

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR METODU İLE ELASTİK  
ZEMİNE OTURAN İNCE PLAKLARIN SÖNÜMSÜZ  
SERBEST TİTREŞİMİNİN İNCELENMESİ

İnş. Müh. Bahadır DOĞRUSÖZ

106329

F.B.E İnşaat Müh. Yapı Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ DANIŞMANI : Prof. Dr. Türkan KÖKSAL

Tulay AKSU ÖZKUL 26.6.2001  
Tulay

106329  
T.C. YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İSTANBUL, 2001

Türkan Köksal  
26.6.2001  
Türkan

Naci Yücefer  
Naci Yücefer  
26.6.2001

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ .....	viii
ÖNSÖZ.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT .....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TİTREŞİM HAREKETİ.....	2
2.1 Basit Harmonik Hareket .....	2
2.2 Yaylarda Basit Harmonik Hareket .....	3
3. ENERJİ PRENSİPLERİ .....	5
3.1 Toplam Potansiyel Enerji (T.P.E) prensibi .....	5
3.2 Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu (Denge Denklemi).....	5
3.2 Virtüel İş Prensibi.....	9
4. SONLU ELEMANLAR METODU (S.E.M).....	10
4.1 Sonlu Elemanlar Metodunun Tanımı.....	10
4.2 Sonlu Elemanlar Metodunda Deplasman Fonksiyonu Seçme Esasları.....	10
4.3 Sonlu Elemanlar Metodu İle Plak Hesabında Yapılan Kabuller;.....	13
4.4 Eleman Rijitlik Matrisinin Hesaplanmasında Toplam Potansiyel Enerji (T.P.E) Yönteminin Uygulanması.....	15
4.5 Eleman Zemin Etki Matrisinin (Elastik Yataklanma Matrisi) Toplam Potansiyel Enerji Yöntemi ile Hesaplanması.....	16
4.6 Eleman Kütle Matrisinin Toplam Potansiyel Enerji Yöntemi ile Hesaplanması.....	17
5. DİNAMİK DIŞ ETKİLER HALİNDE SONLU ELEMANLAR METODU.....	19
5.1 Dinamik Dış Etkiler.....	19
5.2 Dinamik Dış Etkiler Halinde Yapılan Kabuller .....	19
5.3 S. E. M. İle Dinamik Dış Yük Etkisinde Kalan Elemanın Genel Denklemi .....	19
5.4 Elastik Zeminde Sönümsüz Serbest Titreşim (S.S.T.) Durumu.....	21
6. ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAĞIN S. S. T. DURUMUNDA ALDIĞI PERİYOT ( T ) DEĞERLERİNİN S.E.M. İLE BULUNMASI.....	23
6.1 Eleman Rijitlik Matrisinin Hesaplanması.....	23

6.2	Şekil Fonksiyonlarından Eleman Zemin Etki Matrisinin Hesabı.....	30
6.3	Şekil Fonksiyonlarından Eleman Kütle Matrisinin Hesaplanması.....	302
6.4	Biriktirme Metodu Yardımı ile Sistem Rijitlik Matrisi, Sistem Kütle Matrisi, Sistem Elastik Zemin Etki Matrislerinin Yazılması .....	33
6.4.1	Sistem Rijitlik Matrisinin Hesaplanması .....	34
6.5	Sınır Koşulları .....	36
6.6	Sayısal Örnekler .....	38
7.	Sonuç .....	48
KAYNAKLAR.....		49
EKLER.....		50
Ek 1 Sistem Rijitlik Matrisi Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Rijitlik Matrisi Olarak Yazılması.....		51
Ek 2 Sistem Kütle Matrisi Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Kütle Matrisi Olarak Yazılması .....		68
Ek 3 Sistem Zemin Etki Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Zemin Etki Matrisi Olarak Yazılması.....		73
Ek 4 Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Elastik Zemine Oturan Kirişin Sönümsüz Serbest Titreşim Hesabının Mathematica 3.0 Version Paket Programında Yazılması .....		78
ÖZGEÇMİŞ.....		82

## SİMGE LİSTESİ

A	Dinamik İvme
C	Elastik Yataklanma Katsayısı
d-	Basit Harmonik Harekette Titreşimin genliği
$D_1, D_2, \dots$	Sistem Deplasman Değerleri
E	Elastiklik Modülü
f	Frekans Değeri
k	Yay Katsayısı
$k_{ij}$	i Noktasında j noktasından dolayı oluşan Eleman rijitlik değeri
m	Kütle
$m_{ij}$	i Noktasında j noktasından dolayı oluşan Eleman Kütle değeri
$M_{ij}$	i noktasında J noktasından dolayı oluşan Sistem Kütle Matrisi değeri
$N_i$	i noktasındaki şekil Fonksiyonu
$P_f$	Elastik Zemin Etki Kuvveti
$P_q$	Eleman Kütle Kuvveti
q	Yayılı Yük değeri
$s_{ij}$	i Noktasında j noktasından dolayı oluşan Eleman Elastik Zemin Etkisi değeri
$S_{ij}$	i noktasında J noktasından dolayı oluşan Sistem Elastik Zemin Etki Matrisi değeri
T	Periyot Değeri
$T_i$	i noktasındaki periyot değeri
U	İç Kuvvetlerin Potansiyel Enerjisi
$U_f$	Elastik Zemin Etkisinden doğan şekil değiştirme enerjisi
$U_q$	Kütle Kuvvetinden Doğan Şekil değiştirme enerjisi
V	Toplam Potansiyel Enerji
w	Sehim ( çökme)
W	Dış Kuvvetlerin Potansiyel Enerjisi
y	Basit Harmonik Harekette Titreşimin yol denklemi
{a}	Polinom Sabitleri Matrisi
[A]	Bağ Matrisi
[B]	Bağ Matrisi İncersi
$[c_e]$	Eleman Sönüm Matrisi
{d}	Deplasman Parametirleri Sütun Matrisi
[D]	Elastisite Matrisi

[F]	Türev Matrisi
[H]	İntegral Matrisi
[K]	Sistem Rijitlik Matrisi
[k <sub>e</sub> ]	Eleman Rijitlik Matrisi
[M]	Sistem Kütle Matrisi
[m <sub>e</sub> ]	Eleman Kütle Matrisi
[N]	Şekil Fonksiyonları Matrisi
{q <sub>e</sub> (t)} <sub>0</sub>	Eleman Zamana bağlı Dış Yükü
{q <sub>e</sub> (t)} <sub>T</sub>	Eleman Zamana Bağlı Sıcaklık Yükü
[S]	Sistem Elastik Zemin Etki Matrisi
[S <sub>e</sub> ]	Eleman Elastik Zemin Etki Matrisi
ΔN	Şekil Fonksiyonları ikinci türevleri matrisi
ΔV	Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci ve İkinci Varyasyonu
$\bar{T}$	{[K]+[S]-ω <sup>2</sup> [M]} matrisinin toplamı
$\bar{w}_i$	i noktasında deplasman fonsiyonun değeri
δU	Virtüel İç İş
δW	Virtüel Dış İş
δε	Virtüel Deformasyon
ε <sub>x</sub> ,ε <sub>y</sub> ,γ <sub>xy</sub>	Deformasyon Birleşenleri
λ	Açısal Hızın Karesi
ν	Poisson Oranı
ω	Basit Harmonik Harekette Titreşimin Açısal hızı
ρ	Eleman Kütle Yoğunluğu
σ <sub>x</sub> ,σ <sub>y</sub> ,τ <sub>xy</sub>	Gerilme Birleşenleri
θ <sub>xi</sub>	i noktasında y eksenine göre deplasman fonk. birinci türevi
θ <sub>yi</sub>	i noktasında x eksenine göre deplasman fonk. birinci türevi
[Φ( x, y)]	Deplasman Polinomu değişkenleri Matrisi

## **KISALTMA LİSTESİ**

<b>Ce1,Ce2</b>	<b>Çevirme Matrisleri</b>
<b>S.E.M</b>	<b>Sonlu Elemanlar Metodu</b>
<b>S.S.T.</b>	<b>Sönümsüz Serbest Titreşim</b>
<b>TCE1,TCE2</b>	<b>Çevirme Matrisleri Transpozeleri</b>
<b>T.P.E</b>	<b>Toplam Potansiyel Enerji</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Sabit açısal hızla dairesel hareket.....	2
Şekil 2.2 Basit harmonik hareket yapan yay .....	3
Şekil 3.1 q yayılı yüke sahip çubuğun sehim durumları .....	5
Şekil 4.1 Eleman üzerindeki deplasmanların, pozitif yönleri.....	11
Şekil 4.2 Pascal polinomu ağı.....	11
Şekil 4.3 Plak elemanı üzerindeki noktalarda deplasman değerleri .....	12
Şekil 4.4 Eleman üzerindeki bir i noktasında sağ el kuralının uygulanması.....	13
Şekil 4.5 İki eksenli gerilmeye gerilme birleşenleri .....	14
Şekil 6.1 Plak sistemin elemanlara ayrılması .....	23
Şekil 6.2 Eleman düğüm noktası deplasmanları.....	24
Şekil 6.3 Sistem düğüm noktası deplasmanları .....	36
Şekil 7.1 Periyotlarla zemin elastik yataklanma değerleri arasındaki grafik .....	48

## ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 6.1	[A] Bağ matrisi.....	25
Çizelge 6.2	[B] Matrisi.....	25
Çizelge 6.3	Şekil fonksiyonları ikinci türevleri.....	27
Çizelge 6.4	Biriktirme metodunda kullanılacak sıralama.....	33
Çizelge 6.5	Zemin elastik yataklanma katsayıları.....	36
Çizelge 6.6	“c” katsayısına göre kil plastik zemin ( $c=7500\text{kN/m}^3$ ).....	38
Çizelge 6.7	“c” katsayısına göre kil yarı sert zemin ( $c=12500\text{kN/m}^3$ ).....	39
Çizelge 6.8	“c” katsayısına göre kum gevşek zemin ( $c=15000\text{kN/m}^3$ ).....	40
Çizelge 6.9	“c” katsayısına göre kil sert zemin ( $c=22500\text{kN/m}^3$ ).....	41
Çizelge 6.10	“c” katsayısına göre kum orta sıkı zemin ( $c=35000\text{kN/m}^3$ ).....	42
Çizelge 6.11	“c” katsayısına göre kum sıkı zemin ( $c=75000\text{kN/m}^3$ ).....	43
Çizelge 6.12	“c” katsayısına göre kum – çakıl sıkı zemin ( $c=125000\text{kN/m}^3$ ).....	44
Çizelge 6.13	“c” katsayısına göre şist zemin ( $c=500000\text{kN/m}^3$ ).....	45
Çizelge 6.14	“c” katsayısına göre kaya zemin ( $c=2000000\text{kN/m}^3$ ).....	46
Çizelge 6.15	“c” katsayısına göre elastik zemin etkisi yoksa ( $c=0$ ).....	47



## ÖNSÖZ

İnce Plaklarda Titreşim durumu sistemin boyutlandırılmasında önemli durum arz etmektedir. Yapı mühendisliğinde önemli bir alanda varlığını hissettiren plak sistemlerin yaygınlığı dinamik analiz yapılması gerekliliğini kendinden doğurmaktadır. Bu tez de konu kapsamı küçültülerek titreşimin çok özel bir hali olan sönümsüz serbest titreşimin, elastik zemin etkisi altında, sistemde oluşturduğu periyot değerleri, Sonlu Elemanlar Metodu ile incelenmiştir. İncelemede Paket program olarak Mathematica 3.0 versiyonunun içerisinde yapılan ve kullanım kolaylığı arz eden küçük yazılımlar ile ele alınan konu desteklenmeye çalışılmıştır. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Elastik Zemine Oturan Plak sistemlerin Sönümsüz Serbest Titreşiminin Mathematica 3.0 programı ile incelenmesi, mühendislik yaklaşımlarda ön fikir getireceğini umar, tez çalışmamın yönlendirilmesinde ve oluşturulmasında göstermiş olduğu sınırsız tolerans ve yardımlarından dolayı Sayın Hocam **Prof. Dr. Türkan KÖKSAL** 'a en derin Teşekkürlerimi sunarım, Saygılarımla...



## ÖZET

Bu çalışmada, Sonlu Elemanlar Metodu ile Elastik Zemine Oturan İnce Plakların Sönümsüz Serbest Titreşimleri incelenmiştir.

Çeşitli zemin sınıfları için plak kalınlığı sabit olmak koşulu ile sönümsüz serbest titreşim durumunda plakta oluşan  $\bar{T}$  periyotları arasındaki değişim incelendiğinde bu periyotların, yumuşak kil zeminden kaya zemine gidildikçe küçüldüğü gözlemlenmiştir. Sonuçlar kısmında bu değerlendirme ele alınmıştır.

Tüm hesaplar Sonlu Elemanlar Metodu ile yapılmış olup, Eleman Rijitlik Matrisi, Eleman Kütle Matrisi ve Eleman Elastik Zemin Etki Matrislerinin hesabında Sonlu Elemanlar Metodu ile elde edilen şekil fonksiyonlarından yararlanılmıştır. Şekil fonksiyonlarının oluşturulması için seçilen deplasman fonksiyonu Pascal Polinomlarından yararlanılarak oluşturulmuştur. Sistem Rijitlik Matrisi, Sistem Kütle Matrisi ve Sistem Elastik Zemin Etki Matrisi çalışma sonundaki Eklerde açık olarak gösterilmiştir.

Sönümsüz Serbest Titreşim durumu kabulü ile dış yük durumu olmadığı için titreşim problemi özdeğer problemine çevrilmiş ve sistemin determinantını sıfır yapan  $\lambda = \omega^2$  değerlerinden  $\bar{T}$  periyot değerlerine geçiş yapılmıştır.

Sonlu Elemanlar Metodu ile Elastik Zemine Oturan İnce Plakların Sönümsüz Serbest Titreşimlerinin incelenmesinde "Mathematica Version 3.0" adlı paket programı kullanılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Sönümsüz serbest titreşim, elastik zemin etkisi, sonlu elemanlar metodu.

## ABSTRACT

In this study, the undamped free vibrations of thin plates which sit on elastic ground is studied with the assistance of Finite Element Method.

After examining the changes of periods  $\bar{T}$  which occur in undamped free vibrations under the condition of constant plate thickness for various ground classifications it's been observed that these periods decreased while going through from soft clay ground to rock ground. Its meaning has been discussed in the summary section.

All of the calculations have been done with Finite Element Method, whereby form functions which are derived from Finite Element Method have assisted the calculations of Element Rigidity Matrix, Element Mass Matrix and Element Elastic Ground Effect Matrix. While generating the form functions the displacement function which is derived from Pascal Polynomials has been used. System Rigidity Matrix, System Mass Matrix and System Elastic Ground Effect Matrix are shown explicitly in the attachments which are at the end of the study.

Because the outer load doesn't exist because of the acceptance of undamped free vibration, the vibration problem is transformed to an eigenvalue problem and then it's gone over to Period Values  $\bar{T}$  from  $\lambda=\omega^2$  values, which make the determinant of the system zero.

The Computer Program "Mathematica Version 3.0" is used during the studying of the undamped free vibrations of thin plates which sit on elastic ground with the assistance of Finite Element Method.

**Keywords** :The undamped free vibration, elastic ground effect, finite element method.

## 1. GİRİŞ

İnce Plakların, elastik zemin etkisi ve sönümsüz serbest titreşimin durumunda aldığı periyot ve frekans değerleri sonlu elemanlar metodu kullanılarak incelenmiştir. Bu çalışmanın sonunda elastik zemin yatak katsayıları ile plak periyotları arasındaki bağlantı grafiksel olarak gösterilmiştir. Elastik ve elastik olmayan zemin üzerine oturan plağın her iki durum için aldığı periyot ve frekans değerleri sayısal olarak örneklenmiştir.

Bu çalışmada yapı elemanı olarak sık rastlanılan plakların, elastik zemin üzerinde iken sönümsüz serbest titreşim hareketini yaptığında sistemde oluşacak maksimum ve minimum periyot ve frekans değerleri hesap edilmiştir.

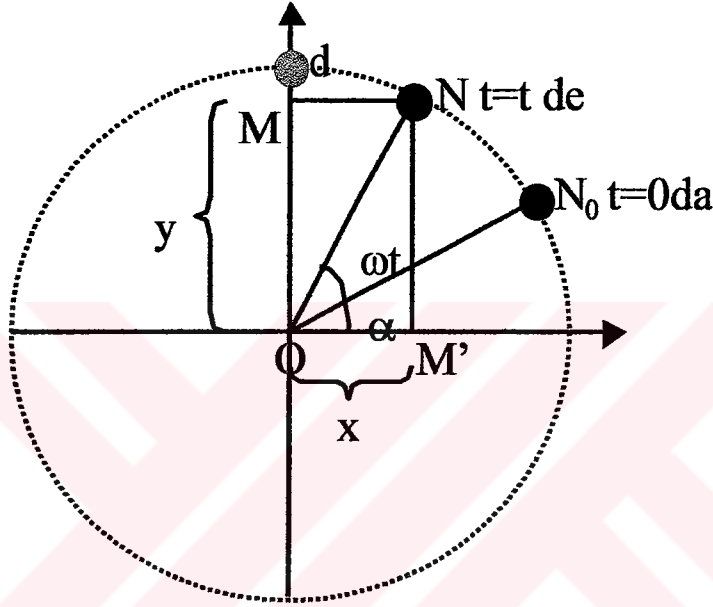


## 2. TİTREŞİM HAREKETİ

### 2.1 Basit Harmonik Hareket

Basit titreşim hareketi yapmakta olan maddesel noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığının zamana bağlı olarak değişmesini gösteren bağıntıya hareketin denklemi denir.

Ucuna küresel bir cisim takılmış ince bir çubuğun diğer ucunu sabit açısal hızla dönen bir eksene geçirerek düşey düzlem içerisinde dönmesini sağlayalım



Şekil 2.1 Sabit  $\omega$  açısal hızla dairesel hareket

Sabit  $\omega$  açısal hızı ile dairesel hareket yapan N noktası  $t=0$  anında  $N_0$  noktasında bulunsun  $t=t$  anındada N noktasında bulunsun bu zaman aralığında ON yarıçap vektörü  $\omega t$  kadar yol almıştır N noktasının OY eksenini üzerindeki iz düşümü olan M noktası O başlangıç noktasına

$OM = y$  kadar uzaklıkta bulunmaktadır. Şekilden görüldüğü gibi

$$\sin(\omega + \alpha) = OM/ON$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$OM = ON \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

olarak yazarsak,

ON=d ve OM=y değerlerini yerine konup ifade düzenlenirse;  
Basit titreşim hareketinin zamana bağlı yol denklemi bulunur;

$$y= d. \text{Sin}(\omega t + \alpha) \quad (2.1)$$

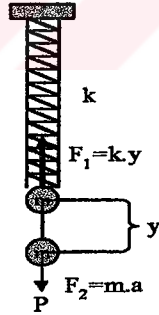
Bu denklemin sırasıyla zamana göre 1. ve 2. Türevleri alınırsa hız ve ivme denklemleri elde edilir.

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \omega.d \text{Sin} (\omega t + \theta) \quad (2.2)$$

$$\text{ve } \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2.d.\text{Sin} (\omega t + \theta) \quad (2.3)$$

## 2.2 Yaylarda Basit Harmonik Hareket

Şekil 2.2 deki düzenekte Bir ucunda m kütlesi asılı k yay rijitliğine sahip sistemi P düşey yükü ile çekip sisteme hareket verdiğimizizi düşünelim, sistem harekete geçtikten sonra ilk anda etki ettirdiğimiz P yükünün daha sonra sistem dışı kaldığını varsayarak titreşen sistemde oluşan kuvvetler arasında denge ilişkisini sürtünmeyi ihmal ederek, yazarsak (User, 1986);



Şekil 2.2 Basit Harmonik Hareket yapan yay

$\Sigma y = 0$  denge koşulundan,

$$F_1 - F_2 = P$$

$k.y - m.a = P$  olarak yazılır ve y ile a yerine denklem (2.1) ve (2.3)deki değerleri yazılırsa;

$$k. d. \omega. \text{Sin}(\omega t + \alpha) - m. \omega^2. d. \text{Sin}(\omega. t + \alpha) = P$$

elde edilir. Bu ifadeyi  $d \cdot \sin(\omega t + \alpha)$  parantezine alınırsa;

$$(k - m\omega^2) \cdot d \cdot \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

Sönümsüz serbest titreşim hareketinin denklemi elde edilir. Burada  $\sin(\omega t + \alpha) = 1$  olduğu durum maksimum değer olduğu için

$$(k - m\omega^2) \cdot d = 0 \quad (2.4)$$

denklemi haline dönüşür,  $d$  titreşim hareketinin genliği olduğundan ve  $d \neq 0$  olduğundan parantez içini sıfır yapan değerden ;

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

ifadesi elde edilir Buradan sistemin periyodu ve frekansı aşağıdaki ifadelerle bulunur.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.6)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.7)$$

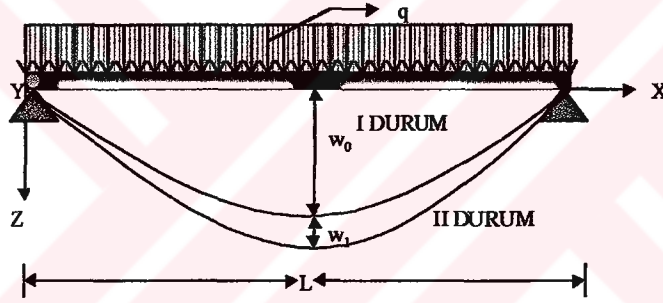
### 3. ENERJİ PRENSİPLERİ

#### 3.1 Toplam Potansiyel Enerji (T.P.E) prensibi

Geometrik açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilen Toplam Potansiyel Enerji, fiziksel açıdan yalnızca lineer sistemlere uygulanabilmektedir.

#### 3.2 Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu (Denge Denklemi)

Toplam Potansiyel enerji, sistemin hakiki denge konumunda bir ekstremden geçer. Böylece belirli bir integral ifadeyi ekstrem yapan konumun bulunmasına problemi indirgenmiş oluruz. Problemlerin çoğunda bu ekstrem ifade minimumdur. Bu prensibe onun için minimum potansiyel enerji prensibi denir. Matematikte ise bu tip problemlere Varyasyon hesabı denir. Şekil 3.1 deki matematik modelde basit kiriş  $q$  yayılı yüküyle yüklü olsun çubuğun  $dx$  elemanına ait diferansiyel denge denklemini yazalım ,  $z$  eksenini aşağıya doğru alalım;



Şekil 3.1  $q$  yayılı yüke sahip çubuğun sehim durumları

Sehim ( çökme)  $=w$

Eğim ( kesit dönmesi)  $=w'$

M eğilme momenti  $=-EIw''$

V kesme kuvveti  $=-EIw'''$

Yayılı ( $q$ ) yükün şiddeti  $=EIw^{IV}$

Çubuğun diferansiyel denklemi şöyle olur.

$$EIw^{IV}=q \quad (3.1)$$



Böylece çökme ile dış yük arasındaki esas diferansiyel denklem kurulmuş olur .Denklemin entegrasyonundaki sabitlerin belirtilmesinde kullanılacak sınır şartları ise;

$x=0$  da  $w=0$  :  $x=L$  de  $w=0$  (Geometrik şartlar)

$x=0$  da  $w''=0$  :  $x=L$  de  $w''=0$  (Dinamik şartlar ) şeklindedir

Aranan  $w(x)$  eğrisi geometrik sınır şartlarını gerçekleyen birçok eğriler arasında bir tanesidir Hakiki denge konumunda toplam potansiyel enerji minimum olmakta ve enerji en küçük değerini bu konumda almaktadır. hakiki denge konumunda Toplam Potansiyel Enerji minimumdur.

Toplam Potansiyel Enerji iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi ile dış kuvvetlerin potansiyel enerjilerinin toplamına eşittir.

