

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VİSKOELASTİK ARA BAĞLI DÜZLEM ÇERÇEVELERİN
ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ**

İnşaat Müh. Özgür TUNCER

**FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL BAĞINTILAR.....	2
2.1 Sonlu Eleman Olarak Eğilme Elemanı.....	2
2.1.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağıntıları.....	2
2.1.2 Eleman Uç Yer Değişirmeleri ve Şekil Değişirme Fonksiyonu.....	4
2.2 Eksenel Yük Elemanı.....	8
2.2.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağıntıları.....	8
2.2.2 Eleman Uç Yer Değişirmeleri ve Şekil Değişirme Fonksiyonu.....	9
2.3 Sonlu Eleman Olarak Dönme Elemanı.....	11
2.3.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağıntıları.....	11
2.3.2 Eleman Uç Yer Değişirmeleri ve Uç Kuvvetleri.....	12
2.4 Viskoelastik Malzeme Modeli.....	14
3. ENERJİ BAĞINTILARI.....	17
3.1 Potansiyel Enerji.....	17
3.1.1 Eğilme Elemanı İçin Potansiyel Enerji.....	17
3.1.2 Eksenel Yük Elemanı İçin Potansiyel Enerji.....	18
3.1.3 Dönme Elemanı İçin Potansiyel Enerji.....	19
3.2 Kinetik Enerji.....	19
3.2.1 Eğilme Elemanı İçin Kinetik Enerji.....	19
3.2.2 Eksenel Yük Elemanı İçin Kinetik Enerji.....	19
3.3 Sönüm Fonksiyonu.....	20
3.3.1 Eğilme Elemanı İçin Sönüm Fonksiyonu.....	20
3.3.2 Eksenel Yük Elemanı İçin Sönüm Fonksiyonu.....	21
3.3.3 Dönme Elemanı İçin Sönüm Fonksiyonu.....	21
4. LAGRANGE DENKLEMLERİ.....	22
5. DÜZLEM ÇERÇEVELER.....	24
5.1 Düzlem Çerçeve Elemanı Uç Kuvvetleri Uç Yer Değişirmeleri.....	24
5.2 Düzlem Çerçeve Elemanı İçin Lagrange Denklemleri.....	25
5.3 Düzlem Çerçeve Elemanı Matrislerinin Genel Koordinatlarda İfadesi.....	38

5.4	Sistem Matrislerinin Oluşturulması.....	43
5.4.1	Sistem Rijitlik Matrisinin Oluşturulması.....	43
5.4.2	Sistem KütLe Matrisinin Oluşturulması.....	48
5.4.3	Sistem Sönüm Matrisinin Oluşturulması.....	48
5.5	Düzlem Çerçeve Olarak Dönme Elemanı.....	48
5.6	Elastik Ara Bağlı Sistem Rijitlik Matrisinin Kurulması.....	51
6.	YAPI DİNAMIĞI İÇİN TEMEL BİLGİLER.....	56
6.1	Sistem Tepki Kuvvetleri ve Sistem Modeli.....	56
6.1.1	Elastik Yay Kuvveti.....	56
6.1.2	Sönüm Kuvveti.....	57
6.1.3	KütLe Kuvveti.....	60
6.1.4	Sistem Modeli.....	60
6.2	Viskoz Sönümlü Serbest Titreşim.....	61
6.3	Yük İletimi ve Titreşim Sönümü.....	64
6.4	Viskoz Sönümlü Sistemin Kararlı Hal Titreşimi ve Sönümlenen Enerji.....	66
6.5	Eşdeğer Viskoz Sönüm.....	72
6.6	Sönümü Viskoz Olmayan Sistemler.....	76
6.6.1	Hız Bağımsız Sönüm.....	76
6.6.2	Harmonik Kuvvet Altında Kararlı Hal Cevabı.....	77
6.6.3	Eşdeğer Viskoz Sönüm Kullanımı ile Çözüm.....	80
7.	SAYISAL HESAPLAMALAR.....	82
7.1	Hareket Denklemlerine Toplu Bir Bakış.....	82
7.2	Periyodik Yük Altında Zorlanmış Titreşim.....	85
7.3	Sayısal Uygulamalar.....	86
7.3.1	Statik Yatay Yük Altında Düzlem Çerçeve Analizi.....	86
7.3.2	Statik Yatay Yük Altında Elastik Ara Bağlı Düzlem Çerçeve Analizi.....	89
7.3.3	Periyodik Yük Altında Düzlem Çerçeve Analizi.....	92
7.3.4	Periyodik Yük Altında Viskoelastik Ara Bağlı Düzlem Çerçeve Analizi.....	95
7.3.5	Periyodik Yük Altında Düzlem Çerçeve Analizi ve Sonuçların SAP2000 Programından Elde Edilen Sonuçlar ile Karşılaştırılması.....	106
7.3.5.1	Tüm Elemanların Sürekli Bağlı Olması Durumu.....	108
7.3.5.2	Birinci Kat Kirişlerinin Viskoelastik Bağlı Olması Durumu.....	112
7.3.5.3	Birinci ve İkinci Kat Kirişlerinin Viskoelastik Bağlı Olması Durumu.....	117
7.3.5.4	Birinci ve İkinci Kat Kirişlerinin Viskoz Bağlı Olması Durumu.....	122
7.3.6	Yayıllı Yük Taşıyan Sürekli Bağlı Düzlem Çerçeve ile Viskoz Bağlı Çerçevenin Periyodik Yük Altında Cevaplarının Karşılaştırılması	128
8.	SONUÇ.....	133
	KAYNAKLAR.....	135
	ÖZGEÇMİŞ.....	136

SİMGE LİSTESİ

σ	Normal gerilme
G	Kayma modülü
E	Elastisite modülü
E_D	Viskoz sönümde sönümlenen enerji
η	Malzeme iç sönüm katsayısı
η_c	Viskoelastik ara bağ sönüm katsayısı
U_i	Kirişin potansiyel enerjisi
I	Atalet momenti
A	Eleman kesit alanı
ρ	Eleman birim hacim kütlesi
T	Kinetik enerji
U	Kinetik enerji
R	Sönüm fonksiyonu
R_d	Dinamik büyütme çarpanı
ω	Zorlama frekansı
ω_n	Doğal frekans
c_{cr}	Kritik sönüm
ξ	Sönüm oranı
ξ_{eq}	Eşdeğer viskoz oranı
C_e	Elastik ara bağ katsayısı
D_e	Viskoelastik ara bağ sönüm sabiti
$[K]$	Rijitlik matrisi
$[C]$	Sönüm matrisi
$[M]$	Kütle matrisi
$\{U\}$	Yer değiştirme vektörü
$\{P\}$	Yük vektörü

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Eğilme Elemanı.....	2
Şekil 2.2	Özdeş uç yer değiştirmeye sahip, fakat tamamen farklı yer değiştirme karakteristikleri gösteren kiriş elemanı.....	4
Şekil 2.3	Eğilme elemanı pozitif uç yer değiştirmeleri.....	5
Şekil 2.4	Eğilme elemanı pozitif uç kuvvetleri.....	5
Şekil 2.5	Eksenel Yük Elemanı.....	8
Şekil 2.6	Eksenel yük elemanı için pozitif uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri.....	9
Şekil 2.7	Dönme Elemanı.....	12
Şekil 2.8	Dönme elemanın sonlu eleman modeli.....	12
Şekil 2.9	Dönme elemanın pozitif uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri.....	13
Şekil 2.10	Dönme elemanın şekil değiştirmiş hali.....	13
Şekil 2.11	Hooke cismini temsil eden yay modeli.....	15
Şekil 2.12	Newton sıvısını karakterize eden yağ kutusu.....	15
Şekil 2.13	Kelvin-Voigt Cismi.....	15
Şekil 5.1	Düzlem çerçeve elemanı pozitif uç serbestlikleri.....	24
Şekil 5.2	Düzlem çerçeve elemanı pozitif uç kuvvetleri.....	24
Şekil 5.3	Üç serbestlik dereceli düzlem çerçeve.....	39
Şekil 5.4	Eleman uç genel eksen takımındaki düğüm noktası yer değiştirmesi	40
Şekil 5.5	Eleman koordinat eksen takımında düğüm noktası yer değiştirmeleri.....	40
Şekil 5.6	Düğüm noktası serbestliklerinin numaralandırılması.....	44
Şekil 5.7	6 serbestlik dereceli düzlem çerçeve.....	45
Şekil 5.8	İki çerçeve elemanı birleştiren dönmeye karşı elastik bağ.....	48
Şekil 5.9	Elastik ara bağ durumunda serbestlikler.....	49
Şekil 5.10	Elastik ara bağ durumunda serbestlikler.....	49
Şekil 5.11	Düzlem çerçevede elastik ara bağ.....	50
Şekil 5.12	2 Numaralı düğüm noktası yer değiştirmesi.....	50
Şekil 5.13	Elastik ara bağlı bir sistem.....	51
Şekil 5.14	Sistem serbestlikleri.....	52
Şekil 6.1	Tek serbestlik dereceli sistem yay modeli.....	56
Şekil 6.2	Elastik yay kuvveti ile yer değiştirme arasındaki ilişki.....	56
Şekil 6.3	Çerçeve sistemine etkiyen sönüm kuvveti ve viskoz sönümleyici.....	57
Şekil 6.4	Çerçeve sistemine etkiyen yay kuvveti.....	59
Şekil 6.5	\ddot{u} ivmesi ile hareket eden M kütleli cisim.....	60
Şekil 6.6	Dış yük altında idealize edilmiş tek serbestlik dereceli sistem.....	61
Şekil 6.7	Sistem üzerindeki tepki kuvvetleri.....	61
Şekil 6.8	Frekans oranı- yük iletimi ilişkisi.....	65
Şekil 6.9	Tek serbestlik dereceli sistem.....	66
Şekil 6.10	Giriş ve sönüm enerjisi	69
Şekil 6.11	Bir çevrimde sönümlenen enerjisi.....	70
Şekil 6.12	Elastik yay kuvveti ve yer değiştirme ilişkisi ve depolanan enerji	71
Şekil 6.13	Direnim kuvvetleri ile yer değiştirme arasındaki ilişki.....	71
Şekil 6.14	Yapıdaki gerçek sönüm enerjisi.....	74
Şekil 6.15	Viskoz sönümde ve hız bağımsız sönümde sönümlenen enerji.....	77
Şekil 6.16	Hız bağımsız sönümlü tek serbestlik dereceli sistem.....	78
Şekil 6.17	Hız bağımsız sönüm ile eşdeğer viskoz sönümün karşılaştırılması.....	80
Şekil 7.1	Düzlem çerçeve modeli	87
Şekil 7.2	Sistem elemanlarının ve serbestliklerinin numaralandırılması	87

Şekil 7.3	Elastik Bağlı Düzlem Çerçeve.....	89
Şekil 7.4	Elastik ara bağlı çerçevenin serbestlikleri.....	90
Şekil 7.5	Periyodik yük altında düzlem çerçeve.....	92
Şekil 7.6	Çeşitli η değerleri için dinamik büyütme çarpanının zorlama frekansı ile değişimi.....	94
Şekil 7.7	Viskoelastik ara bağlı çerçevenin zorlanmış titreşimi.....	95
Şekil 7.8	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi.....	98
Şekil 7.9	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0022$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi.....	100
Şekil 7.10	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0044$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi.....	101
Şekil 7.11	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0066$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi.....	103
Şekil 7.12	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0088$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi.....	104
Şekil 7.13	İki açıklıklı ve iki katlı düzlem çerçeve.....	106
Şekil 7.14	Sistem elemanlarının numaralandırılması ve yer değiştirme serbestlikleri.....	107
Şekil 7.15	SAP2000 sistem modeli ve düğüm noktası numaraları.....	110
Şekil 7.16	SAP2000 modeli statik yük altında yer değiştirme değeri	110
Şekil 7.17	SAP2000 modeli frekans alanında çözüm sonucu yer değiştirme değeri.....	111
Şekil 7.18	SAP2000 modeli zaman tanım alanında çözüm sonucu yer değiştirme değeri.....	111
Şekil 7.19	Viskoelastik ara bağlı iki açıklıklı iki katlı düzlem çerçeve	112
Şekil 7.20	Sistem elemanlarının numaralandırılması ve yer değiştirme serbestlikleri.....	113
Şekil 7.21	Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile statik yük altında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....	115
Şekil 7.22	Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile frekans alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri	116
Şekil 7.23	Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....	116
Şekil 7.24	Viskoelastik ara bağlı iki açıklıklı iki katlı düzlem çerçeve.....	117
Şekil 7.25	Viskoelastik ara bağlı düzlem çerçeve serbestliklerinin numaralandırılması.....	118
Şekil 7.26	Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı statik yük altında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....	120
Şekil 7.27	Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile frekans alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....	121
Şekil 7.28	Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri	121
Şekil 7.29	Viskoz bağlı düzlem çerçeve	122

Şekil 7.30	Viskoz ara bağılı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı statik yük altında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....125
Şekil 7.31	Viskoz ara bağılı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile frekans alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....125
Şekil 7.32	Viskoz ara bağılı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....126
Şekil 7.32	Viskoz ara bağılı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri.....126
Şekil 7.33	Yayılı yük taşıyan sürekli bağılı düzlem çerçeve.....128
Şekil 7.34	Sistem elemanlarının numaralandırılması ve yer değiştirme serbestlikleri....129
Şekil 7.35	Yayılı yük taşıyan viskoz bağılı düzlem çerçeve.....130
Şekil 7.36	Çeşitli sönüm değerleri altında hesaplanan yer değiştirme değerleri.....131

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1	Düğüm noktası serbestliklerinin numaralandırılması.....	45
Çizelge 5.2	Eleman uç yer değiştirmelerinin numaralandırılması.....	47
Çizelge 5.3	Genel yer değiştirmeler ile karşı gelen eleman uç yer değiştirmeleri.....	47
Çizelge 5.4	Genel yer değiştirmeler ile 1 numaralı elemanın uç yer değiştirmelerinin Karşılaştırılması.....	52
Çizelge 5.5	Genel yer değiştirmeler ile dönme elemanın uç yer değiştirmelerinin karşılaştırılması.....	53
Çizelge 5.6	Genel yer değiştirmeler ile 2 numaralı elemanın uç yer değiştirmelerinin Karşılaştırılması.....	53
Çizelge 5.7	Genel yer değiştirmeler ile elemanların uç yer değiştirmelerinin Karşılaştırılması.....	54
Çizelge 7.1	Elastik bağlantı değerleri ve yer değiştirme ilişkisi.....	91
Çizelge 7.2	Sistemin doğal frekans ve periyotları.....	93
Çizelge 7.3	Malzeme iç sönüm değerleri ile dinamik büyütme çarpanı arasındaki ilişki.....	94
Çizelge 7.4	Viskoelastik ara bağlı çerçevenin doğal frekans ve periyotları.....	96
Çizelge 7.5	Çeşitli modal sönüm değerlerine karşılık iç sönüm değerleri.....	97
Çizelge 7.6	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre Rd değerleri.....	99
Çizelge 7.7	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0022$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre Rd değerleri.....	100
Çizelge 7.8	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0044$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre Rd değerleri.....	102
Çizelge 7.9	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0066$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre Rd değerleri.....	103
Çizelge 7.10	Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0088$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre Rd değerleri.....	105
Çizelge 7.11	Düzlem çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri	108
Çizelge 7.12	Viskoelastik ara bağlı çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri.....	113
Çizelge 7.13	Viskoelastik ara bağlı çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri.....	118
Çizelge 7.14	Viskoz ara bağlı düzlem çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri.....	123
Çizelge 7.15	Sonuçların SAP2000 programından elde edilenlerle karşılaştırılması.....	127
Çizelge 7.16	Viskoz sönüm değerleri için hesaplanan yer değiştirme değerleri	131
Çizelge 7.17	Sürekli bağlı çerçeve ile viskoz bağlı çerçeve sonuçlarının karşılaştırılması	132

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezi kapsamında viskoelastik ara bağlantılı çerçevelerin periyodik yük altında davranışı incelenmiştir. Temel yapı dinamiği bilgileri ve hesap yöntemi verilmiş olup sistem analizleri için Matlab yazılım programı kullanılarak bilgisayar programı yazılmıştır.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, her konuda benden yardımını esirgemeyen değerli hocam, tez danışmanım Sayın Prof.Dr.Turgut Kocatürk'e, hayatım boyunca bana daima destek olmuş olan aileme, çalışmamın hazırlanmasında bana yardımcı olan Mimar Didem Tuncer'e ve bilgisayar programının yazılmasında yardımını esirgemeyen İnş.Yük.Müh. Nihat İlhan'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, her bir ucunda üç serbestlik olmak üzere toplam altı serbestliğe sahip çerçeve elemanlarının birbirlerine sürekli ve/veya viskoelastik özelliğe sahip olan iki serbestlik dereceli sonsuz küçük ara bir elaman olan dönme elemanı ile bağlanmasıyla oluşturulan düzlem çerçevenin periyodik dış yük altında zorlanmış titreşimleri, Euler-Bernoulli giriş teorisi çerçevesinde enerji tabanlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Viskoelastik ara bağlantılı düzlem çerçevenin çeşitli malzeme sönüm katsayıları için viskoelastik ara bağlantının optimum sönüm katsayısı araştırılmış ve sürekli bağlı çerçeve ile viskoelastik ara bağlı çerçevenin, periyodik yük altında yer değiştirme değerleri karşılaştırılarak sonuçlar grafikler ve tablolar halinde sunulmuştur.

