau_{xy} \cdot \sin^2 \theta \quad (6.5)$$

bulunur. Trigonometrik ifadelerden faydalanılarak:

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \quad (6.6)$$

elde edilmiş olur. Şimdi bu M noktasından geçen düzlemler içinde hangisinde, max. normal gerilmenin ve max. kayma gerilmesinin meydana geldiğini araştıralım.

Normal gerilmenin max. ve min değerini bulmak için:

$\frac{d\sigma}{d\theta} = 0$ oluşturulmalıdır (6.3) denkleminin türevini alırsak:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0 \text{ bulunur. Buradan:}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.7)$$

bulunur. (6.7) ifadesini sağlayan θ_0 ve $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ gibi iki değer vardır. Bu değerler, normal gerilme σ 'nin max ve min. Olduğu düzlemleri belirtir. Bu düzlemlerde tesir eden gerilmelere, asal normal gerilmeler denir. Bu asal normal gerilmeler σ_1 ve σ_2 ile gösterilecektir. Bu asal gerilmeler (6.3) denkleminde $\theta = \theta_0$ ve $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ alınarak:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.8)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

olarak bulunur. Bu asal gerilmelerin bulunduğu düzlemlerde τ kayma gerilmeleri sıfırdır.

Kayma gerilmelerinin max. değeri için:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = -2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \cdot \sin 2\theta = 0 \quad \text{Buradan:}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (6.9)$$

bulunur.

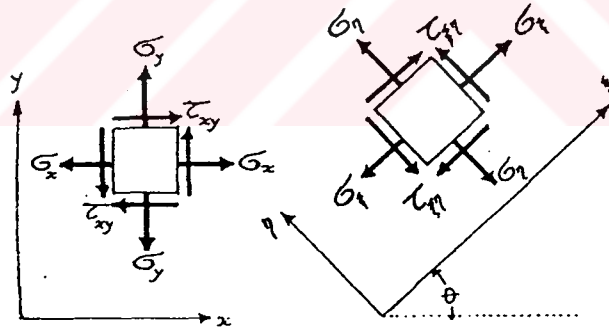
(6.9) ifadesini sağlayan θ_1 ve $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta_1$ gibi iki değer vardır. Bu düzlemler kayma gerilmesinin max. ve min. olduğu düzlemlerdir.

(6.6) denkleminde $\theta = \theta_1$ alınarak:

$$\tau_o = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.10)$$

bulunur.

6.2.1.2. Gerilme Halinin Transformasyonu



Şekil 6.6 Gerilme halinin transformasyonu

Şekil 6.6.a'da gösterildiği gibi, bir $(0xy)$ koordinat sisteminde verilmiş bir $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ gerilme durumu ele alalım.

Şimdi bu koordinat eksen takımını θ açısı kadar döndürülerek yeni bir $(0\zeta\eta)$ eksen takımı ele alalım. Bu yeni eksen takımındaki $(\sigma_\zeta, \sigma_\eta, \tau_{\zeta\eta})$ gerilmelerini, $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ gerilmeleri cinsinden ifade edelim:

$$\sigma_\zeta = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\eta} = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\zeta\eta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \cdot \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6.11)$$

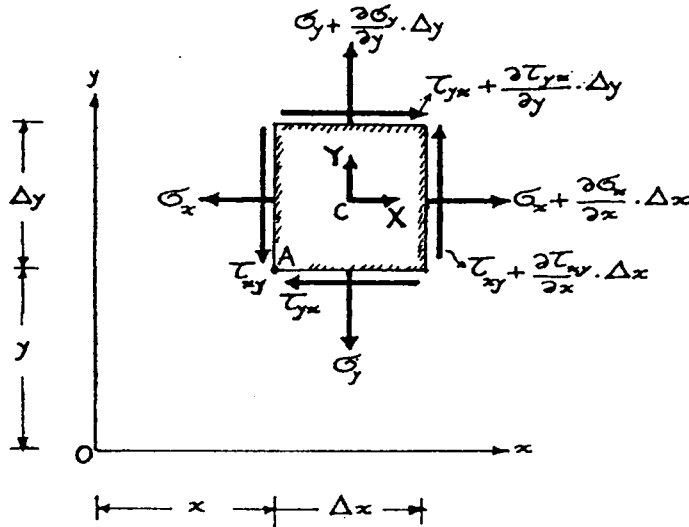
6.2.1.3. Düzlem Gerilme Halinin Diferansiyel Denklemleri

Levhanın herhangi bir A (x, y) noktasındaki gerilme halini belirten $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ değerleri, buldukları noktanın fonksiyonudur. Bu fonksiyonların sürekli olduklarını ve türevlerinin bulduklarını kabul edelim.

Şekil 6.7'de görüldüğü gibi levhadan A(x,y) noktasından geçen ve kenarları $\Delta x, \Delta y$ olan küçük bir eleman çıkartalım. Bu elemanın yüzlerine tesir eden gerilmeler şekilde gösterilmiştir. Ayrıca, levhanın birim hacmindeki kitle kuvvetlerinin x ve y yönündeki bileşenleri, X ve Y olsun. Elemana tesir kuvvetlerin x yönündeki izdüşümünün, sıfır olması şartından (levhanın kalınlığı 1 alınır):

$$-\sigma_x \cdot \Delta y + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \Delta x\right) \Delta y - \tau_{yx} \cdot \Delta x + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \Delta y\right) \Delta x + X \cdot \Delta x \cdot \Delta y = 0 :$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \quad \text{bulunur.}$$



Şekil 6.7 Gerilme halinin diferansiyel denklemleri

Aynı şekilde kuvvetlerin y yönünde izdüşümlerinin toplamının sıfır olduğunu yazarsak:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad \text{elde ederiz.}$$

Ayrıca bütün kuvvetlerin C noktasına göre momentinin sıfır olması şartından da: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ bulunur.

Bu şekilde elemanın dengesini şu iki diferansiyel denklemle ifade edebiliriz.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \text{a)} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad \text{b)}$$

6.2.1.4. Levhada Şekil Değiştirme Hali

Levha üzerinde A ve B noktaları gözönüne alalım. Levha dış yüke maruz bırakıldığında, levhada bir şekil değiştirme durumu meydana gelecektir. Bu şekil değiştirme durumu nedeniyle, A noktası A' , B noktası B' , O noktası O' noktalarına gelecektir. O noktasının x ve y yönündeki yer değiştirme değerleri u ve v ise, A noktasının x yönündeki yer değiştirme değeri:

$$u_A = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$

y yönündeki yer değiştirme değeri ise:

$$v_A = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

olacaktır. Aynı şekilde B noktasının x yönündeki yer değiştirme değeri:

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y$$

y yönündeki yer değiştirme değeri:

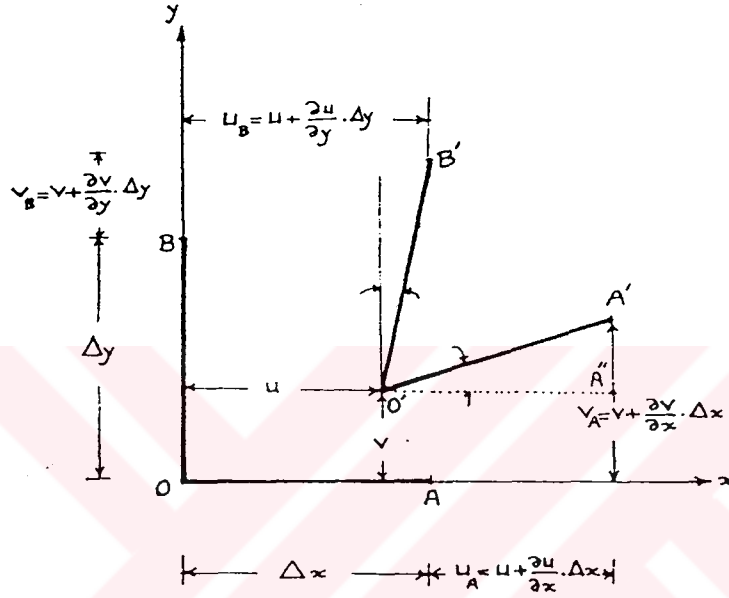
$$v_B = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y \quad \text{olacaktır. Birim boydaki uzama tarifine göre}$$

$$\epsilon_x = \frac{O'A'' - OA}{OA} \quad \text{dır.}$$

$$O'A'' = \Delta x + u_A - u = \Delta x + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x\right) - u = \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$

OA = Δx olduğundan:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ bulunur.}$$



Şekil 6.8 Şekil değiştirme hali

$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, ve OAB dik açısı ile O'A'B' açısı arasındaki açı değişimi:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \text{ olarak elde edilir.}$$

Şu halde levhadaki şekil değiştirmeyi ifade eden $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$ üç büyüklük, u ve v gibi iki yer değiştirme fonksiyonundan aşağıdaki denklemler yardımıyla çıkartılabilir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{a)}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{b)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{c)}$$

(6.13)

6.2.1.5. Gerilme ve Şekil Değişirme Arasındaki Bağlılıklar

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy}\end{aligned}\tag{6.15}$$

6.2.1.6. Düzlem Gerilme Halinin Genel Denklemleri

Levhada gerilme bileşenleri $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ olmak üzere üç bilinmeyen şekil değişirme bileşenleri $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ olmak üzere üç bilinmeyen ve yer değişirme bileşenleri (u, v) olmak üzere iki bilinmeyen vardır. Toplam bilinmeyen sayısı sekizdir.

Çıkarılan denklem sayısı ise:

2 adet (6.12) denklemleri

3 adet (6.13) denklemleri

3 adet (6.15) denklemleri olmak üzere 8 tanedir. Şu halde bu hiperstatik problem çözülebilecek duruma gelmiş olur.

Mühendislikte daha çok gerilmelerle ilgileniriz. Bunun için σ_x, σ_y ve τ_{xy} fonksiyonlarını esas büyüklük olarak ele alalım. Bu suretle problem, gerilme problemine indirgenmiş olur.

(6.15) denklemleri, (6.14) uygunluk şartında yerine koyulursa:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{6.16}$$

bulunur. (6.12.a) denkleminin x 'e göre, (6.12.b) denkleminin y 'ye göre kısmi türevlerini alırsak.

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \text{ bulunur. Bu iki denklemi toplarsak:}$$

$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}$ bulunur. (6.16)'da yerine koyarsak:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (6.17)$$

uygunluk denklemini elde edilmiş olur.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.18) \quad (\Delta \text{ 'ya Laplace operatörü denir}).$$

İle gösterilirse, (6.17) ve (6.18) den:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (6.19)$$

olarak bulunur. Böylece, σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilme fonksiyonlarını elde etmek için 3 denklem elde edilmiş oldu. Bu denklemler:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dengenin diferansiyel denklemleri}$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \rightarrow \text{uygunluk denklemini}$$

Kitle kuvvetleri (ağırlık, yerçekimi vs gibi) birçok düzlem problemlerde, gerilmelere oranla oldukça küçüktür. Bu nedenle ihmal edilebilir. Bu durumda $X = Y = 0$ alınırsa (6.20) denklemleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \Delta(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

şeklinde olur. Kitle kuvvetlerinin $X = X_0 = \text{sabit}$ ve $Y = Y_0 = \text{sabit}$ olması halinde ise:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X_o &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y_o &= 0 \\
\Delta(\sigma_x + \sigma_y) &= 0
\end{aligned} \tag{6.22}$$

şeklindedir.