$U=$  iç kuvvetler,

$W=$  dış kuvvetler olmak üzere

$$V=U+W \quad (3.2)$$

olarak ifade edilir.

Örneğimizdeki iç kuvvetler eğilme momenti ve kesme kuvvetidir. Kesme kuvvetini ihmal

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} .dx. \quad (3.3)$$

edip iç kuvvetlerin potansiyel enerjisini yazarsak;

$$M=-EI .w'' \quad (3.4)$$

Sistem konservatif ise dış kuvvetlerin işi daima negatif olacağından  $V=U-W$  halini alacaktır.

Burada  $q$  kuvveti ile  $w$  deplasmanı aynı yönde

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (w'')^2 .dx \quad (3.5)$$

olduğundan çarpımları pozitif olacaktır. Dolayısıyla dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi şöyle olur.

$$W = -\int_0^L q \cdot w \cdot dx \quad (3.6)$$

Toplam Potansiyel enerji ise:

$$V = U + W = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \cdot (w'')^2 - q \cdot w \right] \cdot dx \quad (3.7)$$

Şekil 2.1 de görüldüğü gibi (I) hakiki denge konumuna yakın (II) inci bir konum daha alalım Burada  $w_0$  hakiki denge konumuna karşı gelen deplasmandır.  $w_1$  ise ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük artımlardır. Böyle bir artıma  $w'$ 'nin varyasyonu denir.

$$w \longrightarrow w_0 + w_1$$

Potansiyel enerjideki değişme ( varyasyon) şöyle yapılır.

$$\Delta V = V_{II}(w_0 + w_1) - V_I(w_0) \quad (3.8)$$

$$\Delta V = \left[ \int_0^L \frac{EI}{2} (w_0'' + w_1'')^2 \cdot dx - \int_0^L q \cdot (w_0 + w_1) \cdot dx \right] - \left[ \int_0^L \frac{EI}{2} (w_0'')^2 \cdot dx - \int_0^L q \cdot w_0 \cdot dx \right] \quad (3.9)$$

gerekli işlemler yapıp kısaltmalardan sonra aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\Delta V = \int_0^L EI \cdot w_0'' \cdot dx - \int_0^L q \cdot w_1 \cdot dx + \int_0^L \frac{EI}{2} \cdot (w_1'')^2 \cdot dx \quad (3.10)$$

(3.10) ifadesinde üçüncü terim ilk iki terimden küçük olup daima pozitiftir.

$$\int_0^L \frac{EI}{2} (w'')^2 \cdot dx = \alpha \quad (3.11)$$

İlk integrali kısmi olarak arka arkaya iki defa entegre edelim ;

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int_0^L EI.w_0'''.w_1'''.dx = E.I.w_0'''.w_1'' - EI.w_0'''.w_1 + \int_0^L E.I.w_0'''.w_1'.dx \quad (3.12)$$

İlk terim  $w_0''(0) = w_0''(L) = 0$  dinamik şartlardan dolayı, ikinci terimde sınırlarda  $w_1(0) = w_1(L) = 0$  olduğundan dolayı sıfır eder. Sonuç olarak potansiyel enerjideki değişim :

$$\Delta V = \int_0^L EI.w_0'''.w_1'.dx - \int_0^L q.w_1'.dx + \alpha = 0 \quad (3.13)$$

$$\Delta V = \left[ \int_0^L (EI.w_0'''. - q).dx \right].w_1 + \alpha = 0 \quad (3.14)$$

3.1 denkleminde dolayı sıfırdır. Sonuç olarak potansiyel enerjideki değişim sıfırdan büyük bir değer almıştır.

### İspat

$\Delta V = \alpha > 0$  ( $\alpha =$  Sonsuz küçük pozitif bir değerdir.) denge konumunda potansiyel enerji durumunun en küçük olması durumu ortaya çıkmıştır.

Denge durumuna ulaşıncaya kadar oluşan bütün konumlarda toplam potansiyel enerji denge durumundaki toplam potansiyel enerjiden daha fazladır. O halde denge konumunda sistemin potansiyel enerjisi minimumdur.  $\Delta V$  deki birinci ve ikinci dereceden terimlerin toplamına

$$\delta V = \int_0^L (E.I.w_0'''.w_1'' - q.w_1').dx = 0$$

$V$  nin birinci ve ikinci varyasyonu denir.  $\Delta V$  seriye açılıp düzenlenirse:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}.\delta^2 V$$

$$\frac{1}{2!}.\delta^2 V = \int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 .dx = \alpha > 0$$

$$\frac{\delta V}{2!}.\delta^2 V > 0 \rightarrow V \text{ minimumdur}$$

Matematik olarak ifade edersek  $y = f(x)$  fonksiyonu  $y'=0$  ve  $y''>0$  ise  $y_{min} = f(x)$  fonksiyonu  $y'=0$  ve  $y''<0$  ise  $y_{max}$  olacaktır. O halde elastik bir sistemde geometrik sınır şartlarını

sağlayan bütün yer değiştirme konumları arasında hakiki konum, potansiyel enerjiyi minimum yapandır.

### 3.2 Virtüel İş Prensibi

Virtüel deplasmanlar metodu ve virtüel kuvvetler metodu olmak üzere ikiye ayrılır. Sonlu elemanlar metodunda virtüel deplasmanlar metodu kullanılır. Kuvvetlerin işi hesaplanırken, yer değiştirmelerin mutlaka o kuvvetlerden doğması gerekmez. Yani iş her zaman gerçek olmayabilir. Geometrik açıdan veya fiziksel açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilir. Cismin fiziksel bünyesine bağlı değildir. Dengesi incelenen cisim elastik veya plastik olabilir. Bu yöntemde, iç kuvvetlerin yaptığı virtüel işle dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işin eşit olması kabulü ile çözüm yapılır.  $u$  hakiki deplasman,  $\delta u$  virtüel deplasman,  $\epsilon$  hakiki deformasyon,  $\delta \epsilon$  virtüel deformasyon ise

$$\delta U = \iiint_V \{\delta \epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dV \quad (3.15)$$

Burada gerilmeler hakiki, deformasyonlar ise virtüeldir.

$$\sigma = [D] \cdot \{\epsilon\} \quad (3.16)$$

$$\delta U = \iiint_V \{\delta \epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV \quad (3.17)$$

$X$  kütlelesel kuvveti,  $p$  yüzeysel kuvveti,  $q$  çizgisel kuvveti,  $P$  münferit kuvveti,  $P_f$  elastik yatak tepkisi ise dış kuvvetlerin işi (Köksal T., 1995)

$$\delta W = \iiint_V \{\delta u\}^T \cdot \{X\} dV + \iint \{\delta u\}^T \cdot \{p\} dF + \int \{\delta u\}^T \cdot \{q\} dS + P - \iint \{\delta w\}^T \cdot P_f \quad (3.18)$$

olacaktır.

$$\delta U = \delta W \quad (3.19)$$

## 4. SONLU ELEMANLAR METODU (S.E.M)

### 4.1 Sonlu Elemanlar Metodunun Tanımı

Analitik Metotlar ile çözülemeyen karışık problemlerin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Çözümü istenen sistemleri kendi yapısına benzer sonlu sayıda elemana bölerek ve bu elemanların birbirine bağlandığı düğüm noktalarında iç kuvvetlerin ve deplasmanların yoğunlaştığı kabulü bu yöntemin önemli yaklaşımıdır.

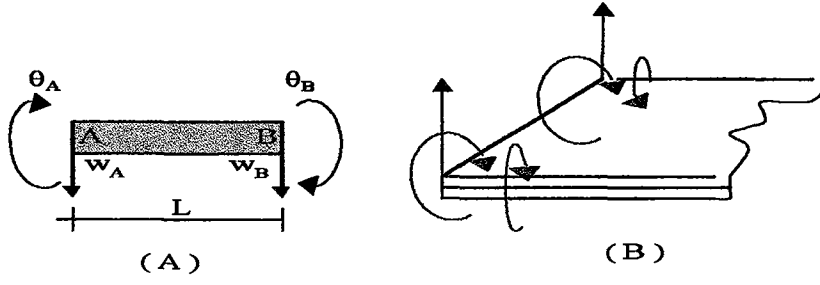
### 4.2 Sonlu Elemanlar Metodunda Deplasman Fonksiyonu Seçme Esasları

#### a) Deplasman Fonksiyonlarını Seçme Koşulları:

1. Deplasman fonksiyonları rijit cisim hareketi ve sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir.
2. Koordinat eksenini değiştirince çözümde farklılıklar oluşmamalıdır.
3. Bunun için deplasman fonksiyonu ya tam polinom veya tabii koordinatların fonksiyonu şeklinde olmalıdır.
4. Deplasman fonksiyonu elemanın içinde ve kenarında sürekli olmalıdır.
5. İç ve dış kuvvetlerin içindeki türevlerde de sürekli olmalıdır.

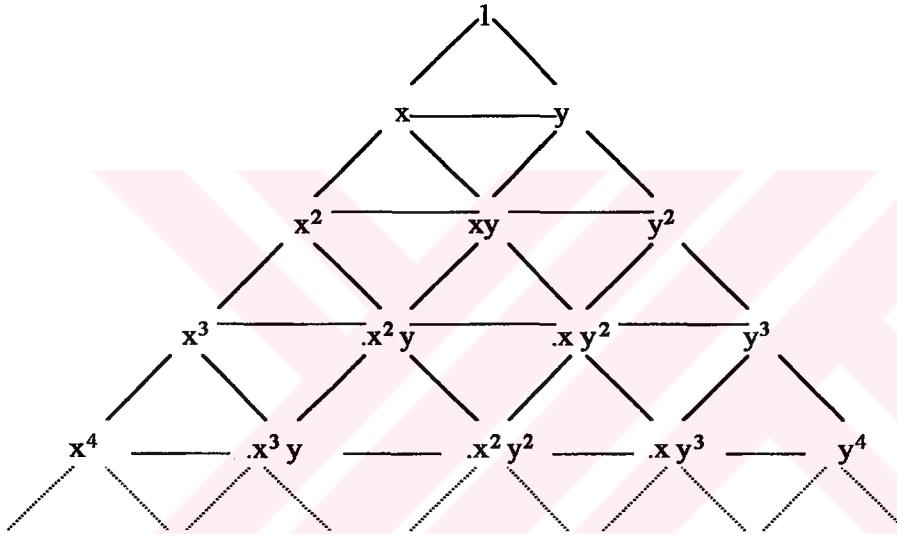
#### b) Eleman Düğüm Noktası Parametreleri

1. Eleman düğüm noktası parametreleri çözümü yapılacak sistemin geometrik ve fiziksel koşullarına bağlı olarak düşünülecektir.
2. Çubuk sistemlerde eğileme yükü söz konusu ise her düğüm noktasında çökme ve dönme olmak kaydıyla en az iki adet düğüm noktası deplasmanı seçilecek ve deplasman fonksiyonu bilinmeyen sayısı dört olacaktır (Şekil 4.1A).
3. Yüzeysel Taşıyıcı sistemlerden plaklarda, Her düğüm noktasında üç adet düğüm noktası deplasmanım olduğu düşünülecek ve deplasman fonksiyonu 12 bilinmeyenli bir polinom olacaktır (Şekil 4.1B).
4. Kabuk sistemlerde ise düğüm noktası bilinmeyenleri yedi adet alınacak ve deplasman fonksiyonu yirmi sekiz bilinmeyenli polinom olacaktır.



Şekil 4.1 Eleman üzerindeki deplasmanların, pozitif yönleri

**c) Deplasman Fonksiyonu Seçiminde Pascal Polinomlarından Faydalanma;**



Şekil 4.2 Pascal Polinomu ağı

**Düzlem taşıyıcı Plak için seçilecek deplasman fonksiyonu :**

$$\bar{w} = a_1 + a_2.x + a_3.y + a_4.x^2 + a_5.xy + a_6.y^2 + a_7.x^3 + a_8.x^2.y + a_9.x.y^2 + a_{10}.y^3 + a_{11}.x^3.y + a_{12}.xy^3 \quad (4.1)$$

şeklinde seçilir. Burada a polinom sabitleri eleman düğüm noktalarındaki deplasmanların sayısına eşittir. Eleman düğüm noktası deplasman parametreleri {d} ile {a} polinom sabitleri arasındaki bağılılığı bir [A] bağ matrisi ile tanımlar ve w deplasman fonksiyonunu düğüm noktası deplasmanlarına bağlı olarak yazmak istersek;

$$[\Phi(x, y)] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \quad (4.2)$$

$$\{d\} = [A] \cdot \{a\} \text{ olacaktır.} \quad (4.3)$$

$$\{a\} = [A]^{-1} \cdot \{d\} \quad (4.4)$$

$[A]^{-1} = [B]$  dersek (Bağ matrisinin inversi  $[B]$  matrisi)

$$\{a\} = [B] \cdot d \quad (4.5)$$

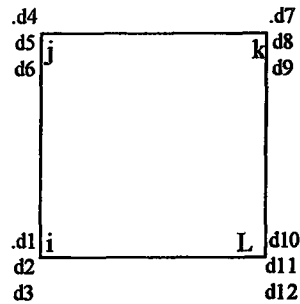
$$\bar{w} = [\Phi(x, y)] \cdot [B] \cdot d \text{ olacaktır.} \quad (4.6)$$

$$[N] = [\Phi(x, y)] \cdot [B] \text{ dersek} \quad (4.7)$$

$[N]$ ; matris ifadesi şekil fonksiyonu matrisi olduğundan seçilen  $w$  deplasman fonksiyonu şekil fonksiyonları ve düğüm noktası deplasman parametreleri cinsinden ifade edilmiş olur.

$$w = [N] \cdot \{d\} \quad (4.8)$$

Düğüm noktası deplasman parametreleri olan  $\{d\}$  sütun matrisinin, plaklar eleman üzerinde açık biçimde gösterilmiş hali aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.3 Plak elemanı üzerindeki noktalarda deplasman değerleri

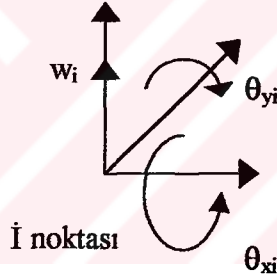
$$d^T = [ \underbrace{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}}_{i \text{ noktası}}, \underbrace{w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}}_{j \text{ noktası}}, \underbrace{w_k, \theta_{xk}, \theta_{yk}}_{k \text{ noktası}}, \underbrace{w_L, \theta_{xL}, \theta_{yL}}_{L \text{ noktası}} ] \quad (4.9)$$

#### i noktası örnek alınır

$w_i$ ; deplasman fonksiyonu olmak üzere,  $w_i$  i noktasındaki koordinatlar yerine konduğunda deplasman fonksiyonunun i noktasındaki çökme değeridir.

$\theta_{xi}$ ;  $w$  deplasman fonksiyonunun y eksenine göre birinci türevinin i noktasında aldığı dönme değeridir.

$\theta_{yi}$ ;  $w$  deplasman fonksiyonunun x eksenine göre birinci türevinin i noktasında aldığı değerdir. Sağ el kuralından dolayı (-) işaret alacaktır (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 Eleman üzerindeki bir i noktasında sağ el kuralının uygulanması

#### **4.3 Sonlu Elemanlar Metodu İle Plak Hesabında Yapılan Kabuller;**

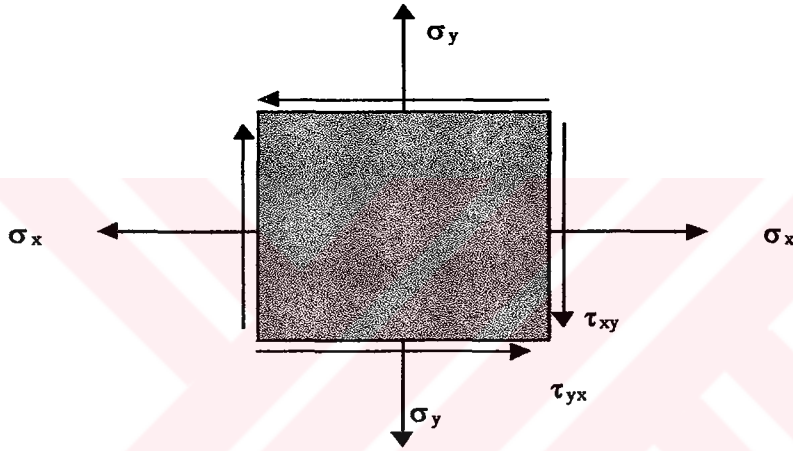
1. Plak kalınlığı diğer boyutlarının yanında çok küçüktür.
2. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.
3. Yükler orta düzleme dik olarak etkiyor ise **plak** çalışması, yükler orta düzlem doğrultusunda etkiyor ise **levha** çalışması söz konusudur. Sehimler plak kalınlığı yanında çok küçüktür.
4. Malzeme homojen, (her noktada aynı fiziksel özelliğe sahiptir.) Malzeme izotrop ve Hook kanununa uygun lineer elastik bir malzemedir.
5. Z ekseninde boyunca olan  $\sigma_z$  gerilmesi diğer iki boyuttaki gerilmelerin yanında ihmal edilebilir ( $\sigma_z \approx 0$ ).



6.  $\sigma_z \approx 0$  bağılı olarak  $\epsilon_z$  deformasyonunda ihmal edilebilecek kadar küçüldür.
7. Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasındaki normal deformasyondan sonra da meydana gelen elastik yüzeyin o noktadaki normali olarak kalır.(Kirchhoff-Love)
8. Kesitin orta düzleminde deformasyon ihmal edilebilecek kadar küçüktür.
9. Elastisite teorisinden bilindiği gibi plakta hesap kolaylığı için düzlem gerilme durumu kabul edilecektir. ( $\sigma_z = 0$ ) Düzlem gerilme durumunda gerilme birleşenleri (Berktaç I., 1992);

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (4.10)$$

olduğundan;



Şekil 4.5 İki eksenli gerilmede gerilme birleşenleri

Gerilme birleşenlerini Matris Formda gösterirsek;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma = D \cdot \{\epsilon\} \quad (4.11).$$

Burada [D] matrisini, düzlem gerilmede elastisite matrisi olarak tanımlayarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

10. Elastisite teorisinden bilindiği gibi şekil değiştirme bağıntıları hesap kolaylığı açısından düzlem gerilme etkisinde düzlem şekil değiştirme durumu olarak kabul edileceğinden ( $\epsilon_z=0$ ) şekil değiştirme birleşenleri aşağıdaki şekilde olacaktır (Yücefer N., 1998)

$$[\epsilon_x]_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z \quad [\epsilon_y]_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z \quad [\gamma_{xy}]_z = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (4.13)$$

(3.13) ifadesi Matris Formda yazılırsa

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.4 Eleman Rijitlik Matrisinin Hesaplanmasında Toplam Potansiyel Enerji (T.P.E.) Yönteminin Uygulanması

Yayılı q yüküne maruz bir çubuğun Toplam Potansiyel Enerjisi (3.6) denkleminde verildiği şekildedir. Toplam Potansiyel Enerjinin birinci varyasyonu ise;

$$\delta V^e = \iint [EI(w'')^2 - q \cdot w] \cdot dx \quad (4.15)$$

$$\delta U^e = \iint [EI(w'')^2] \cdot dx \quad \text{iç iş} \quad (4.16)$$

$$\delta W^e = -\iint [q \cdot w] \cdot dx \quad \text{dış iş} \quad (4.17)$$

$$\delta U^e = \iint [EI(w'')^2] \cdot dx = \{\epsilon\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon\} \cdot dx \quad (4.18)$$

[F] Türev matrisi ise;

$\epsilon = [F].a$   $\epsilon = [F].[B].\{d\}$  değerini denklem (4.18) de yerine koyarsak

$$\delta U^e = \iint [F]^T . [B]^T . \{d\}^T . [D] . [F] . [B] . \{d\} \quad \text{iç iş} \quad (4.19)$$

Burada kısaltmalar yapılırsa;

$$[H] = \iint [F]^T . [D] . F \quad \text{İntegral matrisi} \quad (4.20)$$

$$k_e = [B]^T [H] . [B] \quad \text{Eleman rijitlik matrisi} \quad (4.21)$$

iç iş ifadesi olan denklem (3.19) da (3.21) yerine koyarsak;

$$\delta U^e = \{d\}^T k_e \{d\} \quad (4.22)$$

bulunur.

#### **4.5 Eleman Zemin Etki Matrisinin (Elastik Yataklanma Matrisi) Toplam Potansiyel Enerji (T.P.E) Yöntemi ile Hesaplanması**

Elastik bir zemine oturan plakta kuvvet–yer değiştirme ilişkisi aşağıdaki şekildedir. Alttan yukarı doğru etki yaptığı için (-) işaret alacaktır.

$$P_f = -c.w \quad (4.23)$$

Burada c elastik yataklanma katsayısıdır. Eleman üzerinde sabit olduğu kabul edilir. Elastik yatak tepkileri yüzeyin normali doğrultusundadır. Böylece elastik zemin etkisinden doğan şekil değiştirme enerjisi;

$$U_f = -\frac{1}{2} \iint P_f . w . dx . dy \quad (4.24)$$

(4.24 ) ifadesi  $w$  çökme durumuna karşı  $dx.dy$  birim alanda zemin etkisinden doğan  $P_f$  kuvvetinin yaptığı işin enerji toplamını göstermektedir (4.23) ifadesini (4.24)ifadesinde yerine koyarsak;

$$U_f = \frac{c}{2} \iint (w)^2 .dx.dy \quad (4.25)$$

İfadesi elde edilir elastik zemine oturan plağın şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu ise

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_f = \frac{c}{2} \iint (w)^2 .dx.dy \quad (4.26)$$

Denklem (4.6) ve denklem (4.7) ifadeleri sırayla (4.26) da yerine konup düzenlenirse Elastik Etki matrisi bulunur.

$$[S_e] = c. \iint [B]^T .[\varphi(x,y)]^T [\varphi(x,y)][B] dx.dy \quad (4.27)$$

$$[S_e] = c. \iint [N]^T .[N] dx.dy \quad (4.28)$$

#### 4.6 Eleman Kütle Matrisinin Toplam Potansiyel Enerji Yöntemi ile Hesaplanması

Gerçek sonuca iyi yaklaşmak için mümkün olduğu kadar yayılı kütle haline yaklaşmak gerekecektir. Yüzeysel kuvvetlerden doğan atalet kuvvetlerinin gerçek yayılışları ile hesaba katılması uygundur.

Yayılı kütlelerin ortalama yüzeye indirgendiği kabulü, plak kalınlığının diğer boyutlara oranla küçük ve sabit olmasından dolayı kabul edilecektir. Kütle Etkisi yüzeyin normali doğrultusundadır.

$$P_q = \rho .w \quad (4.29)$$

Böylece eleman kütlelerinin etkisinden doğan şekil değiştirme enerjisi

$$U_q = \frac{1}{2} \iint P_q \cdot w \cdot dx \cdot dy \quad (4.30)$$

(4.30) ifadesi  $w$  çökme durumuna karşı  $dx \cdot dy$  birim alanda kütle etkisinden doğan  $M$

$$U_q = \frac{\rho}{2} \iint (w)^2 \cdot dx \cdot dy \quad (4.31)$$

kuvvetinin yaptığı işin enerji toplamını göstermektedir (4.29) ifadesini (4.30) ifadesinde yerine koyarsak;

Denklem (4.6) ve denklem (4.7) ifadeleri sırayla (4.31) ifadesinin ikinci varyasyonunda yerine konup düzenlenirse Eleman Kütle matrisi bulunur.

$$[m_e] = \rho \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} [N]^T [N] dx \cdot dy \quad (4.32)$$

## 5. DİNAMİK DIŞ ETKİLER HALİNDE SONLU ELEMANLAR METODU

### 5.1 Dinamik Dış Etkiler

İnşaat mühendisliğinde deprem, darbe kuvvetleri, makine titreşim kuvvetleri ve ani patlama kuvvetleri zaman bağılı değişen kuvvetlerdir. Dış etkilerin zaman bağılı olarak sonlu bir hızla değişmesi halinde atalet kuvvetlerinin de göz önüne alınması gerekmektedir. Sistemi etkileyen kuvvetler zamanın bir fonksiyonu ise, bu kuvvetlerin etkidiği yapıların tepkisi de zamanın bir fonksiyonudur ve zamana bağılı olarak meydana gelecek yer değiştirmelerin ivmeleri, atalet kuvvetlerini meydana getirirler. Bu durumda sistem iki tip yükün etkisi altında düşünülebilir (Köksal E., 1996).