Elde edilen sonuçlar SAP2000 programında oluşturulan aynı modellerin çözümünden elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçların SAP2000 programından elde edilen sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür.

Sayısal sonuçlar göstermektedir ki malzeme sönümünün olmaması veya çok küçük olması halinde, viskoelastik ara bağlantının sönüm katsayısının küçük değişimleri için sonuçlar arasındaki fark büyük olmaktadır. Bununla birlikte malzeme sönüm katsayısının büyük değerler alması halinde viskoelastik ara bağlantının sönüm cevaplar üzerindeki etkisi azalmakta ve sönüm katsayısının büyük farkları için sonuçlar birbirlerine yakın çıkmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Viskoelastik ara bağ, Malzeme sönüm katsayısı, Viskoz sönüm, Hız bağımsız sönüm, sonlu elemanlar metodu, çerçevelerin zorlanmış titreşimi, Dinamik büyütme çarpanı, Modal sönüm, Modal rijitlik, Modal kütle, dönme elemanı, Periyodik yük

ABSTRACT

In this study, forced vibrations of portal frames are investigated. Members of the frames have three degrees of freedom in each end and in total they have six degrees of freedom. While constituting the frames, infinitely small link elements are used in some connections of the members. The governing equations are derived within the scope of the Euler- Bernoulli beam theory by using energy based finite elements method.

Optimum damping coefficients of viscoelastic link elements are investigated for different damping coefficients of members. The results of frames constituted by connecting the members continuously and by connecting the members with link elements in some desired joints (The frames with intermediate viscoelastic hinges) are compared and presented in graphics and tables.

The obtained results are compared with the results of same models constituted on SAP 2000 packet program. It is seen that the results obtained from this study are harmonious with the results obtained by using SAP 2000.

Also, numerical results show that if there is no material damping or there is very small material damping, the difference of the responses for the small changes of damping coefficient of intermediate viscoelastic hinges becomes great. However, if the material damping coefficient is high, then the effect of the damping of intermediate viscoelastic hinges on the responses decreases and for the big differences of the value of damping coefficient the results are very close to each other.

Keywords: Viscoelastic intermediate hinge, Damping coefficient of material, Viscous damping, Rate independent damping (Hysteretic damping, Structural damping), Finite element method, Forced vibration of portal frames, Dynamic response factor, Modal damping, Modal stiffness, Modal mass, Link element having rotational two rotational degrees of freedom, Periodic load

1. GİRİŞ

Düzlem çerçevelerin serbest ve zorlanmış titreşimleri birçok araştırmacı tarafından incelenmiş olup, literatürde bu konuyla ilgili çok çeşitli çalışmalar mevcuttur. Clough ve Penzien (1995) çerçevelerin serbest ve zorlanmış titreşim problemlerinin analitik çözümlerini vermiştir. Chopra (1993) viskoz sönümlü ve hysteretic sönümlü çerçevelerin zorlanmış titreşim problemlerinin çözümlerini vermiştir. Aköz (2005) elastik ara bağlı düzlem çerçevelerin serbest titreşim problemlerinin çözümlerini vermiştir. Viskoelastik mesnetli kirişlerde optimum sönümü sağlayan mesnet sönümleri üzerindeki çalışmalardan bazıları aşağıda sıralanmıştır: Kocatürk, Demir, İlhan ve Şimşek (2005) viskoelastik nokta mesnetli kirişlerin periyodik yük altındaki zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Kocatürk (2005) viskoelastik mesnetli konsol kirişin sinüzoidal yer hareketi altında zorlanmış titreşimlerini incelenmiştir.

Bu çalışmada çubuk elemanların rijitlik matrislerinin çıkarılması, düzlem çerçevelerin rijitlik, kütle ve sönüm matrislerinin oluşturulması, ara bağ elemanının sisteme dahil edilmesi, Lagrange denklemleri kullanılarak hareket denklemlerinin elde edilmesi ve hesap yöntemleri üzerinde durulmuş, düzlem çerçeve sistemlerinin serbest ve zorlanmış titreşim analizini yapan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Kütlenin eleman üzerinde sürekli olduğu kabul edilmiştir. Elemanların malzemesi için Kelvin-Voigt modeli kullanılmış olup, sönüm sabiti rijitlikle orantılı olarak ele alınmıştır.

Bu çalışmada enerji tabanlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak Euler–Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde viskoelastik ara bağlı düzlem çerçevelerin periyodik yük altında zorlanmış titreşimleri incelenecektir. Çalışma kapsamında viskoelastik ara bağın sistem davranışına etkisi araştırılmıştır. Bu amaçla çeşitli malzeme sönüm katsayıları için belirli elastik ara bağ değerleri için en uygun ara bağ sönüm değerleri araştırılmıştır. Ayrıca, sürekli bağlı düzlem çerçeve ile viskoelastik ara bağlı düzlem çerçevenin periyodik yük altında kararlı hal hareketi karşılaştırılmıştır. Elde edilen bazı sonuçlar SAP2000 paket programı kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL BAĞINTILAR

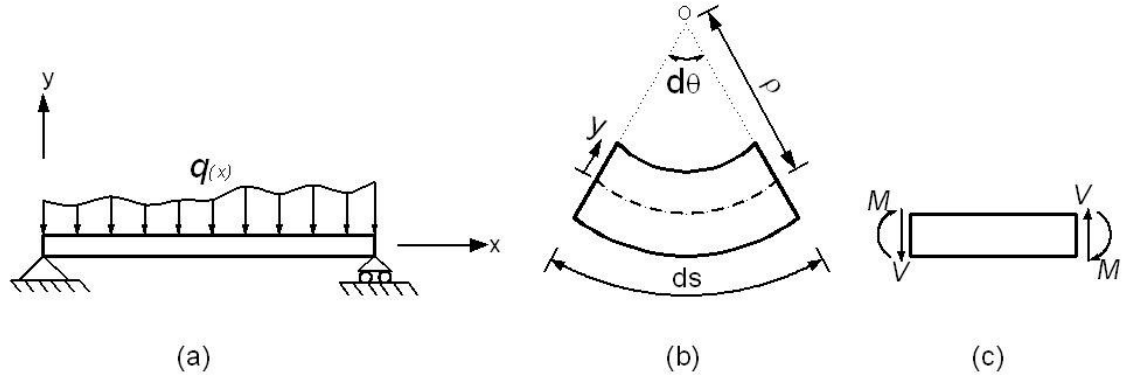
Problemin çözümünde enerji tabanlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Dolayısıyla bu yöntemin temelini oluşturan enerji ifadelerinin hesaplanmasında ele alınan elemanın bir davranış modeli olmalıdır. Bu çalışma için Euler – Bernouilli kiriş teorisi kullanılmıştır. Bu varsayım “eğilme öncesinde çubuk eksenine dik olan düzlem kesitler, eğilme sonrasında da çubuk eksenine (elastik eğriye) dik ve düzlem kalırlar” şeklinde olup kiriş yüksekliğinin kiriş boyuna oranı küçük olduğu durumlar için iyi sonuç vermektedir.

2.1 Sonlu Eleman Olarak Eğilme Elemanı

2.1.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağintıları

Çalışmanın temelini oluşturan belli başlı kabuller ve kısıtlılıklar aşağıdaki ilavelerle beraber **Euler - Bernouilli** temel kiriş teorisinin aynısıdır.

1. Eleman boyu L dir ve her bir uçta bir tane olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir.
2. Eleman düğüm noktalarına sadece düğüm noktalarında bağlıdır.
3. Yüklemeler sadece düğüm noktalarında yapılmıştır.



Şekil 2.1 a) Keyfi yayılı yük altında basit kiriş b) Eğilmiş kiriş elemanı c) Kesme kuvveti ve eğilme momenti için pozitif işaret kabulü

Şekil 2.1 deki gibi eğilme öncesinde dx uzunluğunda olan diferansiyel bir kiriş elemanı göz önüne alınsın. Şekil 2.1 b den görüldüğü üzere üst yüzey uzunluğunun azaldığı, alt yüzey uzunluğunun ise arttığı görülür. Bu yüzden eğilme esnasında şekil değişimine uğramayan bir tabaka vardır. Bu tabakanın eğrilik merkezi olan o noktasından ρ mesafede yerleştirilmiş

olduğu kabul edilerek ve bu yüzeyi $y=0$ da alarak herhangi bir y mesafesi için eğilmeden sonraki uzunluk;

$$ds = (\rho - y) d\theta \quad (2.1)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda eğilme şekil değiştirmesi;

$$\epsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (2.2)$$

elde edilir. Euler – Bernolli kirişi için gerilme-şekil değiştirme bağıntısı izleyen şekilde tanımlanır:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (2.3)$$

Matematikten bilindiği üzere düzlem bir eğrinin eğrilik yarıçapı izleyen şekilde ifade edilir:

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (2.4)$$

Burada $v = v(x)$ tarafsız eksenin yer değiştirmiş eğrisini gösterir. Yer değiştirmelerin küçük olduğu kabulü ile eğrilik yarıçapı;

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (2.5)$$

alınarak (2.2) eşitliğinde yerine konursa, eğilme nedeniyle boyuna eksen doğrultusundaki normal şekil değiştirme

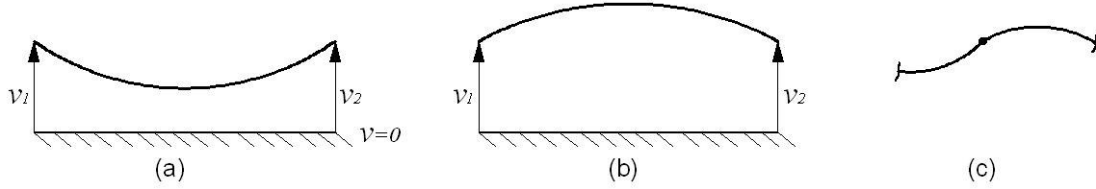
$$\epsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.6)$$

olur. Bu durumda karşı gelen normal gerilme ise izleyen şekilde ifade edilir:

$$\sigma_x = E \epsilon_x = -E y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.7)$$

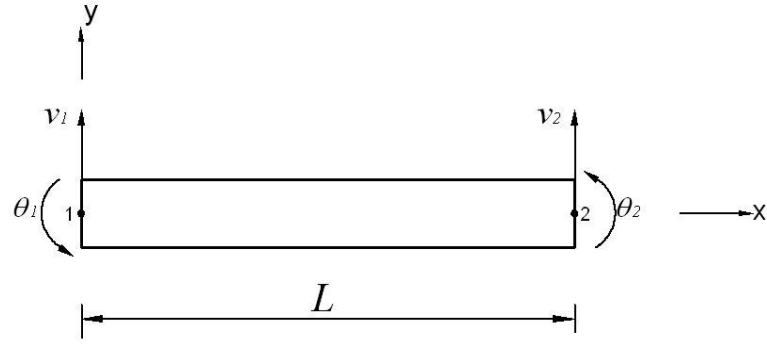
2.1.2 Eleman Uç Yer Değiştirmeleri ve Şekil Değiştirme Fonksiyonu

Sonlu eleman fomülasyonunun temel varsayımı, sürekli değişen alan değişkeninin sonlu elemanın düğüm noktalarında hesap edilen sonlu sayıdaki ayrık değerler cinsinden ifade edilmesidir. İlgilenilen alan değişkeninin Şekil 2.2 de ifade edildiği gibi kiriş boyunca yer değiştirmesi sadece uç noktalarının yer değiştirmeleri ile yeter derecede tanımlanamaz. Yani çubuk uç yer değiştirmelerini bilmemiz, çubuk üzerindeki herhangi bir noktadaki yer değiştirme değerini bilmemiz için yeterli değildir. Bunun için çubuk sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme denkleminde ihtiyaç vardır. Şekil 2.2 de gösterildiği gibi (a) nın ve (b) nin yer değiştirmiş Şekli farklıyken uç yer değiştirmeleri özdeş olabilir. Bu yüzden eğilme elemanı formülasyonu uç noktalarının çökme yer değiştirmeleri yanında dönme yer değiştirmelerini de dikkate almalıdır. Eğilme elemanı uç dönmelerinin dikkate alınması, elemanlar arasındaki düğüm noktası birleşimlerinde dönme uyumluluğunu sağlar. Böylece Şekil 2.2 (c) de gösterilen fiziksel olarak kabul edilemez süreksizlik durumu da önlenir. Sonlu elemanın iç bölgesinde, aynı zamanda sınırlarında da, sürekli alan değişkeni interpolasyon fonksiyonu ile tanımlanır.

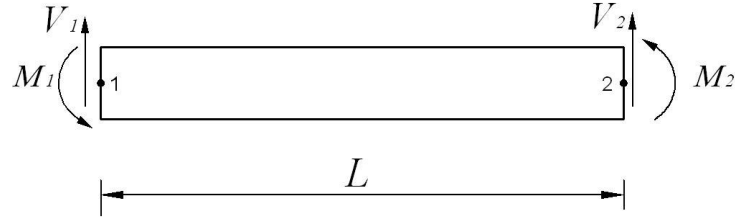


Şekil 2.2 (a) ve (b) de özdeş uç yer değiştirmeye sahip, fakat tamamen farklı yer değiştirme karakteristikleri gösteren kiriş elemanı verilmiştir. c) Birleşme noktasındaki fiziksel olarak kabul edilemez süreksizlik durumu

Şekil 2.3 de eğilme elemanının pozitif uç yer değiştirmeleri, Şekil 2.4 de ise pozitif uç kuvvetleri gösterilmiştir. Eğilme elemanı için her bir uçta iki bilinmeyen olmak üzere toplam dört sonlu sayıda bilinmeyen vardır.