6.2.1.7. Gerilme Fonksiyonları

Düzlemde gerilme problemi, Airy gerilme fonksiyonu adı verilen $F(x,y)$ gibi çift değişkenli bir fonksiyonu hesaba dahil etmekle çok basitleşir. Bu durumda problem, bu $F(x,y)$ fonksiyonunun belirtilmesine indirgenmiş olur.

1.Önce kitle kuvvetlerinin sıfır, yani $X=Y=0$ olması halini ele alalım. Bu durum (6.21) denklemleri ile hesaplanacak olan $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerilmelerinin, bir $F(x,y)$ fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevleri olduğunu kabul edelim. Yani:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\
\tau_{xy} &= \frac{-\partial^2 F}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

olsun. Bu kabulün yapılmasıyla, (6.21) denklemlerinin ilk ikisi özdeş olarak sağlanır. Uygunluk şartını ifade eden üçüncü denklemde (6.23) te tarif edilen σ_x ve σ_y gerilmeleri yerine koyulursa:

$$\begin{aligned}
\sigma_x + \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \Delta F \\
\Delta(\sigma_x + \sigma_y) &= \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

denklemini bulunur. Böylece gerilme probleminin çözümü, (6.24) diferansiyel denklemini sağlayan $F(x,y)$ fonksiyonunun bulunmasına indirgenmiş olur.

Bu $F(x,y)$ fonksiyonu $\Delta \Delta F = 0$ diferansiyel denklemini çözerek belirttikten sonra (6.23)'te gösterilen ifadelere göre türev olmak suretiyle, gerilmeler elde edilir. (6.24) diferansiyel

denklemini sağlayan birçok fonksiyonlar olduğuna göre, bunlar için de problemin çözümü, sınır şartlarını sağlayan çözüm olacaktır.

2. $X = X_0 = \text{sabit}$ ve $Y = Y_0 = \text{sabit hali}$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = X_0 \cdot x$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = Y_0 \cdot y \quad (6.25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

alınmakla, (6.22) denklemlerinin ilk ikisi yine sağlanmış olur. Uygunluk şartını ifade eden üçüncü denklem ise:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\Delta F = 0 \quad \text{şeklinde olur.}$$



6.2.2. Düzlemde Gerilme Probleminin Polar Koordinatlarla İncelenmesi

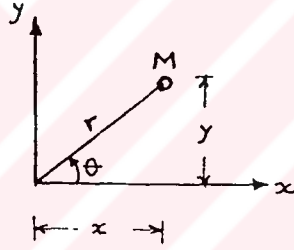
6.2.2.1. Giriş

Geçen paragrafta düzlemde gerilme probleminin çözümünün, $\Delta\Delta F$ şeklinde 4. mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümüne indirildiğini görmüştük. Çeşitli çözümler için de problemin çözümü, sınır şartlarını sağlayan çözümdür.

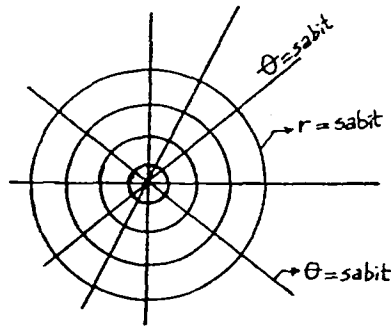
Levhanın kenarları birbirine dik doğrular şeklinde ise, sınır şartlarının ifadesi daha kolay olacağı için, Kartezyen koordinat sistemi ile çalışmak uygun olacaktır. Halbuki levhanın çevresi daire şeklinde ise veya levhada dairesel delik olması halinde ise, polar koordinat sistemi ile çalışmak daha elverişlidir.

Bu sebeple bu bölümde, daha önce Kartezyen koordinat sistemine göre çıkartılmış olan gerilme probleminin, polar koordinat sisteminde ne şekilde ifade edileceği incelenecektir.

6.2.2.2. Kartezyen Koordinat Sisteminin Polar Koordinat Sistemine Dönüştürülmesi



Şekil 6.9 Kartezyen koordinat sistemi



Şekil 6.10 Polar koordinat sistemi

Kartezyen O_{xy} koordinat sisteminde verilen bir $M(x,y)$ noktasının, polar koordinatlardaki ifadesini bulalım. (Şekil 6.9)

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

(6.26)

dir. Bu ifadelerin karelerini alıp toplarsak:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{a)} \quad (6.26.a.b.)$$

ve ikinci ifadeyi birinciye bölersek:

$$y/x = \tan \theta \text{ bulunur.} \quad \text{b)}$$

Şu halde M noktasının polar koordinatlarla ifadesi:

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a)} \quad (6.27)$$

$$\theta = \text{Arc tan} \frac{y}{x} \quad \text{b)}$$

şeklinde bulunur.

(6.27.a) denkleminde $r = \text{sabit}$ alırsak, bu denklem bir daire gösterir. (6.27.b) denkleminde $\theta = \text{sabit}$ alırsak bu denklem bir doğru gösterir. Böylece bir koordinatı sabit alarak elde edilecek şebeke Şekil 6.10'da görüldüğü gibi olur.

(6.26.a) denklemlerinin diferansiyellerini alırsak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (6.28)$$

elde edilir.

6.2.2.3. Gerilme Probleminin Polar Koordinat Sisteminde İfadesi

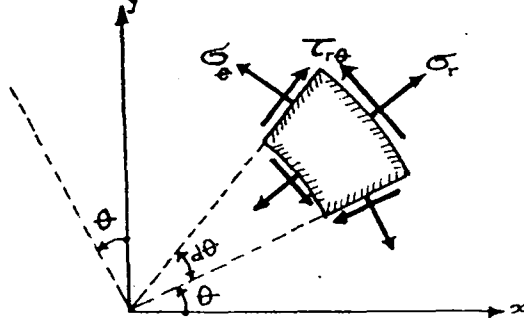
Polar koordinat sistemindeki gerilme bileşenlerini, Şekil 6.11'deki gibi gösterelim.

(6.11) dönüştürme formüllerini kullanırsak:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \cdot \sin^2 \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta$$

ifadelerini buluruz. (6.29) denklemleri, kartezyen koordinat sistemindeki $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ gerilmelerini, polar koordinatlara dönüştürmeye yarar. Ters dönüştürme için θ yerine $-\theta$ koymak yeterlidir.



Şekil 6.11 Kartezyen koordinat sisteminin polar koordinat sistemine dönüşümü

(6.12) denkleminde, (6.26) ve (6.28) dönüştürmelerini kullanarak, kartezyen koordinatlardaki diferansiyel denge denkleminin, polar koordinatlardaki karşılığı elde edilir:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0 \quad (6.30)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_\theta = 0$$

Burada K_r ve K_θ birim hacme etkiyen kitle kuvvetlerinin, radyal ve buna dik doğrultudaki bileşenleridir.

6.2.2.4. Gerilme Probleminin Genel Denklemleri

Polar koordinat sisteminde gerilme probleminin çözümü için, (6.30) diferansiyel denklemine ilaveten bir denklem daha gereklidir. Bu denklem, (6.19) uygunluk denklemdir. Bu uygunluk denkleminin polar koordinatlardaki karşılığı, gerekli dönüştürmeleri kullanarak:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial K_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} + \frac{K_r}{r} \right) \quad (6.31)$$

şeklinde bulunur.

1. Hal: $K_r = K_\theta = 0$ hali.

Hesaplara Airy gerilme fonksiyonunu dahil edersek, yani gerilmeleri bir $F(r, \theta)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevleri şeklinde ifade edersek:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \quad (6.32)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r,\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

alınmak suretiyle, (6.30) denge denklemleri özdeş olarak sağlanır.

Bu durumda uygunluk denklemi:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (6.33)$$

şeklinde olur.

Laplace operatörünün polar koordinatlardaki karşılığı, (6.26) ve (6.28) dönüştürmelerini kullanarak:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.34)$$

olarak bulunur. O halde uygunluk denklemi:

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (6.35)$$

şeklini alır ki bu da bize, $F(r, \theta)$ fonksiyonunun sağlaması gereken diferansiyel denklemi vermiş olur.

2. Hal: Kitle kuvvetlerinin sabit olması yani $X = X_0 = \text{sabit}$ ve $Y = Y_0 = \text{sabit}$ hali:

$$K_r = X_0 \cos \theta + Y_0 \sin \theta$$

$$K_\theta = -X_0 \sin \theta + Y_0 \cos \theta$$

olacak demektir. Bu halde gerilmeler:

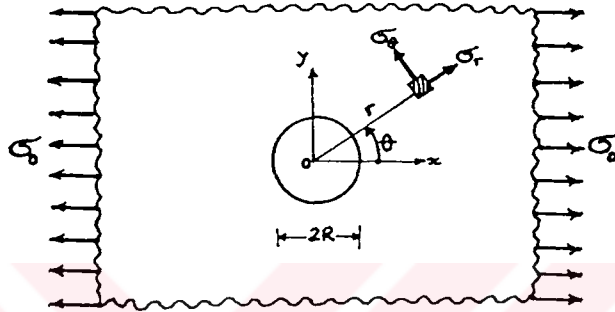
$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} - r(X_0 \cos \theta + Y_0 \sin \theta)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - r(X_o \cos \theta + Y_o \sin \theta)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (6.36)$$

şeklinde kabul edilirse, (6.30) diferansiyel denklemleri yine özdeş olarak sağlanır. Uygunluk denklemleri de (6.35) denklemleri ile aynı olur.

6.2.2.5. Levhada Delik Probleminin Polar Koordinatlarla Çözümü



Şekil 6.12 Levhada delik durumu

Şekil 6.12’de görüldüğü gibi, sonsuz genişlikte ve uzunlukta olan ve ortasında R yarıçaplı bir delik bulunan levhayı ele alalım. Levhanın σ_0 değerinde üniform çekme gerilmesine maruz olduğunu düşünelim. Şimdi bu problemin polar koordinatlarla çözümünü yapmaya çalışalım.

Gerilmelerin çift değişkenli bir $F(r, \theta)$ fonksiyonundan üretildiğini kabul edersek, (6.35) uygunluk şartına göre bu Airy gerilme fonksiyonunun, $\Delta \Delta F = 0$ diferansiyel denklemi sağlaması gerekecektir.

$$F(r, \theta) = Ar^2 + B \ln r + (Cr^2 + Dr^4 + \frac{E}{r^2} + F) \cdot \cos 2\theta$$

olarak seçersek, bu $F(r, \theta)$ fonksiyonu, $\Delta \Delta F = 0$ diferansiyel denklemini sağlar. Bundan üretilecek gerilme bileşenleri, (6.31) denklemlerinden şöyle bulunur.