Harekete neden olan dış yük ve hareketin ivmelenmesine karşı duran atalet kuvvetleri. Yapı özellikleri ve etkiyen kuvvetlerden yola çıkarak titreşen sisteme ait mekanik bir yay-kütle modeli oluşturulur ve bu sisteme ait titreşim denklemleri oluşturularak çözüme ulaşılır.

### 5.2 Dinamik Dış Etkiler Halinde Yapılan Kabuller

1. Eleman üzerinde bulunan yayılı kütlelerin düğüm noktalarında toplandığı kabul edilecektir.
2. Eleman boyutlarının büyük olması halinde gerçek sonuca yaklaşmak için nokta kütle sayısını arttırmak ve mümkün olduğu kadar yayılı kütle haline yaklaşmak gerekecektir.
3. Yüzeysel kütlelerden doğan atalet kuvvetlerinin gerçek yayılışları ile hesaba katılması uygundur.
4. Yayılı kütlelerin plaklarda, ortalama yüzeye indirildiği kabulü yapılacaktır.
5. Zamana bağılı şekil değiştirme, ortalama yüzeyin yer değiştirmeleri cinsinden belirlendiğinden, yayılı atalet kuvvetleri yalnız yer değiştirme birleşenlerine bağılı olacaklardır.
6. Dönme bileşenlerine bağılı olarak ayrıca yüzeysel yayılı momentler meydana gelmeyecektir.

### 5.3 S. E. M. İle Dinamik Dış Yük Etkisinde Kalan Elemanın Genel Denklemi

Herhangi bir  $t$  anındaki yüzeysel elemanın hareket denklemi D'Alembert prensibine göre; sisteme etki eden atalet kuvvetleri, sönüm etkileri ve yay kuvvetleriyle beraber dış kuvvetler denge halinde olmalıdır. Bilindiği gibi sönüm tesirleri de,  $\mu$  sürtünme katsayısı olmak üzere viskoz bir ortamda hızla orantılı bir sürtünme kuvveti gibi düşünülmektedir. Birim alana gelen kütle yoğunluğu  $\rho$  olduğuna göre; titreşime maruz kütlelerin etkisi altında kaldığı atalet

kuvveti, sönüm kuvveti ve yay kuvvetlerinin ilave dış yükler gibi düşünülmesiyle virtüel iş teoremi uygulanabilir.

$\delta U$  iç kuvvetlerin,  $\delta W$  dış kuvvetlerin virtüel işini gösterebilir.

$\delta \epsilon$  virtüel deplasmanı ifade etmekte olup  $\sigma$  gerçek gerilme ifadesidir.

$\epsilon_0$  başlangıç şekil değiştirmesi  $\sigma_0$  başlangıç gerilmesi  $\alpha \cdot \Delta t \cdot \{D_T\}$  sıcaklıktan doğan gerilme ise,

$$\delta U = \int_0^b \int_0^a \{\delta \epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dx \cdot dy \quad (5.1)$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} - \alpha \cdot \Delta t \cdot \{D_T\} \quad (5.2)$$

$\epsilon_0$  başlangıç şekil değiştirmesi ve  $\sigma_0$  başlangıç gerilmesi ihmal edilirse

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} - \alpha \cdot \Delta t \cdot \{D_T\} \quad (5.3)$$

elde edilir. İç iş ifadesi olan (5.1) denkleminde (5.3) ifadesi yerine konursa

$$\delta U = \iint \{\delta \epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dA - \iint \{\delta \epsilon\}^T \alpha \Delta t \{D_T\} dA \quad (5.4)$$

virtüel iç iş ifadesi elde edilir.

Dinamik etki durumlarında elemanın kütle ağırlığı ve sönüm tesiri eleman bünyesindeki etkiler olmasına rağmen, titreşimden dolayı dış yük etkisi yaratmaktadır. Elastik zemin tesiri ise dış yükün ters istikametinde bir yükleme oluşturmaktadır. Buna göre virtüel dış iş;

$$\delta W = \rho \cdot \iint \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \mu \cdot \iint \{\delta u\}^T \{\dot{u}\} dV - c \cdot \iint \{\delta u\}^T \{u\} dF + \iint \{\delta u\}^T \cdot \{p\} dF \quad (5.5)$$

Virtüel yer ve şekil değiştirmeler ise aşağıdaki gibidir.

$$\delta u = [N] \{\delta d\} \quad \delta \dot{u} = [N] \{\delta \dot{d}\} \quad \delta \ddot{u} = [N] \{\delta \ddot{d}\} \quad \delta \epsilon = [\Delta N] \{\delta d\} \quad (5.6)$$

$\delta U = \delta W$  yazıp (5.5) denkleminde (5.6) ifadelerini yerine koyup düzenlersek ve matris formda yazarsak

$$[k_e] \{d(t)\} + [c_e] \{d'(t)\} + [m_e] \{d''(t)\} + [s_e] \{d(t)\} = \{q_e(t)\}_0 + \{q_e(t)\}_T \quad (5.7)$$

ifadesi elde edilir Bu ifadedeki birleşenlerin açılımı aşağıdaki gibidir.

$$[k_e] = \int_V [AN]^T [D] [AN] dV \quad : \text{Eleman rijitlik matrisi}$$

$$[c_e] = \mu \int_V [N]^T [N] dV \quad : \text{Eleman sönüm matrisi}$$

$$[m_e] = \rho \int_V [N]^T [N] dV \quad : \text{Eleman kütle matrisi}$$

$$[s_e] = c \int_F [N(w)]^T [N(w)] dF \quad : \text{Eleman elastik yataklama matrisi}$$

$$\{q_e(t)\}_T = \alpha \Delta t \int_V [AN]^T \{D_T\} dV \quad : \text{Elemanın zamana bağlı sıcaklık değişimi}$$

$$\{q_e(t)\}_0 = \int_F [N]^T p(t) dF \quad : \text{Elemanın zamana bağlı dış yükü}$$

Sisteme geçiş:

$$[K] \{d(t)\} + [C] \{d'(t)\} + [M] \{d''(t)\} + [S] \{d(t)\} = \{Q(t)\}_0 + \{Q(t)\}_T \quad (5.8)$$

#### 5.4 Elastik Zeminde Sönümsüz Serbest Titreşim (S.S.T.) Durumu

Sönümsüz Serbest Titreşim durumunda dış yük ve sönüm olayı olamayacağından (5.8) ifadesi aşağıdaki durumu alır.

$$[K] \{d(t)\} + [S] \{d(t)\} + [M] \{d''(t)\} = 0 \quad (5.9)$$

$$\{d\} = \{d^-\} \sin(\omega t + \theta)$$

Olarak yazılabilir. ( $\{d^-\}$  ifadesi kütlelerin ötelenme genlikleridir ve sıfırdan farklıdır.) bu ifadenin zamana göre I.ve II. Türevlerini alırsak;



$$\{d\}^I = \omega \cdot \{d\}^- \cos(\omega t + \theta)$$

$$\{d\}^{II} = -\omega^2 \cdot \{d\}^- \sin(\omega t + \theta)$$

İfadelerini (4.9) ifadesinde yerine koyar ve düzenlersek elastik Zemine oturan ince plakların sönümsüz serbest titreşimini veren ifadeyi elde ederiz.

$$[\{K\} + \{S\} - \omega^2 \{M\}][D] = 0 \quad (5.10)$$

Burada  $[D]$  sütun matrisinin sıfır olması bilinen bir çözümdür  $[\{K\} + \{S\} - \omega^2 \{M\}]$  ifadesinin determinantını "0" yapan " $\omega$ " değerleri aranarak çözüme gidilir.

$$[\{K\} + \{S\} - \omega^2 \{M\}] = 0 \quad (5.11)$$

Eğer Elastik Zemin Etkisi söz konusu değilse (5.11) denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$[\{K\} - \omega^2 \{M\}] = 0 \quad (5.12)$$

## 6. ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAĞIN S. S. T. DURUMUNDA ALDIĞI PERİYOT ( T ) DEĞERLERİNİN S.E.M. İLE BULUNMASI

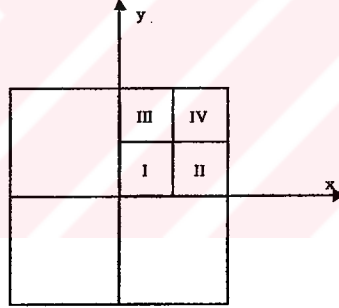
### 6.1 Eleman Rijitlik Matrisinin Hesaplanması

#### 6.1.1 Şekil Fonksiyonlarının Hesaplanması

Düzlem taşıyıcı plak için seçilecek olan deplasman fonksiyonu paskal polinomlarından belirlenir. Denklem (4.1)

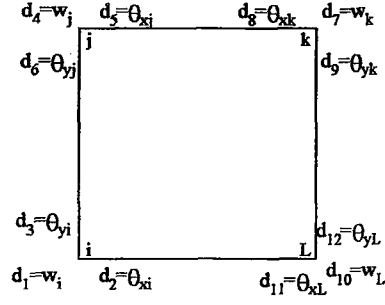
$$\bar{w} = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot xy + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^3 + a_8 \cdot x^2 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y^2 + a_{10} \cdot y^3 + a_{11} \cdot x^3 y + a_{12} \cdot xy^3 \quad (4.1)$$

Plak üzerinde sonlu sayıda, kendi geometrisine uygun elemanlara bölünerek bir eleman ağı oluşturulur.



Şekil 6.1 Plak sistemin Elemanlara ayrılması

Daha sonra bu sistemin üzerinde Şekil 6.1 deki gibi ayrılmış ve numaralandırılmış olan elemanlardan biri seçilerek eleman düğüm noktası deplasmanları gösterilir ( Şekil 6.2).



Şekil 6.2 Eleman düğüm noktası deplasmanları

Daha önce anlatıldığı gibi Polinom sabiti olan  $\{a\}$ 'lar ile düğüm noktası deplasmanları olan  $\{d\}$ 'ler arasındaki bağlantıyı bir  $[A]$  bağ matrisi yazarak tanımlarsak denklem (4.3), (4.4), (4.5) ve (4.6)'nın sonucu olarak denklem (4.7) bulunur.

$$[N] = [\Phi(x, y)] \cdot [B] \text{ dersek} \quad (4.7)$$

Burada,

$$[\Phi(x, y)] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \quad (4.2)$$

olduğundan şekil fonksiyonları için sadece  $[A]$  bağ matrisinin inversi olan  $[B]$  matrisi hesaplanır ve denklem (4.2) ile çarpılarak şekil fonksiyonları oluşturulur.

$$\bar{w} = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot xy + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^3 + a_8 \cdot x^2 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y^2 + a_{10} \cdot y^3 + a_{11} \cdot x^3 y + a_{12} \cdot xy^3 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \theta_x = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 + a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial x} = \theta_y = -a_2 - 2a_4 x - a_5 y - 3a_7 x^2 - 2a_8 xy - a_9 y^2 - 3a_{11} x^2 y - a_{12} y^3$$

$i(0,0)$ ,  $j(0,b)$ ,  $k(a,b)$ ,  $L(a,0)$  Koordinatları yerine konarak  $[A]$  Bağ matrisi elde edilir.

Çizelge 6.1  $[A]$  Bağ Matrisi

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	B	0	0	$b^2$	0	0	0	$b^3$	0	0
0	0	1	0	0	$2b$	0	0	0	$3b^2$	0	0
0	-1	0	0	$-b$	0	0	0	$-b^2$	0	0	$-b^3$
1	a	B	$a^2$	ab	$b^2$	$a^3$	$a^2b$	$ab^2$	$b^3$	$a^3b$	$ab^3$
0	0	1	0	a	$2b$	0	$a^2$	$2ab$	$3b^2$	$A^3$	$3ab^2$
0	-1	0	$2a$	$-b$	0	$-3a^2$	$-2ab$	$-b^2$	0	$-3a^2b$	$-b^3$
1	a	0	$a^2$	0	0	$a^3$	0	0	0	0	0
0	0	1	0	a	0	0	$a^2$	0	0	$A^3$	0
0	-1	0	$2a$	0	0	$-3a^2$	0	0	0	0	0

Elde edilen bu  $[A]$  bağ matrisinin inversi alınır ve  $[A]^{-1}=[B]$  denirse aşağıdaki matris bulunur.

Çizelge 6.2  $[B]$  Matrisi

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-3/a^2$	0	$2/a$	0	0	0	0	0	0	$3/a^2$	0	$1/a$
$-1/ab$	$-1/a$	$1/b$	$1/ab$	0	$-1/b$	$-1/ab$	0	0	$1/ab$	$1/a$	0
$-3/b^2$	$-2/b$	0	$3/b^2$	$-1/b$	0	0	0	0	0	0	0
$2/a^3$	0	$-1/a^2$	0	0	0	0	0	0	$-2/a^3$	0	$-1/a^2$
$3/a^2b$	0	$-2/ab$	$-3/a^2b$	0	$2/ab$	$3/a^2b$	0	$1/ab$	$-3/a^2b$	0	$-1/ab$
$3/ab^2$	$2/ab$	0	$-3/ab^2$	$1/ab$	0	$3/ab^2$	$-1/ab$	0	$-3/ab^2$	$-2/ab$	0
$2/b^3$	$1/b^2$	0	$-2/b^3$	$1/b^2$	0	0	0	0	0	0	0
$-2/a^3b$	0	$1/a^2b$	$2/a^3b$	0	$1/a^2b$	$-2/a^3b$	0	$-1/a^2b$	$2/a^3b$	0	$1/a^2b$
$-2/ab^3$	$-1/ab^2$	0	$2/ab^3$	$-1/ab^2$	0	$-2/ab^3$	$1/ab^2$	0	$2/ab^3$	$-1/ab^2$	0

Denklem (4.2) ile [B] bağ matrisinin soldan çarpımı şekil fonksiyonlarını verir. Şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} - \frac{xy}{ab} + \frac{3x^2y}{a^2b} - \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2y^3}{b^3} - \frac{2xy^3}{ab^3}$$

$$N_2 = y - \frac{xy}{a} - \frac{2y^2}{b} + \frac{2xy^2}{ab} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{xy^3}{ab^2}$$

$$N_3 = -x + \frac{2x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{xy}{b} - \frac{2x^2y}{ab} + \frac{x^3y}{a^2b}$$

$$N_4 = \frac{xy}{ab} - \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{2x^3y}{a^3b} + \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3xy^2}{ab^2} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{2xy^3}{ab^3}$$

$$N_5 = -\frac{y^2}{b} + \frac{xy^2}{ab} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{xy^3}{ab^2}$$

$$N_6 = -\frac{xy}{b} + \frac{2x^2y}{ab} - \frac{x^3y}{a^2b}$$

$$N_7 = -\frac{xy}{ab} + \frac{3x^2y}{a^2b} - \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2xy^3}{ab^3}$$

$$N_8 = \frac{xy^3}{ab^2} - \frac{xy^2}{ab}$$

$$N_9 = \frac{x^2y}{ab} - \frac{x^3y}{a^2b}$$

$$N_{10} = \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{xy}{ab} - \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2xy^3}{ab^3}$$

$$N_{11} = \frac{xy}{a} - \frac{2xy^2}{ab} + \frac{xy^3}{ab^2}$$

$$N_{12} = \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} - \frac{x^2y}{ab} + \frac{x^3y}{a^2b}$$

### 6.1.2 Şekil Fonksiyonlarının Yardımı ile Eleman Rijitlik Matrisinin Hesabı

Şekil fonksiyonlarının ikinci türevlerinden yararlanarak aşağıdaki türev matrisi elde edilir. Bu matrisin transpozesi ile [D] elastisite matrisi ve matrisin kendisi çarpılarak eleman rijitlik matrisi elde edilir. Denklem (6.8).

Çizelge 6.3 Şekil fonksiyonları ikinci türevleri

$$\Delta N^T = \begin{array}{c} \frac{6}{a^2} - \frac{12x}{a^3} - \frac{6y}{a^2b} + \frac{12xy}{a^3b} \\ 0 \\ -\frac{4}{a} + \frac{6x}{a^2} + \frac{4y}{ab} - \frac{6xy}{a^2b} \\ \frac{6y}{a^2b} - \frac{12xy}{a^3b} \\ 0 \\ -\frac{4y}{ab} + \frac{6xy}{a^2b} \\ -\frac{6y}{a^2b} + \frac{12xy}{a^3b} \\ 0 \\ -\frac{2y}{ab} + \frac{6xy}{a^2b} \\ \frac{6}{a^2} + \frac{12x}{a^3} + \frac{6y}{a^2b} - \frac{12xy}{a^3b} \\ 0 \\ -\frac{2}{a} + \frac{6x}{a^2} + \frac{2y}{ab} - \frac{6xy}{a^2b} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{6}{b^2} - \frac{6x}{ab^2} - \frac{12y}{b^3} + \frac{12xy}{ab^3} \\ \frac{4}{b} - \frac{4x}{ab} - \frac{6y}{b^2} + \frac{6xy}{ab^2} \\ 0 \\ \frac{6}{b^2} + \frac{6x}{ab^2} + \frac{12y}{b^3} - \frac{12xy}{ab^3} \\ \frac{2}{b} - \frac{2x}{ab} - \frac{6y}{b^2} + \frac{6xy}{ab^2} \\ 0 \\ -\frac{6x}{ab^2} + \frac{12xy}{ab^3} \\ \frac{2x}{ab} - \frac{6xy}{ab^2} \\ 0 \\ \frac{6x}{ab^2} - \frac{12xy}{ab^3} \\ \frac{4x}{ab} - \frac{6xy}{ab^2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{ab} + \frac{6x}{a^2b} - \frac{6x^2}{a^3b} + \frac{6y}{ab^2} - \frac{6y^2}{ab^3} \\ -\frac{1}{a} + \frac{4y}{ab} - \frac{3y^2}{ab^2} \\ \frac{1}{b} - \frac{4x}{ab} + \frac{3x^2}{a^2b} \\ \frac{1}{ab} - \frac{6x}{a^2b} + \frac{6x^2}{a^3b} - \frac{6y}{ab^2} + \frac{6y^2}{ab^3} \\ \frac{2y}{ab} - \frac{3y^2}{ab^2} \\ -\frac{1}{b} + \frac{4x}{ab} - \frac{3x^2}{a^2b} \\ \frac{1}{ab} + \frac{6x}{a^2b} - \frac{6x^2}{a^3b} + \frac{6y}{ab^2} - \frac{6y^2}{ab^3} \\ \frac{2y}{ab} + \frac{3y^2}{ab^2} \\ \frac{2x}{ab} - \frac{3x^2}{a^2b} \\ \frac{1}{ab} - \frac{6x}{a^2b} + \frac{6x^2}{a^3b} - \frac{6y}{ab^2} + \frac{6y^2}{ab^3} \\ \frac{1}{a} - \frac{4y}{ab} + \frac{3y^2}{ab^2} \\ -\frac{2x}{ab} + \frac{3x^2}{a^2b} \end{array}$$

$$[k_e] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^b \int_0^a [\Delta N]^T [D] [\Delta N] dx dy \quad D = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

İfadesinden yararlanarak eleman rijitlik matrisini yazalım;

$$k_{11} = \left[ 4 \frac{a^2}{b^2} + 4 \frac{b^2}{a^2} + \frac{14}{5} - \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{12} = k_{21} = \left[ 2 \frac{a^2}{b} + \frac{b}{5} + 4 \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12.ab(1-v^2)}$$

$$k_{13} = k_{31} = \left[ -2 \frac{b^2}{a} - \frac{a}{5} - 4 \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{14} = k_{41} = \left[ 2 \frac{b^2}{a^2} - 4 \frac{a^2}{b^2} - \frac{14}{5} + 4 \frac{v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ba(1-v^2)}$$

$$k_{15} = k_{51} = \left[ 2 \frac{a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{16} = k_{61} = \left[ -\frac{b^2}{a} + \frac{a}{5} - 4 \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{17} = k_{71} = \left[ -2 \frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{14}{5} - 4 \frac{v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{18} = k_{81} = \left[ \frac{a^2}{b} - \frac{b}{5} - \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{19} = k_{91} = \left[ -\frac{b^2}{a} + \frac{a}{5} - \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{110} = k_{101} = \left[ 2 \frac{a^2}{b^2} - 4 \frac{b^2}{a^2} - \frac{14}{5} + 4 \frac{v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{111} = k_{111} = \left[ \frac{a^2}{b} - \frac{b}{5} + 4 \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{112} = k_{121} = \left[ -2 \frac{b^2}{a} - \frac{a}{5} + \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{22} = \left[ \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{15}b^2 - \frac{4}{15}b^2v \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{23} = k_{32} = \left[ -v.a.b \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{24} = k_{42} = \left[ -2 \frac{a^2}{b} - \frac{b}{5} + \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{25} = k_{52} = \left[ \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{30}b^2(1-v) \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{26} = k_{62} = 0 \dots\dots\dots k_{27} = k_{72} = \left[ -\frac{a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{28} = k_{82} = \left[ \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{15} - \frac{1}{15}b^2v \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{29} = k_{92} = 0$$

$$k_{210} = k_{102} = \left[ \frac{a^2}{b} - \frac{b}{5} + 4 \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{211} = k_{112} = \left[ \frac{a^2}{b} - \frac{b}{5} + 4 \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{33} = \left[ \frac{4}{3}b^2 + \frac{4a^2(1-v)}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{34} = k_{43} = \left[ -\frac{b^2}{a} + \frac{a}{5} - 4 \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{35} = k_{53} = 0 \dots\dots\dots k_{36} = k_{63} = \left[ \frac{2b^2}{3} - \frac{4a^2(1-v)}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{37} = k_{73} = \left[ \frac{b^2}{a} - \frac{a}{5} + \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{38} = k_{83} = 0$$

$$k_{39} = k_{93} = \left[ \frac{b^2}{3} + \frac{a^2(1-v)}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{310} = k_{103} = \left[ \frac{2b^2}{a} + \frac{a}{5} - \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{311} = k_{113} = 0 \dots\dots\dots k_{312} = k_{123} = \left[ \frac{2b^2}{3} - \frac{2a^2(1-v)}{30} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{44} = \left[ \frac{4a^2}{b^2} + \frac{4b^2}{a^2} + \frac{14}{5} - \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{45} = k_{54} = \left[ -\frac{2a^2}{b} - \frac{b}{5} - \frac{4bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{46} = k_{64} = \left[ -\frac{2b^2}{a} - \frac{a}{5} - \frac{4av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{47} = k_{74} = \left[ \frac{2a^2}{b^2} - \frac{4b^2}{a^2} - \frac{14}{5} + \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{48} = k_{84} = \left[ -\frac{a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{4bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{49} = k_{94} = \left[ -\frac{2b^2}{a} - \frac{a}{5} + \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{410} = k_{104} = \left[ -\frac{2a^2}{b^2} - \frac{2b^2}{a^2} + \frac{14}{5} - \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{411} = k_{114} = \left[ -\frac{a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{412} = k_{124} = \left[ -\frac{b^2}{a} + \frac{a}{5} - \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{55} = \left[ \frac{4}{3}a^2 + \frac{4b^2(1-v)}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{56} = k_{65} = v.a.b. \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{57} = k_{75} = \left[ -\frac{a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{4bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{58} = k_{85} = \left[ \frac{2a^2}{3} - \frac{4b^2}{15} + \frac{4b^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{59} = k_{95} = 0$$

$$k_{510} = k_{105} = \left[ \frac{a^2}{b} - \frac{b}{5} + \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{511} = k_{115} = \left[ \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{15} - \frac{b^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{512} = k_{125} = 0 \dots\dots\dots k_{66} = \left[ \frac{4b^2}{3} + \frac{4a^2}{15} - \frac{4a^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{67} = k_{76} = \left[ \frac{2b^2}{a} + \frac{a}{5} - \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{68} = k_{86} = 0$$

$$k_{69} = k_{96} = \left[ \frac{2b^2}{3} - \frac{2a^2}{30} + \frac{2a^2v}{30} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{610} = k_{106} = \left[ \frac{b^2}{a} - \frac{a}{5} + \frac{av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{611} = k_{116} = 0 \dots\dots\dots k_{612} = k_{126} = \left[ \frac{b}{3} + \frac{a^2}{15} - \frac{a^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$

$$k_{77} = \left[ \frac{4a^2}{b^2} + \frac{4b^2}{a^2} + \frac{14}{5} - \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{78} = k_{87} = \left[ -\frac{2a^2}{b} - \frac{b}{5} - \frac{4bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}$$



$$\begin{aligned}
k_{79} = k_{97} &= \left[ \frac{2b^2}{a} + \frac{a}{5} + \frac{4av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{710} = k_{107} = \left[ \frac{2b^2}{a^2} - \frac{4a^2}{b^2} - \frac{14}{5} + \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{711} = k_{117} &= \left[ \frac{2a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{712} = k_{127} = \left[ \frac{b^2}{a} - \frac{a}{5} + \frac{4av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{88} &= \left[ \frac{4a^2}{3} + \frac{4b^2}{15} - \frac{4b^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{89} = k_{98} = -v.a.b. \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{810} = k_{108} &= \left[ \frac{2a^2}{b} + \frac{b}{5} - \frac{bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{811} = k_{118} = \left[ \frac{2a^2}{3} - \frac{2b^2}{30} + \frac{2b^2v}{30} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{812} = k_{128} &= 0 \dots\dots\dots k_{99} = \left[ \frac{4b^2}{3} + \frac{4a^2}{15} - \frac{4a^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{910} = k_{109} &= \left[ \frac{b^2}{a} - \frac{a}{5} + \frac{4av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{911} = k_{119} = 0 \dots\dots\dots k_{912} = k_{129} = \left[ \frac{2b^2}{3} - \frac{4a^2(1-v)}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v)} \\
k_{1010} &= \left[ \frac{4a^2}{b^2} + \frac{4b^2}{a^2} + \frac{14}{5} - \frac{4v}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{1011} = k_{1110} = \left[ \frac{2a^2}{b} + \frac{b}{5} + \frac{4bv}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{1012} = k_{1210} &= \left[ \frac{2b^2}{a} + \frac{a}{5} + \frac{4av}{5} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{1111} = \left[ \frac{4a^2}{3} + \frac{4b^2}{15} - \frac{4b^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)} \\
k_{1112} = k_{1211} &= v.a.b. \frac{Et^3}{12.ab(1-v^2)} \dots\dots\dots k_{1212} = \left[ \frac{4b^2}{3} + \frac{4a^2}{15} - \frac{4a^2v}{15} \right] \frac{Et^3}{12ab(1-v^2)}
\end{aligned}$$