Şekil 2.3 Eğilme elemanı pozitif uç yer değıştirmeleri



Şekil 2.4 Eğilme elemanı pozitif uç kuvvetleri

Yer değıştirme fonksiyonu eleman uçlarındaki ayrıık değerler cinsinden ifade edilirse, bu fonksiyon

$$v(x) = f (v_1, v_2, \theta_1, \theta_2, x) \quad (2.8)$$

olup izleyen sınır koşullarına sahiptir.

$$v (x = x_1) = v_1$$

$$v (x = x_2) = v_2$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_1} = \theta_1$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_2} = \theta_2 \quad (2.9)$$

Bağımsız değişkene göre problemin bir boyutlu olması ve dört sınır koşulu göz önüne alınarak yer değiştirme fonksiyonu dört sabit katsayılı üçüncü dereceden bir polinom seçilir:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (2.10)$$

Yer değiştirmeyi tanımlamak için kübik fonksiyon seçimi keyfi değildir. Sürekli alan değişkeninin tanımlanması için interpolasyon fonksiyonlarının gerekliliği açıkça görülmektedir. Dört sınır koşulunun tanımlanmasıyla, kabul edilen yer değiştirme fonksiyonu dörtten fazla sabitle belirlenemez. Ayrıca problemin kabulünde, yükün eleman uçlarındaki düğüm noktalarına uygulanması sebebi ile iki nokta arasındaki moment değişimi lineerdir. Bu durum, yük ile eğrilik arasındaki izleyen bağıntıda seçilen üçüncü dereceden deneme fonksiyonu yerine konularak da gözlenebilir.

$$M_{(x)} = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2.11)$$

Elastik eğrinin ikinci türevinin eğilme rijitliği ile çarpımının moment denklemi olduğunu hatırlanırsa, yer değiştirme fonksiyonunun ikinci türevinin lineer olması gereklidir.

Şekil değiştirme fonksiyonuna sınır koşulları uygulandığında;

$$v(x=0) = v_1 = a_0$$

$$v(x=L) = v_2 = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 = a_1$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2 = a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 \quad (2.12)$$

eşitlikleri çözüldüğünde, katsayılar sınır yer değiştirme büyüklükleri cinsinden izleyen şekilde bulunur:

$$a_0 = v_1$$

$$a_1 = \theta_1$$

$$a_2 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L} (2\theta_1 + \theta_2) \quad (2.13)$$

$$a_3 = \frac{2}{L^3}(v_2 - v_1) + \frac{1}{L^2} (\theta_1 + \theta_2)$$

Elde edilen (2.13) eşitliklerinin (2.10) denkleminde yerine konmasıyla, yer değiştirme fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilir:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) v_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \theta_2 \quad (2.14)$$

Bu ifade izleyen formda yazılabilir:

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2 \quad (2.15)$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (2.16)$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.17)$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (2.18)$$

$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (2.19)$$

Yukarıdaki (2.15) ifadesi matris gösterimiyle izleyen şekilde yazılabilir:

$$v(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} \quad (2.20)$$

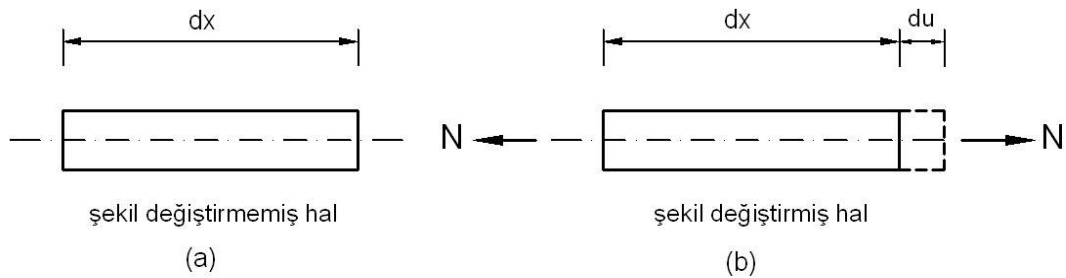
Burada, N_1, N_2, N_3, N_4 , x değişkenine bağlı interpolasyon fonksiyonları olup düğüm noktasındaki yer değiştirme değerleri cinsinden yer değiştirme dağılımını (alanını) tarifler. $\{\delta\}$, düğüm noktası yer değiştirme vektörüdür.

2.2 Eksenel Yük Elemanı

2.2.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağlılıkları

Çalışmanın temelini oluşturan kabuller ve kısıtlık koşulları aşağıda verilmiştir.

1. Eleman geometrik olarak doğrusaldır.
2. Malzeme Hooke kanununa uyar
3. Yüklemeler sadece düğüm noktalarında yapılmıştır
4. Eleman sadece eksenel yük taşımaktadır.



Şekil 2.5 Eksenel yük elemanı

Şekil 2.5 (a) da dx boyundaki sonsuz küçük eleman göz önüne alınsın ve elemanın kesit eksenini doğrultusunda N normal kuvveti uygulansın, bu yüklemekten sonra elemanın şekil

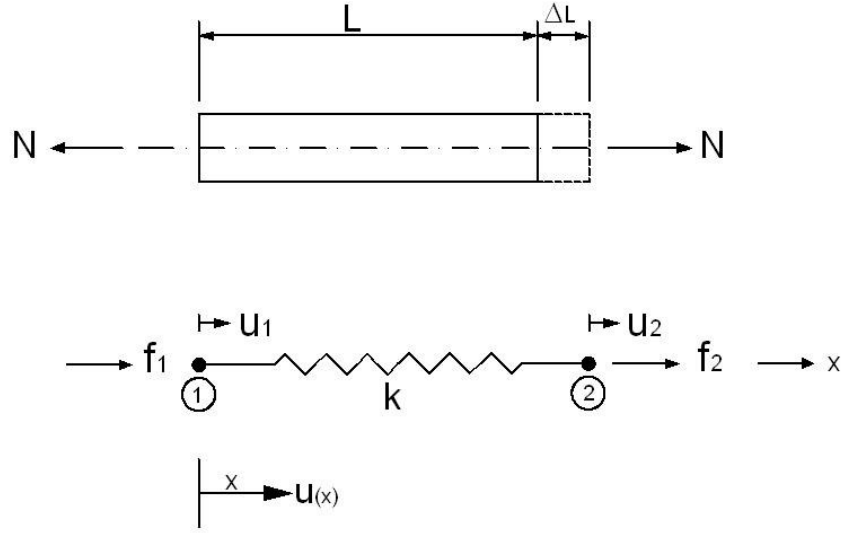
değiştirmiş hali şekil 2.5 (b) de gösterilmiştir. Elemanın boyuna birim şekil değiştirmesi izleyen şekilde ifade edilir:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.21)$$

Gerilme-şekil değiştirme bağıntısı izleyen şekilde tanımlanır:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{du}{dx} \quad (2.22)$$

2.2.2. Eleman Uç Yer Değiştirmeleri ve Şekil Değiştirme Fonksiyonu



Şekil 2.6 Eksenel yük elemanı için pozitif uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri

Eksenel yük elemanı, lineer yay elemanı olarak düşünülün. Lineer yay sadece eksenel yük iletmeye kapasiteli olan bir mekanik araçtır. Şekil 2.6 da eksenel yük elemanı ve matematik modeli verilmiştir. Burada yayın uçları düğüm noktalarıdır ve düğüm noktaları yer değiştirmeleri u_1 ve u_2 ile gösterilmiş olup şekilde pozitif yönleriyle verilmiştir. Yayın birim boy yer değiştirmesi;

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (2.23)$$

olup çubuk üzerindeki kuvvet;

$$N = k \Delta l \quad (2.24)$$

ile ifade edilmektedir. Bu durumda yatay dengeden

$$f_1 = -f_2 \quad (2.25)$$

olur. Şekil 2.6 da aksenal yük elemanının pozitif uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri gösterilmiştir. Aksenal yük elemanı için her bir uçta bir bilinmeyen olmak üzere iki adet bilinmeyen vardır. İnterpolasyon fonksiyonu da iki sabit sayılı polinom olarak seçilecektir.

Yer değiştirme fonksiyonu $u(x)$;

$$u(x) = f(u_1, u_2, x) \quad (2.26)$$

olup izleyen sınır koşullarına sahiptir:

$$u(x = x_1) = u_1$$

$$u(x = x_2) = u_2 \quad (2.27)$$

Sağlanacak iki koşul olduğundan, yer değiştirme fonksiyonu için en basit form olarak iki sabit katsayılı birinci dereceden bir polinom seçilir:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (2.28)$$

Sınır şartları uygulanırsa elde edilen

$$u(x = 0) = u_1 = a_0$$

$$u(x = L) = u_2 = a_0 + a_1 L \quad (2.29)$$

eşitlikleri çözüldüğünde katsayılar izleyen şekilde bulunur:

$$a_0 = u_1$$

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (2.30)$$

Elde edilen (2.30) eşitliklerinin, (2.28) denkleminde yerine konmasıyla yer değiştirme fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilir:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 \quad (2.31)$$

Yukarıda verilen (2.31) ifadesi izleyen formda yazılabilir:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \quad (2.32)$$

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2.33)$$

$$N_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \quad (2.34)$$

(2.32) ifadesi matris gösterimiyle izleyen şekilde yazılır:

$$u(x) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} \quad (2.35)$$

Burada N_1 ve N_2 x değişkenine bağlı interpolasyon fonksiyonları olup düğüm noktasındaki yer değiştirme değerleri cinsinden yer değiştirme dağılımını tarifler. $\{\delta\}$ düğüm noktası yer değiştirme vektörüdür.

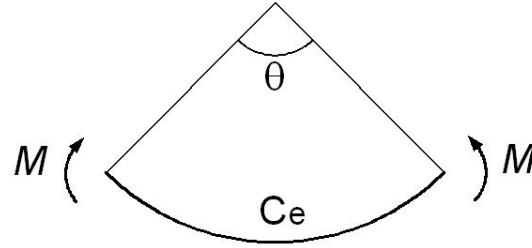
2.3 Sonlu Eleman Olarak Dönme Elemanı

2.3.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağlılıkları

Çalışmanın temelini oluşturan kabuller ve kısıtlık koşulları aşağıda verilmiştir.

1. Eleman boyu ihmal edilir ve her bir uçta bir tane olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir.
2. Eleman düğüm noktalarına sadece düğüm noktalarında bağlıdır.
3. Yüklemeler sadece düğüm noktalarında yapılmıştır

Dönme elemanı, dönmeye karşı lineer elastik yay özelliği gösteren noktasal bir eleman olarak tanımlanır. Dönme ve yük arasındaki orantılılık sabiti, yay sabiti yada dönme rijitliği olarak adlandırılıp C_e ile gösterilmiştir. Birimi ise kN.m/rd boyutundadır.



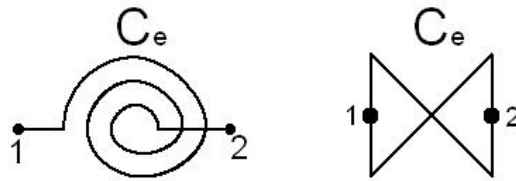
Şekil 2.7 Dönme Elemanı

Şekil 2.7 de verilen dönme elemanın yer değiştirme kuvvet ilişkisi izleyen şekilde verilir:

$$M = C_e \theta \quad (2.36)$$

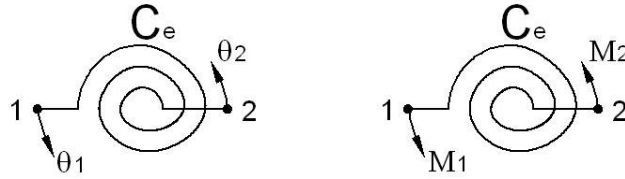
2.3.2 Eleman Uç Yer Değiştirmeleri ve Uç Kuvvetleri

Bu çalışmada dönme elemanı sonlu bir eleman olarak göz önüne alınmıştır ve şekil 2.8 de verildiği üzere dönme elemanı; iki düğüm noktasına sahip ve her bir düğüm noktasında bir serbestliği olan iki serbestlik dereceli, boyu ihmal edilen bağlantı elemanı olarak tariflenir.



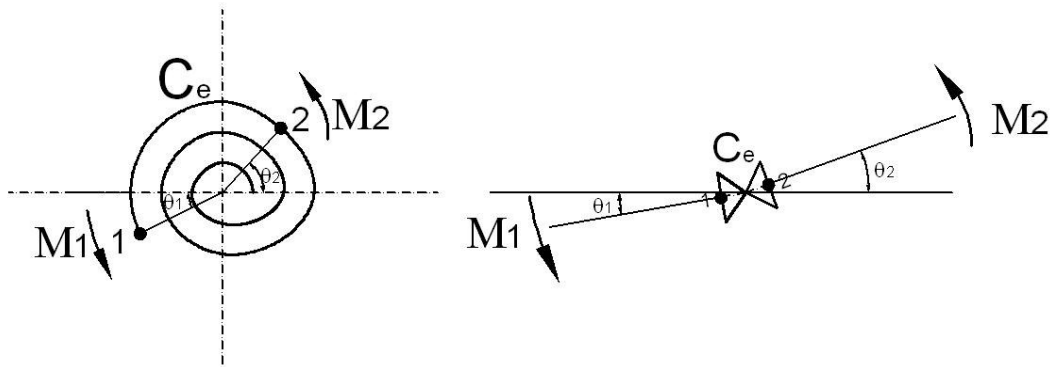
Şekil 2.8 Dönme elemanın sonlu eleman modeli

Şekil 2.9 da dönme elemanın uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri pozitif yönleri ile gösterilmiş olup birinci ucun yer değiştirmesi θ_1 ile, ikinci ucun yer değiştirmesi θ_2 ile tariflenir.



Şekil 2.9 Dönme elemanın pozitif uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri

Şekil 2.10 da dönme elemanının şekil değiştirmiş durumu gösterilmiştir. Dönme elemanının 1 ve 2 numaralı uçlarının birbirlerine göre yaptığı göreceli yer değiştirme, 1 ve 2 numaralı uçların süpürdükleri açı farkı olarak tanımlanır.



Şekil 2.10 Dönme elemanının şekil değiştirmiş hali

Eğer düğüm noktası yer değiştirmeleri bilinirse dönme yayındaki moment bulunabilir. Dönme elemanındaki göreceli dönme;

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.37)$$

olup bu durumda dönme elemanındaki moment;

$$M = C_e \theta = C_e (\theta_2 - \theta_1) \quad (2.38)$$

şeklinde elde edilir. Düğüm noktası dengesinden uç kuvvetleri arasındaki ilişki izleyen şekilde verilir:

$$M_1 + M_2 = 0$$

$$M_2 = -M_1 \quad (2.39)$$

Moment dönme ilişkisi uç kuvvetler cinsinden izleyen şekilde yazılabilir:

$$M_1 = C_e \theta_1 - C_e \theta_2 \quad (2.40)$$

$$M_2 = -C_e \theta_1 - C_e \theta_2 \quad (2.41)$$

Bu ifade matris formunda izleyen şekilde yazılır:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & -C_e \\ -C_e & C_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\{M\} = [C_e] \{\theta\} \quad (2.43)$$

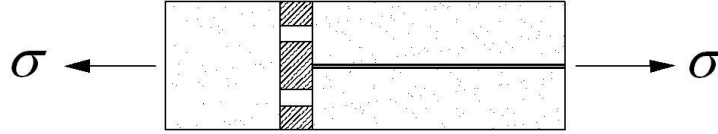
Buradaki katsayılar matrisi dönme elemanının rijitlik matrisidir ve 2x2 boyutundadır. Bu da dönme elemanın iki serbestlik dereceli olduğunu gösterir.

2.4 Viskoelastik Malzeme Modeli

Bütün ideal katı cisim tiplerinde zamanın etkisi göz önünde bulundurulmamıştır. Cisimlerin zamanla ilgili visko-elastik özelliklerini de ele alabilmek için bunlara sıvıya benzer bazı özellikler katmak gerekir. Aşağıda tarif edilecek ideal cisim tipi sıvılarla elastik cisimlerin esas özelliklerinin birleştirilmesi ile elde edilir.