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} = 2A + \frac{B}{r^2} - \left(2C + \frac{6E}{r^4} + \frac{4F}{r^2} \right) \cdot \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 2A - \frac{B}{r^2} + \left(2c + 12Dr^2 + \frac{6E}{r^4} \right) \cdot \cos 2\theta \quad (6.37)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \left(2C + 6Dr^2 - \frac{6E}{r^4} - \frac{2F}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

Bu ifadelerdeki A, B, C, D, E, F sabitlerinin bulunması için problemin sınır şartlarını gözönüne almak gerekecektir. Bu sınır şartları şunlardır:

$$r = \infty \text{ da } \begin{cases} \sigma_x = \sigma_o \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \text{ veya (6.29)dan } \rightarrow \begin{cases} \sigma_r = \sigma_o \cdot \cos^2 \theta = \frac{\sigma_o}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta = \sigma_o \cdot \sin^2 \theta = \frac{\sigma_o}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} = -\sigma_o \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{\sigma_o}{2} \cdot \sin 2\theta \end{cases}$$

$$r = R \text{ için } \begin{cases} \sigma_r = 0 \rightarrow \text{buradan : } 2A + \frac{B}{R^2} - \left(2C + \frac{6E}{R^4} + \frac{4F}{R^2} \right) \cdot \cos 2\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \rightarrow \text{buradan : } \left(2C + 6D \cdot R^2 - \frac{6E}{R^4} - \frac{2F}{R^2} \right) \cdot \sin 2\theta = 0 \end{cases}$$

θ 'nın her değeri için, bu şartların sağlanması gerekeceğinden:

$$2A + \frac{B}{R^2} = 0$$

$$2C + 6D \cdot R^2 - \frac{6E}{R^4} - \frac{2F}{R^2} = 0$$

$$2C + \frac{6E}{R^4} + \frac{4F}{R^2} = 0 \quad \text{ olması gerekir.}$$

$$r = \infty \text{ da } \sigma_r = \frac{\sigma_o}{2} (1 + \cos 2\theta) \text{ şartından: } 2A + 0 - (2C + 0 + 0) \cos 2\theta = \frac{\sigma_o}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

buradan: $2A - 2C \cdot \cos 2\theta = \frac{\sigma_o}{2} + \frac{\sigma_o}{2} \cdot \cos 2\theta$ bulunur. Bu özdeşlikten:

$$2A = \frac{\sigma_o}{2} \quad \text{veya} \quad A = \frac{\sigma_o}{4} \quad \rightarrow B = -\frac{R^2}{2} \sigma_o$$

$$-2C = \frac{\sigma_o}{2} \quad \text{veya} \quad C = -\frac{\sigma_o}{4} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

$r = \infty$ da σ_θ 'nın sonsuz olmaması için $D = 0$ olması gerekir. $r = \infty$ da $\tau_{r,\theta} = -\frac{\sigma_o}{2} \cdot \sin 2\theta$

şartından: $(2C+0-0-0)\sin 2\theta = -\frac{\sigma_o}{2} \cdot \sin 2\theta$ buradan: $2C = -\frac{\sigma_o}{2}$ bulunur ki, bu değer daha önce

bulunan C değeridir. A, C, D için bulunan bu değerler daha önce $r = R$ için bulunan şartlarda yerine koyulursa:

$$E = -\frac{R^4}{4} \cdot \sigma_o$$

$$F = \frac{R^2}{2} \cdot \sigma_o \quad \text{olarak bulunur.}$$

Böylece sınır şartlarından elde edilen A, B, C, D, E, F sabitleri yerine koyularak, gerilme bileşenleri için:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r,\theta} &= -\frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right] \quad \text{bulunmuş olur.} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Delik kenarındaki gerilmeleri bulmak istersek, bu (6.38) denklemlerinde $r = R$ alınmalıdır.

Bu durumda:

$$\sigma_r = \tau_{r,\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_o}{2} (2 - 4 \cdot \cos 2\theta) = \sigma_o (1 - 2 \cos \theta) \quad \text{olarak bulunur.}$$

Delik boyunca σ_θ gerilmelerinin değişimi, Şekil 6.13'de görülmektedir.

$$\theta = 0 \quad \text{veya} \quad \theta = \pi \quad \text{için} \quad \sigma_\theta = -\sigma_o \quad \text{olur}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{veya} \quad \theta = 3\frac{\pi}{2} \quad \text{için} \quad \sigma_\theta = 3\sigma_o \quad \text{olur. Buna göre, ortasında delik bulunan}$$

sonsuz genişlikteki levhadaki en büyük gerilme, deliksiz levhadaki gerilmenin 3 katıdır.

Max. gerilmenin, σ_o gerilmesine oranına k dersek, bu k değerine gerilme yığılması faktörü denir.

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} = \frac{3\sigma_o}{\sigma_o} = 3 \text{ bulunmuş olur.}$$

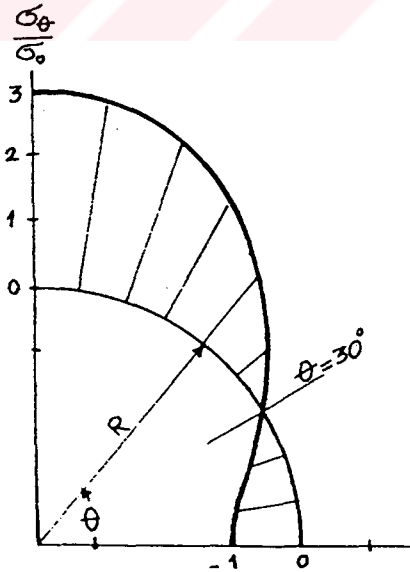
Şimdi, x eksenini ve y eksenini boyunca gerilmeleri bulalım. x eksenini boyunca gerilmeleri bulmak için (6.38) denkleminde $r = x$ ve $\theta = 0$ almak yeterlidir. Bu durumda bu denklemler:

$$\sigma_r = \sigma_x = \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right) + \left(1 - \frac{4R^2}{x^2} + \frac{3R^4}{x^4} \right) \right] = \frac{\sigma_o}{2} \left[2 - \frac{5R^2}{x^2} + \frac{3R^4}{x^4} \right]$$

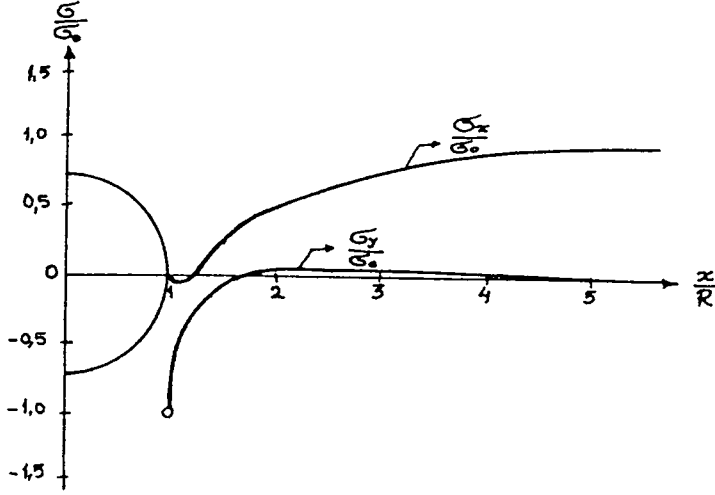
$$\sigma_\theta = \sigma_y = \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right) - \left(1 + \frac{3R^4}{x^4} \right) \right] = \frac{\sigma_o}{2} \left[\frac{R^2}{x^2} - \frac{3R^4}{x^4} \right] \quad (6.39)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy} = 0$$

olarak bulunur. Bu gerilmeler, x eksenini boyunca çeşitli $\frac{x}{R}$ değerleri için tertip edilirse, Şekil 6.14'deki eğriler elde edilir.



Şekil 6.13 Gerilme eğrileri



Şekil 6.14 Howland eğrileri

Benzer şekilde, y eksenini boyunca gerilmeleri bulmak istersek, $r = y$ ve $\theta = 90^\circ$ almak gerekir.

Bu durumda:

$$\sigma_r = \sigma_y = \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{y^2} \right) + \left(1 - \frac{4R^2}{y^2} + \frac{3R^4}{y^4} \cdot (-1) \right) \right] = \frac{\sigma_o}{2} \left[\frac{3R^2}{y^2} - \frac{3R^4}{y^4} \right]$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x = \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{y^2} \right) - \left(1 + \frac{3R^4}{y^4} \right) \cdot (-1) \right] = \frac{\sigma_o}{2} \left[2 + \frac{R^2}{y^2} + \frac{3R^4}{y^4} \right] \quad (6.40)$$

olarak bulunur. Bu gerilmeler, y eksenini boyunca çeşitli $\frac{y}{R}$ değerleri için tertip edilirse, Şekil 6.15'deki eğriler elde edilir.

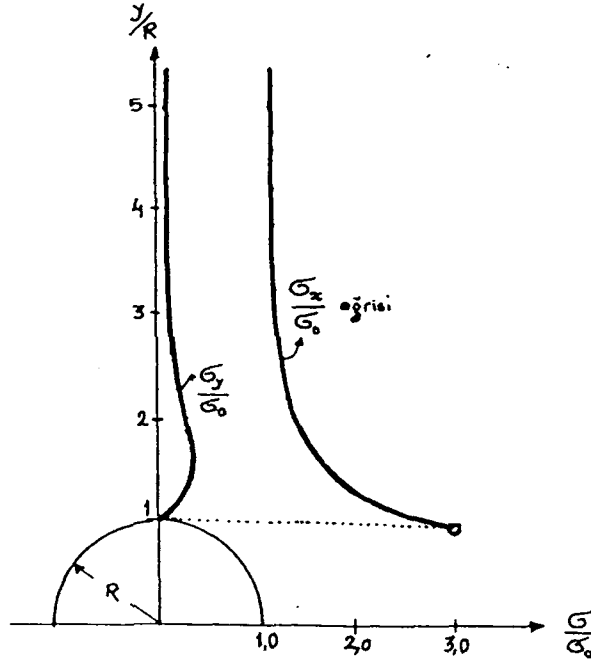
Levha genişliğinin, Şekil 6.16'da görüldüğü gibi, sonlu bir D genişliğinde olması halinde çözüm yine Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak yapılabilir. Bu durumda sınır şartları:

$$r = R \quad \text{de} \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

$$x = \infty \quad \text{de} \quad \sigma_r = \sigma_o \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$y = \mp \frac{D}{2} \quad \text{de} \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

olarak alınmalıdır. Bu sınır şartlarını sağlayan gerilme fonksiyonunun bulunması oldukça zordur.