## 6.2 Şekil Fonksiyonlarından Eleman Zemin Etki Matrisinin Hesabı

Denklem (4.28) den yararlanarak eleman zemin etki matrisini oluşturalım:

$[s_e] = c \iint [N]^T [N]. dx. dy$  ifadesiyle hesaplanırsa;

$$s_{11} = c \iint [N_1]^T . [N_1] dx. dy = \left[ 1 - \frac{xy}{ab} - \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right) y^2 \left(3 - \frac{2y}{b}\right)}{b^2} - \frac{x^2 \left(3 - \frac{2x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)}{a^2} \right]^2 = c.0,137a.b$$

$$s_{12} = s_{21} = c.0,0183ab^2$$

$$s_{13} = s_{31} = -c.0,0183a^2b$$

$$s_{14} = s_{41} = c.0,0487ab$$

$$s_{15} = s_{51} = -c.0,0109ab^2$$

$$s_{16} = s_{61} = -c.0,0079a^2.b$$

$$s_{17} = s_{71} = c.0,0156.a.b$$

$$s_{18} = s_{81} = -c.0,0046ab^2$$

$$s_{19} = s_{91} = c.0,0046a^2b$$

$$s_{110} = s_{101} = c.0,0487a.b$$

$$s_{111} = s_{111} = c.0,0079ab^2$$

$$s_{112} = s_{121} = c.0,0109a^2b$$

$$s_{11} = c.0,137ab$$

$$\begin{aligned}
s_{22} &= c.0,00317ab^3 & s_{23} &= s_{32} = -c.0,0025a^2.b^2 & s_{24} &= s_{42} = c.0,0109a.b^2 \\
s_{25} &= s_{52} = -c.0,00238ab^3 & s_{26} &= s_{62} = -c.0,00167a^2.b^2 & s_{27} &= s_{72} = c.0,0046ab^2 \\
s_{28} &= s_{82} = -c.0,0119ab^3 & s_{29} &= s_{92} = c.0,00111a^2.b^2 & s_{210} &= s_{102} = c.0,0079ab^2 \\
s_{211} &= s_{112} = c.0,00159ab^3 & s_{212} &= s_{122} = c.0,00167a^2.b^2 & s_{33} &= c.0,00317a^3.b \\
s_{34} &= s_{43} = -c.0,0079a^2.b & s_{35} &= s_{53} = c.0,00167a^2.b^2 & s_{36} &= s_{63} = c.0,00159a^3.b \\
s_{37} &= s_{73} = -c.0,0046a^2.b & s_{38} &= s_{83} = c.0,00111a^2.b^2 & & \\
s_{310} &= s_{103} = -c.0,0109a^2.b & s_{311} &= s_{113} = -c.0,00167a^2.b^2 & & \\
s_{312} &= s_{123} = -c.0,0238a^3.b & s_{44} &= c.0,137a.b & & \\
s_{45} &= s_{54} = -c.0,0183a.b^2 & s_{46} &= s_{64} = -c.0,0183a^2.b & s_{47} &= s_{74} = c.0,0487a.b \\
s_{48} &= s_{84} = -c.0,0079a.b^2 & s_{49} &= s_{94} = c.0,0109a^2.b & s_{410} &= s_{104} = c.0,0156a.b \\
s_{411} &= s_{114} = c.0,0046a.b^2 & s_{412} &= s_{124} = c.0,0046a^2.b & s_{55} &= c.0,00317a.b^3 \\
s_{56} &= s_{65} = c.0,0025a^2.b^2 & s_{57} &= s_{75} = -c.0,0079a.b^2 & s_{58} &= s_{85} = c.0,00159a.b^3 \\
s_{59} &= s_{95} = -c.0,00167.a^2.b^2 & s_{510} &= s_{105} = -c.0,0046ab^2 & & \\
s_{511} &= s_{115} = -c.0,00119a.b^3 & s_{512} &= s_{125} = -c.0,00111a^2.b^2 & s_{66} &= c.0,00317a^3.b \\
s_{67} &= s_{76} = -c.0,0109a^2.b & s_{68} &= s_{86} = c.0,00167a^2.b^2 & & \\
s_{69} &= s_{96} = -c.0,00238a^3.b & s_{610} &= s_{106} = -c.0,0046a^2.b & & \\
s_{611} &= s_{116} = -c.0,00111a^2.b^2 & s_{612} &= s_{126} = -c.0,00119a^3.b & s_{77} &= c.0,137a.b \\
s_{78} &= s_{87} = -c.0,0183ab^2 & s_{79} &= s_{97} = c.0,0183a^2.b & & \\
s_{710} &= s_{107} = c.0,0487a.b & s_{711} &= s_{117} = c.0,0109ab^2 & s_{712} &= s_{127} = c.0,0079a^2.b \\
s_{88} &= c.0,00317a.b^3 & s_{89} &= s_{98} = -c.0,0025a^2.b^2 & & \\
s_{810} &= s_{108} = -c.0,0109a.b^2 & s_{811} &= s_{118} = -c.0,00238a.b^3 & & \\
s_{812} &= s_{128} = -c.0,00167a^2.b^2 & s_{99} &= c.0,00317a^3.b & s_{910} &= s_{109} = c.0,0079a^2.b \\
s_{911} &= s_{119} = c.0,00167a^2.b^2 & s_{912} &= s_{129} = c.0,00159a^2.b & & \\
s_{1010} &= c.0,137a.b & s_{1011} &= s_{1110} = c.0,0183ab^2 & & \\
s_{1012} &= s_{1210} = c.0,183a^2.b & s_{1111} &= c.0,00317a.b^3 & s_{1112} &= s_{1211} = c.0,0025a^2.b^2
\end{aligned}$$

$$s_{1212} = c.0,00317a^3.b$$

### 6.3 Şekil Fonksiyonlarından Eleman Kütle Matrisinin Hesaplanması

$[m_e] = \rho \iint [N]^T [N].dx.dy$  ifadesiyle hesaplanırsa;

$$N_1 = 1 - \frac{xy}{ab} - \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)y^2\left(3 - \frac{2y}{b}\right)}{b^2} - \frac{x^2\left(3 - \frac{2x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}{a^2}$$

$$N_2 = \left(1 - \frac{x}{a}\right)y\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2$$

$$[m_{12}] = \rho \iint [N_1]^T [N_2].dx.dy$$

$$m_{12} = \int_0^b \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)y\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{xy}{ab} - \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)y^2\left(3 - \frac{2y}{b}\right)}{b^2} - \frac{x^2\left(3 - \frac{2x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}{a^2}\right) dx dy;$$

$m_{12} = m_{21} = \rho.0,0183ab^2$  Benzer şekilde diğer Eleman kütle matrisi değerlerini hesaplırsak;

$$m_{11} = \rho.0,137ab$$

$$m_{13} = m_{31} = -\rho.0,0183a^2b \quad m_{14} = m_{41} = \rho.0,0487ab$$

$$m_{15} = m_{51} = -\rho.0,0109ab^2$$

$$m_{16} = m_{61} = -\rho.0,0079a^2.b \quad m_{17} = m_{71} = \rho.0,0156.a.b$$

$$m_{18} = m_{81} = -\rho.0,0046ab^2$$

$$m_{19} = m_{91} = \rho.0,0046a^2b \quad m_{110} = m_{101} = \rho.0,0487a.b$$

$$m_{111} = m_{111} = \rho.0,0079ab^2$$

$$m_{112} = m_{121} = \rho.0,0109a^2b \quad m_{22} = \rho.0,00317ab^3$$

$$m_{23} = m_{32} = -\rho.0,0025a^2.b^2$$

$$m_{24} = m_{42} = \rho.0,0109a.b^2 \quad m_{25} = m_{52} = -\rho.0,00238ab^3$$

$$m_{26} = m_{62} = -\rho.0,00167a^2.b^2$$

$$m_{27} = m_{72} = \rho.0,0046ab^2 \quad m_{28} = m_{82} = -\rho.0,0119ab^3$$

$$m_{29} = m_{92} = \rho.0,00111a^2.b^2$$

$$m_{210} = m_{102} = \rho.0,0079ab^2 \quad m_{211} = m_{112} = \rho.0,00159ab^3$$

$$m_{212} = m_{122} = \rho.0,00167a^2.b^2$$

$$m_{33} = \rho.0,00317a^3.b \quad m_{34} = m_{43} = -\rho.0,0079a^2.b$$

$$m_{35} = m_{53} = \rho.0,00167a^2.b^2$$

$$m_{36} = m_{63} = \rho.0,00159a^3.b \quad m_{37} = m_{73} = -\rho.0,0046a^2.b$$

$$m_{38} = m_{83} = \rho.0,00111a^2.b^2$$

$$m_{310} = m_{103} = -\rho.0,0109a^2.b$$

$$m_{311} = m_{113} = \rho.0,00167a^2.b^2$$

$$m_{312} = m_{123} = -\rho.0,0238a^3.b$$

$$m_{44} = \rho.0,137a.b$$

$$m_{45} = m_{54} = -\rho.0,0183a.b^2 \quad m_{46} = m_{64} = -\rho.0,0183a^2.b$$

$$m_{47} = m_{74} = \rho.0,0487a.b$$

$$m_{48} = m_{84} = -\rho.0,0079a.b^2 \quad m_{49} = m_{94} = \rho.0,0109a^2.b$$

$$m_{410} = m_{104} = \rho.0,0156a.b$$

$$m_{411} = m_{114} = \rho.0,0046a.b^2$$

$$\begin{aligned}
m_{412}=m_{124} &= \rho.0,0046a^2.b & m_{55} &= \rho.0,00317a.b^3 & m_{56}=m_{65} &= \rho.0,0025a^2.b^2 \\
m_{57}=m_{75} &= -\rho.0,0079a.b^2 & m_{58}=m_{85} &= \rho.0,00159a.b^3 \\
m_{59}=m_{95} &= \rho.0,00167.a^2.b^2 & m_{510}=m_{105} &= -\rho.0,0046ab^2 \\
m_{511}=m_{115} &= -\rho.0,00119a.b^3 & m_{512}=m_{125} &= -\rho.0,00111a^2.b^2 & m_{66} &= \rho.0,00317a^3.b \\
m_{67}=m_{76} &= -\rho.0,0109a^2.b & m_{68}=m_{86} &= \rho.0,00167a^2.b^2 \\
m_{69}=m_{96} &= -\rho.0,00238a^3.b & m_{610}=m_{106} &= -\rho.0,0046a^2.b \\
m_{611}=m_{116} &= -\rho.0,00111a^2.b^2 & m_{612}=m_{126} &= -\rho.0,00119a^3.b \\
m_{77} &= \rho.0,137a.b & m_{78}=m_{87} &= -\rho.0,0183ab^2 & m_{79}=m_{97} &= \rho.0,0183a^2.b \\
m_{710}=m_{107} &= \rho.0,0487a.b & m_{711}=m_{117} &= \rho.0,0109ab^2 & m_{712}=m_{127} &= \rho.0,0079a^2.b \\
m_{88} &= \rho.0,00317a.b^3 & m_{89}=m_{98} &= -\rho.0,0025a^2.b^2 \\
m_{810}=m_{108} &= -\rho.0,0109a.b^2 & m_{811}=m_{118} &= -\rho.0,00238a.b^3 \\
m_{812}=m_{128} &= -\rho.0,00167a^2.b^2 & m_{99} &= \rho.0,00317a^3.b & m_{910}=m_{109} &= \rho.0,0079a^2.b \\
m_{911}=m_{119} &= \rho.0,00167a^2.b^2 & m_{912}=m_{129} &= \rho.0,00159a^2.b & m_{1010} &= \rho.0,137a.b \\
m_{1011}=m_{1110} &= \rho.0,0183ab^2 & m_{1012}=m_{1210} &= \rho.0,183a^2.b & m_{1111} &= \rho.0,00317a.b^3 \\
m_{1112}=m_{1211} &= \rho.0,0025a^2.b^2 & m_{1212} &= \rho.0,00317a^3.b
\end{aligned}$$

#### 6.4 Biriktirme Metodu Yardımı ile Sistem Rijitlik Matrisi, Sistem Kütle Matrisi, Sistem Elastik Zemin Etki Matrislerinin Yazılması

Çizelge 6.4 Biriktirme metodunda kullanılacak sıralama

ELEMANLAR	I NOLU ELEMAN	II NOLU ELEMAN	III NOLU ELEMAN	IV NOLU ELEMAN
.d <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>13</sub>
.d <sub>2</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>14</sub>
.d <sub>3</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>15</sub>
.d <sub>4</sub>	D <sub>10</sub>	D <sub>13</sub>	D <sub>19</sub>	D <sub>22</sub>

.d <sub>5</sub>	D <sub>11</sub>	D <sub>14</sub>	D <sub>20</sub>	D <sub>23</sub>
.d <sub>6</sub>	D <sub>12</sub>	D <sub>15</sub>	D <sub>21</sub>	D <sub>24</sub>
.d <sub>7</sub>	D <sub>13</sub>	D <sub>16</sub>	D <sub>22</sub>	D <sub>25</sub>
.d <sub>8</sub>	D <sub>14</sub>	D <sub>17</sub>	D <sub>23</sub>	D <sub>26</sub>
.d <sub>9</sub>	D <sub>15</sub>	D <sub>18</sub>	D <sub>24</sub>	D <sub>27</sub>
.d <sub>10</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>13</sub>	D <sub>16</sub>
.d <sub>11</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>8</sub>	D <sub>14</sub>	D <sub>17</sub>
.d <sub>12</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>9</sub>	D <sub>15</sub>	D <sub>18</sub>

Çizelge 6.4 kullanılarak eleman üzerinden oluşturulmuş Eleman Rijitlik Matrisi, Eleman Kütle Matrisi, Eleman Zemin Etki Matrisi, Sistem Matrislerine dönüştürülürler.

#### 6.4.1 Sistem Rijitlik Matrisinin Hesaplanması

Rijitlik Matrisi İfadelerinden bazılarını hesaplırsak

$$K_{1,1} = k_{1,1}^I$$

$$K_{1,1} = \frac{Et^3a^2}{3b^2(1-\nu^2)} + \frac{Et^3b^2}{3a^2(1-\nu^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-\nu^2)} - \frac{4Et^3\nu}{60(1-\nu^2)}$$

$$K_{2,2} = k_{1,2}^I$$

$$K_{2,2} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-\nu^2)} + \frac{4Et^3b^2}{180(1-\nu^2)} - \frac{4Et^3b^2\nu}{180(1-\nu^2)}$$

$$K_{13,13} = k_{7,7}^I + k_{4,4}^{II} + k_{10,10}^{III} + k_{1,1}^{IV}$$

$$K_{13,13} = \frac{16Et^3a^2}{12b^2(1-\nu^2)} + \frac{16Et^3b^2}{12a^2(1-\nu^2)} + \frac{56Et^3}{60(1-\nu^2)} - \frac{16Et^3\nu}{60(1-\nu^2)}$$

Rijitlik Matrisi tüm değerleri Ek-1 de gösterilmiştir.

#### 6.4.2 Sistem Kütle Matrisinin Hesaplanması

Benzer şekilde Sistem Kütle Matrisinin değerlerinden bazılarını biriktirme metodu ile hesaplırsak;

$$M_{4,4} = m_{10,10}^I + m_{1,1}^{II}$$

$$M_{4,4} = \rho.0,274.a.b$$

$$M_{13,13} = m_{7,7}^I + m_{4,4}^{II} + m_{10,10}^{III} + m_{1,1}^{IV}$$

$$M_{13,13} = \rho.0,548.a.b$$

Sistem Kütle Matrisinin tüm değerleri Ek-2 de gösterilmiştir.

### 6.4.3 Sistem Elastik Zemin Etki Matrisinin Hesaplanması

Elastik Zemin Etki Matrisinin bazı değerlerini hesaplırsak

$$S_{13,13} = s_{7,7}^I + s_{4,4}^{II} + s_{10,10}^{III} + s_{1,1}^{IV}$$

$$S_{13,13} = c.0,548.a.b$$

$$S_{13,19} = s_{4,10}^I$$

$$S_{13,19} = c.0,0156.a.b$$

$$S_{14,17} = s_{5,8}^{II}$$

$$S_{14,17} = c.0,00318.a.b^3$$

Sistem Elastik Zemin Etki Matrisinin tüm değerleri Ek-3 te gösterilmiştir.

$$\{ ([K] + [S]) - \omega^2 [M] \} \cdot \{d\} = 0$$

İfadesi uygulanır ve elde edilen matrisin determinantını sıfır yapan  $\omega^2$  değerleri bulunarak periyot değerlerine geçiş yapılır. Ek-1 ,Ek-2 ve Ek-3 teki değerler sırası ile yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$K_{1,1} + S_{1,1} - \omega^2 \cdot M_{1,1}$	$K_{1,2} + S_{1,2} - \omega^2 \cdot M_{1,2}$	$\dots$	$K_{1,27} + S_{1,27} - \omega^2 \cdot M_{1,27}$	D1
$K_{2,1} + S_{2,1} - \omega^2 \cdot M_{2,1}$	$K_{2,2} + S_{2,2} - \omega^2 \cdot M_{2,2}$	$\dots$	$K_{2,27} + S_{2,27} - \omega^2 \cdot M_{2,27}$	D2
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	D3
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	D4
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	.
$K_{27,1} + S_{27,1} - \omega^2 \cdot M_{27,1}$	$\dots$	$\dots$	$K_{27,27} + S_{27,27} - \omega^2 \cdot M_{27,27}$	.
$\dots$				D27

$\underbrace{\hspace{15em}}_{[T]}$

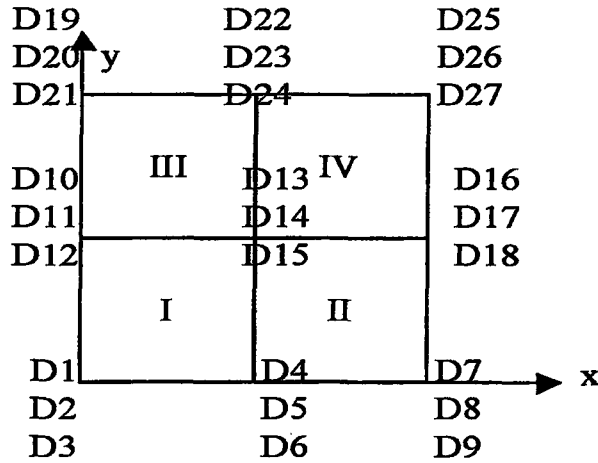
Elde edilir. Burada  $\{d\}$  düğüm noktası deplasmanları sütün matrisi değerleri sıfır olamayacağından  $[\bar{T}]$  toplam matrisini sıfır yapan  $\lambda=\omega^2$  değerleri aranacaktır. Çeşitli Zemin türleri için Çizelge 6.5 ten c değerleri kullanılacaktır (Köksal T.,1995).

Çizelge 6.5 Zemin elastik yataklanma katsayıları

ZEMİN TÜRÜ	c DEĞERLERİ kN/m <sup>3</sup>
Kil Plastik Zemin	5000-10000
Kil Yarı Sert	10000-15000
Kil Sert	15000-30000
Kum Gevşek	10000-20000
Kum Orta Sıkı	20000-50000
Kum Sıkı	50000-100000
Kum-Çakıl Sıkı	100000-150000
Şist	500000 den fazla
Kaya	2000000 den büyük

### 6.5 Sınır Koşulları

Sistem basit yaylar ile zemine bağlı olduğundan, basit veya ankastre mesnetlenme söz konusu olmadığından her düğüm noktasında ve sistemin kenarlarında her  $\omega$  değerine karşılık olarak 27 adet deplasman değerleri bulunacaktır.



Şekil 6.3 Sistem düğüm noktası deplasmanları

Şekil 6.3 te görüldüğü gibi sistemdeki deplasmanlar, x eksenine göre simetriden dolayı ;

$$D_2=D_5=D_8=0$$

y eksenine göre simetriden dolayı;

$$D_3=D_{12}=D_{21}=0$$

Olduğundan 27 x 27 lik Toplam sistem matrisi simetri koşulundan dolayı indirgenerek 21 x 21 lik matris haline dönüştürülebilir. Bu matris boyutlarını küçülttüğü için hesaplama kolaylığı sağlayacaktır.

Bu tezde, sistemin  $[\bar{T}]$  toplam matrisinin determinantını sıfır yapan  $\omega$  değerleri bulunacak ve sistem üzerinde oluşan maksimum ve minimum periyotlar hesap edilecektir.