Şekil 2.11 Hooke cismini temsil eden yay modeli



Şekil 2.12 Newton sıvısını karakterize eden yağ kutusu

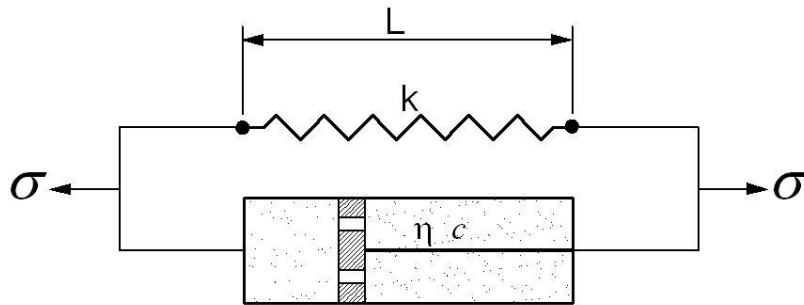
Newton sıvısını karakterize eden yağ kutusu (dashpot) içinde bulunan delikli pistonun hareket edebilmesi için yağın pistondaki deliklerden diğer tarafa geçmesi gerekmekte ve bu da zaman gerektirmektedir. Piston yağın geçme hızı ile orantılı hareket eder ve pistona gelen direnç hız ile orantılıdır. Hooke cisminde zamanın tesiri yoktur. Newton sıvısında ise elastik bir özellik yoktur. Hooke cisimi için bünye denklemi izleyen şekilde yazılır:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.44)$$

Newton sıvısının bünye denklemi aşağıda ifade edilmiştir:

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.45)$$

Burada c cisme bağlı bir sabit olup viskoz sönüm sabiti adını alır. Şimdi bu iki basit cisim modeli paralel olarak bağlansın. Şekil 2.13 de gösterilen, paralel bağlama sonucu oluşan yeni cisim modeli Kelvin ya da Kelvin-Voigt cisimi adını alır.



Şekil 2.13 Kelvin-Voigt Cisimi

Kelvin–Voigt cisminin bünye denklemleri izleyen şekilde yazılır:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E \varepsilon + c \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.46)$$

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad (2.47)$$

Burada c katsayısı elastisite modülü cinsinden ifade edilir ve birimi N.sn/m^2 dir.

$$c = E.\eta \quad (2.48)$$

η rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen bir sönüm katsayısıdır. Bu durumda gerilme ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$\sigma = E\varepsilon + E\eta\dot{\varepsilon} \quad (2.49)$$

$$\sigma_v = E\eta\dot{\varepsilon} \quad (2.50)$$

Enerji yaklaşımıyla hareket denklemlerinin elde edilmesinde sönüm kuvvetini verecek şekilde tanımlanan sönüm fonksiyonu izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{E\eta}{2} \int_v \dot{\varepsilon}_x^2 dv \quad (2.51)$$

3. ENERJİ BAĞINTILARI

Bir cisimde dış etkilerin oluşturduğu iç kuvvetlerin, şekil değiştirme esnasında yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi veya iç kuvvetlerin işi denir. İç kuvvetlere –gerilmelere göre hesaplanan, şekil değiştirme enerjisi, elastik cismin yalnız deforme olmuş durumunu tarif eden büyüklüklere bağlı olup çok defa elastik potansiyel enerji ya da iç potansiyel enerji adını alır.

3.1 Potansiyel Enerji

3.1.1 Eğilme Elemanı için Potansiyel Enerji

Klasik mekanikten de bilindiği üzere şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma \epsilon dV \quad (3.1)$$

şeklindedir. Eğilme elemanı için potansiyel enerji (2.3) ve (2.6) ifadelerinin (3.1) ifadesinde yerine konmasıyla izleyen şekilde olur:

$$U = \frac{E}{2} \int_v y^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dV \quad (3.2)$$

$$I = \int y^2 dA \quad (3.3)$$

yukarıdaki (3.3) ifadesinin alan üzerinde entegre edilmesi sonucu atalet kuvvetinin elde edildiği hatırlanırsa eğilme elemanı için potansiyel enerji izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.4)$$

Bu ifade $v(x)$ için verilen (2.15) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde elde edilir:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l [N_1^*(x)v_1 + N_2^*(x)\theta_1 + N_3^*(x)v_2 + N_4^*(x)\theta_2]^2 dx \quad (3.5)$$

3.1.2 Eksenel Yük Elemanı için Potansiyel Enerji

Eksenel yük elemanı için, (2.21) ve (2.22) ifadelerinin (3.1) ifadesinde yerine konulması ile iç potansiyel enerji izleyen şekilde ifade edilir.

$$U = \frac{E}{2} \int_v \epsilon_x^2 dV \quad (3.6)$$

$$A = \int dA \quad (3.7)$$

Yukarıdaki (3.7) ifadesinin kullanılmasıyla (3.6) eşitliği izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{E}{2} \int_v \epsilon_x^2 dV = \frac{EA}{2} \int_0^l \epsilon_x^2 dx \quad (3.8)$$

Eksenel yük elemanı için ϵ_x in

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (3.9)$$

olduğu hatırlanırsa iç potansiyel enerji izleyen şekilde ifade edilir:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (3.10)$$

Bu ifade $u(x)$ için verilen (2.32) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde elde edilir:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^l [N'_1(x)u_1 + N'_2(x)u_2]^2 dx \quad (3.11)$$

Eksenel yük elemanı için (2.32) ve (2.33) ifadelerinde verilen interpolasyon fonksiyonlarının türevi alınıp (3.11) ifadesinde yerine yazılması ile (3.11) ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)^2 dx \quad (3.12)$$

3.1.3 Dönme Elemanı için Potansiyel Enerji

Dönme elemanı için potansiyel enerji izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{1}{2} C_e (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (3.13)$$

3.2 Kinetik Enerji

3.2.1 Eğilme Elemanı için Kinetik Enerji

Eğilme elemanı için kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dV \quad (3.14)$$

(3.14) denklemi izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx dy dz \quad (3.15)$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa kinetik enerji denklemi

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx \quad (3.16)$$

olarak elde edilir ve $v(x)$ için verilen (2.15) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [N_1(x) \dot{v}_1(t) + N_2(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3(x) \dot{v}_2(t) + N_4(x) \dot{\theta}_2(t)]^2 dx \quad (3.17)$$

3.2.2 Eksenel Yük Elemanı için Kinetik Enerji

Eksenel yük elemanı için kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dV \quad (3.18)$$

(3.18) denklemi izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx dy dz \quad (3.19)$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa kinetik enerji denklemi

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx \quad (3.20)$$

olarak elde edilir ve $u(x)$ için verilen (2.32) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [N_1(x)\dot{u}_1(t) + N_2(x)\dot{u}_2(t)]^2 dx \quad (3.21)$$

3.3 Sönüm Fonksiyonu

3.3.1 Eğilme Elemanı için Sönüm Fonksiyonu

Eğilme elemanı için şekil değiştirme ifadesinin zamana göre türevi izleyen şekilde verilir:

$$\dot{\mathcal{E}}(x,t) = \frac{d\mathcal{E}(x,t)}{dt} = -y \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = -y \frac{d^2 \dot{v}(x,t)}{dx^2} \quad (3.22)$$

Eğilme elemanı için sönüm fonksiyonu; (3.22) denkleminin (2.51) ifadesinde tanımlanan sönüm fonksiyonu denkleminde yerine yazılmasıyla izleyen şekilde elde edilir:

$$R = \frac{E\eta}{2} \int_v y^2 \left(\frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right)^2 dV \quad (3.23)$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa eğilme elemanı için sönüm fonksiyonu

$$R = \frac{EI\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.24)$$

olarak elde edilir ve $v(x)$ için verilen (2.15) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$R = \frac{EI\eta}{2} \int_0^l [N'_1(x)\dot{v}_1(t) + N'_2(x)\dot{\theta}_1(t) + N'_3(x)\dot{v}_2(t) + N'_4(x)\dot{\theta}_2(t)]^2 dx \quad (3.25)$$

3.3.2 Eksenel Yük Elemanı için Sönüm Fonksiyonu

Eksenel yük elemanı için şekil değiştirme ifadesinin zamana göre türevi izleyen şekilde verilir:

$$\dot{\epsilon}(x,t) = \frac{d\epsilon(x,t)}{dt} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \frac{d\dot{u}(x,t)}{dx} \quad (3.26)$$

Eksenel yük elemanı sönüm fonksiyonu (3.26) denkleminin (2.51) denkleminde yerine yazılmasıyla izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{E\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d\dot{u}}{dx} \right)^2 dV \quad (3.27)$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa eksenel yük elemanı için sönüm fonksiyonu

$$R = \frac{EA\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d\dot{u}}{dx} \right)^2 dx \quad (3.28)$$

olarak elde edilir ve $u(x)$ için verilen (2.32) bağıntısı olarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$R = \frac{EA\eta}{2} \int_0^l [N'_1(x)\dot{u}_1(t) + N'_2(x)\dot{u}_2(t)]^2 dx \quad (3.29)$$

Eksenel yük elemanı için (2.32) ve (2.33) ifadelerinde verilen interpolasyon fonksiyonlarının türevi alınıp (3.29) ifadesinde yerine yazılması ile (3.29) ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{EA\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1}{L} \right)^2 dx \quad (3.30)$$

3.3.3 Dönme Elemanı için Sönüm Fonksiyonu

Dönme elemanı için sönüm fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilir:

$$R_e = \frac{1}{2} C_e \eta_e (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (3.31)$$

4. LAGRANGE DENKLEMLERİ

Kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı Lagrange fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$L = T - (U + V) \quad (4.1)$$

Genellikle sistemin durumunu n sayıda $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ genelleştirilmiş koordinat belirler. Sistemin kinetik enerjisi, genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş koordinatların hızı ile ifade edilir:

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n) \quad (4.2)$$

Sistemin potansiyel enerji ise genelleştirilmiş koordinatlarla ifade edilir:

$$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (4.3)$$

Dış kuvvetlerin potansiyeli genelleştirilmiş yer değiştirmelere lineer bağlıdır:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (4.4)$$

Konservatif olmayan kuvvetlerin virtüel işi δW_{nc} , genelleştirilmiş koordinatlar olan q_i cinsinden ve Q_i ler genelleştirilmiş sönüm kuvvetleri olmak üzere, izleyen şekilde ifade edilir:

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (4.5)$$

Langrange denklemleri izleyen şekilde tariflenir:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_{D_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_{D_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.7)$$

Sönüm kuvveti Q_{D_i} , sönüm fonksiyonu R nin \dot{q}_i ye türevleri alınarak bulunur ve izleyen şekilde tariflenir:

$$Q_{D_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.8)$$

Genelleştirilmiş dış kuvvetler izleyen şekilde yazılır:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = -Q_{F_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.9)$$

Bu durumda Lagrange denklemleri izleyen şekilde yazılır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_{F_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.10)$$

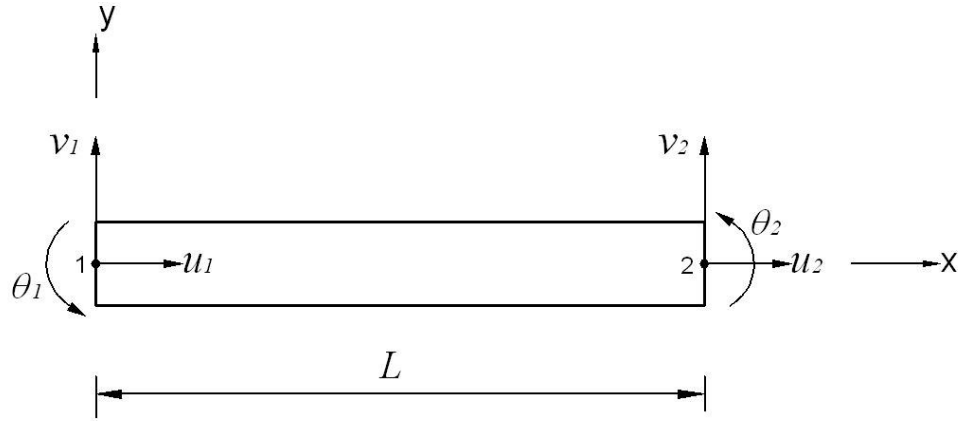
(4.10) denklemindeki Q_{F_i} genelleştirilmiş dış yükleri temsil eder.

5. DÜZLEM ÇERÇEVELER

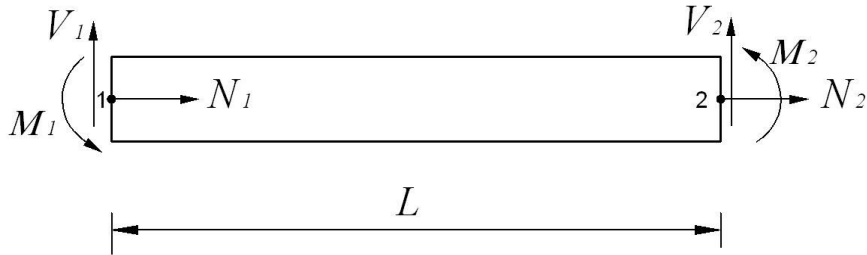
5.1 Düzlem Çerçeve Elemanı Uç Kuvvetleri ve Uç Yer Değişimleri

Bütün dış kuvvetlerin ve çerçeve sisteminin aynı düzlem içinde bulunması ile oluşan sisteme düzlem çerçeve adı verilir. Düzlem çerçeve elemanları başlangıç ucu i ve bitiş ucu j olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir. Her uç iki ötelenme ve bir dönme olmak üzere üç serbestliğe sahiptir. Düzlem çerçeve elemanları, eğilme elemanı ile aksenal yük elemanın birleşiminden oluşmuştur.

Şekil 5.1 de düzlem çerçeve elemanı ve bu elemanın pozitif serbestlik dereceleri gösterilmiştir. Şekil 5.2 de bu serbestlik derecelerine karşı gelen pozitif uç kuvvetleri gösterilmiştir.



5.1 Düzlem çerçeve elemanı pozitif uç serbestlikleri



5.2 Düzlem çerçeve elemanı pozitif uç kuvvetleri

Çubuğun aksenal doğrultudaki yer değişirmesi $u(x)$ fonksiyonu, aksenal doğrultuya dik doğrultudaki yer değişirmesi $v(x)$ fonksiyonu ile ifade edilmişti. Burada temel prensip sürekli alan değişkeninin düğüm noktalarında hesap edilen sonlu sayıdaki değerler cinsinden ifade edilmesidir. Yani elemanın herhangi bir noktasının yer değişirmesi uç noktalarındaki

yer değiştirmeler cinsinden ifade edilir. Düzlem çerçeve elemanı için yer değiştirme fonksiyonu denklem (2.15) ve (2.32) nin birleşmesinden oluşur.

$$\delta(x) = v(x) + u(x) \quad (5.1)$$

$$\delta(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2 + N_5(x) u_1 + N_6(x) u_2 \quad (5.2)$$

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2 \quad (5.3)$$

$$u(x) = N_5(x) u_1 + N_6(x) u_2 \quad (5.4)$$

Düzlem çerçeve için $N_i(x)$ interpolasyon fonksiyonları (2.16) - (2.19) ve (2.33), (2.34) ifadeleri ele alınırsa izleyen şekilde verilir:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & N_4(x) &= \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \\ N_5(x) &= 1 - \frac{x}{L} & N_6(x) &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Böylelikle çubuk uç noktalarındaki yer değiştirmeler bilindiği takdirde çubuk üzerindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi hesaplanabilir.