Şekil 6.15 Howland eğrileri

Bu problem Howland tarafından ele alınmıştır. Howland, D levha genişliğinin = 24R olması halinde Şekil 6.17'de görülen değerleri elde etmiştir.

Şekil 6.17'de kalın çizgi ile gösterilmiş eğriler, sonlu genişlikteki levhada, Howland çözümüne göre bulunmuş eğrilerdir.

Nokta ile gösterilmiş değerler ise, levhanın sonsuz genişlikteki çözümüne göre bulunmuş değerlerdir.

Şekil 6.17'de görüldüğü gibi, bu durumda (yani D = 24R) Howland çözümü, sonsuz genişlikteki levha çözümüne göre az fark etmektedir.

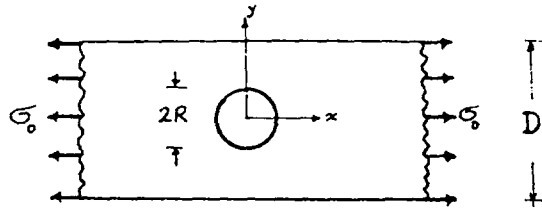
Doğaldır ki, $\frac{2R}{D}$ oranı büyüdükçe, k gerilme yığılması faktörü 3 değerinden farklı olacaktır.

Çeşitli $\frac{2R}{D}$ oranlarına göre, k faktörünün değişmesi Şekil 6.18'de görülmektedir. Şekil

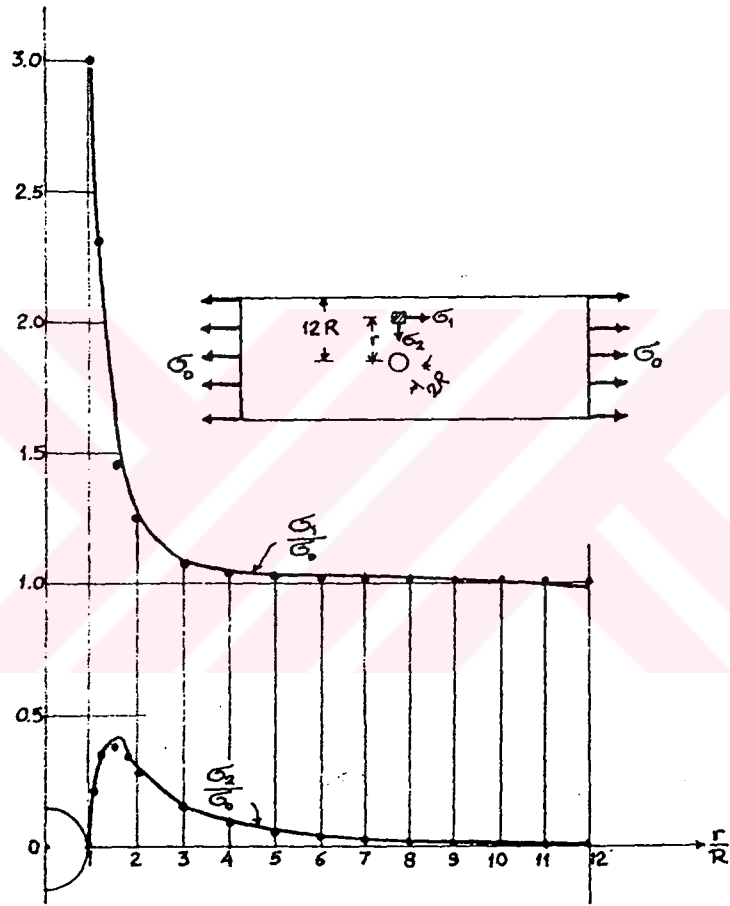
6.18'de sol taraftaki eğri, max. gerilmenin, σ_0 gerilmesine oranına göre bulunmuş k gerilme yığılması eğrisidir. Şekil 6.18'de sağ taraftaki eğri ise, max. gerilmenin, zayıflamış kesitteki ortalama gerilmeye göre bulunmuş k gerilme yığılması eğrisidir.

max. σ_2 değeri olarak, D genişliğindeki levhada:

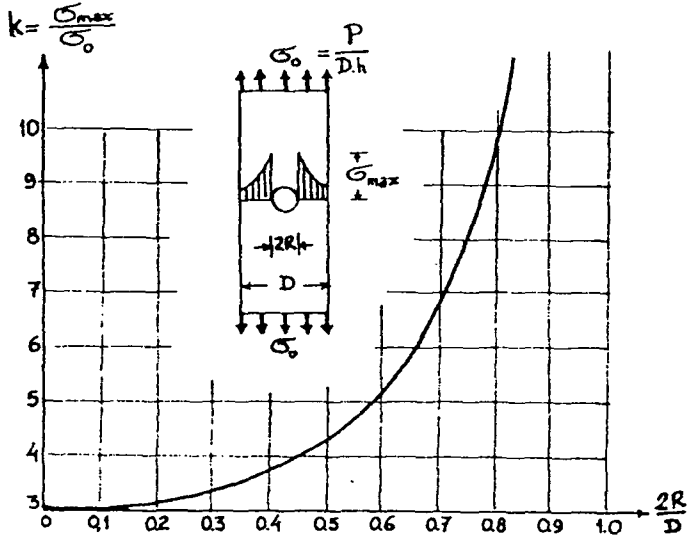
$$\max. \sigma_2 = \frac{3}{8} \sigma_0 \left[1 - 0,6 \left(\frac{2R}{D} \right) \right] \text{ olarak alınabilir.}$$



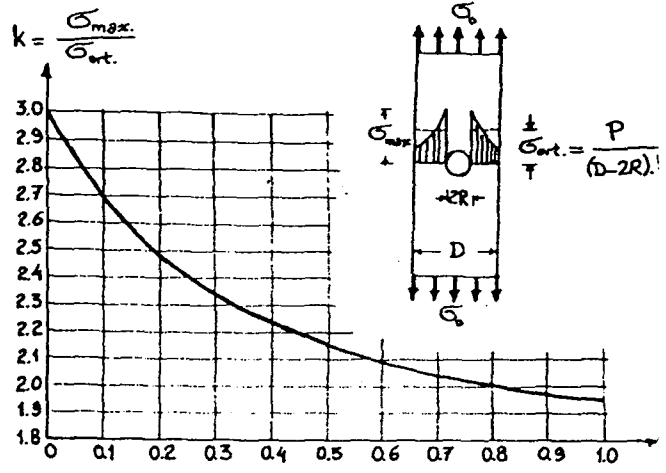
Şekil 6.16 Çekme kuvvetine maruz delikli levha



Şekil 6.17 Howland çözümü eğrileri



$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}$ eğrisi



$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ortamd}}$ eğrisi

Şekil 6.18 Yığılma gerilmesi faktörü eğrileri

7. DENEYLER

7.1. Giriş

Bu bölümde, geçen bölümde elastisite teorisi ile incelenen, problemler yani: a) Levhada delik, b) Levhada çentik problemleri, deneysel olarak ele alınacaktır.

Fotoelastik analizle elde edilen, izokromat ve izokliniklerden faydalanılarak, asal gerilmeler ayrı ayrı bulunacaktır. Bu problemlerin fotoelastik analizine geçmeden önce, modellerin yapılmasında kullanılan malzemenin cinsinden ve bu malzemenin (f) fotoelastisite sabitinin bulunmasından bahsedelim.

7.2. Model Malzemesinin (F) Fotoelastisite Sabitinin Bulunması

Deneysel olarak, PSM-1 simgesi ile gösterilen, Polyester model tabakaları kullanılmıştır. Bu malzemenin fotoelastisite sabiti, Bölüm 5'deki tabloda $f = 7\sim 8$ kg/cm olarak verilmiş olmasına rağmen, bu sabitin Bölüm 3.2.3'te izah edilmiş deneyle tespit edilmesi gerekmektedir. Bölüm 3.2.3.'te çekme deneyi ile fotoelastisite sabitinin bulunmasında:

$f = \frac{P}{D.N}$ olarak bulunmuştur. Burada, P modele uygulanan yükü, D modelin genişliği, N ise izokromat mertebesi idi. Böylece belirli bir P kuvvetine karşılık gelen N izokromat mertebesi ölçülürse, (f) fotoelastisite sabiti kolayca bulunabilir.

Kalibrasyon deneyinde, $D = 3,80$ cm genişliğinde bir model kullanılmıştır. (f) sabitinin sağlıklı olarak tespit edilmesi için, modele çeşitli P yükleri uygulanmış ve her yüke karşılık gelen (N) izokromat mertebesi, Babinat-Soleil kompansatörü ile bulunmuştur. Neticeler tabloda gösterilmiş ve her yüklemde bulunan (f) değerlerinin ortalaması alınarak, malzemenin fotoelastisite katsayısı $f = 8,00$ kg/cm olarak bulunmuştur.

P yükleri y ekseninde, N izokromat mertebelerini x ekseninde gösterirsek, Şekil 7.1'de görüldüğü gibi P ve N arasındaki bağıntı lineer bir doğru olur. Bu doğrunun eğimi (f) değerine eşittir.

Model malzemesinin Elastisite Sabiti:

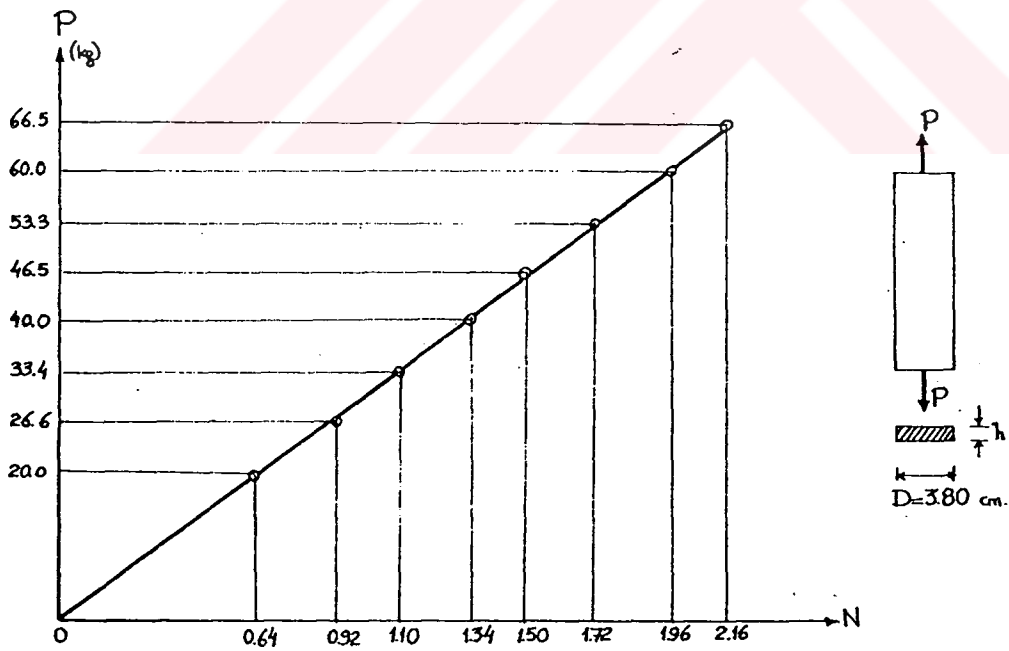
$E = 23,850$ kg/cm² ve Poisson oranı: $\nu = 0,38$ dir.