## 6.6 Sayısal Örnekler

1. Elastik Zemine oturan 4 x 4 mt ebatlarında 0,25 m kalınlığında ince plağın Elastiklik Modülü  $E=2.85 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  ve Poisson oranı 0,20 olduğuna göre Sönümsüz Serbest Titreşim durumunda sistemde oluşan  $T_{\max}$  ve  $T_{\min}$  değerlerini bulalım (Çizelge 6.5 ).

$$\{[K]+[S]-\omega^2.[M]\} \{D_i\}=0$$

İfadesinin değerleri Ek-1, Ek-2, Ek-3'ten alınır yerine konular  $\bar{T}$  toplam matrisi elde edilir Elastik yataklanma katsayıları olan "c" değerleri Çizelge 6.5'ten büyüklük sırasına göre alıp tüm zemin sınıfları için hesaplar ve tablo halinde yazarsak:

Çizelge 6.6 "c" katsayısına göre kil plastik zemin ( $c=7500 \text{ kN/m}^3$ )

$\lambda$	$\text{m}^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$\text{m}/\text{sn}$	$T$	$\text{sn}$	$f$	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	12175	$\omega_1$	110	$T_1$	0,056915	$f_1$	17,57012
$\lambda_2$	91084	$\omega_2$	302	$T_2$	0,020808	$f_2$	48,05763
$\lambda_3$	369635	$\omega_3$	608	$T_3$	0,010329	$f_3$	96,81149
$\lambda_4$	50487	$\omega_4$	225	$T_4$	0,027949	$f_4$	35,77902
$\lambda_5$	299542	$\omega_5$	547	$T_5$	0,011474	$f_5$	87,15037
$\lambda_6$	1494390	$\omega_6$	1222	$T_6$	0,005137	$f_6$	194,658
$\lambda_7$	97307	$\omega_7$	312	$T_7$	0,020132	$f_7$	49,67214
$\lambda_8$	346554	$\omega_8$	589	$T_8$	0,010668	$f_8$	93,74019
$\lambda_9$	316758	$\omega_9$	563	$T_9$	0,011158	$f_9$	89,61984
$\lambda_{10}$	7683	$\omega_{10}$	88	$T_{10}$	0,071646	$f_{10}$	13,95754
$\lambda_{11}$	304077	$\omega_{11}$	551	$T_{11}$	0,011389	$f_{11}$	87,80761
$\lambda_{12}$	490234	$\omega_{12}$	700	$T_{12}$	0,008969	$f_{12}$	111,4916
$\lambda_{13}$	54644	$\omega_{13}$	234	$T_{13}$	0,026865	$f_{13}$	37,22312
$\lambda_{14}$	395156	$\omega_{14}$	629	$T_{14}$	0,00999	$f_{14}$	100,0978
$\lambda_{15}$	1588360	$\omega_{15}$	1260	$T_{15}$	0,004983	$f_{15}$	200,685
$\lambda_{16}$	123077	$\omega_{16}$	351	$T_{16}$	0,017901	$f_{16}$	55,86359
$\lambda_{17}$	370684	$\omega_{17}$	609	$T_{17}$	0,010315	$f_{17}$	96,94876
$\lambda_{18}$	471885	$\omega_{18}$	687	$T_{18}$	0,009142	$f_{18}$	109,3852
$\lambda_{19}$	30269	$\omega_{19}$	174	$T_{19}$	0,036096	$f_{19}$	27,70376
$\lambda_{20}$	830308	$\omega_{20}$	911	$T_{20}$	0,006892	$f_{20}$	145,0975
$\lambda_{21}$	791732	$\omega_{21}$	890	$T_{21}$	0,007058	$f_{21}$	141,6868
$\lambda_{22}$	61215	$\omega_{22}$	247	$T_{22}$	0,025382	$f_{22}$	39,39762
$\lambda_{23}$	4324700	$\omega_{23}$	2080	$T_{23}$	0,00302	$f_{23}$	331,1451
$\lambda_{24}$	1721530	$\omega_{24}$	1312	$T_{24}$	0,004786	$f_{24}$	208,9285
$\lambda_{25}$	12386	$\omega_{25}$	111	$T_{25}$	0,056428	$f_{25}$	17,72172
$\lambda_{26}$	3108130	$\omega_{26}$	1763	$T_{26}$	0,003562	$f_{26}$	280,7307
$\lambda_{27}$	689679	$\omega_{27}$	830	$T_{27}$	0,007562	$f_{27}$	132,2403

Çizelge 6.7 "c" katsayısına göre kil yarı sert zemin ( $c=12500\text{kn/m}^3$ )

$\lambda$	$m^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$m/\text{sn}$	$T$	$\text{sn}$	$f$	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	12375	$\omega_1$	111	$T_1$	0,056453	$f_1$	17,71385
$\lambda_2$	91284	$\omega_2$	302	$T_2$	0,020786	$f_2$	48,11036
$\lambda_3$	369835	$\omega_3$	608	$T_3$	0,010327	$f_3$	96,83768
$\lambda_4$	50687	$\omega_4$	225	$T_4$	0,027894	$f_4$	35,84978
$\lambda_5$	299742	$\omega_5$	547	$T_5$	0,011471	$f_5$	87,17946
$\lambda_6$	1494591	$\omega_6$	1223	$T_6$	0,005137	$f_6$	194,6711
$\lambda_7$	97507	$\omega_7$	312	$T_7$	0,020111	$f_7$	49,72316
$\lambda_8$	346754	$\omega_8$	589	$T_8$	0,010665	$f_8$	93,76723
$\lambda_9$	316958	$\omega_9$	563	$T_9$	0,011155	$f_9$	89,64813
$\lambda_{10}$	7883	$\omega_{10}$	89	$T_{10}$	0,070731	$f_{10}$	14,13804
$\lambda_{11}$	304277	$\omega_{11}$	552	$T_{11}$	0,011385	$f_{11}$	87,83648
$\lambda_{12}$	490434	$\omega_{12}$	700	$T_{12}$	0,008967	$f_{12}$	111,5143
$\lambda_{13}$	54844	$\omega_{13}$	234	$T_{13}$	0,026816	$f_{13}$	37,29118
$\lambda_{14}$	395356	$\omega_{14}$	629	$T_{14}$	0,009988	$f_{14}$	100,1232
$\lambda_{15}$	1588560	$\omega_{15}$	1260	$T_{15}$	0,004983	$f_{15}$	200,6976
$\lambda_{16}$	123277	$\omega_{16}$	351	$T_{16}$	0,017886	$f_{16}$	55,90896
$\lambda_{17}$	370844	$\omega_{17}$	609	$T_{17}$	0,010313	$f_{17}$	96,96968
$\lambda_{18}$	472085	$\omega_{18}$	687	$T_{18}$	0,00914	$f_{18}$	109,4083
$\lambda_{19}$	30588	$\omega_{19}$	175	$T_{19}$	0,035908	$f_{19}$	27,84918
$\lambda_{20}$	830508	$\omega_{20}$	911	$T_{20}$	0,006891	$f_{20}$	145,115
$\lambda_{21}$	791932	$\omega_{21}$	890	$T_{21}$	0,007057	$f_{21}$	141,7047
$\lambda_{22}$	61415	$\omega_{22}$	248	$T_{22}$	0,025341	$f_{22}$	39,46193
$\lambda_{23}$	4324900	$\omega_{23}$	2080	$T_{23}$	0,00302	$f_{23}$	331,1528
$\lambda_{24}$	1721790	$\omega_{24}$	1312	$T_{24}$	0,004786	$f_{24}$	208,9443
$\lambda_{25}$	120586	$\omega_{25}$	347	$T_{25}$	0,018085	$f_{25}$	55,29537
$\lambda_{26}$	3108330	$\omega_{26}$	1763	$T_{26}$	0,003562	$f_{26}$	280,7398
$\lambda_{27}$	689879	$\omega_{27}$	831	$T_{27}$	0,007561	$f_{27}$	132,2595



Çizelge 6.8 “c” katsayısına göre kum gevşek zemin ( $c=15000\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$m^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$m/\text{sn}$	T	sn	f	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	12475	$\omega_1$	112	$T_1$	0,056226	$f_1$	17,78528
$\lambda_2$	91384	$\omega_2$	302	$T_2$	0,020774	$f_2$	48,13671
$\lambda_3$	369935	$\omega_3$	608	$T_3$	0,010325	$f_3$	96,85077
$\lambda_4$	50787	$\omega_4$	225	$T_4$	0,027867	$f_4$	35,88513
$\lambda_5$	299842	$\omega_5$	548	$T_5$	0,011469	$f_5$	87,194
$\lambda_6$	1494690	$\omega_6$	1223	$T_6$	0,005137	$f_6$	194,6776
$\lambda_7$	97607	$\omega_7$	312	$T_7$	0,020101	$f_7$	49,74865
$\lambda_8$	346854	$\omega_8$	589	$T_8$	0,010663	$f_8$	93,78075
$\lambda_9$	317058	$\omega_9$	563	$T_9$	0,011153	$f_9$	89,66227
$\lambda_{10}$	7983	$\omega_{10}$	89	$T_{10}$	0,070287	$f_{10}$	14,22743
$\lambda_{11}$	304377	$\omega_{11}$	552	$T_{11}$	0,011383	$f_{11}$	87,85091
$\lambda_{12}$	490534	$\omega_{12}$	700	$T_{12}$	0,008967	$f_{12}$	111,5257
$\lambda_{13}$	54944	$\omega_{13}$	234	$T_{13}$	0,026792	$f_{13}$	37,32516
$\lambda_{14}$	395459	$\omega_{14}$	629	$T_{14}$	0,009986	$f_{14}$	100,1362
$\lambda_{15}$	1588660	$\omega_{15}$	1260	$T_{15}$	0,004982	$f_{15}$	200,7039
$\lambda_{16}$	123372	$\omega_{16}$	351	$T_{16}$	0,017879	$f_{16}$	55,93049
$\lambda_{17}$	370925	$\omega_{17}$	609	$T_{17}$	0,010311	$f_{17}$	96,98027
$\lambda_{18}$	472185	$\omega_{18}$	687	$T_{18}$	0,009139	$f_{18}$	109,4199
$\lambda_{19}$	30747	$\omega_{19}$	175	$T_{19}$	0,035815	$f_{19}$	27,92156
$\lambda_{20}$	830608	$\omega_{20}$	911	$T_{20}$	0,006891	$f_{20}$	145,1237
$\lambda_{21}$	792032	$\omega_{21}$	890	$T_{21}$	0,007056	$f_{21}$	141,7137
$\lambda_{22}$	61515	$\omega_{22}$	248	$T_{22}$	0,02532	$f_{22}$	39,49404
$\lambda_{23}$	4325000	$\omega_{23}$	2080	$T_{23}$	0,00302	$f_{23}$	331,1566
$\lambda_{24}$	1721890	$\omega_{24}$	1312	$T_{24}$	0,004786	$f_{24}$	208,9503
$\lambda_{25}$	120686	$\omega_{25}$	347	$T_{25}$	0,018077	$f_{25}$	55,3183
$\lambda_{26}$	3108430	$\omega_{26}$	1763	$T_{26}$	0,003562	$f_{26}$	280,7443
$\lambda_{27}$	689979	$\omega_{27}$	831	$T_{27}$	0,00756	$f_{27}$	132,2691

Çizelge 6.9 “c” katsayısına göre kil sert zemin ( $c=22500\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$\text{m}^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$\text{m}/\text{sn}$	T	sn	f	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	12775	$\omega_1$	113	$T_1$	0,055562	$f_1$	17,99786
$\lambda_2$	91684	$\omega_2$	303	$T_2$	0,02074	$f_2$	48,21566
$\lambda_3$	370235	$\omega_3$	608	$T_3$	0,010321	$f_3$	96,89003
$\lambda_4$	51087	$\omega_4$	226	$T_4$	0,027785	$f_4$	35,99096
$\lambda_5$	300142	$\omega_5$	548	$T_5$	0,011463	$f_5$	87,23761
$\lambda_6$	1494990	$\omega_6$	1223	$T_6$	0,005136	$f_6$	194,6971
$\lambda_7$	97907	$\omega_7$	313	$T_7$	0,02007	$f_7$	49,82504
$\lambda_8$	347154	$\omega_8$	589	$T_8$	0,010659	$f_8$	93,8213
$\lambda_9$	317358	$\omega_9$	563	$T_9$	0,011148	$f_9$	89,70468
$\lambda_{10}$	8283	$\omega_{10}$	91	$T_{10}$	0,069002	$f_{10}$	14,49229
$\lambda_{11}$	304677	$\omega_{11}$	552	$T_{11}$	0,011377	$f_{11}$	87,89419
$\lambda_{12}$	490834	$\omega_{12}$	701	$T_{12}$	0,008964	$f_{12}$	111,5598
$\lambda_{13}$	55244	$\omega_{13}$	235	$T_{13}$	0,026719	$f_{13}$	37,42692
$\lambda_{14}$	395756	$\omega_{14}$	629	$T_{14}$	0,009983	$f_{14}$	100,1738
$\lambda_{15}$	1588960	$\omega_{15}$	1261	$T_{15}$	0,004982	$f_{15}$	200,7229
$\lambda_{16}$	123677	$\omega_{16}$	352	$T_{16}$	0,017857	$f_{16}$	55,99959
$\lambda_{17}$	371166	$\omega_{17}$	609	$T_{17}$	0,010308	$f_{17}$	97,01177
$\lambda_{18}$	472485	$\omega_{18}$	687	$T_{18}$	0,009136	$f_{18}$	109,4547
$\lambda_{19}$	31225	$\omega_{19}$	177	$T_{19}$	0,03554	$f_{19}$	28,13767
$\lambda_{20}$	830908	$\omega_{20}$	912	$T_{20}$	0,006889	$f_{20}$	145,1499
$\lambda_{21}$	792332	$\omega_{21}$	890	$T_{21}$	0,007055	$f_{21}$	141,7405
$\lambda_{22}$	61815	$\omega_{22}$	249	$T_{22}$	0,025259	$f_{22}$	39,59023
$\lambda_{23}$	4325300	$\omega_{23}$	2080	$T_{23}$	0,00302	$f_{23}$	331,1681
$\lambda_{24}$	1722190	$\omega_{24}$	1312	$T_{24}$	0,004785	$f_{24}$	208,9685
$\lambda_{25}$	120986	$\omega_{25}$	348	$T_{25}$	0,018055	$f_{25}$	55,38701
$\lambda_{26}$	3108730	$\omega_{26}$	1763	$T_{26}$	0,003562	$f_{26}$	280,7578
$\lambda_{27}$	690279	$\omega_{27}$	831	$T_{27}$	0,007559	$f_{27}$	132,2978



Çizelge 6.10 "c" katsayısına göre kum orta sıkı zemin ( $c=35000\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$\text{m}^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$\text{m}/\text{sn}$	$T$	$\text{sn}$	$f$	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	13275	$\omega_1$	115	$T_1$	0,054506	$f_1$	18,34669
$\lambda_2$	92184	$\omega_2$	304	$T_2$	0,020684	$f_2$	48,34695
$\lambda_3$	370735	$\omega_3$	609	$T_3$	0,010314	$f_3$	96,95543
$\lambda_4$	51587	$\omega_4$	227	$T_4$	0,02765	$f_4$	36,16666
$\lambda_5$	300642	$\omega_5$	548	$T_5$	0,011453	$f_5$	87,31024
$\lambda_6$	1495490	$\omega_6$	1223	$T_6$	0,005135	$f_6$	194,7297
$\lambda_7$	98407	$\omega_7$	314	$T_7$	0,020019	$f_7$	49,9521
$\lambda_8$	347654	$\omega_8$	590	$T_8$	0,010651	$f_8$	93,88884
$\lambda_9$	317858	$\omega_9$	564	$T_9$	0,011139	$f_9$	89,77531
$\lambda_{10}$	8783	$\omega_{10}$	94	$T_{10}$	0,067009	$f_{10}$	14,92329
$\lambda_{11}$	305177	$\omega_{11}$	552	$T_{11}$	0,011368	$f_{11}$	87,96629
$\lambda_{12}$	491334	$\omega_{12}$	701	$T_{12}$	0,008959	$f_{12}$	111,6166
$\lambda_{13}$	55744	$\omega_{13}$	236	$T_{13}$	0,026599	$f_{13}$	37,59591
$\lambda_{14}$	396256	$\omega_{14}$	629	$T_{14}$	0,009976	$f_{14}$	100,2371
$\lambda_{15}$	1589460	$\omega_{15}$	1261	$T_{15}$	0,004981	$f_{15}$	200,7544
$\lambda_{16}$	124177	$\omega_{16}$	352	$T_{16}$	0,017821	$f_{16}$	56,11267
$\lambda_{17}$	371568	$\omega_{17}$	610	$T_{17}$	0,010302	$f_{17}$	97,0643
$\lambda_{18}$	472985	$\omega_{18}$	688	$T_{18}$	0,009131	$f_{18}$	109,5126
$\lambda_{19}$	32021	$\omega_{19}$	179	$T_{19}$	0,035095	$f_{19}$	28,49424
$\lambda_{20}$	831408	$\omega_{20}$	912	$T_{20}$	0,006887	$f_{20}$	145,1936
$\lambda_{21}$	792832	$\omega_{21}$	890	$T_{21}$	0,007053	$f_{21}$	141,7852
$\lambda_{22}$	62315	$\omega_{22}$	250	$T_{22}$	0,025157	$f_{22}$	39,75002
$\lambda_{23}$	4325800	$\omega_{23}$	2080	$T_{23}$	0,003019	$f_{23}$	331,1872
$\lambda_{24}$	1722690	$\omega_{24}$	1313	$T_{24}$	0,004785	$f_{24}$	208,9989
$\lambda_{25}$	121486	$\omega_{25}$	349	$T_{25}$	0,018018	$f_{25}$	55,50134
$\lambda_{26}$	3109230	$\omega_{26}$	1763	$T_{26}$	0,003562	$f_{26}$	280,7804
$\lambda_{27}$	690779	$\omega_{27}$	831	$T_{27}$	0,007556	$f_{27}$	132,3457

Çizelge 6.11 "c" katsayısına göre kum sıkı zemin ( $c=75000\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$m^2/sn^2$	$\omega$	$m/sn$	$T$	$sn$	$f$	$sn^{-1}$
$\lambda_1$	148875	$\omega_1$	386	$T_1$	0,016276	$f_1$	61,44001
$\lambda_2$	93784	$\omega_2$	306	$T_2$	0,020507	$f_2$	48,76471
$\lambda_3$	372335	$\omega_3$	610	$T_3$	0,010292	$f_3$	97,16443
$\lambda_4$	53187	$\omega_4$	231	$T_4$	0,027231	$f_4$	36,72325
$\lambda_5$	302242	$\omega_5$	550	$T_5$	0,011423	$f_5$	87,54226
$\lambda_6$	1497090	$\omega_6$	1224	$T_6$	0,005133	$f_6$	194,8338
$\lambda_7$	100007	$\omega_7$	316	$T_7$	0,019858	$f_7$	50,3565
$\lambda_8$	349254	$\omega_8$	591	$T_8$	0,010626	$f_8$	94,10464
$\lambda_9$	319458	$\omega_9$	565	$T_9$	0,011111	$f_9$	90,00098
$\lambda_{10}$	10383	$\omega_{10}$	102	$T_{10}$	0,061631	$f_{10}$	16,22572
$\lambda_{11}$	306777	$\omega_{11}$	554	$T_{11}$	0,011338	$f_{11}$	88,19658
$\lambda_{12}$	492394	$\omega_{12}$	702	$T_{12}$	0,00895	$f_{12}$	111,7369
$\lambda_{13}$	57344	$\omega_{13}$	239	$T_{13}$	0,026225	$f_{13}$	38,13164
$\lambda_{14}$	397856	$\omega_{14}$	631	$T_{14}$	0,009956	$f_{14}$	100,4392
$\lambda_{15}$	1591060	$\omega_{15}$	1261	$T_{15}$	0,004979	$f_{15}$	200,8555
$\lambda_{16}$	125777	$\omega_{16}$	355	$T_{16}$	0,017708	$f_{16}$	56,47301
$\lambda_{17}$	372854	$\omega_{17}$	611	$T_{17}$	0,010285	$f_{17}$	97,23212
$\lambda_{18}$	474585	$\omega_{18}$	689	$T_{18}$	0,009116	$f_{18}$	109,6977
$\lambda_{19}$	34569	$\omega_{19}$	186	$T_{19}$	0,033777	$f_{19}$	29,60632
$\lambda_{20}$	833008	$\omega_{20}$	913	$T_{20}$	0,006881	$f_{20}$	145,3332
$\lambda_{21}$	794432	$\omega_{21}$	891	$T_{21}$	0,007046	$f_{21}$	141,9282
$\lambda_{22}$	63915	$\omega_{22}$	253	$T_{22}$	0,02484	$f_{22}$	40,25709
$\lambda_{23}$	4327400	$\omega_{23}$	2080	$T_{23}$	0,003019	$f_{23}$	331,2485
$\lambda_{24}$	1729000	$\omega_{24}$	1315	$T_{24}$	0,004776	$f_{24}$	209,3813
$\lambda_{25}$	123086	$\omega_{25}$	351	$T_{25}$	0,0179	$f_{25}$	55,86563
$\lambda_{26}$	3110830	$\omega_{26}$	1764	$T_{26}$	0,003561	$f_{26}$	280,8526
$\lambda_{27}$	692379	$\omega_{27}$	832	$T_{27}$	0,007547	$f_{27}$	132,4989



Çizelge 6.12 “c” katsayısına göre kum – çakıl sıkı zemin ( $c=125000\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$\text{m}^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$\text{m}/\text{sn}$	T	sn	f	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	16875	$\omega_1$	130	$T_1$	0,048343	$f_1$	20,68532
$\lambda_2$	95784	$\omega_2$	309	$T_2$	0,020291	$f_2$	49,28193
$\lambda_3$	374335	$\omega_3$	612	$T_3$	0,010264	$f_3$	97,42504
$\lambda_4$	55187	$\omega_4$	235	$T_4$	0,026733	$f_4$	37,40734
$\lambda_5$	304242	$\omega_5$	552	$T_5$	0,011385	$f_5$	87,83143
$\lambda_6$	1499090	$\omega_6$	1224	$T_6$	0,005129	$f_6$	194,9639
$\lambda_7$	102007	$\omega_7$	319	$T_7$	0,019663	$f_7$	50,85754
$\lambda_8$	351254	$\omega_8$	593	$T_8$	0,010596	$f_8$	94,3737
$\lambda_9$	321458	$\omega_9$	567	$T_9$	0,011076	$f_9$	90,28227
$\lambda_{10}$	12383	$\omega_{10}$	111	$T_{10}$	0,056435	$f_{10}$	17,71965
$\lambda_{11}$	308777	$\omega_{11}$	556	$T_{11}$	0,011302	$f_{11}$	88,48361
$\lambda_{12}$	494934	$\omega_{12}$	704	$T_{12}$	0,008927	$f_{12}$	112,0248
$\lambda_{13}$	59344	$\omega_{13}$	244	$T_{13}$	0,025779	$f_{13}$	38,7909
$\lambda_{14}$	399856	$\omega_{14}$	632	$T_{14}$	0,009931	$f_{14}$	100,6914
$\lambda_{15}$	1593060	$\omega_{15}$	1262	$T_{15}$	0,004976	$f_{15}$	200,9817
$\lambda_{16}$	127777	$\omega_{16}$	357	$T_{16}$	0,017568	$f_{16}$	56,92024
$\lambda_{17}$	374461	$\omega_{17}$	612	$T_{17}$	0,010263	$f_{17}$	97,44143
$\lambda_{18}$	476585	$\omega_{18}$	690	$T_{18}$	0,009097	$f_{18}$	109,9286
$\lambda_{19}$	37755	$\omega_{19}$	194	$T_{19}$	0,03232	$f_{19}$	30,94031
$\lambda_{20}$	835008	$\omega_{20}$	914	$T_{20}$	0,006872	$f_{20}$	145,5076
$\lambda_{21}$	796432	$\omega_{21}$	892	$T_{21}$	0,007037	$f_{21}$	142,1067
$\lambda_{22}$	65915	$\omega_{22}$	257	$T_{22}$	0,024461	$f_{22}$	40,8821
$\lambda_{23}$	4329400	$\omega_{23}$	2081	$T_{23}$	0,003018	$f_{23}$	331,325
$\lambda_{24}$	1726290	$\omega_{24}$	1314	$T_{24}$	0,00478	$f_{24}$	209,2171
$\lambda_{25}$	125086	$\omega_{25}$	354	$T_{25}$	0,017756	$f_{25}$	56,31767
$\lambda_{26}$	3112830	$\omega_{26}$	1764	$T_{26}$	0,003559	$f_{26}$	280,9429
$\lambda_{27}$	694379	$\omega_{27}$	833	$T_{27}$	0,007536	$f_{27}$	132,6901