5.2 Düzlem Çerçeve Elemanı için Lagrange Denklemleri

Ele alınan problemde zaman faktörü de olduğu için düğüm noktası yer değiştirmeleri ve eleman uç kuvvetleri zamanın da fonksiyonudur. Bu durumda bir çerçeve elemanının yer değiştirme vektörü ve dış kuvvet vektörü izleyen şekilde verilir:

$$\{\delta\}_{(e)} = \left[u_1^{(e)}(t) \ v_1^{(e)}(t) \ \theta_1^{(e)}(t) \ u_2^{(e)}(t) \ v_2^{(e)}(t) \ \theta_2^{(e)}(t) \right]^T \quad (5.6)$$

$$\{P\}_{(e)} = \left[N_1(t) \ V_1(t) \ M_1(t) \ N_2(t) \ V_2(t) \ M_2(t) \right]^T = \left[P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6 \right]^T \quad (5.7)$$

Çerçeve elemanın serbestlikleri, yani uç yer değiştirmeleri genelleştirilmiş koordinatlardır. Çerçeve elemanın uç kuvvetleri ise genelleştirilmiş kuvvetlerdir ve çerçeve elemanı için potansiyel enerji, kinetik enerji, uç kuvvetlerin potansiyeli ve sönüm fonksiyonu eğilme elemanı ile aksel yük elemanının ilgili enerji ifadelerinin toplamından oluşur. Çerçeve elemanının potansiyel enerjisi (3.4) ve (3.10) enerji ifadeleri kullanılarak izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v(t)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du(t)}{dx} \right)^2 dx \quad (5.8)$$

Potansiyel enerji düzlem çerçeve elemanı için genelleştirilmiş koordinatlarda (3.5) ve (3.11) denklemleri kullanılarak izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l [N_1''(x)v_1(t) + N_2''(x)\theta_1(t) + N_3''(x)v_2(t) + N_4''(x)\theta_2(t)]^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l [N_5'(x)u_1(t) + N_6'(x)u_2(t)]^2 dx \quad (5.9)$$

Çerçeve elemanının kinetik enerjisi (3.16) ve (3.20) denklemlerinin kullanımıyla izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{dv(t)}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{du(t)}{dt} \right)^2 dx \quad (5.10)$$

Kinetik enerji düzlem çerçeve elemanı için genelleştirilmiş koordinatlardan (3.17) ve (3.21) denklemlerinin kullanımıyla izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [N_1(x)\dot{v}_1(t) + N_2(x)\dot{\theta}_1(t) + N_3(x)\dot{v}_2(t) + N_4(x)\dot{\theta}_2(t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [N_5(x)\dot{u}_1(t) + N_6(x)\dot{u}_2(t)]^2 dx \quad (5.11)$$

Çerçeve elemanının sönüm fonksiyonu (3.24) ve (3.28) denklemlerinin kullanımıyla izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{EI\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \dot{v}(t)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d\dot{u}(t)}{dx} \right)^2 dx \quad (5.12)$$

Sönüm fonksiyonu düzlem çerçeve elemanı için genelleştirilmiş koordinatlarda (3.25) ve (3.29) denklemlerinin kullanımıyla izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{EI\eta}{2} \int_0^l [N_1''(x)\dot{v}_1(t) + N_2''(x)\dot{\theta}_1(t) + N_3''(x)\dot{v}_2(t) + N_4''(x)\dot{\theta}_2(t)]^2 dx + \frac{EA\eta}{2} \int_0^l [N_5'(x)\dot{u}_1(t) + N_6'(x)\dot{u}_2(t)]^2 dx \quad (5.13)$$

Düzlem çerçeve elemanı için genelleştirilmiş kuvvetlerin potansiyeli izleyen şekilde verilir:

$$V = -\{\delta\}^T \{P\} \quad (5.14)$$

Düzlem çerçeve elemanı için fonksiyonel izleyen şekilde yazılır:

$$L^{(e)} = T^{(e)} - (U^{(e)} + V^{(e)}) \quad (5.15)$$

Problemde kullanılacak Lagrange denklemleri ve genelleştirilmiş yer değiştirmeler için yapılan tanımlar aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_k} = Q_{D_k} \quad k = 1, 6 \quad \delta_1 = u_1, \delta_2 = v_1, \delta_3 = \theta_1, \delta_4 = u_1, \delta_5 = v_2, \delta_6 = \theta_2 \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_k} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \quad k = 1, 6 \quad \delta_1 = u_1, \delta_2 = v_1, \delta_3 = \theta_1, \delta_4 = u_1, \delta_5 = v_2, \delta_6 = \theta_2 \quad (5.17)$$

Yukarıdaki ifadenin (4.1) denkleminin kullanımıyla daha açık olarak yazılması izleyen eşitliği verir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k} + \frac{\partial U}{\partial \delta_k} + \frac{\partial V}{\partial \delta_k} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\delta}_k} \quad k = 1, 6 \quad (5.18)$$

Kinetik enerji genelleştirilmiş koordinatların zamana göre türevlerine bağlı olduğundan

$$\frac{\partial T}{\partial \delta_k} = 0 \quad (5.19)$$

olur ve bu durumda hareket denklemi izleyen şekilde yazılır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{\delta}_k} + \frac{\partial U}{\partial \delta_k} = Q_{P_k} \quad k = 1, 6 \quad (5.20)$$

Bu ifade matris formatında izleyen şekilde yazılabilir:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{P\} \quad (5.22)$$

$$\{F_l\} + \{F_D\} + \{F_S\} = \{P\} \quad (5.23)$$

Burada

F_l : çerçeve elemanının efektif kuvvetlerini,

F_D : çerçeve elemanının sönüm kuvvetlerini,

F_S : çerçeve elemanının yay kuvvetlerini,

P : çerçeve elemanının düğüm noktası kuvvetlerini gösterir.

Yukarıda verilen (5.20) ifadesinden $[K]$ ve $[M]$ matrislerinin nasıl elde edildiği aşağıda anlatılacaktır.

İlk olarak, (5.20) denklemindeki $\frac{\partial U}{\partial \delta_k}$ ifadesi ele alınsın ve genelleştirilmiş koordinatlara göre türevleri elde edilsin:

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = N_1 = \frac{EA2}{2} \int_0^l [N'_5(x)u_1(t) + N'_6(x)u_2(t)] N'_5(x) dx \quad (5.24)$$

Sırasıyla diğer yer değiştirmelere göre türev alınırsa

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} = V_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l [N_1''(x)v_1 + N_2''(x)\theta_1 + N_3''(x)v_2 + N_4''(x)\theta_2] N_1''(x) dx \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = M_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l [N_1''(x)v_1 + N_2''(x)\theta_1 + N_3''(x)v_2 + N_4''(x)\theta_2] N_2''(x) dx \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_2} = N_2 = \frac{EA}{2} \int_0^l [N_5'(x)u_1(t) + N_6'(x)u_2(t)] N_6'(x) dx \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_2} = V_2 = \frac{EI}{2} \int_0^l [N_1''(x)v_1 + N_2''(x)\theta_1 + N_3''(x)v_2 + N_4''(x)\theta_2] N_3''(x) dx \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = M_2 = \frac{EI}{2} \int_0^l [N_1''(x)v_1 + N_2''(x)\theta_1 + N_3''(x)v_2 + N_4''(x)\theta_2] N_4''(x) dx \quad (5.29)$$

elde edilir. $N_i'(x)$ ve $N_i''(x)$ değerleri yukarıdaki eşitliklerde ilgili yerlere yazılırsa izleyen eşitlikler elde edilir:

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = N_1 = EA \int_0^l [(\frac{-1}{L})u_1 + (\frac{1}{L})u_2](\frac{-1}{L}) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} = V_1 = EI \int_0^l [(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3})v_1 + (-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2})\theta_1 + (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3})v_2 + (\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L})\theta_2] (-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = M_1 = EI \int_0^l [(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3})v_1 + (-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2})\theta_1 + (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3})v_2 + (\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L})\theta_2] (-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_2} = N_2 = EA \int_0^l [(\frac{-1}{L})u_1 + (\frac{1}{L})u_2](\frac{1}{L}) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_2} = V_2 = EI \int_0^l [(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3})v_1 + (-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2})\theta_1 + (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3})v_2 + (\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L})\theta_2] (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = M_2 = EI \int_0^l [(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3})v_1 + (-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2})\theta_1 + (\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3})v_2 + (\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L})\theta_2] (\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}) dx$$

(5.30)

İntegrasyon işlemi yapılırsa eleman uç kuvvetleri ve uç yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
N_1 &= EA \left[\frac{x}{L} u_1 - \frac{x}{L} u_2 \right] \Big|_0^l \\
V_1 &= EI \left[\left(\frac{36x}{L^4} + \frac{48x^3}{L^6} - \frac{72x^2}{L^5} \right) v_1 + \left(\frac{24x}{L^3} - \frac{42x^2}{L^4} + \frac{24x^3}{L^5} \right) \theta_1 + \left(-\frac{36x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} - \frac{48x^3}{L^6} \right) v_2 + \left(-\frac{30x^2}{L^4} + \frac{12x}{L^3} + \frac{24x^3}{L^5} \right) \theta_2 \right] \Big|_0^l \\
M_1 &= EI \left[\left(\frac{24x}{L^3} - \frac{42x^2}{L^4} + \frac{24x^3}{L^5} \right) v_1 + \left(\frac{16x}{L^2} + \frac{12x^3}{L^4} - \frac{24x^2}{L^3} \right) \theta_1 + \left(-\frac{24x}{L^3} + \frac{42x^2}{L^4} - \frac{24x^3}{L^5} \right) v_2 + \left(-\frac{18x^2}{L^3} + \frac{8x}{L^2} + \frac{12x^3}{L^4} \right) \theta_2 \right] \Big|_0^l \\
N_2 &= EA \left[-\frac{x}{L} u_1 + \frac{x}{L} u_2 \right] \Big|_0^l \\
V_2 &= EI \left[\left(-\frac{36x}{L^4} - \frac{48x^3}{L^6} + \frac{72x^2}{L^5} \right) v_1 + \left(-\frac{24x}{L^3} + \frac{42x^2}{L^4} - \frac{24x^3}{L^5} \right) \theta_1 + \left(\frac{36x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} + \frac{48x^3}{L^6} \right) v_2 + \left(\frac{30x^2}{L^4} - \frac{12x}{L^3} - \frac{24x^3}{L^5} \right) \theta_2 \right] \Big|_0^l \\
M_2 &= EI \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{30x^2}{L^4} + \frac{24x^3}{L^5} \right) v_1 + \left(\frac{8x}{L^2} + \frac{12x^3}{L^4} - \frac{18x^2}{L^3} \right) \theta_1 + \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{30x^2}{L^4} - \frac{24x^3}{L^5} \right) v_2 + \left(-\frac{12x^2}{L^3} + \frac{4x}{L^2} + \frac{12x^3}{L^4} \right) \theta_2 \right] \Big|_0^l
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Yukarıdaki ifadelerde sınır değerler yerine konulup gerekli ara işlemler yapıldıktan sonra izleyen ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2 \\
V_1 &= \frac{12EI}{L^3} v_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{12EI}{L^3} v_2 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \\
M_1 &= \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 \\
N_2 &= -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2 \\
V_2 &= -\frac{12EI}{L^3} v_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{12EI}{L^3} v_2 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \\
M_2 &= \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{2EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{4EI}{L} \theta_2
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Matris formunda yazılırsa uç kuvvet- uç yer değıştirme ilişkisi izleyen formda bulunur:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\{p\} = [k]\{\delta\} \quad (5.34)$$

Burada $[k]$ ile gösterilen ve çubuk uç yer değıştirmeleri ile uç kuvvetlerini ilişkilendiren matrise eleman rijitlik matrisi denir. $\{p\}$ vektörü çubuk uç kuvvetlerini, $\{\delta\}$ vektörü ise çubuk uç yer değıştirmelerini gösterir.

Dönme elemanı için (5.20) ile verilen Langrange hareket denklemlerinin $\frac{\partial U}{\partial \delta_k}$ ifadesi

kullanılırsa izleyen eşitlikler elde edilir:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = M_1 = -C_e(\theta_2 - \theta_1) \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = M_2 = C_e(\theta_2 - \theta_1) \quad (5.36)$$

Matris formunda yazılırsa uç kuvvet- uç yer değıştirme ilişkisi izleyen formda bulunur:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & -C_e \\ -C_e & C_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

Şimdi (5.20) Langrange hareket denklemlerinin $\frac{\partial R}{\partial \dot{\delta}_k}$ ifadesi ele alınsın.

Sönüm fonksiyonunun genelleştirilmiş yer değıştirmelerin hızına göre türevleri bu noktadaki yer değıştirme yönündeki sönüm kuvvetlerini verir. Sönüm fonksiyonunun yer değıştirme hızlarına göre türevleri izleyen şekilde verilir:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_1} = \frac{\eta EA 2}{2} \int_0^l [N_5'(x) \dot{u}_1(t) + N_6'(x) \dot{u}_2(t)] N_5'(x) dx \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{v}_1} = \frac{\eta EI 2}{2} \int_0^l [N_1''(x) \dot{v}_1(t) + N_2''(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3''(x) \dot{v}_2(t) + N_4''(x) \dot{\theta}_2(t)] N_2''(x) dx \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\eta EI 2}{2} \int_0^l [N_1''(x) \dot{v}_1(t) + N_2''(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3''(x) \dot{v}_2(t) + N_4''(x) \dot{\theta}_2(t)] N_3''(x) dx \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_2} = \frac{\eta EA 2}{2} \int_0^l [N_5'(x) \dot{u}_1(t) + N_6'(x) \dot{u}_2(t)] N_6'(x) dx \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{v}_2} = \frac{\eta EI 2}{2} \int_0^l [N_1''(x) \dot{v}_1(t) + N_2''(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3''(x) \dot{v}_2(t) + N_4''(x) \dot{\theta}_2(t)] N_4''(x) dx \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\eta EI 2}{2} \int_0^l [N_1''(x) \dot{v}_1(t) + N_2''(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3''(x) \dot{v}_2(t) + N_4''(x) \dot{\theta}_2(t)] N_6''(x) dx \quad (5.43)$$

Görüldüğü üzere (5.38) ifadesi ve izleyen ifadeler (5.24) eşitliğinin ve izleyen eşitliklerin η ile çarpılmış halidir; dolayısıyla sönüm matrisi rijitlik matrisinin η ile çarpımıdır.

$$[c] = \eta [k] \quad (5.44)$$

Sönüm kuvveti ile yer değıştirme hızları arasındaki bağıntı ise izleyen şekilde yazılır:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_1} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{v}_1} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_2} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{v}_2} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{D_1} \\ F_{D_2} \\ F_{D_3} \\ F_{D_4} \\ F_{D_5} \\ F_{D_6} \end{Bmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\{F_D\} = [c]\{\dot{\delta}\} = \eta[k]\{\dot{\delta}\} \quad (5.46)$$

Burada $[c]$ ile gösterilen ve çubuk uç yer değiştirmelerinin hızları ile uç sönüm kuvvetlerini ilişkilendiren matrise eleman sönüm matrisi denir. $\{F_D\}$ vektörü çubuk uç sönüm kuvvetlerini, $\{\dot{\delta}\}$ vektörü ise çubuk uç yer değiştirmelerin hızlarını gösterir.

Dönme elemanı için (5.20) ile verilen Langrange hareket denklemlerinin $\frac{\partial U}{\partial \dot{\delta}_k}$ ifadesi

kullanılırsa izleyen eşitlikler elde edilir:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = M_{c_1} = -C_e \eta_e (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_2} = M_{c_2} = C_e \eta_e (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (5.48)$$

Matris formunda yazılırsa sönüm kuvveti-uç yer değiştirme hızı arasındaki ilişki izleyen formda bulunur:

$$\begin{Bmatrix} M_{D_1} \\ M_{D_2} \end{Bmatrix} = \eta_e \begin{bmatrix} C_e & -C_e \\ -C_e & C_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

(5.49) eşitliğinden görüldüğü üzere dönme elemanının sönüm matrisi, rijitlik matrisinin η_e katı olmaktadır.