Çizelge 7.1 Deney verileri

Deney No	P (kg)	N	f (kg/cm)
1	20,0	0,64	8,20
2	26,6	0,92	7,60
3	33,4	1,10	7,95
4	40,0	1,34	7,85
5	46,5	1,50	8,15
6	53,3	1,72	8,15
7	60,0	1,96	8,05
8	66,5	2,16	8,12

$$\sum f = 64,07$$

$$\frac{\sum f}{8} = \frac{64,07}{8} \cong 8,00$$

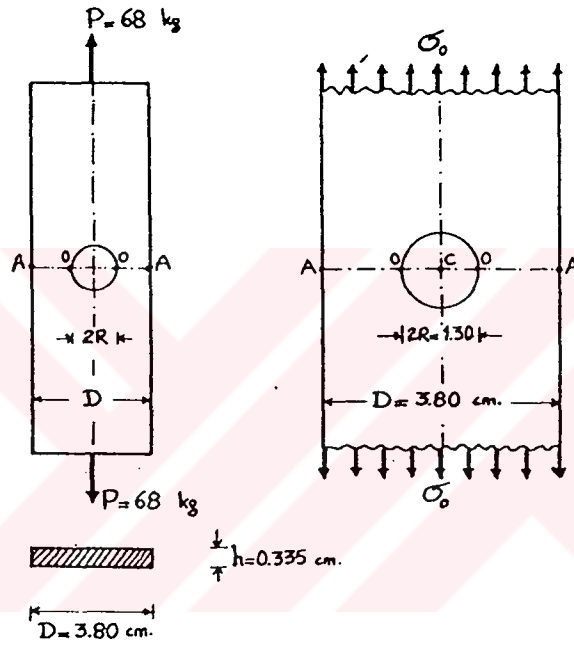


Şekil 7.1 Kalibrasyon eğrisi

7.3. Eksenel Çekme Kuvvetine Maruz, Ortasında Delik Bulunan Levha Probleminin Fotoelastik Analizi

7.3.1. Gerilmenin Max. Olduğu Kesitte σ_1 ve σ_2 Asal Gerilmelerinin Ayrı Ayrı Bulunması

Birinci deney olarak, Şekil 7.2'de boyutları gösterilmiş, $P = 68$ kg. çekme kuvvetine maruz ve ortasında dairesel delik bulunan levhada, deliğin merkezinden geçen A-A simetri çizgisi boyunca asal gerilmeler (σ_1 ve σ_2) bulunacaktır.

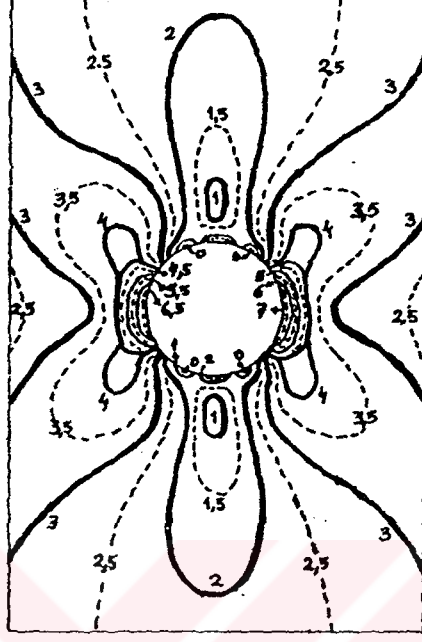


Şekil 7.2 Ortası delik levha

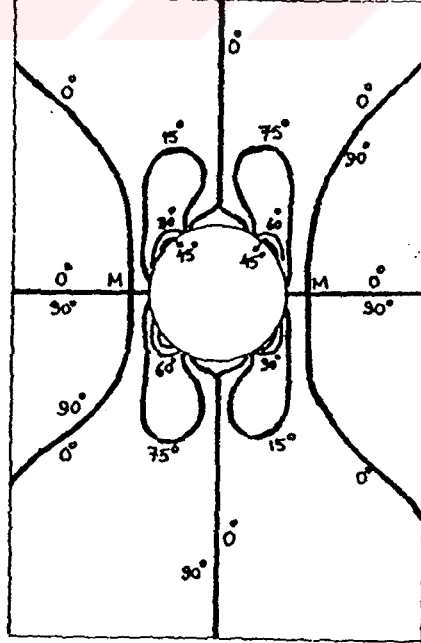
Bu deneye ait karanlık saha izokromatlarına (tam mertebe izokromatları) ait fotoğraf (F.1) de, aydınlık saha izokromatlarına (yarım mertebe izokromatları) ait fotoğraf ise (F.2) de görülmektedir. Bu fotoğraflar monokromatik ışık ile çekilmiştir. Beyaz ışık kaynağı ile çekilmiş fotoğraf ise (F.3) de görülmektedir. (Deneylerle ilgili bütün fotoğraflar tezin sonunda verilmiştir.

Fotoğraf 1 ve fotoğraf 2'deki izokromatlar, şeffaf kağıttan faydalanılmak suretiyle üst üste çizilirse, Şekil 7.3'te görüldüğü gibi, levhanın tümüne ait izokromat mertebeleri belirlenmiş olur. Şekil 7.3'te, tam mertebe izokromatları kalın çizgilerle, yarım mertebe izokromatları ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

İzokromatların mertebelerinin tayininde Babinat-Soleil kompansatörü kullanılmıştır. Fotoğraf 4'te, 0° izoklinikleri görülmektedir. Analizörün her 15° döndürülmesine karşılık gelen izoklinikler tespit edilmiş ve levhanın tümüne ait izoklinikler Şekil 7.4'te gösterilmiştir.



Şekil 7.3 Tam ve yarım mertebe izoklinikleri



Şekil 7.4 İzoklinikler

Şekil 7.3'teki izokromatların, OA çizgisini kestiği noktalardan dik çizerek ve bu dikler üzerinde (N) izokromat mertebelerini belli bir ölçekle alarak, OA çizgisine ait $(\sigma_1 - \sigma_2)$ eğrisini çizebiliriz. (Şekil 7.5)

Fotoelastisite esas denklemine göre, $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{h} \cdot N$ idi. (0) noktası yüksüz bir sınır noktası olduğundan dolayı, bu noktada $\sigma_2 = 0$ olacak ve $\sigma_1 = \frac{f}{h} \cdot N$ 'den değeri direkt olarak bulunabilecektir ki, bu değer $(\sigma_1 - \sigma_2)$ eğrisinin 0 noktasındaki değeri olacaktır. A noktası için de aynı durum söz konusudur.

Fotoelastisite denkleminde $N = 1$ alırsak:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{h} = \frac{8.00}{0.335} = 24,0 \text{ kg/cm}^2 \text{ olacaktır. Yani y ekseninde gösterilmiş olan, 1}$$

izokromat = $24,0 \text{ kg/cm}^2$ değerinde bir gerilmeye karşılık gelecek demektir. OA çizgisi boyunca ortalama gerilmeyi bulalım ve bunun izokromat olarak karşılığını, Şekil 7.5'te kesik çizgilerle gösterelim. Bu ortalama gerilme:

$$\sigma_{ort} = \frac{68}{0,335(3,80 - 1,30)} = 81,2 \text{ kg/cm}^2 \text{ dir. 1 izokromat} = 24,0 \text{ kg/cm}^2 \text{ olduğundan, bu}$$

ortalama gerilme:

$$N = \frac{81,2}{24,0} = 340 \text{ izokromat mertebesine tekabül eder.}$$

σ_2 eğrisinin (0) başlangıç noktasındaki teğetin eğimi:

$$(\tan \beta_2)_o = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)_o}{\rho_o} = -\frac{N_o}{R} \text{ ,den bulunabilir. Burada:}$$

$N_o = (0)$ noktasındaki izokromat mertebesi

$R = (0)$ noktasındaki eğrilik yarıçapıdır.

OA uzunluğu birim olarak alınır dairenin R yarıçapı:

$$R = \frac{OC}{OA} = \frac{0,65}{1,25} = 0,52 \text{ olur. O halde:}$$

$(\tan \beta_2) = -\frac{7,20}{0,52} = 13,8$ olarak bulunur. Buna göre σ_2 eğrisinin 0 noktasındaki $(T_2)_0$ teğeti çizilebilir.

σ_1 eğrisinin B noktasındaki teğeti $(T_1)_B$ şöyle çizilir.

$(\sigma_1 - \sigma_2)$ eğrisine B noktasından çizilen teğetle, $(T_2)_0$ teğetinin K kesim noktası bulunur. K noktasından, OA'ya çizilen dik uzunluğu olan KL kadar üst tarafta alınarak L' noktası bulunur. L' noktasıyla B noktası birleştirilirse, bu doğru σ_1 eğrisine B noktasından çizilen $(T_1)_B$ teğeti olur. Yine $(\sigma_1 - \sigma_2)$ eğrisi ile σ_1 eğrisine çizilen teğetler, M kübik noktası üzerinde birbirin paralel olacaktır. $(\sigma_1 - \sigma_2)$ eğrisinin, kübik nokta üzerindeki D noktasına çizilen teğet $(T_{1-2})_D$ olsun. Bu teğet kolayca çizilebilir. σ_1 eğrisinin, kübik nokta üzerindeki E noktası şöyle bir çizimle bulunur.

B noktasından $(T_{1-2})_D$ teğetine çizilen T' paraleli ile $(T_1)_B$ teğeti arasındaki açı ortayını çizersek ve bunu M noktasından geçen düşey doğru ile kesiştirirsek, E noktası elde edilmiş olur. E noktasından $(T_{1-2})_D$ teğetine çizilecek paralel doğru, σ_1 eğrisinin E noktasındaki teğeti olacaktır. Ayrıca ED uzunluğu yaklaşık olarak max. (σ_2) değerini gösterecektir. Böylece M kübik noktasından itibaren ED uzunluğu kadar alınarak, σ_2 eğrisinin max. değeri elde edilir. Bundan başka, σ_1 ve σ_2 eğrilerinin A noktasındaki teğetleri, x eksenine paralel olacaktır. Bu suretle σ_1 ve σ_2 eğrileri çizilebilir.

Şöyle ki: σ_1 eğrisinin, B, E, G noktaları ile, bu noktalardaki teğetleri bellidir. Bu noktalardan geçen ve $(T_1)_B$, $(T_1)_E$, $(T_1)_G$ doğruları teğet olacak şekilde, σ_1 eğrisi çizilebilir. Aynı şekilde σ_2 eğrisinin de O, N, A noktaları ve bu noktalardaki teğetleri bellidir. Bu eğri de kolayca çizilebilir. Bu şekilde, σ_1 ve σ_2 eğrileri fotoelastik doneler vasıtasıyla, ayrı ayrı elde edilmiş olur.