Çizelge 6.13 “c” katsayısına göre şist zemin ( $c=500000\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$\text{m}^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$\text{m}/\text{sn}$	$T$	$\text{sn}$	$f$	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	31875	$\omega_1$	179	$T_1$	0,035175	$f_1$	28,42925
$\lambda_2$	110784	$\omega_2$	333	$T_2$	0,018868	$f_2$	53,00037
$\lambda_3$	389335	$\omega_3$	624	$T_3$	0,010065	$f_3$	99,35783
$\lambda_4$	70187	$\omega_4$	265	$T_4$	0,023705	$f_4$	42,18588
$\lambda_5$	319242	$\omega_5$	565	$T_5$	0,011115	$f_5$	89,97055
$\lambda_6$	1514090	$\omega_6$	1230	$T_6$	0,005104	$f_6$	195,9369
$\lambda_7$	117007	$\omega_7$	342	$T_7$	0,018359	$f_7$	54,46861
$\lambda_8$	366254	$\omega_8$	605	$T_8$	0,010377	$f_8$	96,36771
$\lambda_9$	336458	$\omega_9$	580	$T_9$	0,010827	$f_9$	92,36465
$\lambda_{10}$	27383	$\omega_{10}$	165	$T_{10}$	0,037951	$f_{10}$	26,35006
$\lambda_{11}$	323777	$\omega_{11}$	569	$T_{11}$	0,011037	$f_{11}$	90,60733
$\lambda_{12}$	509934	$\omega_{12}$	714	$T_{12}$	0,008794	$f_{12}$	113,7097
$\lambda_{13}$	74344	$\omega_{13}$	273	$T_{13}$	0,023032	$f_{13}$	43,41744
$\lambda_{14}$	414856	$\omega_{14}$	644	$T_{14}$	0,00975	$f_{14}$	102,5626
$\lambda_{15}$	1608060	$\omega_{15}$	1268	$T_{15}$	0,004952	$f_{15}$	201,9256
$\lambda_{16}$	142777	$\omega_{16}$	378	$T_{16}$	0,01662	$f_{16}$	60,16854
$\lambda_{17}$	386516	$\omega_{17}$	622	$T_{17}$	0,010101	$f_{17}$	98,99747
$\lambda_{18}$	491585	$\omega_{18}$	701	$T_{18}$	0,008957	$f_{18}$	111,6451
$\lambda_{19}$	61645	$\omega_{19}$	248	$T_{19}$	0,025294	$f_{19}$	39,53553
$\lambda_{20}$	850008	$\omega_{20}$	922	$T_{20}$	0,006812	$f_{20}$	146,8087
$\lambda_{21}$	811432	$\omega_{21}$	901	$T_{21}$	0,006972	$f_{21}$	143,4387
$\lambda_{22}$	80915	$\omega_{22}$	284	$T_{22}$	0,022077	$f_{22}$	45,29554
$\lambda_{23}$	4344400	$\omega_{23}$	2084	$T_{23}$	0,003013	$f_{23}$	331,8985
$\lambda_{24}$	1741290	$\omega_{24}$	1320	$T_{24}$	0,004759	$f_{24}$	210,1241
$\lambda_{25}$	140086	$\omega_{25}$	374	$T_{25}$	0,016779	$f_{25}$	59,59883
$\lambda_{26}$	3127830	$\omega_{26}$	1769	$T_{26}$	0,003551	$f_{26}$	281,619
$\lambda_{27}$	709379	$\omega_{27}$	842	$T_{27}$	0,007456	$f_{27}$	134,1157



Çizelge 6.14 “c” katsayısına göre kaya zemin ( $c=2000000\text{kN/m}^3$ )

$\lambda$	$\text{m}^2/\text{sn}^2$	$\omega$	$\text{m}/\text{sn}$	$T$	$\text{sn}$	$f$	$\text{sn}^{-1}$
$\lambda_1$	91875	$\omega_1$	303	$T_1$	0,020719	$f_1$	48,26575
$\lambda_2$	170784	$\omega_2$	413	$T_2$	0,015196	$f_2$	65,80577
$\lambda_3$	449335	$\omega_3$	670	$T_3$	0,009369	$f_3$	106,7396
$\lambda_4$	130186	$\omega_4$	361	$T_4$	0,017405	$f_4$	57,45429
$\lambda_5$	379242	$\omega_5$	616	$T_5$	0,010198	$f_5$	98,06151
$\lambda_6$	1574090	$\omega_6$	1255	$T_6$	0,005005	$f_6$	199,7814
$\lambda_7$	177007	$\omega_7$	421	$T_7$	0,014927	$f_7$	66,99395
$\lambda_8$	426254	$\omega_8$	653	$T_8$	0,009619	$f_8$	103,962
$\lambda_9$	396458	$\omega_9$	630	$T_9$	0,009974	$f_9$	100,2626
$\lambda_{10}$	87343	$\omega_{10}$	296	$T_{10}$	0,021249	$f_{10}$	47,0603
$\lambda_{11}$	383777	$\omega_{11}$	619	$T_{11}$	0,010137	$f_{11}$	98,64608
$\lambda_{12}$	519934	$\omega_{12}$	721	$T_{12}$	0,008709	$f_{12}$	114,8192
$\lambda_{13}$	134344	$\omega_{13}$	367	$T_{13}$	0,017134	$f_{13}$	58,3646
$\lambda_{14}$	474856	$\omega_{14}$	689	$T_{14}$	0,009113	$f_{14}$	109,729
$\lambda_{15}$	1668060	$\omega_{15}$	1292	$T_{15}$	0,004862	$f_{15}$	205,6583
$\lambda_{16}$	202777	$\omega_{16}$	450	$T_{16}$	0,013946	$f_{16}$	71,70504
$\lambda_{17}$	434736	$\omega_{17}$	659	$T_{17}$	0,009525	$f_{17}$	104,9913
$\lambda_{18}$	551585	$\omega_{18}$	743	$T_{18}$	0,008456	$f_{18}$	118,2624
$\lambda_{19}$	157205	$\omega_{19}$	396	$T_{19}$	0,015839	$f_{19}$	63,13549
$\lambda_{20}$	910008	$\omega_{20}$	954	$T_{20}$	0,006583	$f_{20}$	151,9018
$\lambda_{21}$	871432	$\omega_{21}$	934	$T_{21}$	0,006727	$f_{21}$	148,6473
$\lambda_{22}$	140915	$\omega_{22}$	375	$T_{22}$	0,016729	$f_{22}$	59,77492
$\lambda_{23}$	4404400	$\omega_{23}$	2099	$T_{23}$	0,002992	$f_{23}$	334,1825
$\lambda_{24}$	1801290	$\omega_{24}$	1342	$T_{24}$	0,004679	$f_{24}$	213,7136
$\lambda_{25}$	200086	$\omega_{25}$	447	$T_{25}$	0,014039	$f_{25}$	71,22766
$\lambda_{26}$	3187830	$\omega_{26}$	1785	$T_{26}$	0,003517	$f_{26}$	284,3072
$\lambda_{27}$	769379	$\omega_{27}$	877	$T_{27}$	0,00716	$f_{27}$	139,6724

Tablo değerlerini elde ederiz.

## SAYISAL ÖRNEK – 2

$\{[K]+[S]-\omega^2.[M]\}\{D_i\}=0$  ifadesini elastik zemin etkisi olmadan yukarıdaki örnekteki sayısal değerleri alarak çözelim.

$\{[K]-\omega^2.[M]\}\{D_i\}=0$  ifadesinde değerlerini Ek-1 ve Ek-2 den alarak yazıp determinantını sıfır yapan  $\lambda=\omega^2$  değerlerini bulur ve buradan T periyot değerlerine geçiş yaparsak;

Çizelge 6.15 “c” katsayısına göre elastik zemin etkisi yoksa (c=0)

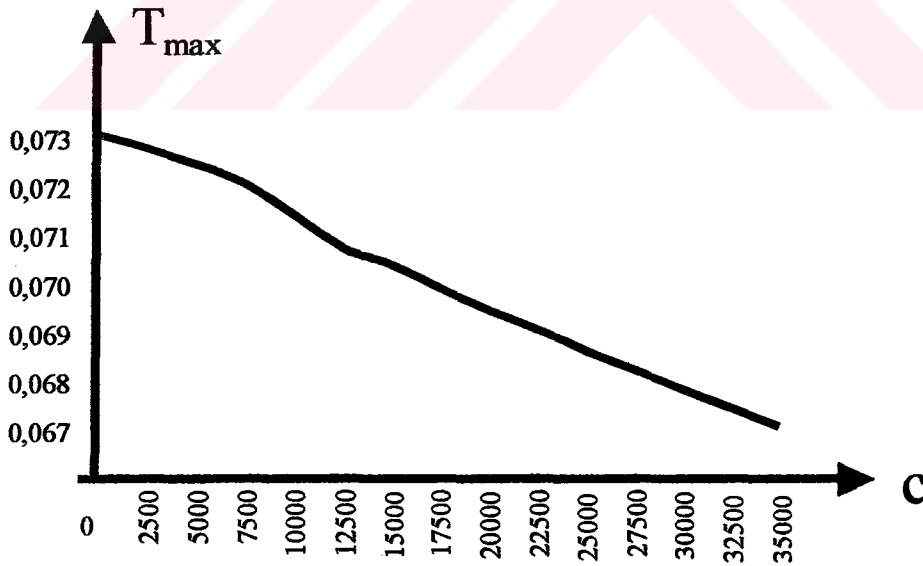
$\lambda$	$m^2/sn^2$	$\omega$	$m/sn$	T	sn	f	$sn^{-1}$
$\lambda_1$	11875	$\omega_1$	108,9725	$T_1$	0,057629	$f_1$	17,3523
$\lambda_2$	90785	$\omega_2$	301,3062	$T_2$	0,020843	$f_2$	47,97869
$\lambda_3$	369335	$\omega_3$	607,7294	$T_3$	0,010334	$f_3$	96,77219
$\lambda_4$	50187	$\omega_4$	224,0234	$T_4$	0,028033	$f_4$	35,67252
$\lambda_5$	299242	$\omega_5$	547,0302	$T_5$	0,01148	$f_5$	87,10671
$\lambda_6$	1494090	$\omega_6$	1222,33	$T_6$	0,005138	$f_6$	194,6385
$\lambda_7$	97007	$\omega_7$	311,4598	$T_7$	0,020163	$f_7$	49,59551
$\lambda_8$	346254	$\omega_8$	588,4335	$T_8$	0,010672	$f_8$	93,6996
$\lambda_9$	316458	$\omega_9$	562,546	$T_9$	0,011164	$f_9$	89,57739
$\lambda_{10}$	7383	$\omega_{10}$	85,92503	$T_{10}$	0,073087	$f_{10}$	13,68233
$\lambda_{11}$	303777	$\omega_{11}$	551,1597	$T_{11}$	0,011394	$f_{11}$	87,76428
$\lambda_{12}$	489934	$\omega_{12}$	699,9529	$T_{12}$	0,008972	$f_{12}$	111,4575
$\lambda_{13}$	54344	$\omega_{13}$	233,1186	$T_{13}$	0,026939	$f_{13}$	37,1208
$\lambda_{14}$	394856	$\omega_{14}$	628,3757	$T_{14}$	0,009994	$f_{14}$	100,0598
$\lambda_{15}$	1588060	$\omega_{15}$	1260,183	$T_{15}$	0,004983	$f_{15}$	200,666
$\lambda_{16}$	122777	$\omega_{16}$	350,3955	$T_{16}$	0,017923	$f_{16}$	55,79546
$\lambda_{17}$	370433	$\omega_{17}$	608,6321	$T_{17}$	0,010318	$f_{17}$	96,91594
$\lambda_{18}$	471585	$\omega_{18}$	686,7205	$T_{18}$	0,009145	$f_{18}$	109,3504
$\lambda_{19}$	29791	$\omega_{19}$	172,601	$T_{19}$	0,036384	$f_{19}$	27,48423
$\lambda_{20}$	830008	$\omega_{20}$	911,0477	$T_{20}$	0,006893	$f_{20}$	145,0713
$\lambda_{21}$	791432	$\omega_{21}$	889,6246	$T_{21}$	0,007059	$f_{21}$	141,66
$\lambda_{22}$	60915	$\omega_{22}$	246,81	$T_{22}$	0,025445	$f_{22}$	39,30096
$\lambda_{23}$	4324400	$\omega_{23}$	2079,519	$T_{23}$	0,00302	$f_{23}$	331,1336
$\lambda_{24}$	1721290	$\omega_{24}$	1311,979	$T_{24}$	0,004787	$f_{24}$	208,9139
$\lambda_{25}$	120086	$\omega_{25}$	346,5343	$T_{25}$	0,018122	$f_{25}$	55,18062
$\lambda_{26}$	3107330	$\omega_{26}$	1762,762	$T_{26}$	0,003563	$f_{26}$	280,6946
$\lambda_{27}$	689379	$\omega_{27}$	830,2885	$T_{27}$	0,007564	$f_{27}$	132,2115

## 7. SONUÇ

Her iki örnekte elde edilen değerler karşılaştırıldığında ve problemlerin değerlendirilmesi yapıldığında;

1. Zemin sınıfı yumuşak zeminden sert zemine doğru giderken bu zeminde oturan plağın açısal hızları olan “ $\omega$ ” değerlerinde artış olduğu,
2. Açısal hız değerlerinin artışına bağlı olarak “T” periyot değerlerinin düşme gösterdiği,
3. Periyot değerlerinin düşmesine bağlı olarak frekans değerlerinin yükseldiği,
4. Elastik zemin etkisi söz konusu değilse “ $\omega$ ” açısal hız değerlerinin düştüğünü ve buna bağlı olarak “T” periyot değerlerinin yükseldiği, frekans değerlerinin ise düşme yaptığı gözlenmiştir.

Elastik zemine oturan ince plakların Sönümsüz Serbest Titreşimi incelendiğinde zemin sınıfına bağlı olarak değişen “c” elastik yataklanma değerleri büyüdükçe “T” periyot değerlerinin düşme yaptığı gözlemlenmiştir. Bazı zeminlere ait maksimum periyot değerleri ile c elastik yataklanma katsayıları arasındaki ilişkiyi grafik çizimle ifade edersek;



Şekil 7.1 Periyotlarla zemin elastik yataklanma değerleri arasındaki grafik

Grafikten de görüldüğü gibi elastik zemin etkisinin “0” olduğu durumdaki “maksimum periyotlar” orta sıkı kum zemine gittikçe azalma göstermektedir. Buna karşılık sistemin

**KAYNAKLAR**

- Aköz, A. Y., (1986), "Mühendisler için Mekanik Dinamik", Beta Basım A. Ş., Vize-Kırklareli.
- Berktaş, İ., (1992), "Plak Teorisi", Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- Coşkun, İ., (1996), "Elastik Zemine Oturan Kirişlerin Lineer Olmayan Titreşimleri", İstanbul Teknik Üniversitesi, Doktora Tezi, İstanbul.
- Çağal, B., (2000), "Sayısal Analiz", Birsan Yayınevi, İstanbul.
- Gonwor, J., Brebbia, C., (1967), "Stiffness Matrix for Shollow Rectangular Shell Element", ASCE.
- İnan, M., (1967), "Cisimlerin Mukavemeti", İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- Köksal, T., (1995), "Sonlu Elemanlar Metodu", Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- Köksal, E., Köksal, T., (1996), "Çubuk, Plak, Kabuk Stabilitesi", Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- Szillard, R., (1974), "Theory and Analysis of Plates", Prentice-Hall.
- User, F., (1986), "Temel Fizik Cilt II Dalga Hareketi", Demsan Kitapçılık A.Ş., İstanbul.
- Wolfram, S., (1996), "Engineering Packet of Mathematica 3.0 Version".
- Yücefer, N., (1998), "Elastisite Teorisi Lisans Üstü Teorisi Ders Notları", İstanbul.
- Zienkiewicz, O. C., (1971), "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill.



**EKLER**

- Ek 1 Sistem Rijitlik Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Rijitlik Matrisi Olarak Yazılması
- Ek 2 Sistem Kütle Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Kütle Matrisi Olarak Yazılması
- Ek 3 Sistem Zemin Etki Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Zemin Etki Matrisi Olarak Yazılması
- Ek 4 Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Elastik Zemine Oturan Kirişin Sönümsüz Serbest Titreşim Hesabının Mathematica 3.0 Version Paket Programında Yazılması



**Ek 1 – Sistem Rijitlik Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Rijitlik Matrisi Olarak Yazılması**

$$K_{1,1} = \frac{Et^3 a^2}{3b^2(1-v^2)} + \frac{Et^3 b^2}{3a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3 v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{1,2} = \frac{Et^3 a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{bEt^3}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3}{60(1-v^2)} \quad K_{1,3} = -\frac{2Et^3 b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{aEt^3}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3 v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{1,4} = \frac{Et^3 a^2}{6b(1-v^2)} - \frac{Et^3 b^2}{6a^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3 v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{1,5} = \frac{Et^3 a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3 b}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3 b v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{1,6} = -\frac{Et^3 b^2}{6.a.(1-v^2)} - \frac{Et^3 a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3 a v}{60(1-v^2)} \quad K_{1,7} = K_{1,8} = K_{1,9} = 0$$

$$K_{1,10} = \frac{Et^3 b^2}{6.a^2(1-v^2)} - \frac{Et^3 a^2}{3.b^2.(1-v^2)} - \frac{14.Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3 v}{15.(1-v^2)}$$

$$K_{1,11} = \frac{Et^3 b^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3 b}{60.(1-v^2)} - \frac{Et^3 b v}{60.(1-v^2)}$$

$$K_{1,12} = -\frac{Et^3 .b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3 a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3 a v}{15.(1-v^2)}$$

$$K_{1,13} = -\frac{Et^3 a^2}{6.b^2.(1-v^2)} - \frac{Et^3 b^2}{6.a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60.(1-v^2)} - \frac{Et^3 v}{15.(1-v^2)}$$

$$K_{1,14} = -\frac{Et^3 a^2}{12.b.(1-v^2)} - \frac{Et^3 b}{60.(1-v^2)} - \frac{Et^3 b v}{60.(1-v^2)}$$

$$K_{1,15} = -\frac{Et^3 b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3 a}{60.(1-v^2)} - \frac{Et^3 a v}{60.(1-v^2)} \quad K_{1,16} = K_{1,17} = \dots = K_{1,27} = 0$$

$$K_{2,2} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{2,3} = -vab \frac{Et^3}{12(1-v^2)}$$

$$K_{2,4} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{2,5} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{2,6} = K_{2,7} = K_{2,8} = K_{2,9} = 0$$

$$K_{2,10} = -\frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{2,11} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{360(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{2,12} = 0$$

$$K_{2,13} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{2,14} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{2,15} = K_{2,16} = \dots\dots\dots K_{2,27} = 0$$

$$K_{3,3} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{3,4} = \frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{3,5} = 0$$

$$K_{3,6} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3a^2}{360(1-v^2)} + \frac{2Et^3a^2v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{3,7} = K_{3,8} = K_{3,9} = K_{3,11} = K_{3,14} = 0$$

$$K_{3,10} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{3,12} = -\frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{3,13} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{3,15} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2v}{180(1-v^2)} \quad K_{316} = K_{317} = \dots\dots\dots K_{327} = 0$$

$$K_{4,4} = \frac{8Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,5} = \frac{4Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{2Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{8Et^3b.v}{60(1-v^2)} \quad K_{46} = K_{4,15} = 0$$

$$K_{4,7} = \frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,8} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,9} = -\frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,10} = -\frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,11} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,12} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$



$$K_{4,13} = \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,14} = \frac{4Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{2Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{2Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,16} = -\frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,17} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{4,18} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{4,19} = K_{4,20} = K_{4,21} = \dots K_{4,27} = 0$$

$$K_{5,5} = \frac{8Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2.v}{180(1-v^2)} \quad K_{5,6} = 0$$

$$K_{5,7} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{5,8} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2.v}{60(1-v^2)} \quad K_{5,9} = 0$$

$$K_{5,10} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{5,11} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2.v}{180(1-v^2)} \quad K_{5,12} = K_{5,13} = 0$$

$$K_{5,14} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{360(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2.v}{360(1-v^2)} \quad K_{5,15} = 0$$

$$K_{5,16} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{5,17} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{5,18} = K_{5,19} = K_{5,20} = \dots\dots\dots K_{5,27} = 0$$

$$K_{6,6} = \frac{8Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{6,7} = \frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{6,8} = 0$$

$$K_{6,9} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3a^2}{360(1-v^2)} + \frac{2Et^3a^2.v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{6,10} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{6,11} = 0$$

$$K_{6,12} = \frac{Et^3b^2}{36.(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180.(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2.v}{180.(1-v^2)}$$

$$K_{6,13} = K_{6,14} = 0$$

$$K_{6,15} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2}{180(1-v^2)} + \frac{8Et^3a^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{6,16} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{6,17} = 0$$

$$K_{6,18} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{6,19} = K_{6,20} = \dots\dots\dots K_{6,27} = 0$$

$$K_{7,7} = \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{7,8} = \frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{7,9} = \frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{7,10} = K_{7,11} = K_{7,12} = 0$$

$$K_{7,13} = -\frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{7,14} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{7,15} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{7,16} = \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{7,17} = \frac{2Et^3a^2}{12.b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60.(1-v^2)} - \frac{Et^3b.v}{60.(1-v^2)}$$

$$K_{7,18} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{7,19} = K_{7,20} = \dots\dots\dots K_{7,27} = 0$$

$$K_{8,8} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{8,9} = \frac{Et^3ab.v}{12(1-v^2)} \quad K_{8,10} = K_{8,11} = K_{8,12} = 0$$

$$K_{8,13} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3b.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{8,14} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2.v}{180(1-v^2)} \quad K_{8,15} = 0$$

$$K_{8,16} = \frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3b.v}{60(1-v^2)} \quad K_{8,17} = K_{8,18} = K_{8,19} = \dots K_{8,27} = 0$$

$$K_{9,9} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2.v}{180(1-v^2)} \quad K_{9,10} = K_{9,11} = K_{9,12} = 0$$

$$K_{9,13} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{9,14} = 0$$

$$K_{9,15} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{9,16} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{9,17} = 0$$

$$K_{9,18} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2.v}{60(1-v^2)} \quad K_{9,19} = K_{9,20} = \dots K_{9,27} = 0$$

$$K_{10,10} = \frac{8Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3.v}{60(1-v^2)} \quad K_{10,11} = 0$$

$$K_{10,12} = -\frac{4Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{2Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,13} = \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,14} = 0$$

$$K_{10,15} = -\frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{2Et^3av}{60(1-v^2)} \quad K_{10,16} = K_{10,17} = K_{10,18} = 0$$

$$K_{10,19} = \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,20} = \frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,21} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,22} = -\frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,23} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{10,24} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3av}{60(1-v^2)} \quad K_{10,25} = 0$$