Şimdi (5.20) Langrange hareket denklemlerinin $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k} \right)$ ifadesi ele alınsın ve kinetik enerjinin genelleştirilmiş koordinatlardaki yer değiştirmelerin hızlarına göre türevleri alınsın:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1(t)} = \int_0^l \rho A [N_5(x) \dot{u}_1(t) + N_6(x) \dot{u}_2(t)] N_5(x) dx \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{v}_1(t)} = \int_0^l \rho A [N_1(x) \dot{v}_1(t) + N_2(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3(x) \dot{v}_2(t) + N_4(x) \dot{\theta}_2(t)] N_1(x) dx \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1(t)} = \int_0^l \rho A [N_1(x) \dot{v}_1(t) + N_2(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3(x) \dot{v}_2(t) + N_4(x) \dot{\theta}_2(t)] N_2(x) dx \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2(t)} = \int_0^l \rho A [N_5(x) \dot{u}_1(t) + N_6(x) \dot{u}_2(t)] N_6(x) dx \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{v}_2(t)} = \int_0^l \rho A [N_1(x) \dot{v}_1(t) + N_2(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3(x) \dot{v}_2(t) + N_4(x) \dot{\theta}_2(t)] N_3(x) dx \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2(t)} = \int_0^l \rho A [N_1(x) \dot{v}_1(t) + N_2(x) \dot{\theta}_1(t) + N_3(x) \dot{v}_2(t) + N_4(x) \dot{\theta}_2(t)] N_4(x) dx \quad (5.55)$$

Şimdi $\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k}$ ifadesinin zamana göre türevi alınırsa.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{\delta}_k} = m \ddot{\delta}_k \quad (5.56)$$

kütle kuvvetleri elde edilir; yani kinetik enerjinin hıza göre türevinden sonra zamana göre türevi efektif kuvvetleri verir. Yukarıda verilen eşitliklerin zamana göre türevi alınırsa, izleyen ifadeler elde edilir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{u}_1(t)} = F_{u1} = \int_0^l \rho A [N_5^2(x) \ddot{u}_1(t) + N_5(x) N_6(x) \ddot{u}_2(t)] dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{v}_1(t)} &= F_{v_1} = \int_0^l \rho A \left[N_1^2(x) \ddot{v}_1(t) + N_1(x) N_2(x) \ddot{\theta}_1(t) + N_1(x) N_3(x) \ddot{v}_2(t) + N_1(x) N_4(x) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx \\
\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{\theta}_1(t)} &= F_{\theta_1} = \int_0^l \rho A \left[N_2(x) N_1(x) \ddot{v}_1(t) + N_2^2(x) \ddot{\theta}_1(t) + N_2(x) N_3(x) \ddot{v}_2(t) + N_2(x) N_4(x) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx \\
\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{u}_2(t)} &= F_{u_2} = \int_0^l \rho A \left[N_6(x) N_5(x) \ddot{u}_1(t) + N_6^2(x) \ddot{u}_2(t) \right] dx \\
\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{v}_2(t)} &= F_{v_2} = \int_0^l \rho A \left[N_3(x) N_1(x) \ddot{v}_1(t) + N_3(x) N_2(x) \ddot{\theta}_1(t) + N_3^2(x) \ddot{v}_2(t) + N_3(x) N_4(x) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx \\
\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{\theta}_2(t)} &= F_{\theta_2} = \int_0^l \rho A \left[N_4(x) N_1(x) \ddot{v}_1(t) + N_4(x) N_2(x) \ddot{\theta}_1(t) + N_4(x) N_3(x) \ddot{v}_2(t) + N_4^2(x) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx
\end{aligned} \tag{5.57}$$

İnterpolasyon fonksiyonları yukarıdaki eşitliklerde ilgili yerlerine yazıldığında izleyen ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
F_{u_1} &= \int_0^l \rho A \left[\left(1 + \frac{x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}\right) \ddot{u}_1(t) + \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) \ddot{u}_2(t) \right] dx \\
F_{v_1} &= \int_0^l \rho A \left[\left(\frac{4x^6}{L^6} - \frac{12x^5}{L^5} + \frac{9x^4}{L^4} + \frac{4x^3}{L^3} - \frac{6x^2}{L^2} + 1\right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{2x^6}{L^5} - \frac{7x^5}{L^4} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{2x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x\right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{4x^6}{L^6} + \frac{12x^5}{L^5} - \frac{9x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}\right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{2x^6}{L^5} - \frac{5x^5}{L^4} + \frac{3x^4}{L^3} + \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx \\
F_{\theta_1} &= \int_0^l \rho A \left[\left(\frac{2x^6}{L^5} - \frac{7x^5}{L^4} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{2x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x\right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{x^6}{L^4} - \frac{4x^5}{L^3} + \frac{6x^4}{L^2} - \frac{4x^3}{L} + x^2\right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{2x^6}{L^5} + \frac{8x^5}{L^4} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{3x^3}{L^2}\right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{x^6}{L^4} - \frac{3x^5}{L^3} + \frac{3x^4}{L^2} - \frac{x^3}{L}\right) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx \\
F_{u_2} &= \int_0^l \rho A \left[\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) \ddot{u}_1(t) + \left(\frac{x^2}{L^2}\right) \ddot{u}_2(t) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v_2} &= \int_0^l \rho A \left[\left(-\frac{4x^6}{L^6} + \frac{12x^5}{L^5} - \frac{9x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(-\frac{2x^6}{L^5} + \frac{8x^5}{L^4} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{3x^3}{L^2} \right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{4x^6}{L^6} - \frac{12x^5}{L^5} + \frac{9x^4}{L^4} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(-\frac{2x^6}{L^5} + \frac{5x^5}{L^4} - \frac{3x^4}{L^3} \right) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx \\
F_{\theta_2} &= \int_0^l \rho A \left[\left(\frac{2x^6}{L^5} - \frac{5x^5}{L^4} + \frac{3x^4}{L^3} + \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{x^6}{L^4} - \frac{3x^5}{L^3} + \frac{3x^4}{L^2} - \frac{x^3}{L} \right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{2x^6}{L^5} + \frac{5x^5}{L^4} - \frac{3x^4}{L^3} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{x^6}{L^4} + \frac{x^4}{L^2} - \frac{2x^5}{L^3} \right) \ddot{\theta}_2(t) \right] dx
\end{aligned} \tag{5.58}$$

İntegrasyon işlemi yapılırsa (5.58) denklemleri izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
F_{u_1} &= \rho A \left[\left(x + \frac{x^3}{3L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \ddot{u}_1(t) + \left(\frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} \right) \ddot{u}_2(t) \right] \Big|_0^l \\
F_{v_1} &= \rho A \left[\left(\frac{4x^7}{7L^6} - \frac{6x^6}{L^5} + \frac{9x^5}{5L^4} + \frac{x^4}{L^3} - \frac{2x^3}{L^2} + x \right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{2x^7}{7L^5} - \frac{7x^6}{6L^4} + \frac{8x^5}{5L^3} - \frac{x^4}{2L^2} - \frac{2x^3}{3L} + \frac{x^2}{2} \right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{4x^7}{7L^6} + \frac{2x^6}{L^5} - \frac{9x^5}{5L^4} - \frac{x^4}{2L^3} + \frac{x^3}{L^2} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{2x^7}{7L^5} - \frac{5x^6}{6L^4} + \frac{3x^5}{5L^3} + \frac{x^4}{4L^2} - \frac{x^3}{3L} \right) \ddot{\theta}_2(t) \right] \Big|_0^l \\
F_{\theta_1} &= \rho A \left[\left(\frac{2x^7}{7L^5} - \frac{7x^6}{6L^4} + \frac{8x^5}{5L^3} - \frac{x^4}{2L^2} - \frac{2x^3}{3L} + \frac{x^2}{2} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{x^7}{7L^4} - \frac{4x^6}{6L^3} + \frac{6x^5}{5L^2} - \frac{x^4}{L} + \frac{x^3}{3} \right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{2x^7}{7L^5} + \frac{8x^6}{6L^4} - \frac{8x^5}{5L^3} + \frac{3x^4}{4L^2} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{x^7}{7L^4} - \frac{x^6}{2L^3} + \frac{3x^5}{5L^2} - \frac{x^4}{4L} \right) \ddot{\theta}_2(t) \right] \Big|_0^l \\
F_{u_2} &= \rho A \left[\left(\frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} \right) \ddot{u}_1(t) + \left(\frac{x^3}{3L^2} \right) \ddot{u}_2(t) \right] \Big|_0^l \\
F_{v_2} &= \rho A \left[\left(-\frac{4x^7}{7L^6} + \frac{2x^6}{L^5} - \frac{9x^5}{5L^4} - \frac{x^4}{2L^3} + \frac{x^3}{L^2} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(-\frac{2x^7}{7L^5} + \frac{8x^6}{6L^4} - \frac{8x^5}{5L^3} + \frac{3x^4}{4L^2} \right) \ddot{\theta}_1(t) + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{4x^7}{7L^6} - \frac{2x^6}{L^5} + \frac{9x^5}{5L^4} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(-\frac{2x^7}{7L^5} + \frac{5x^6}{6L^4} - \frac{3x^5}{5L^3} \right) \ddot{\theta}_2(t) \right] \Big|_0^l
\end{aligned}$$

$$F_{\theta_2} = \rho A \left[\left(\frac{2x^7}{7L^5} - \frac{5x^6}{6L^4} + \frac{3x^5}{5L^3} + \frac{x^4}{4L^2} - \frac{x^3}{3L} \right) \ddot{v}_1(t) + \left(\frac{x^7}{7L^4} - \frac{x^6}{2L^3} + \frac{3x^5}{5L^2} - \frac{x^4}{4L} \right) \ddot{\theta}_1(t) + \left(-\frac{2x^7}{7L^5} + \frac{5x^6}{6L^4} - \frac{3x^5}{5L^3} \right) \ddot{v}_2(t) + \left(\frac{x^7}{7L^4} + \frac{x^5}{5L^2} - \frac{x^6}{3L^3} \right) \ddot{\theta}_2(t) \right] \Big|_0^l \quad (5.59)$$

Yukarıdaki ifadelerde sınır değerler yerine konulup gerekli ara işlemler yapıldıktan sonra izleyen ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} F_{u_1} &= \frac{\rho AL}{3} \ddot{u}_1(t) + \frac{\rho AL}{6} \ddot{u}_2(t) \\ F_{v_1} &= \frac{156\rho AL}{420} \ddot{v}_1(t) + \frac{22\rho AL^2}{420} \ddot{\theta}_1(t) + \frac{54\rho AL}{420} \ddot{v}_2(t) - \frac{13\rho AL^2}{420} \ddot{\theta}_2(t) \\ F_{\theta_1} &= \frac{22\rho AL^2}{420} \ddot{v}_1(t) + \frac{4\rho AL^3}{420} \ddot{\theta}_1(t) + \frac{13\rho AL^2}{420} \ddot{v}_2(t) - \frac{3\rho AL^3}{420} \ddot{\theta}_2(t) \\ F_{u_2} &= \frac{\rho AL}{6} \ddot{u}_1(t) + \frac{\rho AL}{3} \ddot{u}_2(t) \\ F_{v_2} &= \frac{54\rho AL}{420} \ddot{v}_1(t) + \frac{13\rho AL^2}{420} \ddot{\theta}_1(t) + \frac{156\rho AL}{420} \ddot{v}_2(t) - \frac{22\rho AL^2}{420} \ddot{\theta}_2(t) \\ F_{\theta_2} &= \frac{-13\rho AL^2}{420} \ddot{v}_1(t) - \frac{3\rho AL^3}{420} \ddot{\theta}_1(t) - \frac{22\rho AL^2}{420} \ddot{v}_2(t) + \frac{4\rho AL^3}{420} \ddot{\theta}_2(t) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Matris formunda yazılırsa (5.60) denklemleri izleyen formda verilir:

$$\begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \\ F_{\theta_1} \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{\theta_2} \end{Bmatrix} = \frac{\rho AL}{420} \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{v}_1(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{v}_2(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\{F\} = [m]\{\ddot{\delta}\} \quad (5.62)$$

Burada $\{F\}$ vektörü efektif kuvvetleri, $[m]$ elemanın kütle matrisini, $\{\ddot{\delta}\}$ düğüm noktası ivmelerini gösterir.

5.3 Düzlem Çerçeve Elemanı Matrislerinin Genel Koordinatlarda İfadesi

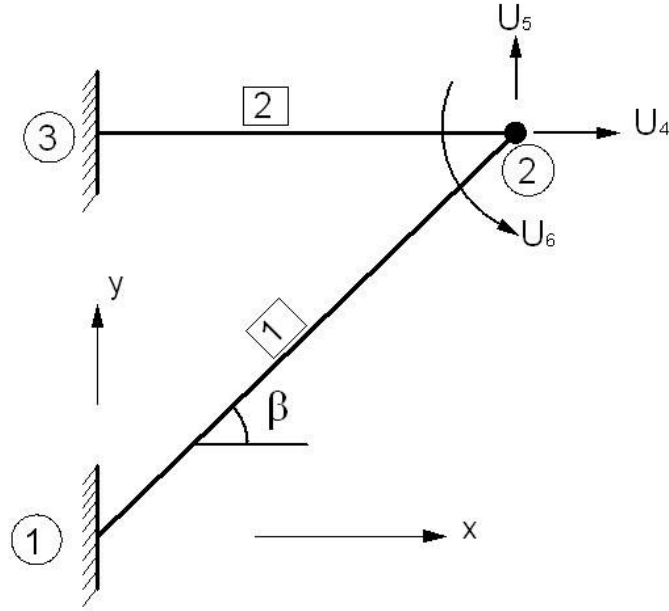
Düzlem çerçeve birden çok düğüm noktasından ve bu düğüm noktalarına birleşen değişik kesitlerdeki ve değişik konumlardaki elemanlardan oluşmaktadır. Elemanların fiziksel bağlantısı ve değişen yönlenmeleri birçok bireysel eleman eksen takımını bir araya getirmektedir. Bu da ortak bir eksen takımının seçilme zorunluluğunu ortaya koymaktadır. Bu ortak eksen takımı genel eksen takımı olarak adlandırılıp çerçeve sistemi için eksen takımını oluşturmaktadır. Genel eksen takımı çerçeve sisteminin yer değiştirmelerinin ifade edildiği referans eksen takımı olarak tariflenir. Böylelikle çerçeve bir sistemle çerçeveyi oluşturan elemanlar arasındaki bağ izleyen şekilde ifade edilmiştir:

1. Düğüm noktasına bağlanan her bir elemanın, eleman düğüm noktası yer değiştirmesi düğüm noktasının genel koordinat sistemindeki yer değiştirmesi ile aynıdır.
2. Her bir elemanın fiziksel karakteristikleri (rijitlik matrisi, uç yer değiştirmeleri ve uç kuvvetleri) genel koordinat sistemine dönüştürülmelidir. Böylece yapısal özellikler genel eksen takımında ifade edilir.

3. Bireysel eleman parametreleri problemin genel koordinat sisteminde çözümünden sonra, sonuçların eleman referans eksen takımına dönüştürülmesi ile elde edilebilir.