Kontrol olarak σ_1 eğrisi altındaki alanın, σ_{ort} çizgisi altında kalan alana eşit olması gerekir. Bu eşitlik sağlanmazsa, σ_1 eğrisi biraz değiştirilerek yeni bir eğri çizilir. Eğri altında kalan tekrar hesaplanır, ta ki bu alan σ_{ort} altında kalan alana eşit oluncaya kadar bu iş tekrarlanır.

σ_1 eğrisi altında kalan planimetre ile 4.2 izokromat x cm. olarak bulundu. σ_{ort} altında kalan alan = $3,40 \times 1,25 = 4,25$ izokromat x cm. olduğundan σ_1 eğrisi uygundur.

Şimdi fotoelastik analizle bulduğumuz neticeleri elastisite teorisi ile mukayese edelim:

Önce $\max \sigma_2$ değerini ele alalım. Şekil 7.5'ten:

$\max \sigma_2 = 0,66$ izokromat $= 0,66 \times 24 = 15,90 \text{ kg/cm}^2$ olarak bulunur. Bölüm 6.2.2.5.'te:

$\max \sigma_2 = \frac{3}{8} \cdot \sigma_o \left[1 - 0,6 \left(\frac{2R}{D} \right) \right]$ olarak bulunmuştur. Burada σ_o değeri, delik olmayan kesitteki gerilmedir. Yani:

$$\sigma_o = \frac{P}{Dh} = \frac{68,0}{0,335 \times 3,80} = 53,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ dir. Şu halde}$$

$$\max \sigma_2 = \frac{3}{8} \cdot 53,5 \left[1 - 0,6 \left(\frac{1,30}{3,80} \right) \right] = 16,00 \text{ kg/cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

Böylece fotoelastik analizle ve elastisite teorisi ile bulunan $\max \sigma_2$ arasında 0,0063 oranında bir hata vardır ki bu değer bir hayli küçüktür.

İkinci olarak, $\max \sigma_1$ değerlerini karşılaştıralım. Şekil 7.5'ten:

$\max \sigma_1 = 7,2 \times 24 = 173,0 \text{ kg/cm}^2$ bulunur. Bu max. gerilmeyi σ_o gerilmesine bölersek, gerilme yığılması faktörü elde edilir:

$$k = \frac{\max \sigma_1}{\sigma_o} = \frac{173,0}{53,5} = 3,24$$

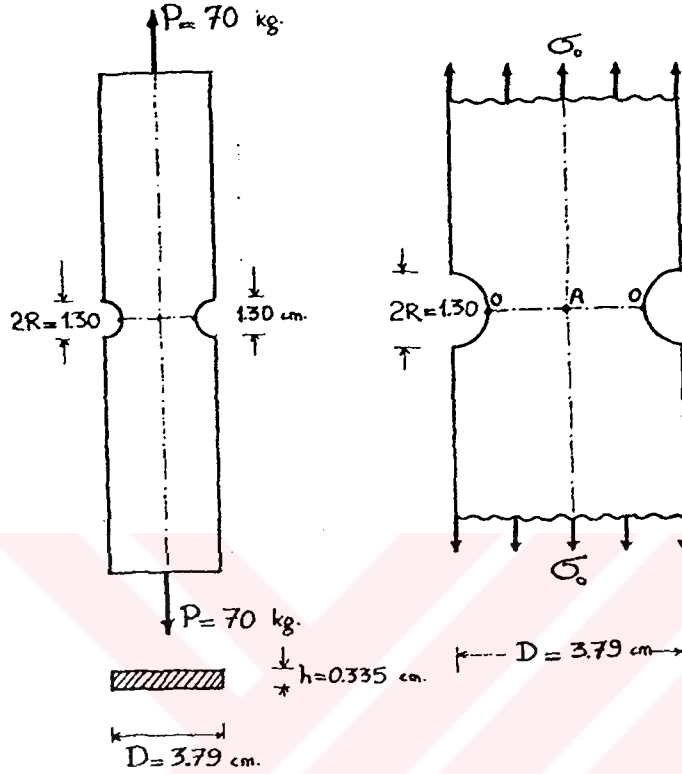
Bölüm 6.2.2.5'teki Şekil 6.18'deki eğriden, $\frac{2R}{D} = \frac{1,30}{3,80} = 0,34$ oranı için: $k=3,30$ bulunur ki, yukarıdaki değere oldukça yakın bir değerdir.

7.4. Levhada Çentik Probleminin Fotoelastik Analizi

7.4.1. Gerilmenin Max. Olduğu Kesitte Asal Gerilmelerin Ayrı Ayrı Bulunması

İkinci deney olarak, levhada çentik problemini ele alacağız. İlk olarak, Şekil 7.6'da boyutları verilmiş olan bir model yapılmış ve $P = 70 \text{ kg.}'$ lık çekme kuvvetine maruz bırakılmıştır. Bu model, polariskopta tetkik edildiğinde, Şekil 7.7'de görülen izokromatlar elde edilmiştir. Bu şekilde tam mertebe izokromatları ($N = 0,1,2,3,\dots$ gibi) kalın çizgilerle, yarım mertebe izokromatları ($N=0.5, 1.5, 2.5,\dots$ gibi) noktali çizgilerle gösterilmiştir. Yüksüz köşe noktaları, $N = 0$ izokromatıdır ve bunlar kolayca tespit edilebilir. Zira, bu köşe noktaları, beyaz ışıkla çalışmada, siyah olarak gözükürken, diğer izokromatlar renkli olarak görülür. Böylece, $N = 0$

izokromatı tayin edildikten sonra, $N = 1, 2, 3, \dots$ diye sayarak, diğer izokromat mertebeleri tayin edilir. Ayrıca, bazı kritik noktalarda izokromat mertebelerinin daha hassas tayini için, Babinat-Soleil kompansatörü kullanılmıştır.



Şekil 7.6 Çentikli levha

Monokromatik ışık kaynağı ile çekilmiş karanlık saha izokromatlarına ait fotoğraf F.8, aydınlık saha izokromatlarına ait fotoğraf ise F.9'da görülmektedir.

Şekil 7.8'de izoklinikler gözükmemektedir. Bunun için, polariskopun analizörü 0° 'den itibaren 15° 'lik açılar ($15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 90^\circ$) kadar döndürülmüş ve döndürmedeki izoklinikler fotoğrafta tespit edilmiştir.

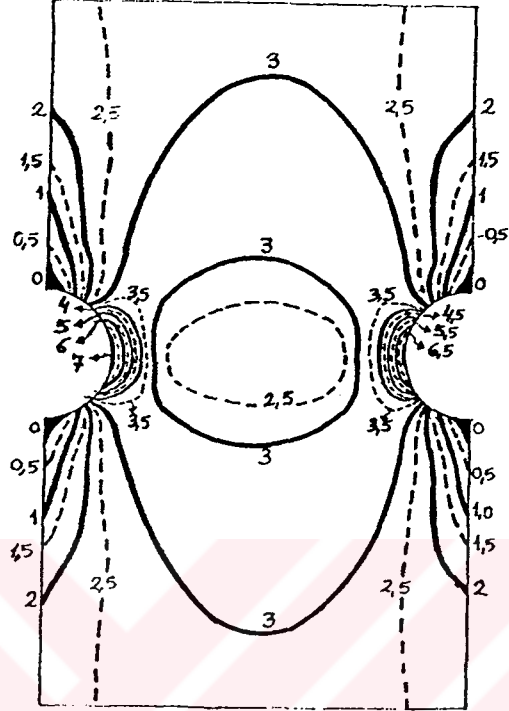
Bir şeffaf kağıttan faydalanılmak suretiyle, her fotoğraftan izoklinikler bu kağıt üzerine çizilerek, Şekil 7.8 elde edilmiştir.

F.11, F.12, F.13...F.16 da modelin, $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 90^\circ$ izoklinikleri gözükmemektedir.

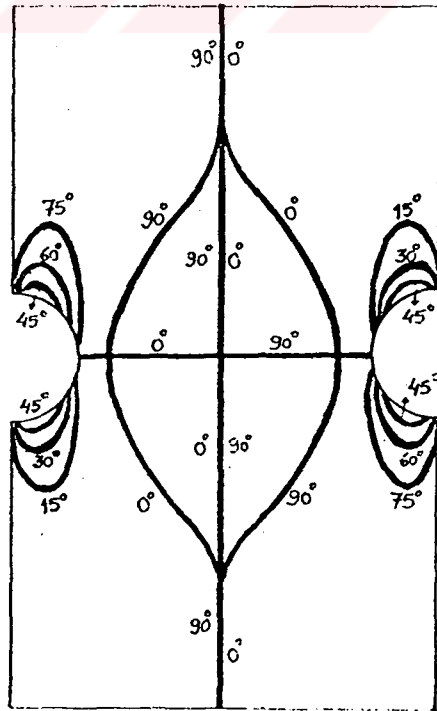
0° izokliniğini tetkik edersek şu hususları gözlemleriz:

1. 0° izokliniği, OA gerilme trajektörünü bir dik açıda keser. 0° izokliniğinin OA'yı kestiği M noktası bir kübik nokta olur ve bu nokta üzerinde $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ile σ_1 eğrisine çizilen teğetler birbirine paraleldir.