$$K_{11,11} = \frac{8Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2v}{60(1-v^2)} \quad K_{11,12} = K_{11,13} = 0$$

$$K_{11,14} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2}{180(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2v}{180(1-v^2)} \quad K_{11,15} = K_{11,16} = K_{11,17} = K_{11,18} = 0$$

$$K_{11,19} = -\frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{11,20} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{360(1-v^2)} + \frac{2Et^3b^2v}{360(1-v^2)} \quad K_{11,21} = 0$$

$$K_{11,22} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{11,23} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2v}{180(1-v^2)} \quad K_{11,24} = K_{11,25} = K_{11,26} = K_{11,27} = 0$$

$$K_{12,12} = \frac{8Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{12,13} = \frac{4Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{2Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{2Et^3av}{60(1-v^2)} \quad K_{12,14} = 0$$

$$K_{12,15} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{360(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2v}{360(1-v^2)} \quad K_{12,16} = K_{12,17} = K_{12,18} = 0$$

$$K_{12,19} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3av}{60(1-v^2)} \quad K_{12,20} = 0$$

$$K_{12,21} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{12,22} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3av}{60(1-v^2)} \quad K_{12,23} = 0$$

$$K_{12,24} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{12,25} = K_{12,26} = K_{12,27} = 0$$

$$K_{13,13} = \frac{16Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{16Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{56Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{16Et^3v}{60(1-v^2)} \quad K_{13,14} = K_{13,15} = 0$$

$$K_{13,16} = \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)} \quad K_{13,17} = 0$$

$$K_{13,18} = -\frac{4Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{2Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{2Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,19} = \frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,20} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,21} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,22} = \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,23} = \frac{4Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{2Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)} \quad K_{13,24} = 0$$

$$K_{13,25} = -\frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,26} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{13,27} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{14,14} = \frac{16Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{16Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{16Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{14,15} = K_{14,16} = 0$$

$$K_{14,17} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2}{180(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{14,18} = 0$$

$$K_{14,19} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{14,20} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{14,21} = K_{14,22} = 0$$

$$K_{14,23} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{360(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{14,24} = 0$$

$$K_{14,25} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{14,26} = \frac{Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{14,27} = 0$$

$$K_{15,15} = \frac{16Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{16Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{16Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{15,16} = \frac{4Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{2Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{2Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{15,17} = 0$$

$$K_{15,18} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{360(1-v^2)} + \frac{4Et^3av}{360(1-v^2)}$$

$$K_{15,19} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{15,20} = 0$$



$$K_{15,21} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{15,22} = K_{15,23} = 0$$

$$K_{15,24} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2}{180(1-v^2)} + \frac{8Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{15,25} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{15,26} = 0$$

$$K_{15,27} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{16,16} = \frac{8Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,17} = 0$$

$$K_{16,18} = \frac{8Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{12Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{8Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,19} = K_{16,20} = K_{16,21} = 0$$

$$K_{16,22} = -\frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,23} = \frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,24} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,25} = \frac{2Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,26} = \frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{16,27} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{17,17} = \frac{8Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{17,18} = \frac{Et^3abv}{12(1-v^2)}$$

$$K_{17,19} = K_{17,20} = K_{17,21} = 0$$

$$K_{17,22} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{17,23} = \frac{Et^3}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{17,24} = 0$$

$$K_{17,25} = \frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{17,26} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3b^2}{360(1-v^2)} + \frac{2Et^3b^2v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{17,27} = 0$$

$$K_{18,18} = \frac{8Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2}{180(1-v^2)} + \frac{8Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{18,19} = K_{18,20} = K_{18,21} = 0$$

$$K_{18,22} = -\frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{18,23} = 0$$

$$K_{18,24} = \frac{Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{Et^3a^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{18,25} = \frac{Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{18,26} = 0$$

$$K_{18,27} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2.v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{19,19} = \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{19,20} = -\frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{19,21} = -\frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3a.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{19,22} = \frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3.v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{19,23} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{19,24} = -\frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a.v}{60(1-v^2)} \quad K_{19,25} = K_{19,26} = K_{19,27} = 0$$

$$K_{20,20} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2 \cdot v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{20,21} = \frac{Et^3abv}{12(1-v^2)}$$

$$K_{20,22} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3b \cdot v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{20,23} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2 \cdot v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{20,24} = K_{20,25} = K_{20,26} = K_{20,27} = 0$$

$$K_{21,22} = \frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3a \cdot v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{21,21} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2 \cdot v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{21,23} = 0$$

$$K_{21,24} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3a^2}{360(1-v^2)} + \frac{2Et^3a^2 \cdot v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{21,25} = K_{21,26} = K_{21,27} = 0$$

$$K_{22,22} = \frac{8Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{28Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{22,23} = -\frac{4Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{2Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{8Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{22,24} = 0$$

$$K_{22,25} = \frac{2Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} - \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{22,26} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{22,27} = -\frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} - \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{23,23} = \frac{8Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{8Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{23,24} = 0$$

$$K_{23,25} = -\frac{Et^3a^2}{12b(1-v^2)} + \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{23,26} = \frac{2Et^3a^2}{36(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{23,27} = 0$$

$$K_{24,24} = \frac{8Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{8Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{8Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{24,25} = \frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} - \frac{Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{24,26} = 0$$

$$K_{24,27} = \frac{2Et^3b^2}{36(1-v^2)} - \frac{2Et^3a^2}{360(1-v^2)} - \frac{2Et^3a^2v}{360(1-v^2)}$$

$$K_{25,25} = \frac{4Et^3a^2}{12b^2(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2}{12a^2(1-v^2)} + \frac{14Et^3}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3v}{60(1-v^2)}$$

$$K_{25,26} = -\frac{2Et^3a^2}{12b(1-v^2)} - \frac{Et^3b}{60(1-v^2)} - \frac{4Et^3bv}{60(1-v^2)}$$

$$K_{25,27} = \frac{2Et^3b^2}{12a(1-v^2)} + \frac{Et^3a}{60(1-v^2)} + \frac{4Et^3av}{60(1-v^2)}$$

$$K_{26,26} = \frac{4Et^3a^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3b^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3b^2v}{180(1-v^2)}$$

$$K_{26,27} = -\frac{Et^3abv}{12(1-v^2)}$$

$$K_{27,27} = \frac{4Et^3b^2}{36(1-v^2)} + \frac{4Et^3a^2}{180(1-v^2)} - \frac{4Et^3a^2v}{180(1-v^2)}$$

Tüm K değerleri  $\frac{1}{a.b}$  ile çarpılacaktır

**Ek 2 – Sistem Kütle Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Kütle Matrisi Olarak Yazılması**

$$\begin{aligned}
 M_{1,1} &= \rho \cdot 0,137 \cdot a \cdot b & M_{1,2} &= \rho \cdot 0,0183 \cdot a \cdot b^2 & M_{1,3} &= -\rho \cdot 0,0183 \cdot a^2 \cdot b \\
 M_{1,4} &= \rho \cdot 0,0487 \cdot a \cdot b & M_{1,5} &= \rho \cdot 0,0079 \cdot a \cdot b^2 & M_{1,6} &= \rho \cdot 0,0109 \cdot a^2 \cdot b \\
 M_{1,7} &= M_{1,8} = M_{1,9} = 0 & M_{1,10} &= \rho \cdot 0,0487 \cdot a \cdot b & M_{1,11} &= -\rho \cdot 0,0109 \cdot a \cdot b^2 \\
 M_{1,12} &= -\rho \cdot 0,0079 \cdot a^2 \cdot b & M_{1,13} &= \rho \cdot 0,0156 \cdot a \cdot b & M_{1,14} &= -\rho \cdot 0,0046 \cdot a \cdot b^2 \\
 M_{1,15} &= \rho \cdot 0,0046 \cdot a^2 \cdot b & M_{1,16} &= M_{1,17} = M_{1,18} = M_{1,19} = M_{1,20} = \dots \dots \dots M_{1,27} = 0 \\
 M_{2,2} &= \rho \cdot 0,00317 \cdot a \cdot b^3 & M_{2,3} &= -\rho \cdot 0,0025 \cdot a^2 \cdot b^2 & M_{2,4} &= \rho \cdot 0,0079 \cdot a \cdot b^2 \\
 M_{2,5} &= \rho \cdot 0,00159 \cdot a \cdot b^3 & M_{2,6} &= \rho \cdot 0,00167 \cdot a^2 \cdot b^2 & M_{2,7} &= M_{2,8} = M_{2,9} = 0 \\
 M_{2,10} &= \rho \cdot 0,0109 \cdot a \cdot b^2 & M_{2,11} &= -\rho \cdot 0,00238 \cdot a \cdot b^3 & M_{2,12} &= -\rho \cdot 0,00167 \cdot a^2 \cdot b^2 \\
 M_{2,13} &= \rho \cdot 0,0046 \cdot a \cdot b^2 & M_{2,14} &= -\rho \cdot 0,0119 \cdot a \cdot b^3 & M_{2,15} &= \rho \cdot 0,00111 \cdot a^2 \cdot b^2 \\
 M_{2,16} &= M_{2,17} = M_{2,18} = M_{2,19} = M_{2,20} = \dots \dots \dots M_{2,27} = 0 \\
 M_{3,3} &= \rho \cdot 0,00317 \cdot a^3 \cdot b & M_{3,4} &= -\rho \cdot 0,0109 \cdot a^2 \cdot b & M_{3,5} &= -\rho \cdot 0,00167 \cdot a^2 \cdot b^2 \\
 M_{3,6} &= -\rho \cdot 0,00238 \cdot a^3 \cdot b & M_{3,7} &= M_{3,8} = M_{3,9} = 0 & M_{3,10} &= -\rho \cdot 0,0079 \cdot a^2 \cdot b \\
 M_{3,11} &= \rho \cdot 0,00167 \cdot a^2 \cdot b^2 & M_{3,12} &= \rho \cdot 0,00159 \cdot a^3 \cdot b & M_{3,13} &= -\rho \cdot 0,0046 \cdot a^2 \cdot b \\
 M_{3,14} &= \rho \cdot 0,00111 \cdot a^2 \cdot b^2 & M_{3,15} &= -\rho \cdot 0,0119 \cdot a^3 \cdot b \\
 M_{3,16} &= M_{3,17} = M_{3,18} = M_{3,19} = M_{3,20} = \dots \dots \dots M_{3,27} = 0 \\
 M_{4,4} &= \rho \cdot 0,274 \cdot a \cdot b & M_{4,5} &= \rho \cdot 0,0366 \cdot a \cdot b^2 & M_{4,6} &= 0 \\
 M_{4,7} &= \rho \cdot 0,0487 \cdot a \cdot b & M_{4,8} &= \rho \cdot 0,0079 \cdot a \cdot b^2 & M_{4,9} &= \rho \cdot 0,0109 \cdot a^2 \cdot b \\
 M_{4,10} &= \rho \cdot 0,0156 \cdot a \cdot b & M_{4,11} &= -\rho \cdot 0,0046 \cdot a \cdot b^2 & M_{4,12} &= -\rho \cdot 0,0046 \cdot a^2 \cdot b \\
 M_{4,13} &= \rho \cdot 0,0974 \cdot a \cdot b & M_{4,14} &= -\rho \cdot 0,0218 \cdot a \cdot b^2 & M_{4,15} &= 0 \\
 M_{4,16} &= \rho \cdot 0,0156 \cdot a \cdot b & M_{4,17} &= -\rho \cdot 0,0046 \cdot a \cdot b^2 & M_{4,18} &= \rho \cdot 0,0046 \cdot a^2 \cdot b
 \end{aligned}$$



$$M_{4,19} = M_{4,20} = \dots M_{4,27} = 0$$

$$M_{5,5} = \rho.0,00634.a.b^3 \quad M_{5,6} = \rho.0,0050.a^2.b^2 \quad M_{5,7} = \rho.0,0079.a.b^2$$

$$M_{5,8} = \rho.0,00159.a.b^3 \quad M_{5,9} = \rho.0,00167.a^2.b^2 \quad M_{5,10} = \rho.0,0046.a.b^2$$

$$M_{5,11} = -\rho.0,00119.a.b^3 \quad M_{5,12} = -\rho.0,00111.a^2.b^2 \quad M_{5,13} = \rho.0,0218.a.b^2$$

$$M_{5,14} = -\rho.0,00476.a.b^3 \quad M_{5,15} = 0 \quad M_{5,16} = \rho.0,0046.a.b^2$$

$$M_{5,17} = -\rho.0,00119.a.b^3 \quad M_{5,18} = \rho.0,00111.a^2.b^2 \quad M_{5,19} = M_{5,20} = \dots M_{5,27} = 0$$

$$M_{6,6} = \rho.0,00634.a^3.b \quad M_{6,7} = -\rho.0,0109.a^2.b \quad M_{6,8} = -\rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{6,9} = -\rho.0,00238.a^3.b \quad M_{6,10} = \rho.0,0046.a^2.b \quad M_{6,11} = -\rho.0,00111.a^2.b^2$$

$$M_{6,12} = -\rho.0,00119.a^3.b \quad M_{6,13} = M_{6,14} = 0 \quad M_{6,15} = \rho.0,00318.a^3.b$$

$$M_{6,16} = -\rho.0,0046.a^2.b \quad M_{6,17} = \rho.0,00111.a^2.b^2 \quad M_{6,18} = -\rho.0,00119.a^3.b$$

$$M_{6,19} = M_{6,20} = \dots M_{6,27} = 0$$

$$M_{7,7} = \rho.0,137.a.b \quad M_{7,8} = \rho.0,183.a.b^2 \quad M_{7,9} = \rho.0,183.a^2.b$$

$$M_{7,10} = M_{7,11} = M_{7,12} = 0 \quad M_{7,13} = \rho.0,0156.a.b \quad M_{7,14} = -\rho.0,0046.a.b^2$$

$$M_{7,15} = -\rho.0,0046.a^2.b \quad M_{7,16} = \rho.0,0487.a.b \quad M_{7,17} = \rho.0,0109.a.b^2$$

$$M_{7,18} = \rho.0,0079.a^2.b \quad M_{7,19} = M_{7,20} = \dots M_{7,27} = 0$$

$$M_{8,8} = \rho.0,00317.a.b^3 \quad M_{8,9} = \rho.0,0025.a^2.b^2 \quad M_{8,10} = M_{8,11} = M_{8,12} = 0$$

$$M_{8,13} = \rho.0,0046.a.b^2 \quad M_{8,14} = -\rho.0,00119.a.b^3 \quad M_{8,15} = -\rho.0,00111.a^2.b^2$$

$$M_{8,16} = \rho.0,0109.a.b^2 \quad M_{8,17} = -\rho.0,00238.a.b^3 \quad M_{8,18} = \rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{8,19} = M_{8,20} = \dots M_{8,27} = 0$$

$$M_{9,9} = \rho.0,00317.a^3.b \quad M_{9,10} = M_{9,11} = M_{9,12} = 0 \quad M_{9,13} = \rho.0,0046.a^2.b$$

$$\begin{aligned}
M_{9,14} &= -\rho.0,00111.a^2.b^2 & M_{9,15} &= -\rho.0,00119.a^3.b & M_{9,16} &= \rho.0,0079.a^2.b \\
M_{9,17} &= -\rho.0,00167.a^2.b^2 & M_{9,18} &= \rho.0,00159.a^3.b & & \\
M_{9,19} &= M_{9,20} = \dots M_{9,27} = 0 & & & & \\
\\
M_{10,10} &= \rho.0,274.a.b & M_{10,11} &= 0 & M_{10,12} &= -\rho.0,0366.a^2.b \\
M_{10,13} &= \rho.0,0974.a.b & M_{10,14} &= 0 & M_{10,15} &= \rho.0,0218.a^2.b \\
M_{10,16} &= M_{10,17} = M_{10,18} = 0 & M_{10,19} &= \rho.0,0497.a.b & M_{10,20} &= -\rho.0,0109.a.b^2 \\
M_{10,21} &= -\rho.0,079.a^2.b & M_{10,22} &= \rho.0,0156.a.b & M_{10,23} &= -\rho.0,0046.a.b^2 \\
M_{10,24} &= \rho.0,0046.a^2.b & M_{10,25} &= M_{10,26} = M_{10,27} = 0 & & \\
\\
M_{11,11} &= \rho.0,00634.a.b^3 & M_{11,12} &= M_{11,13} = 0 & M_{11,14} &= \rho.0,00318.a.b^3 \\
M_{11,15} &= M_{11,16} = \dots M_{11,18} = 0 & M_{11,19} &= \rho.0,0109.a.b^2 & M_{11,20} &= -\rho.0,00238.a.b^3 \\
M_{11,21} &= -\rho.0,00167.a^2.b^2 & M_{11,22} &= \rho.0,0046.a.b^2 & M_{11,23} &= -\rho.0,0119.a.b^3 \\
M_{11,24} &= \rho.0,00111.a^2.b^2 & M_{11,25} &= M_{11,26} = M_{11,27} = 0 & & \\
\\
M_{12,12} &= \rho.0,00634.a^3.b & M_{12,23} &= \rho.0,00111.a^2.b^2 & M_{12,14} &= 0 \\
M_{12,15} &= -\rho.0,00476.a^3.b & M_{12,16} &= M_{12,17} = M_{12,18} = 0 & M_{12,19} &= -\rho.0,0079.a^2.b \\
M_{12,20} &= \rho.0,00167.a^2.b^2 & M_{12,21} &= \rho.0,00159.a^3.b & M_{12,22} &= -\rho.0,0046.a^2.b \\
M_{12,23} &= \rho.0,00111.a^2.b^2 & M_{12,24} &= -\rho.0,00119.a^3.b & M_{12,25} &= M_{12,26} = M_{12,27} = 0 \\
\\
M_{13,13} &= \rho.0,548.a.b & M_{13,14} &= M_{13,15} = 0 & M_{13,16} &= \rho.0,0974.a.b \\
\\
M_{13,17} &= 0 & & & & \\
\\
M_{13,18} &= \rho.0,0218.a^2.b & M_{13,19} &= \rho.0,0156.a.b & M_{13,20} &= -\rho.0,0046.a.b^2 \\
M_{13,23} &= -\rho.0,0218.a.b^2 & M_{13,21} &= -\rho.0,0046.a^2.b & M_{13,22} &= \rho.0,0974.a.b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{13,24} &= 0 & M_{13,25} &= \rho.0,0156.a.b & M_{13,26} &= -\rho.0,0046.a.b^2 \\
M_{13,27} &= \rho.0,0046.a^2.b \\
M_{14,14} &= \rho.0,0127.a.b^3 & M_{14,15} &= M_{14,16} = 0 & M_{14,17} &= \rho.0,00318.a.b^3 \\
M_{14,18} &= 0 & M_{14,19} &= \rho.0,0046.a.b^2 & M_{14,20} &= -\rho.0,00119.a.b^3 \\
M_{14,21} &= -\rho.0,00111.a^2.b^2 & M_{14,22} &= \rho.0,0218.a.b^2 & M_{14,23} &= -\rho.0,00476.a.b^3 \\
M_{14,24} &= 0 & M_{14,25} &= \rho.0,0046.a.b^2 & M_{14,26} &= -\rho.0,0119.a.b^3 \\
M_{14,27} &= \rho.0,00111.a^2.b^2 \\
M_{15,15} &= \rho.0,0127.a^3.b & M_{15,16} &= -\rho.0,0218.a^2.b & M_{15,17} &= 0 \\
M_{15,18} &= -\rho.0,00476.a^3.b & M_{15,19} &= \rho.0,0046.a^2.b & M_{15,20} &= -\rho.0,00111.a^2.b^2 \\
M_{15,21} &= -\rho.0,00119.a^3.b & M_{15,22} &= 0 & M_{15,23} &= 0 \\
M_{15,24} &= \rho.0,00318.a^3.b & M_{15,25} &= -\rho.0,0046.a^2.b & M_{15,26} &= \rho.0,00111.a^2.b^2 \\
M_{15,27} &= -\rho.0,00119.a^3.b \\
M_{16,16} &= \rho.0,274.a.b & M_{16,17} &= 0 & M_{16,18} &= \rho.0,0366.a^2.b \\
M_{16,19} &= M_{16,20} = M_{16,21} = 0 & M_{16,22} &= \rho.0,0156.a.b & M_{16,23} &= -\rho.0,0046.a.b^2 \\
M_{16,24} &= -\rho.0,0046.a^2.b & M_{16,25} &= \rho.0,0487.a.b & M_{16,26} &= -\rho.0,0109.a.b^2 \\
M_{16,27} &= \rho.0,0079.a^2.b \\
M_{17,17} &= \rho.0,00634.a.b^3 & M_{17,22} &= \rho.0,0046.a.b^2 & M_{17,18} &= M_{17,19} = M_{17,20} = M_{17,21} = 0 \\
M_{17,23} &= -\rho.0,00119.a.b^3 & M_{17,24} &= -\rho.0,00111.a^2.b^2 & M_{17,25} &= \rho.0,0109.a.b^2 \\
M_{17,26} &= -\rho.0,00238.a.b^3 & M_{17,27} &= \rho.0,00167.a^2.b^2 \\
M_{18,18} &= \rho.0,00317.a^3.b & M_{18,19} &= M_{18,20} = M_{18,21} = 0 & M_{18,22} &= \rho.0,0046.a^2.b
\end{aligned}$$

$$M_{18,24} = -\rho.0,00119.a^3.b$$

$$M_{18,23} = -\rho.0,00111.a^2.b^2 \quad M_{18,25} = \rho.0,0079.a^2.b$$

$$M_{18,26} = -\rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{18,27} = \rho.0,00159.a^3.b$$

$$M_{19,19} = \rho.0,137.a.b$$

$$M_{19,20} = -\rho.0,0183.a.b^2$$

$$M_{19,21} = -\rho.0,0183.a^2.b$$

$$M_{19,22} = \rho.0,0487.a.b$$

$$M_{19,23} = -\rho.0,0079.a.b^2$$

$$M_{19,24} = \rho.0,0109.a^2.b$$

$$M_{19,25} = M_{19,26} = M_{19,27} = 0$$

$$M_{20,20} = \rho.0,00317.a.b^3$$

$$M_{20,21} = \rho.0,025.a^2.b^2$$

$$M_{20,22} = -\rho.0,0079.a.b^2$$

$$M_{20,24} = -\rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{20,23} = \rho.0,00159.a.b^3$$

$$M_{20,25} = M_{20,26} = M_{20,27} = 0$$

$$M_{21,21} = \rho.0,00317.a^3.b$$

$$M_{21,22} = -\rho.0,0109.a^2.b$$

$$M_{21,23} = \rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{21,24} = -\rho.0,00238.a^3.b$$

$$M_{21,25} = M_{21,26} = M_{21,27} = 0$$

$$M_{22,22} = \rho.0,274.a.b$$

$$M_{22,23} = -\rho.0,0366.a.b^2$$

$$M_{22,24} = 0$$

$$M_{22,25} = \rho.0,0487.a.b$$

$$M_{22,26} = -\rho.0,0079.a.b^2$$

$$M_{22,27} = \rho.0,0109.a^2.b$$

$$M_{23,23} = \rho.0,00634.a.b^3$$

$$M_{23,24} = 0$$

$$M_{23,25} = -\rho.0,0079.a.b^2$$

$$M_{23,26} = \rho.0,00159.a.b^3$$

$$M_{23,27} = -\rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{24,24} = \rho.0,00634.a^3.b$$

$$M_{24,25} = -\rho.0,0109.a^2.b$$

$$M_{24,26} = \rho.0,00167.a^2.b^2$$

$$M_{24,27} = -\rho.0,00238.a^3.b$$

$$M_{25,25} = \rho.0,137.a.b$$

$$M_{25,26} = -\rho.0,0183.a.b^2$$

$$M_{25,27} = \rho.0,0183.a^2.b$$

$$M_{26,26} = \rho.0,00317.a.b^3$$

$$M_{26,27} = -\rho.0,0025.a^2.b^2$$

$$M_{27,27} = \rho.0,00317.a^3.b$$

**Ek 3 – Sistem Zemin Etki Matrisi; Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bulunmuş Olan  
Eleman Rijitlik Matrisinin Biriktirme Metodu Yöntemi İle Sistem Zemin  
Etki Matrisi Olarak Yazılması**