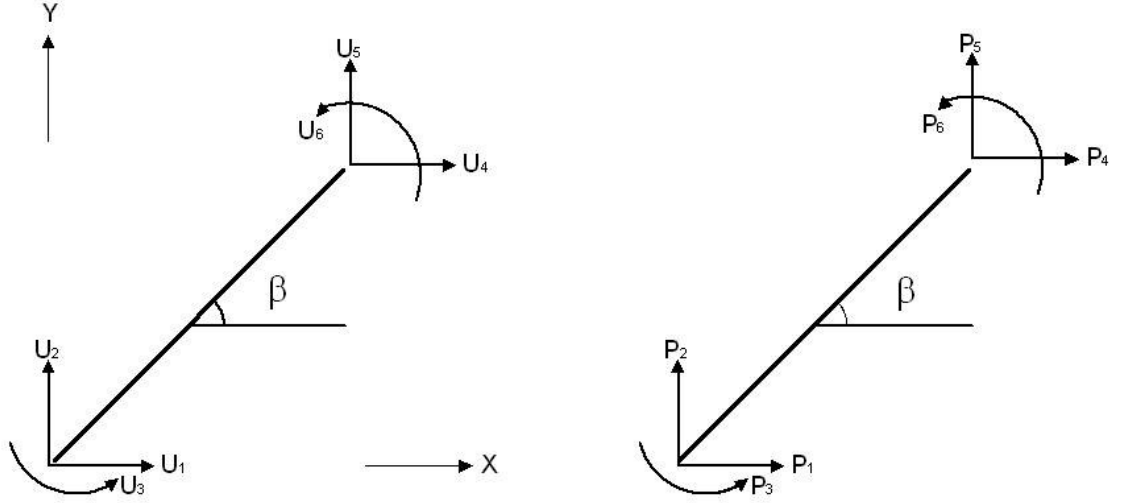
Eleman rijitlik matrisinin genel koordinat sistemine dönüştürülmesi izleyen örnekte verilecektir.

Şekil 5.3 deki çerçeve sistemi üç düğüm noktasından ve iki çubuktan oluşmaktadır. Bir numaralı çubuk genel eksen takımı ile β açısı yapmaktadır.



Şekil 5.3 Üç serbestlik dereceli düzlem çerçeve

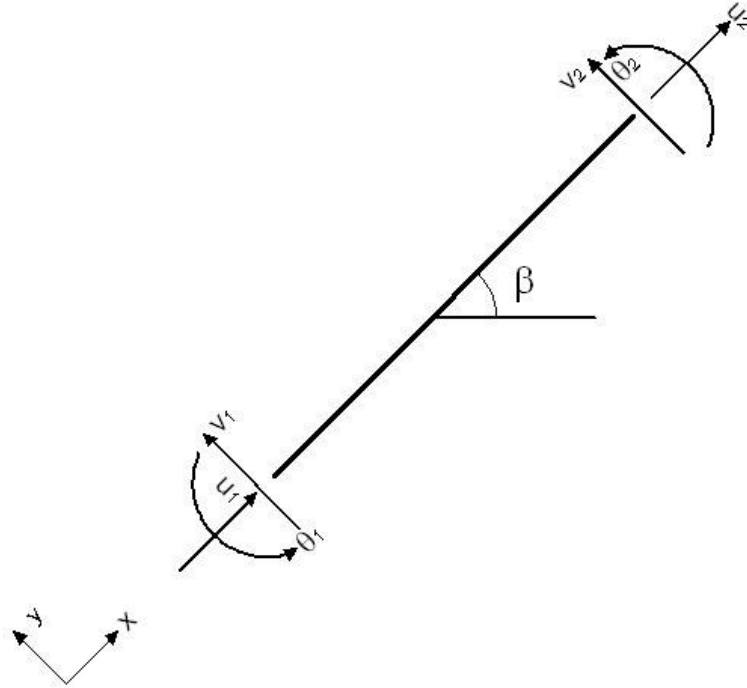
Şekil 5.4 de ise 1 numaralı elemanın genel eksen takımındaki çubuk uç yer değiştirmeleri ve düğüm noktası kuvvetleri verilmiştir.



Genel eksen takımındaki düğüm noktası yer değıştirmesi ve düğüm noktası kuvvetleri

Şekil 5.4 1 numaralı elemanın uç genel eksen takımındaki düğüm noktası yer değıştirmesi ve düğüm noktası kuvvetleri

Numarası 1 olan elemanın bireysel eksen takımındaki uç yer değıştirmeleri şekil 5.4 de verilmiştir. Şimdi genel koordinat sistemindeki düğüm noktası yer değıştirmeleri ile eleman bireysel eksen takımındaki çubuk uç yer değıştirmeleri arasındaki bağıntı izleyen şekilde yazılır:



Şekil 5.5 Eleman koordinat eksen takımında düğüm noktası yer değıştirmeleri

$$u_1 = U_1 \cos \beta + U_2 \sin \beta$$

$$v_1 = U_1 \sin \beta + U_2 \cos \beta$$

$$\theta_1 = U_3$$

$$u_2 = U_4 \cos \beta + U_5 \sin \beta$$

$$v_2 = -U_4 \cos \beta + U_5 \sin \beta$$

$$\theta_2 = U_6 \tag{5.63}$$

Matris formunda yazılırsa (5.63) eşitlikleri izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = [T]\{U\} \tag{5.64}$$

$$[\delta] = [T][U] \tag{5.65}$$

Burada $[T]$, elemanın eleman eksen takımındaki yer değiştirmeler ile söz konusu elemanın genel eksen takımındaki yer değiştirmeleri arasında ilişki kuran dönüşüm matrisi olarak tariflenir. Aynı bağıntı eleman uç kuvvetleri ile elemanın genel koordinat sistemindeki düğüm noktası kuvvetleri arasında mevcuttur; dolayısıyla çubuk uç kuvvetleri ile düğüm noktası kuvvetleri arasındaki bağıntı izleyen şekilde verilir:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{pmatrix} = [T]\{P\} \quad (5.66)$$

$$[p] = [T][P] \quad (5.67)$$

Eleman bireysel eksen takımında çubuk uç kuvvetleri ile uç yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı izleyen şekilde verilmiştir:

$$[p] = [k][\delta] \quad (5.68)$$

Genel eksen takımındaki yer değiştirmeler bilirse (5.68) ifadesi izleyen şekilde yazılır:

$$[p] = [k][T][U] \quad (5.69)$$

(5.69) ifadesinde (5.67) denklemini kullanılırsa izleyen eşitlik elde edilir:

$$[T][P] = [k][T][U] \quad (5.70)$$

(5.70) eşitliğinin her iki tarafı $[T]^{-1}$ ile çarpılırsa izleyen eşitlik elde edilir:

$$[T]^{-1}[T][P] = [T]^{-1}[k][T][U] \quad (5.71)$$

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (5.72)$$

(5.72) ifadesini kullanılırsa, genel koordinatlarda dış yük – yer değiştirme bağıntısı izleyen şekilde yazılır:

$$[P] = [T]^T [k] [T] [U] \quad (5.73)$$

Eleman rijitlik matrisinin genel koordinatlardaki ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$[K] = [T]^T [k] [T] \quad (5.74)$$

Kütle matrisinin ve sönüm matrisinin genel eksen takımına dönüştürülmesinde yukarıda açıklanan işlemler sırası ile uygulanır.

$$[M] = [T]^T [m] [T] \quad (5.75)$$

$$[C] = [T]^T [c] [T] \quad (5.76)$$

5.4 Sistem Matrislerinin Oluşturulması

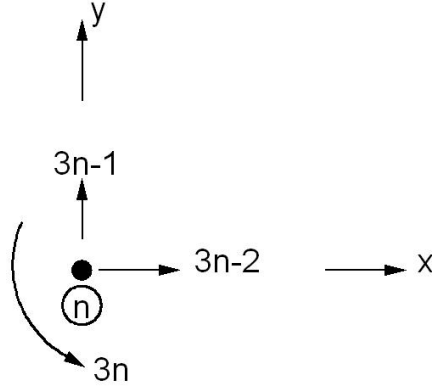
5.4.1 Sistem Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

Çerçeve sisteminin rijitlik matrisi genel koordinat sistemindeki yer değiştirmeler üzerine kurulur. Sistem rijitlik matrisinin elde edilişi, çerçeve sistemini oluşturan elemanların genel eksen takımındaki rijitlik matrisleri toplanarak gerçekteştirilir. Bunun için öncelikle sistemi oluşturan elemanlar numaralandırılır. Daha sonra düğüm noktaları ve düğüm noktalarının serbestlikleri numaralandırılır. Düğüm noktalarının serbestliklerinin numaralandırılması düğüm noktası numarasına bağlı olarak yapılır. Her bir düğüm noktasının üç serbestliği olduğundan bu serbestliklerin numaralandırılması şekil 5.6 de verildiği üzere n numaralı düğüm noktasının x yönündeki yer değiştirmesi U_x , y yönündeki yer değiştirmesi U_y ve saat yönünün tersi yönünde dönmesi U_θ olmak üzere izleyen şekilde numaralandırılır.

$$(U_x)_n = 3n - 2 \quad (5.77a)$$

$$(U_y)_n = 3n - 1 \quad (5.77b)$$

$$(U_\theta)_n = 3n \quad (5.77c)$$



Şekil 5.6 Düzüm noktası serbestliklerinin numaralandırılması

Böylelikle sistemin genel yer değiştirmeleri tariflenmiş olur ve bundan sonra her bir elemanın uç serbestlikleri ile bağlı bulunduğu düğüm noktasının serbestliği arasındaki ilişki kurulur.

Sistem rijitlik matrisinin elde edilmesi için benimsenen kabuller:

1. Elemanların birleştikleri genel düğüm noktaları i ve j ile gösterilir.
2. Koordinat sisteminin orijini i noktasına yerleştirilir ve eleman x aksı i den j ye yönlenince pozitif alınır.
3. Eleman düğüm notalarındaki yer değiştirmeler U_{3i-2} , U_{3i-1} , U_{3i} ve U_{3j-2} , U_{3j-1} , U_{3j} olarak alınır. Sistem düğüm noktası numarası olan i ve j ler kullanılarak her bir eleman için 1×6 boyutunda eleman yer değiştirme yeri vektörü

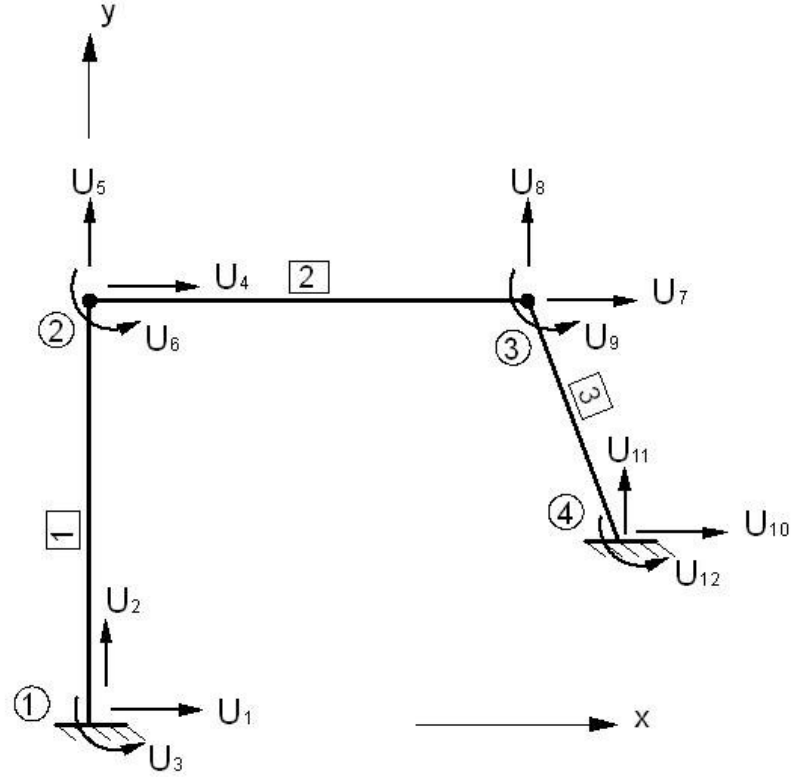
$$[L^e] = [3i-2 \quad 3i-1 \quad 3i \quad 3j-2 \quad 3j-1 \quad 3j] \quad (5.78)$$

olarak tanımlanır. Buradaki her bir değer genel yer değiştirme numarası olup eleman rijitlik matrisinin 1, 2, 3, 4, 5, 6 numaralı satır ve sütunlarının genel rijitlik matrisinde hangi satır ve sütunlara geleceğini ve karşı gelen genel yer değiştirme numaralarını gösterir.

Böylelikle genel yer değiştirmelerle eleman uç yer değiştirmeleri arasındaki ilişki kurulmuş olur ve bu ilişkiye göre elemanların genel eksen takımındaki rijitlik matrisleri toplanarak sistem rijitlik matrisi kurulmuş olur.

Her bir düğüm noktası üç yer değiştirme serbestliğine sahip olduğundan sistem rijitlik matrisi n tane düğüm noktalı sistemde $3n \times 3n$ boyutundadır.

Şekil 5.7 de verilen çerçeve sistem göz önüne alınırsa; sistem dört düğüm noktasından ve üç çerçeve elemanından oluşmaktadır. Eleman numaraları, düğüm noktası numaraları ve sistemin genel yer değiştirmeleri şekil üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5.7 6 serbestlik dereceli düzlem çerçeve

Her bir düğüm noktasının yer değiştirme serbestliği (5.77) ifadeleri kullanılarak izleyen şekilde numaralandırılır:

Çizelge 5.1 Düğüm noktası serbestliklerinin numaralandırılması

Düğüm noktası (n)	Düğüm Noktası Yer Değiştirmesi		
	$U_{x(3n-2)}$	$U_{y(3n-1)}$	$U_{\theta(3n)}$
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	10	11	12

Her bir elemanın i ve j uçlarındaki düğüm noktası numaraları izleyen şekilde yazılır:

<u>Eleman no:</u>	<u>i ucu</u>	<u>j ucu</u>
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Bundan sonra genel eksen takımında eleman uç serbestliklerinin numaralandırılması (5.78) denklemini kullanılarak yapılır. Bir numaralı elemanın genel koordinat sistemindeki uç yer değiştirme numaraları izleyen şekilde verilir:

$$[L^1] = [(3 \times 1 - 2) \quad (3 \times 1 - 1) \quad (3 \times 1) \quad (3 \times 2 - 2) \quad (3 \times 2 - 1) \quad (3 \times 2)] \quad (5.79)$$

$$[L^1] = [(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6)]$$

İki numaralı elemanın uç yer değiştirme numaraları izleyen şekilde verilir:

$$[L^2] = [(3 \times 2 - 2) \quad (3 \times 2 - 1) \quad (3 \times 2) \quad (3 \times 3 - 2) \quad (3 \times 3 - 1) \quad (3 \times 3)] \quad (5.80)$$

$$[L^2] = [(4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9)]$$

Üç numaralı elemanın uç yer değiştirme numaraları izleyen şekilde verilir:

$$[L^3] = [(3 \times 3 - 2) \quad (3 \times 3 - 1) \quad (3 \times 3) \quad (3 \times 4 - 2) \quad (3 \times 4 - 1) \quad (3 \times 4)] \quad (5.81)$$

$$[L^3] = [(7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12)]$$

Böylelikle her bir elemanın uç yer değiştirmeleri ile genel koordinatlardaki uç yer değiştirme numaraları eşleştirilmiş olup izleyen çizelgede verilmiştir:

Çizelge 5.2 Eleman uç yer değistirmelerinin numaralandırılması

Çubuk Uç Yer Değistirmeleri	Genel Eksen Takımında Çubuk Uç Yer Değistirme Numaraları		
	Eleman No	Eleman No	Eleman No
	1	2	3
1	1	4	7
2	2	5	8
3	3	6	9
4	4	7	10
5	5	8	11
6	6	9	12

Sistem genel yer değistirmeleri ile karşı gelen eleman uç yer değistirmeleri izleyen tabloda verilmiştir.