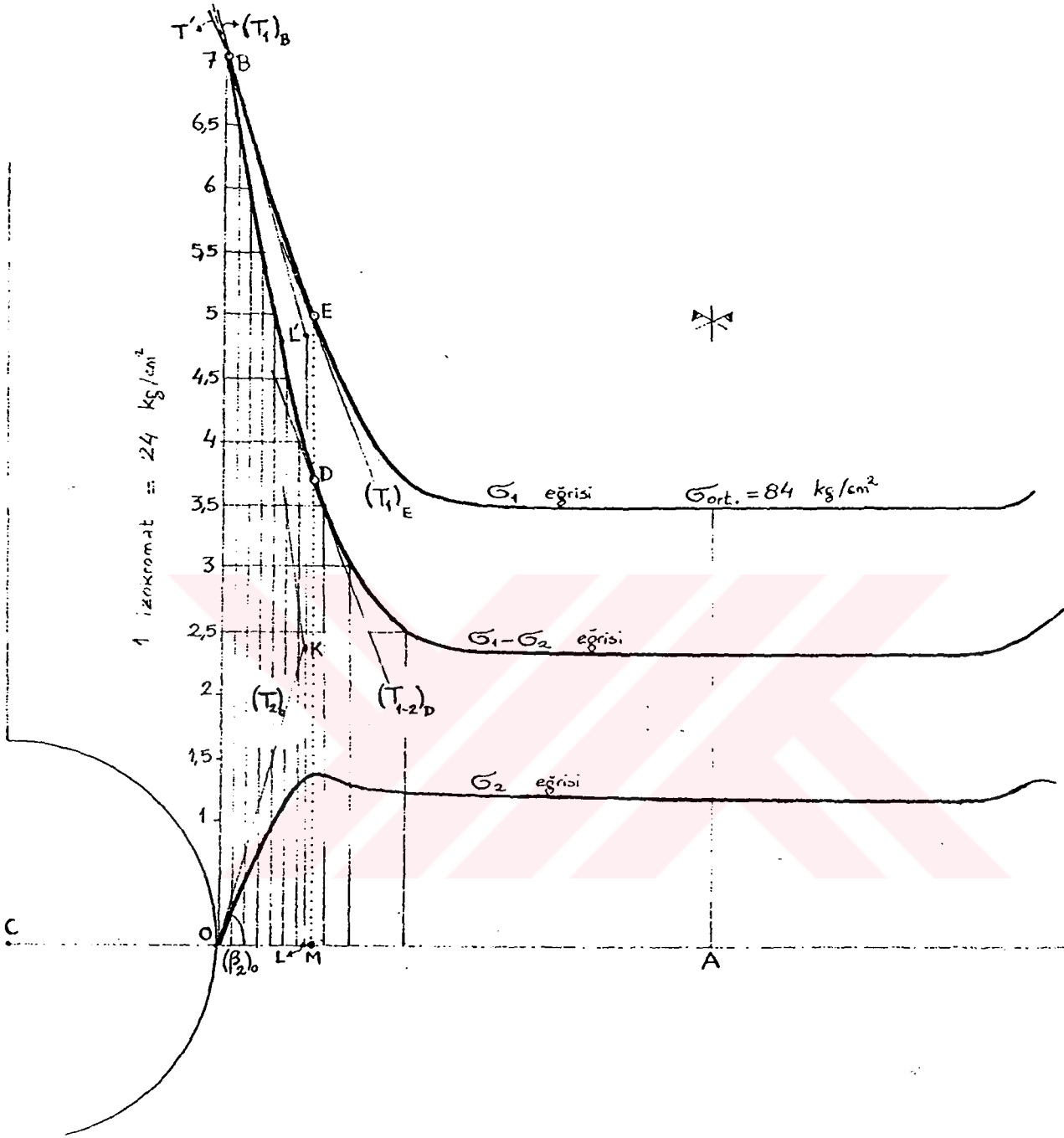
2. Diğer bir husus, 0° izokliniğinin levhanın orta kısımlarında geniş bir bölgeyi kapladığıdır. Dolayısıyla levhanın bu orta bölgesinde, asal gerilmelerin istikameti 0° ve 90° 'dir, yani bu bölge için σ_1, σ_2 ve $(\sigma_1 - \sigma_2)$ eğrileri birbirine paralel olacak demektir. (Şekil 7.9)



Şekil 7.7 Tam ve yarım mertebeli izoklinikleri



Şekil 7.8 İzoklinikler



Şekil 7.9 Deneyin gerilme eğrileri

Şimdi bu deney için nümerik değerleri hesaplayalım:

Dar kısımdaki (00 kısmı) ortalama gerilme:

$$\sigma_{ort} = \frac{70,0}{0,335 \cdot (3,79 - 1,30)} = 84,0 \text{ kg/cm}^2 \text{ dir. Bu gerilmenin kaç izokromat mertebesine}$$

karşılık geldiğini bulmak istersek:

$$1 \text{ izokromat} = \frac{f}{h} = \frac{8}{0,335} = 23,9 \text{ kg/cm}^2 \text{ olduğundan, ortalama gerilme: } \frac{84}{23,9} = 3,5$$

izokromat mertebesine tekabül edecektir.

σ_2 eğrisine (0) noktasından çizilen teğetin eğimi:

$$(\tan \beta_2)_o = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)_o}{\rho_o} = -\frac{N_o}{R} \text{ dir. OA uzunluğu birim olarak alınırsa:}$$

$$R = \frac{0,65}{1,245} = 0,52 \text{ olur.}$$

Şu halde her birim uzunluk için $(\beta_2)_o$ açısının değeri:

$$\tan(\beta_2)_o = -\frac{7}{0,52} = -13,4 \text{ dir. Buna göre } (\beta_2)_o \text{ açısı bulunabilir ve } (T_2)_o \text{ teğeti}$$

çizilebilir.

Böylece gerekli dökümanlar ortaya koyulduktan sonra, geçen paragrafta delikli levha deneyinde takip edilen yolla, σ_1 ve σ_2 asal gerilme eğrileri ayrı ayrı çizilebilir. Bu deneye ait çizimler, Şekil 7.9'da görülmektedir.

Şimdi bu problemdeki gerilme yığılması faktörünü bulalım. Önce, σ_o gerilmesine göre:

$$k = \frac{\max \sigma_1}{\sigma_o} \text{ gerilme yığılması faktörünü bulalım.}$$

$$\sigma_o = \frac{70,0}{0,335 \times 3,79} = 55,1 \text{ kg/cm}^2 \text{ dir. Diğer taraftan:}$$

$$\max \sigma_1 = 23,9 \times 7 = 167,0 \text{ kg/cm}^2 \text{ dir. } (\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{h} \cdot N \text{ den dolayı}).$$

Şu halde:

$$k = \frac{167,0}{55,1} = 3,03 \text{ olarak bulunur.}$$

Dar kesitteki ortalama gerilmeye göre, gerilme yığılma faktörünü bulmak istersek:

$$k = \frac{167,0}{84,0} = 1,99 \text{ olarak bulunur.}$$

8. SONUÇLAR

Bu çalışmada, fotoelastisite yöntemiyle deneysel olarak incelenmiş olan levhada delik ve çentik problemleri, elastisite teorileriyle de çözümlenerek karşılaştırılmış ve sonuçlar arasındaki farkın ihmal edilebilecek kadar az olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, komplike bir konstrüksiyonun yapımına geçilmeden önce modele uygun bir form verilmesiyle gerilme yığılmalarının önlenmesi mümkün olduğu ve gerilmelerin olmadığı yerlerden malzeme çıkartılarak; konstrüksiyonun daha hafif olacağı, böylelikle de ekonomikliğe ve emniyete de uyulacağı görülmüştür.



KAYNAKLAR

Coker, E. G., Filon, L. N. G., (1957), A Treatise on PhotoElasticity, Cambridge University Press, London.

Dally, J. W., Riley, W. F., (1965), Experimental Stress Analysis, Kogakusha Co. Ltd., Tokyo.

Durelli, A. J., (1970), Applied Stress Analysis, Prentice-Hall of India Private Ltd., New Delhi.

Durelli, A. J., Phillips, E. A., (1958), Introduction to the Theoretical and Experimental of Stress and Strain, Mc Graw Hill, New York.

Frocht, M. M., (1941), Photoelasticity (Cilt 1,2), John Wiley&Sons, New York.

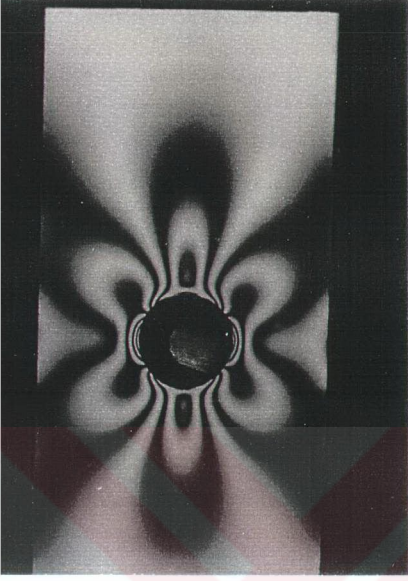
Timoshenko, S., (1970), Theory of Elasticity, Kogakusha Co. Ltd., Tokyo.



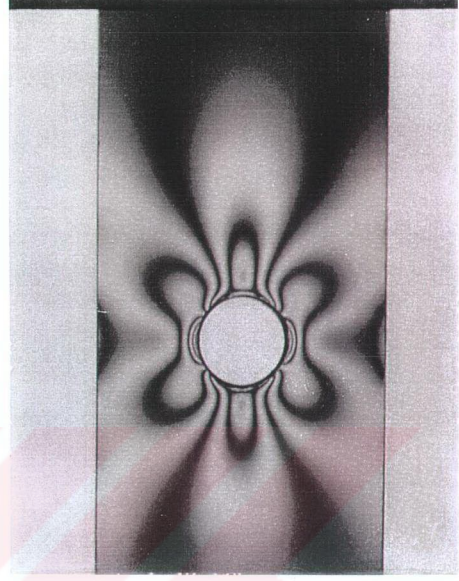
EKLER

Deney sırasında çekilmiş fotoğraflar.

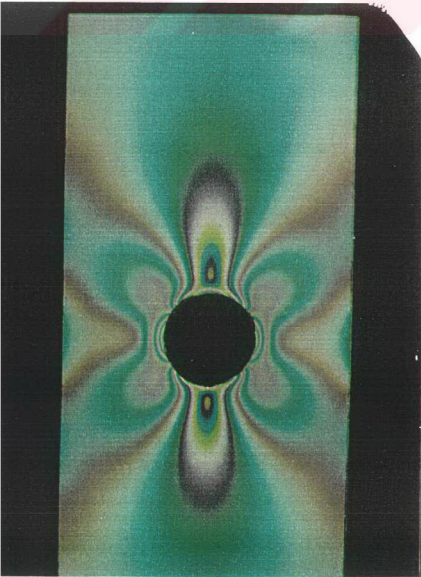




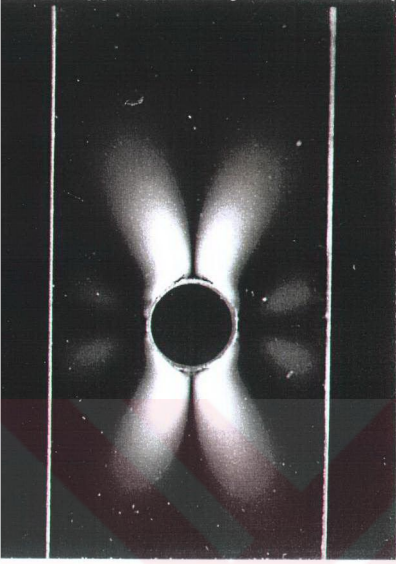
Monokromatik Işık ile Bulunmuş İzokromatlar
(Karanlık Saha Aranjmanı)



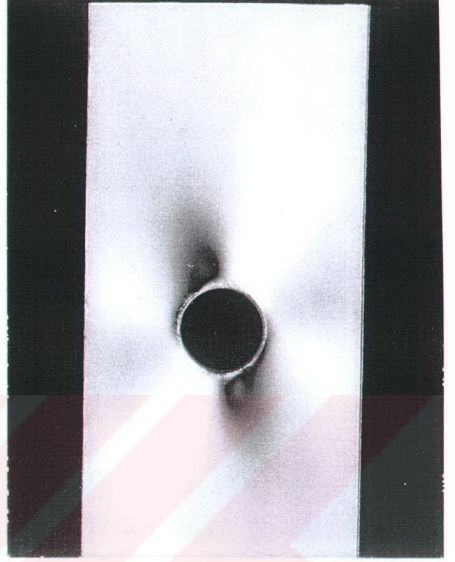
F.2 Aydınlık Saha Aranjmanına Ait İzokromatlar
 $D = 3.80 \text{ cm}$, $2R = 1.30 \text{ cm}$, $P = 68.0 \text{ kg}$