$$\begin{array}{lll}
 S_{1,1} = c.0,137.a.b & S_{1,2} = c.0,0183.a.b^2 & S_{1,3} = -c.0,0183.a^2.b \\
 S_{1,4} = c.0,0487.a.b & S_{1,5} = c.0,0079.a.b^2 & S_{1,6} = c.0,0109.a^2.b \\
 S_{1,7} = S_{1,8} = S_{1,9} = 0 & S_{1,10} = c.0,0487.a.b & S_{1,11} = -c.0,0109.a.b^2 \\
 S_{1,12} = -c.0,0079.a^2.b & S_{1,13} = c.0,0156.a.b & S_{1,14} = -c.0,0046.a.b^2 \\
 S_{1,15} = c.0,0046.a^2.b & S_{1,16} = S_{1,17} = S_{1,18} = S_{1,19} = S_{1,20} = \dots\dots\dots S_{1,27} = 0 & \\
 \\
 S_{2,2} = c.0,00317.a.b^3 & S_{2,3} = -c.0,0025.a^2.b^2 & S_{2,4} = c.0,0079.a.b^2 \\
 S_{2,5} = c.0,00159.a.b^3 & S_{2,6} = c.0,00167.a^2.b^2 & S_{2,7} = S_{2,8} = S_{2,9} = 0 \\
 S_{2,10} = c.0,0109.a.b^2 & S_{2,11} = -c.0,00238.a.b^3 & S_{2,12} = -c.0,00167.a^2.b^2 \\
 S_{2,13} = c.0,0046.a.b^2 & S_{2,14} = -c.0,0119.a.b^3 & S_{2,15} = c.0,00111.a^2.b^2 \\
 S_{2,16} = S_{2,17} = S_{2,18} = S_{2,19} = S_{2,20} = \dots\dots\dots S_{2,27} = 0 & & \\
 \\
 S_{3,3} = c.0,00317.a^3.b & S_{3,4} = -c.0,0109.a^2.b & S_{3,5} = -c.0,00167.a^2.b^2 \\
 S_{3,6} = -c.0,00238.a^3.b & S_{3,7} = S_{3,8} = S_{3,9} = 0 & S_{3,10} = -c.0,0079.a^2.b \\
 S_{3,11} = c.0,00167.a^2.b^2 & S_{3,12} = c.0,00159.a^3.b & S_{3,13} = -c.0,0046.a^2.b \\
 S_{3,14} = c.0,00111.a^2.b^2 & S_{3,15} = -c.0,0119.a^3.b & \\
 S_{3,16} = S_{3,17} = S_{3,18} = S_{3,19} = S_{3,20} = \dots\dots\dots S_{3,27} = 0 & & \\
 \\
 S_{4,4} = c.0,274.a.b & S_{4,5} = c.0,0366.a.b^2 & S_{4,6} = 0 \\
 S_{4,7} = c.0,0487.a.b & S_{4,8} = c.0,0079.a.b^2 & S_{4,9} = c.0,0109.a^2.b \\
 S_{4,10} = c.0,0156.a.b & S_{4,11} = -c.0,0046.a.b^2 & S_{4,12} = -c.0,0046.a^2.b \\
 S_{4,13} = c.0,0974.a.b & S_{4,14} = -c.0,0218.a.b^2 & S_{4,15} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
S_{416} = c.0,0156.a.b & S_{417} = -c.0,0046.a.b^2 & S_{418} = c.0,0046.a^2.b \\
S_{419} = S_{420} = \dots S_{427} = 0 & & \\
S_{5,5} = c.0,00634.a.b^3 & S_{5,6} = c.0,0050.a^2.b^2 & S_{5,7} = c.0,0079.a.b^2 \\
S_{5,8} = c.0,00159.a.b^3 & S_{5,9} = c.0,00167.a^2.b^2 & S_{5,10} = c.0,0046.a.b^2 \\
S_{5,11} = -c.0,00119.a.b^3 & S_{5,12} = -c.0,00111.a^2.b^2 & S_{5,13} = c.0,0218.a.b^2 \\
S_{5,14} = -c.0,00476.a.b^3 & S_{5,15} = 0 & S_{5,16} = \rho.0,0046.a.b^2 \\
S_{5,17} = -\rho.0,00119.a.b^3 & S_{5,18} = \rho.0,00111.a^2.b^2 & S_{5,19} = S_{5,20} = \dots S_{5,27} = 0 \\
S_{6,6} = c.0,00634.a^3.b & S_{6,7} = -c.0,0109.a^2.b & S_{6,8} = -c.0,00167.a^2.b^2 \\
S_{6,9} = -c.0,00238.a^3.b & S_{6,10} = c.0,0046.a^2.b & S_{6,11} = -c.0,00111.a^2.b^2 \\
S_{6,12} = -c.0,00119.a^3.b & S_{6,13} = S_{6,14} = 0 & S_{6,15} = c.0,00318.a^3.b \\
S_{6,16} = -c.0,0046.a^2.b & S_{6,17} = c.0,00111.a^2.b^2 & S_{6,18} = -c.0,00119.a^3.b \\
S_{6,19} = S_{6,20} = \dots S_{6,27} = 0 & & \\
S_{7,7} = c.0,137.a.b & S_{7,8} = c.0,183.a.b^2 & S_{7,9} = c.0,183.a^2.b \\
S_{7,10} = S_{7,11} = S_{7,12} = 0 & S_{7,13} = c.0,0156.a.b & S_{7,14} = -c.0,0046.a.b^2 \\
S_{7,15} = -c.0,0046.a^2.b & S_{7,16} = c.0,0487.a.b & S_{7,17} = c.0,0109.a.b^2 \\
S_{7,18} = c.0,0079.a^2.b & S_{7,19} = S_{7,20} = \dots S_{7,27} = 0 & \\
S_{8,8} = c.0,00317.a.b^3 & S_{8,9} = c.0,0025.a^2.b^2 & S_{8,10} = S_{8,11} = S_{8,12} = 0 \\
S_{8,13} = c.0,0046.a.b^2 & S_{8,14} = -c.0,00119.a.b^3 & S_{8,15} = -c.0,00111.a^2.b^2 \\
S_{8,16} = c.0,0109.a.b^2 & S_{8,17} = -c.0,00238.a.b^3 & S_{8,18} = c.0,00167.a^2.b^2 \\
S_{8,19} = S_{8,20} = \dots S_{8,27} = 0 & & 
\end{array}$$

$$S_{9,9} = c.0,00317.a^3.b \quad S_{9,10} = S_{9,11} = S_{9,12} = 0 \quad S_{9,13} = c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{9,14} = -c.0,00111.a^2.b^2 \quad S_{9,15} = -c.0,00119.a^3.b \quad S_{9,16} = c.0,0079.a^2.b$$

$$S_{9,17} = -c.0,00167.a^2.b^2 \quad S_{9,18} = c.0,00159.a^3.b$$

$$S_{9,19} = S_{9,20} = \dots S_{9,27} = 0$$

$$S_{10,10} = c.0,274.a.b \quad S_{10,11} = 0 \quad S_{10,12} = -c.0,0366.a^2.b$$

$$S_{10,13} = c.0,0974.a.b \quad S_{10,14} = 0 \quad S_{10,15} = c.0,0218.a^2.b$$

$$S_{10,16} = S_{10,17} = S_{10,18} = 0 \quad S_{10,19} = c.0,0497.a.b \quad S_{10,20} = -c.0,0109.a.b^2$$

$$S_{10,21} = -c.0,079.a^2.b \quad S_{10,22} = c.0,0156.a.b \quad S_{10,23} = -c.0,0046.a.b^2$$

$$S_{10,24} = c.0,0046.a^2.b \quad S_{10,25} = S_{10,26} = S_{10,27} = 0$$

$$S_{11,11} = c.0,00634.a.b^3 \quad S_{11,12} = S_{11,13} = 0 \quad S_{11,14} = c.0,00318.a.b^3$$

$$S_{11,15} = S_{11,16} = \dots S_{11,18} = 0 \quad S_{11,19} = c.0,0109.a.b^2 \quad S_{11,20} = -c.0,00238.a.b^3$$

$$S_{11,21} = -c.0,00167.a^2.b^2 \quad S_{11,22} = c.0,0046.a.b^2 \quad S_{11,23} = -c.0,0119.a.b^3$$

$$S_{11,24} = c.0,00111.a^2.b^2 \quad S_{11,25} = S_{11,26} = S_{11,27} = 0$$

$$S_{12,12} = c.0,00634.a^3.b \quad S_{12,23} = c.0,00111.a^2.b^2 \quad S_{12,14} = 0$$

$$S_{12,15} = -c.0,00476.a^3.b \quad S_{12,16} = S_{12,17} = S_{12,18} = 0 \quad S_{12,19} = -c.0,0079.a^2.b$$

$$S_{12,20} = c.0,00167.a^2.b^2 \quad S_{12,21} = c.0,00159.a^3.b \quad S_{12,22} = -c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{12,23} = c.0,00111.a^2.b^2 \quad S_{12,24} = -c.0,00119.a^3.b \quad S_{12,25} = S_{12,26} = S_{12,27} = 0$$

$$S_{13,13} = c.0,548.a.b \quad S_{13,14} = S_{13,15} = 0 \quad S_{13,16} = c.0,0974.a.b$$

$$S_{13,17} = 0$$

$$S_{13,18} = c.0,0218.a^2.b \quad S_{13,19} = c.0,0156.a.b \quad S_{13,20} = -c.0,0046.a.b^2$$



$$S_{13,23} = -c.0,0218.ab^2$$

$$S_{13,21} = -c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{13,22} = c.0,0974.a.b$$

$$S_{13,24} = 0$$

$$S_{13,25} = c.0,0156.a.b$$

$$S_{13,26} = -c.0,0046.a.b^2$$

$$S_{13,27} = c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{14,14} = c.0,0127.a.b^3$$

$$S_{14,15} = S_{14,16} = 0$$

$$S_{14,17} = c.0,00318.a.b^3$$

$$S_{14,18} = 0$$

$$S_{14,19} = c.0,0046.a.b^2$$

$$S_{14,20} = -c.0,00119.a.b^3$$

$$S_{14,21} = -c.0,00111.a^2.b^2$$

$$S_{14,22} = c.0,0218.a.b^2$$

$$S_{14,23} = -c.0,00476.a.b^3$$

$$S_{14,24} = 0$$

$$S_{14,25} = c.0,0046.a.b^2$$

$$S_{14,26} = -c.0,0119.a.b^3$$

$$S_{14,27} = c.0,00111.a^2.b^2$$

$$S_{15,15} = c.0,0127.a^3.b$$

$$S_{15,16} = -c.0,0218.a^2.b$$

$$S_{15,17} = 0$$

$$S_{15,18} = -c.0,00476.a^3.b$$

$$S_{15,19} = c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{15,20} = -c.0,00111.a^2.b^2$$

$$S_{15,21} = -c.0,00119.a^3.b$$

$$S_{15,22} = 0$$

$$S_{15,23} = 0$$

$$S_{15,24} = c.0,00318.a^3.b$$

$$S_{15,25} = -c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{15,26} = c.0,00111.a^2.b^2$$

$$S_{15,27} = -c.0,00119.a^3.b$$

$$S_{16,16} = c.0,274.a.b$$

$$S_{16,17} = 0$$

$$S_{16,18} = c.0,0366.a^2.b$$

$$S_{16,19} = S_{16,20} = S_{16,21} = 0$$

$$S_{16,22} = c.0,0156.a.b$$

$$S_{16,23} = -c.0,0046.a.b^2$$

$$S_{16,24} = -c.0,0046.a^2.b$$

$$S_{16,25} = c.0,0487.a.b$$

$$S_{16,26} = -c.0,0109.a.b^2$$

$$S_{16,27} = c.0,0079.a^2.b$$

$$S_{17,17} = c.0,00634.a.b^3$$

$$S_{17,22} = c.0,0046.a.b^2$$

$$S_{17,18} = S_{17,19} = S_{17,20} = S_{17,21} = 0$$

$$S_{17,23} = -c.0,00119.a.b^3$$

$$S_{17,24} = -c.0,00111.a^2.b^2$$

$$S_{17,25} = c.0,0109.a.b^2$$

$$\begin{aligned}
S_{17,26} &= -c.0,00238.a.b^3 & S_{17,27} &= c.0,00167.a^2.b^2 \\
S_{18,18} &= c.0,00317.a^3.b & S_{18,19} &= S_{1820} = S_{1821} = 0 & S_{18,22} &= c.0,0046.a^2.b \\
S_{18,24} &= -c.0,00119.a^3.b & S_{18,23} &= -c.0,00111.a^2.b^2 & S_{18,25} &= c.0,0079.a^2.b \\
S_{18,26} &= -c.0,00167.a^2.b^2 & S_{18,27} &= c.0,00159.a^3.b \\
S_{19,19} &= c.0,137.a.b & S_{19,20} &= -c.0,0183.a.b^2 & S_{19,21} &= -c.0,0183.a^2.b \\
S_{19,22} &= c.0,0487.a.b & S_{19,23} &= -c.0,0079.a.b^2 & S_{19,24} &= c.0,0109.a^2.b \\
S_{19,25} &= S_{19,26} = S_{19,27} = 0 \\
S_{20,20} &= c.0,00317.a.b^3 & S_{20,21} &= c.0,025.a^2.b^2 & S_{20,22} &= -c.0,0079.a.b^2 \\
S_{20,24} &= -c.0,00167.a^2.b^2 & S_{20,23} &= c.0,00159.a.b^3 & S_{20,25} &= S_{2026} = S_{2027} = 0 \\
S_{21,21} &= c.0,00317.a^3.b & S_{21,22} &= -c.0,0109.a^2.b & S_{21,23} &= c.0,00167.a^2.b^2 \\
S_{21,24} &= -c.0,00238.a^3.b & S_{21,25} &= S_{2126} = S_{2127} = 0 \\
S_{22,22} &= c.0,274.a.b & S_{22,23} &= -c.0,0366.a.b^2 & S_{22,24} &= 0 \\
S_{22,25} &= c.0,0487.a.b & S_{22,26} &= -c.0,0079.a.b^2 & S_{22,27} &= c.0,0109.a^2.b \\
S_{23,23} &= c.0,00634.a.b^3 & S_{2324} &= 0 & S_{23,25} &= -c.0,0079.a.b^2 \\
S_{23,26} &= c.0,00159.a.b^3 & S_{23,27} &= -c.0,00167.a^2.b^2 \\
S_{24,24} &= c.0,00634.a^3.b & S_{24,25} &= -c.0,0109.a^2.b & S_{24,26} &= c.0,00167.a^2.b^2 \\
S_{24,27} &= -c.0,00238.a^3.b \\
S_{25,25} &= c.0,137.a.b & S_{25,26} &= -c.0,0183.a.b^2 & S_{25,27} &= c.0,0183.a^2.b \\
S_{26,26} &= c.0,00317.a.b^3 & S_{26,27} &= -c.0,0025.a^2.b^2 & S_{27,27} &= c.0,00317.a^3.b
\end{aligned}$$

**Ek 4 – Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Elastik Zemine Oturan Kirişin Sönümsüz Serbest Titreşim Hesabının Mathematica 3.0 Version Paket Programında Yazılması**

$$\text{In}[1] = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{4} & \frac{L^2}{16} & \frac{L^3}{64} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{3*L^2}{16} \end{bmatrix}; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [2]} = B = \text{Inverse [A]} // \text{MatrixForm} \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{Out}[2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{In}[3] = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{48}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{48}{L^2} & -\frac{4}{L} \\ \frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} & -\frac{128}{L^3} & \frac{16}{L^2} \end{bmatrix}; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [4]} = \phi = \{\{1, x, x^2, x^3\}\}; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [5]} = \underline{NS} = \phi . B : // \text{MatrixForm} ; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [6]} \underline{N}_1 = \underline{NS} [[ 1, 1 ]]; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [7]} \underline{N}_2 = \underline{NS} [[ 1, 2 ]]; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [8]} \underline{N}_3 = \underline{NS} [[ 1, 3 ]]; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [9]} \underline{N}_4 = \underline{NS} [[ 1, 4 ]]; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [10]} \underline{TN}_1 : D [\underline{N}_1, \{x, 2\}]; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

$$\text{In [11]} \underline{TN}_2 : D [\underline{N}_2, \{x, 2\}]; \quad \underline{\text{Shift+Enter}}$$

In [12]  $TN_3 : D [N_3, \{x, 2\}];$

Shift+Enter

In [13]  $TN_4 : D [N_4, \{x, 2\}];$

Shift+Enter

$$\text{In[14]} = \text{kk} = \begin{bmatrix} TN_1 \times TN_1 & TN_1 \times TN_2 & TN_1 \times TN_3 & TN_1 \times TN_4 \\ TN_2 \times TN_1 & TN_2 \times TN_2 & TN_2 \times TN_3 & TN_2 \times TN_4 \\ TN_3 \times TN_1 & TN_3 \times TN_2 & TN_3 \times TN_3 & TN_3 \times TN_4 \\ TN_4 \times TN_1 & TN_4 \times TN_2 & TN_4 \times TN_3 & TN_4 \times TN_4 \end{bmatrix}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [15]} = \text{ke} = \text{Es} \times \text{S} \times \int_0^{\frac{L}{4}} \text{kk} \cdot \text{dx}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [16]} = \text{Ce}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [17]} = \text{TCE}_1 = \text{Transpose} [\text{Ce}_1]; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [18]} = \text{Ce}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [19]} = \text{TCE}_2 = \text{Transpose} [\text{Ce}_2]; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [20]} \text{Ke}_1 = \text{TCE}_1 \cdot \text{ke} \text{Ce}_1; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [21]} \text{Ke}_2 = \text{TCE}_2 \cdot \text{ke} \text{Ce}_2; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [22]} = \text{K} = \text{Ke}_1 + \text{Ke}_2; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In[23]} = \text{mk} = \begin{bmatrix} N_1 \times N_1 & N_1 \times N_2 & N_1 \times N_3 & N_1 \times N_4 \\ N_2 \times N_1 & N_2 \times N_2 & N_2 \times N_3 & N_2 \times N_4 \\ N_3 \times N_1 & N_3 \times N_2 & N_3 \times N_3 & N_3 \times N_4 \\ N_4 \times N_1 & N_4 \times N_2 & N_4 \times N_3 & N_4 \times N_4 \end{bmatrix}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [24]} = \text{me} = \rho \times \int_0^{\frac{L}{4}} \text{mk} \cdot \text{dx} \quad // \text{MatrixForm} \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [25]} = \text{Me}_1 = \text{TCE}_1 * \text{me} * \text{Ce}_1; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [26]} = \text{Me}_2 = \text{TCE}_2 * \text{me} * \text{Ce}_2; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [27]} = \text{M} = \text{Me}_1 + \text{Me}_2; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [28]} = \text{Se} = \text{c} \cdot \int_0^{\frac{L}{4}} \text{mk} \cdot \text{dx} \quad // \text{MatrixForm}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [29]} = \text{Se}_1 = \text{TCE}_1 * \text{Se} * \text{Ce}_1; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [30]} = \text{Se}_2 = \text{TCE}_2 * \text{Se} * \text{Ce}_2; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [31]} = \text{S} = \text{Se}_1 + \text{Se}_2; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [32]} = \text{T} = \text{K} + \text{S} - \lambda * \text{M}; \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\text{In [33]} = \text{R} = \text{Det} [ \text{T} ] \quad \text{Shift+Enter}$$

$$\begin{aligned} \text{Out[33]} = \text{R} = & \frac{3608}{525} \text{c}^3 \text{Es}^3 \text{J}^3 + \frac{49152 \text{c}^2 \text{Es}^4 \text{J}^4}{\text{L}^4} + \frac{1091 \text{c}^4 \text{Es}^2 \text{J}^2 \text{L}^4}{11289600} + \frac{299 \text{c}^5 \text{EsJL}^8}{1300561920000} + \\ & \frac{\text{c}^6 \text{L}^{12}}{7990652436480000} - \frac{3608}{175} \text{c}^2 \text{Es}^3 \text{J}^3 \lambda \rho - \frac{98304 \text{cEs}^4 \text{J}^4 \lambda \rho}{\text{L}^4} - \frac{1091 \text{c}^3 \text{Es}^2 \text{J}^2 \text{L}^4 \lambda \rho}{2822400} \\ & \frac{299 \text{c}^4 \text{EsJL}^8 \lambda \rho}{260112384000} - \frac{\text{c}^5 \text{L}^{12} \lambda \rho}{1331775406080000} + \frac{3608}{175} \text{cEs}^3 \text{J}^3 \lambda^2 \rho^2 + \frac{49152 \text{Es}^4 \text{J}^4 \lambda^2 \rho^2}{\text{L}^4} + \\ & \frac{1091 \text{c}^2 \text{Es}^2 \text{J}^2 \text{L}^4 \lambda^2 \rho^2}{1881600} + \frac{299 \text{c}^3 \text{EsJL}^8 \lambda^2 \rho^2}{130056192000} + \frac{\text{c}^4 \text{L}^{12} \lambda^2 \rho^2}{532710162432000} - \frac{3608}{525} \text{Es}^3 \text{J}^3 \lambda^3 \rho^3 - \\ & \frac{1091 \text{cEs}^2 \text{J}^2 \text{L}^4 \lambda^3 \rho^3}{2822400} - \frac{299 \text{c}^2 \text{EsJL}^8 \lambda^3 \rho^3}{130056192000} - \frac{\text{c}^3 \text{L}^{12} \lambda^3 \rho^3}{399532621824000} + \frac{1091 \text{Es}^2 \text{J}^2 \text{L}^4 \lambda^4 \rho^4}{11289600} + \\ & \frac{299 \text{cEsJL}^8 \lambda^4 \rho^4}{260112384000} + \frac{\text{c}^2 \text{L}^{12} \lambda^4 \rho^4}{532710162432000} - \frac{299 \text{EsJL}^8 \lambda^5 \rho^5}{1300561920000} - \frac{\text{cL}^{12} \lambda^5 \rho^5}{1331775406080000} + \frac{\text{L}^{12} \lambda^6 \rho^6}{7990652436480000} \end{aligned}$$

$$\text{In[34]} = \text{b}=0,40 ;$$

$$\text{h}=0,60 ;$$

$$\text{Es}=2.85 * 10^7 ;$$

$$\text{J} = \frac{\text{b} \cdot \text{h}^3}{12} ;$$

$$\rho=25 ;$$

**KİL YUMUŞAK ZEMİN İÇİN**

$$c=7500 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{Solve}[R=0, \lambda]$$

$$\lambda_1=300$$

$$\lambda_2=300$$

$$\lambda_3=258237$$

$$\lambda_4=2,522677 \cdot 10^6$$

$$\lambda_5=1,57972 \cdot 10^7$$

$$\lambda_6=4,03196 \cdot 10^7$$

**KİL YARI SERT ZEMİN**

$$c=12500 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{Solve}[R=0, \lambda]$$

$$\lambda_1=500$$

$$\lambda_2=500$$

$$\lambda_3=258437$$

$$\lambda_4=2,52697 \cdot 10^6$$

$$\lambda_5=1,57974 \cdot 10^7$$

$$\lambda_6=4,031198 \cdot 10^7$$

.

.

.

.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	09 11 1967	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1981-1984	Kasımpaşa Lisesi
Lisans	1986-1993	Yıldız Üniversitesi İnşaat Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı

**Çalıştığı kurum(lar)**

1993-1994	ESMAN YAPI İZO.SAN.
1994-1996	HASKA İNŞAAT VE HASKA BETON
1997-Devam Ediyor	D.K.K. ılığında Alt Yapı Hz.Şb. de Kontrol Müh.