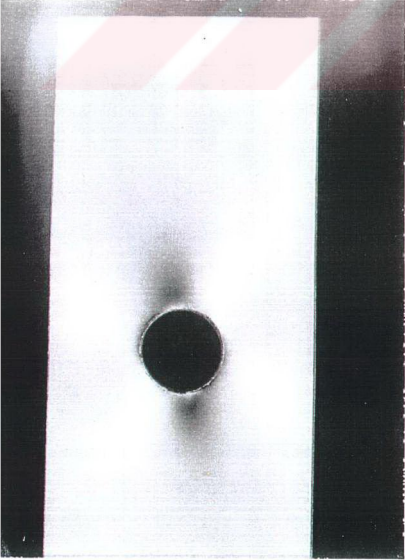
F.3 Beyaz Işık Kaynağı ile Bulunmuş İzokromatlar



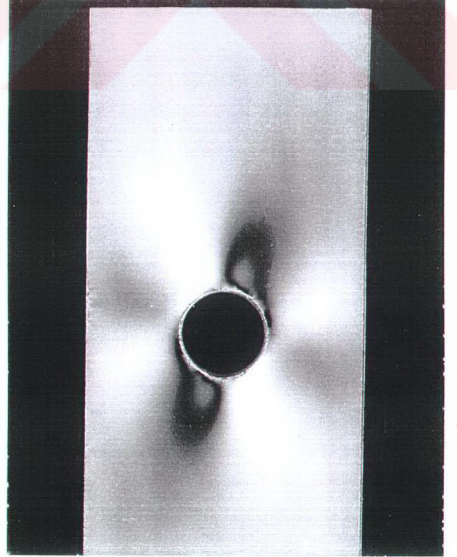
F.4 0° ve 90° İzoklinikleri



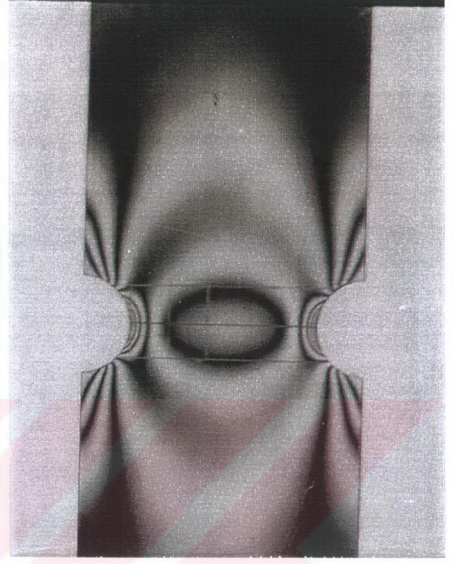
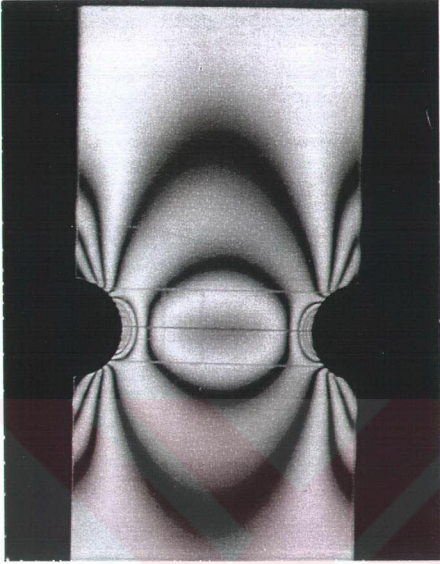
F.5 15° İzoklinikleri



F.6 30° İzoklinikleri

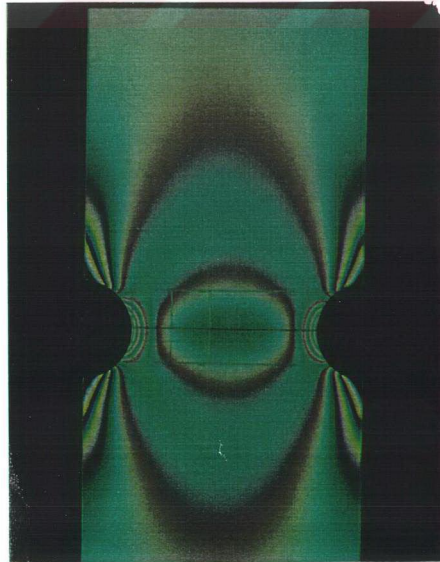


F.7 75° İzoklinikleri

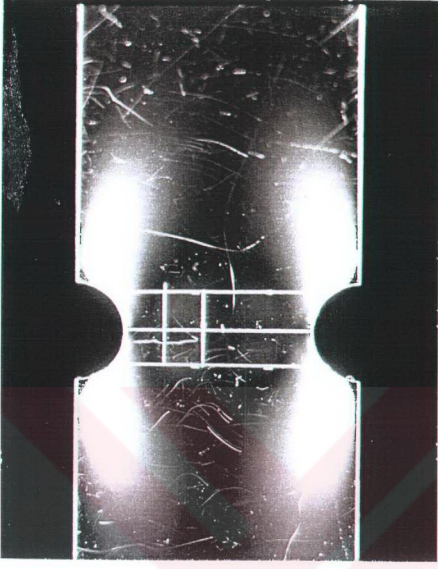


F.8 Çentikli Levhada Karanlık Saha İzokromatları
(Monokromik Işıқта)
 $D = 3.79$ cm, $R = 0.65$ cm, $P = 70$ kg

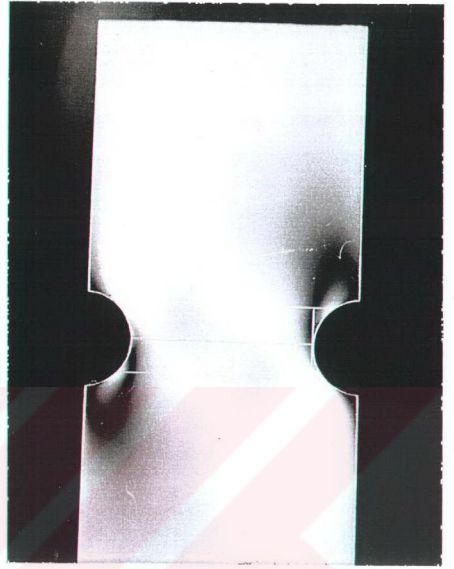
F.9 Aydınlık Saha İzokromatları



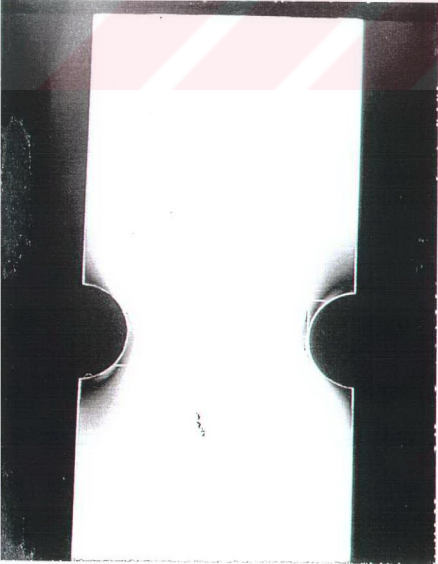
F.10 Beyaz Işık Kaynağında İzokromatlar



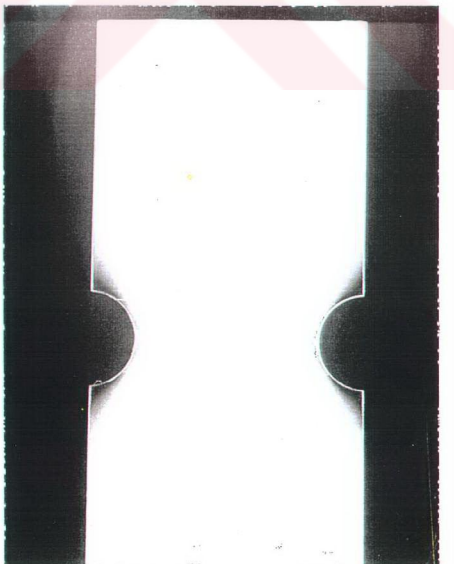
F.11 0° ve 90° İzoklinikleri



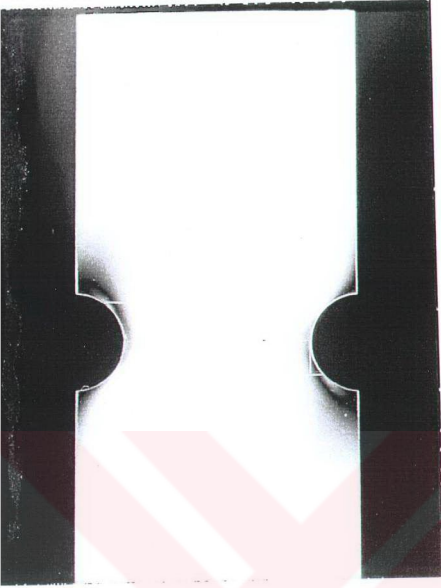
F.12 15° İzoklinikleri



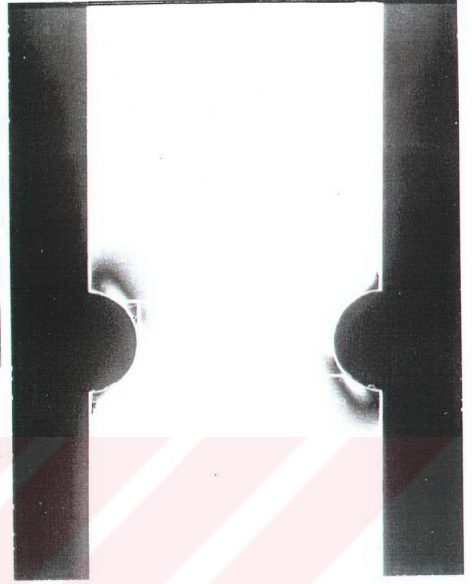
F.13 30° İzoklinikleri



F.14 45° İzoklinikleri



F.15 60° İzoklinikleri



F.16 75° İzoklinikleri

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	13.04.1973	
Doğum yeri	İzmir	
Lise	1990-1991	Namık Kemal Lisesi
Lisans	1991-1998	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Müh. Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1998-2000	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı Kurumlar

1993-1994	Lider Şirketler Grubu
1994-1995	Trans Teknik Holding
1995-1997	Cemal Ticaret
1997-1999	Ekşioğlu İnşaat