Çizelge 5.3 Genel yer değistirmeler ile karşı gelen eleman uç yer değistirmeleri

Genel yer değistirmeler	Eleman No 1	Eleman No 2	Eleman No 3
1	1		
2	2		
3	3		
4	4	1	
5	5	2	
6	6	3	
7		4	1
8		5	2
9		6	3
10			4
11			5
12			6

Burada 1 numaralı elemanın uç yer değiştirmeleri sistem rijitlik matrisinin ilk altı serbestliği ile çakışmaktadır. Yani bu 12×12 boyutunda olan rijitlik matrisinin K_{11} değerine 1 numaralı elemanın $k_{11}^{(1)}$ değerinin eklenmesinin göstergesidir. 2 numaralı elemanın bir yönündeki uç deplasmanı global eksen takımında dört numaralı yer değiştirme ile eşleşmiştir. Bu da 2 numaralı elemanın rijitlik matrisinin $k_{11}^{(2)}$ değerinin sistem rijitlik matrisinde K_{44} ifadesine ekleneceğini gösterir. Bu durumda $K_{44} = k_{14}^{(1)} + k_{11}^{(2)}$ olur. Benzer şekilde her elemanın rijitlik matrisi sistem rijitlik matrisinde yerine yazılarak sistem rijitlik matrisi kurulur.

5.4.2 Sistem Kütle Matrisinin Oluşturulması

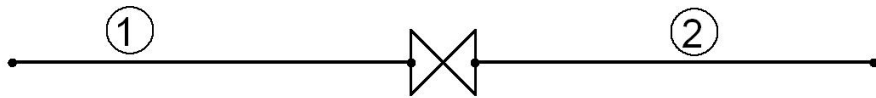
Sistem kütle matrisinin oluşturulmasında da tıpkı rijitlik matrisinde açıklanan işlemler sırası ile uygulanır.

5.4.3 Sistem Sönüm Matrisinin Oluşturulması

Sistem sönüm matrisi, ere ve elemanlarının sönüm matrisi ve dönme elamanın sönüm matrisinin toplamından oluşmaktadır. Bolum 5 de belirtildiği gibi sönüm matrisi rijitlik matrisinin η katı olmaktadır. Dolayısıyla sistem sönüm matrisi, düzlem çerçeveyi oluşturan elemanların rijitlik matrisinin η katı ile dönme elamanın rijitlik matrisinin η_e katının toplamından oluşmaktadır.

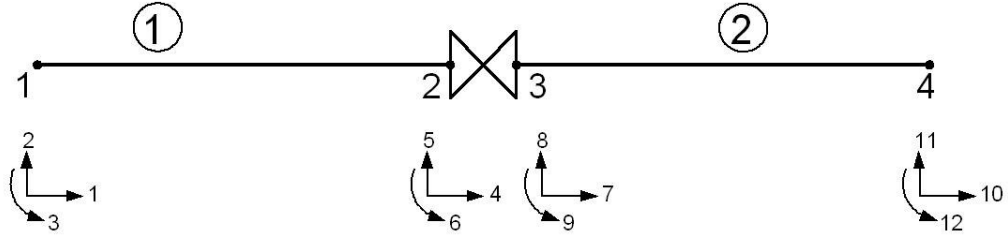
5.5 Düzlem ere ve Elemanı Olarak Dönme Elemanı

Dönmeye karşı elastik ara bağ durumu aşağıdaki şekil üzerinde açıklanmaktadır. İzleyen şekilde iki eleman birbirine dönmeye karşı elastik bağ ile bağlıdır.



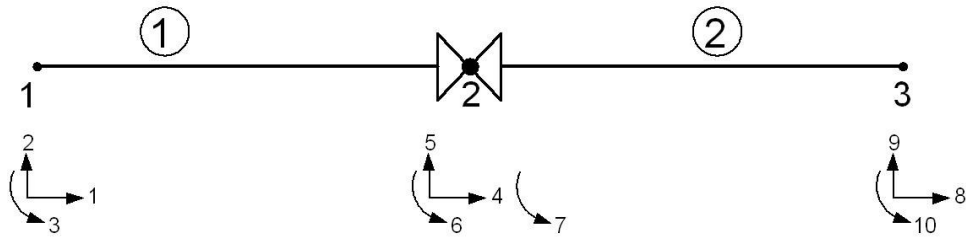
şekil 5.8 İki ere ve elemanını birleştiren dönmeye karşı elastik bağ

Şimdi düğüm noktaları ve serbestlikleri numaralandırılırsa şekilde verildiği gibi dört düğüm noktası ve on iki uç serbestliği elde edilir.



Şekil 5.9 Elastik ara bağ durumunda serbestlikler

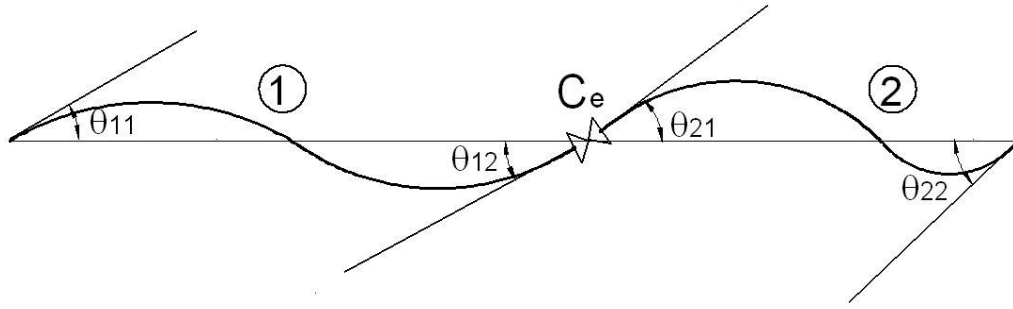
Dönme elemanının sadece dönme serbestliği olup uzama ve çökme serbestliklerini sürekli bağladığı bilindiğinden 4 numaralı yer değiştirme 7 numaralı yer değiştirmeye ve 5 numaralı yer değiştirme 8 numaralı yer değiştirmeye eşittir. Böylelikle sistem tekrar numaralandırılırsa ve dönme elemanının boyu ihmal edilecek kadar küçük olduğundan 2 numaralı düğüm noktası ile 3 numaralı düğüm noktası tek bir düğüm noktası olarak ele alınır ve sistem aşağıdaki şekli alır.



Şekil 5.10 Elastik ara bağ durumunda serbestlikler

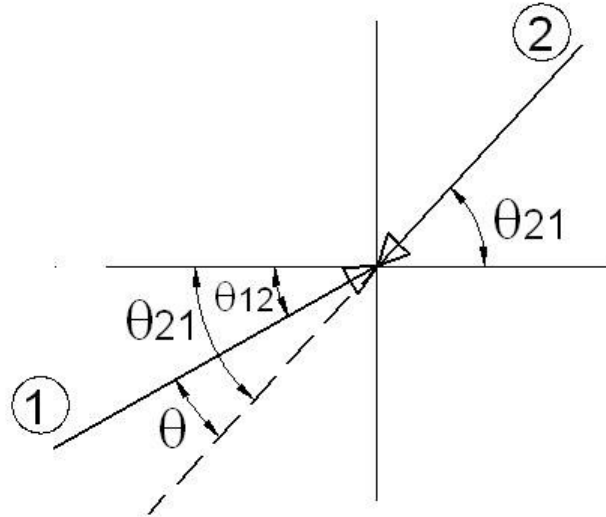
Şekil 5.10 de görüldüğü üzere sistem üç düğüm noktasından ve on serbestlik derecesinden oluşmuştur. Bu durumda dönme elemanının, bağlandığı çubukların dönme sürekliliğini ayrıklaştıran ve dolayısıyla sisteme sadece ek dönme serbestliği getiren boyu sonsuz küçük olan ara bir eleman olduğu söylenebilir.

Şekil 5.11 de gösterildiği üzere elastik ara bağlantının olduğu noktada çubukların birleşen uçlarında elemanların rijitliklerine bağlı olarak birbirinden farklı dönmeler meydana gelecektir.



Şekil 5.11 Düzlem çerçevede elastik ara bağ

Şekil 5.12 da verilen elastik bağlantının olduğu nokta ele alınırsa 2 numaralı çubuk bağlantı noktasında θ_{21} dönmesi yapmış olup, 1 numaralı çubuk ise θ_{12} dönmesi yapmıştır. İki dönme arasındaki fark θ kadardır.



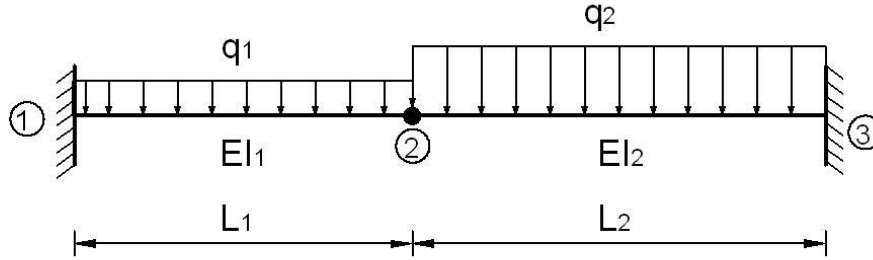
Şekil 5.12 2 numaralı düğüm noktası yer değişirmesi

Yayın i ve j uçlarının birbirlerine göre yaptığı göreceli yer değişirme, i ve j ucunun süpürdükleri açı farkı olarak tanımlanır. Burada gösterildiği üzere dönme elemanı sistemde sadece dönme süreksizliği meydana getirmektedir ve dönme elemanının i ve j uçlarındaki dönme serbestliği bağlandıkları çubukların ilgili uç dönme yer değişirmeleridir.

5.6 Elastik Ara Bağlı Sistem Rijitlik Matrisinin Kurulması

Düzlem çerçeveyi oluşturan sistemde dönme elemanı ilgili düğüm noktasında bu düğüm noktasına bağlanan elemanların birleşim noktasında elemana bağlı olarak tarif edilir. Dönme elemanı tariflendiği elemanın ilgili uç noktasındaki dönme serbestliğini bağlandığı düğüm noktasından ayırır. Dolayısıyla ilgili düğüm noktasında ek bir dönme serbestliği oluşarak birbirinden ayırık iki dönme serbestliği ortaya çıkar. Bu iki dönme serbestliği dönme elemanının i ve j uç dönmelerini oluşturur.

Hesap yolunu açıklamak için şekil 5.6.1 de verilen iki açıklıklı sürekli kiriş göz önüne alınsın. İki açıklığın yükleri, açıklıkları ve rijitlikleri farklı olsun. Çubuklar 1 ve 3 numaralı düğüm noktalarında ankastre bağlı, 2 numaralı düğüm noktasında ise birbirlerine dönmeye karşı elastik olan bağla bağlı olsun ve elastik bağ bir numaralı çubuk üzerinde alınsın. Bu noktada momentle orantılı bir dönme olacağı için sistemin elastik eğrisi iki numaralı düğüm noktasında dönme süreksizliği gösterir.



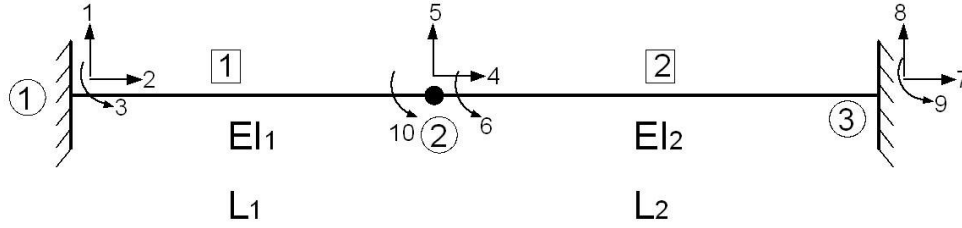
Şekil 5.13 Elastik ara bağlı bir sistem

Şekil 5.14 de sistemin düğüm noktası numaraları, eleman numaraları ve serbestlik yönleri gösterilmiştir. Burada öncelikle sistem ve sistemdeki genel yer değiştirmeler elastik ara bağ göz önüne alınmaksızın bölüm 5.4 de anlatıldığı gibi numaralandırılır. Daha sonra sırasıyla sistemde bulunan elastik bağlar buldukları düğüm noktalarına ek dönme serbestlikleri eklenerek tariflenir. Böylelikle elastik bağın bulunduğu elemanın uç dönme yer değiştirmesi bu düğüm noktasındaki ek dönme serbestliği olur.

Sistemin serbestliği elastik bağ sayısınca artar. Ek serbestliklerin numaralandırılması n düğüm noktalı sistemde e elastik bağ sayısı olmak üzere izleyen şekilde yapılır:

$$\text{Ek serbestlik numarası} = 3n + k \quad k = 1 : e \quad (5.82)$$

Şekil 5.13 deki sistem üç düğüm noktasına, bir elastik ara bağlantıya ve dolayısıyla 10 adet serbestliğe sahiptir. Sistemde 2 numaralı düğüm noktasında dönme elemanı bulunduğu için ek bir dönme serbestliği ortaya çıkar. Şekil 5.13 deki sistem için dönme elemanının i ucu 1 numaralı elemanın j ucu, dönme elemanının j ucu 2 numaralı elemanın i ucudur. Sistemin yer değiştirme serbestliklerinin numaralandırılması şekil 5.14 de verilmiştir.



Şekil 5.14 Sistem serbestlikleri

Düğüm noktasında oluşan ek serbestlik dönme elemanının tariflendiği elemanın genel koordinatlardaki uç dönmesini oluşturur. Şekil 5.14 deki sistem için dönme elemanı 1 numaralı eleman üzerinde tariflendiği için oluşan ek serbestlik 1 numaralı çubuğun j ucunun dönme serbestliği olup dönme elemanının da i ucunun serbestliğidir. Yani bu problem için dönme elemanının i ucu numarası 10, j ucu numarası 6 olmaktadır.

Bir numaralı elemanın uç yer değiştirmeleri ile sistem genel yer değiştirmelerinin karşılaştırılması izleyen çizelgede verilir.

Çizelge 5.4 Genel yer değiştirmeler ile 1 numaralı elemanın uç yer değiştirmelerinin karşılaştırılması

Eleman Uç Yer değiştirmeleri	Genel Yer değiştirmeler
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	10

Burada 6 numaralı genel yer değiştirme serbestliği 2 numaralı elemanın sol ucu, 10 numaralı genel yer değiştirme serbestliği 1 numaralı elemanın sağ ucu dönmeleri olarak tariflenmiştir. Dönme elemanın uç yer değiştirmeleri ile sistem genel yer değiştirmelerinin karşılaştırılması izleyen çizelgede verilir.

Çizelge 5.5 Genel yer değiştirmeler ile dönme elemanın uç yer değiştirmelerinin karşılaştırılması

Dönme Elemanı Uç Yer değiştirmeleri	Genel Yer Değiştirmeler
1	10
2	6

İki serbestlik dereceli dönme elemanın rijitlik matrisi daha önce izleyen şekilde (2.42) ile verilmişti:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_e & -C_e \\ -C_e & C_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 6 \end{matrix} \quad [C_e] = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -C_e & C_e \end{bmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 6 \end{matrix}$$

İki numaralı elemanın uç yer değiştirmeleri ile sistem genel yer değiştirmelerinin karşılaştırılması izleyen çizelgede verilir:

Çizelge 5.6 Genel yer değiştirmeler ile 2 numaralı elemanın uç yer değiştirmelerinin karşılaştırılması

Eleman Uç Yer değiştirmeleri	Genel Yer değiştirmeler
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8
6	9

Dönme elemanı burada noktasal eleman olarak ele alındığından sistemde eleman olarak numaralandırılmamaktadır.

Sistem genel yer değiştirmeleri ile eleman uç yer değiştirmeleri izleyen çizelgede karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.7 Genel yer değiştirmeler ile elemanların uç yer değiştirmelerinin karşılaştırılması

Genel yer Değiştirmeler	Eleman No : 1	Elastik Bağ	Eleman No : 2
1	1		
2	2		
3	3		
4	4		1
5	5		2
6		2	3
7			4
8			5
9			6
10	6	1	

Burada 1 numaralı elemanın uç yer değiştirmeleri sistem rijitlik matrisinin ilk beş serbestliği ile çakışmaktadır fakat elemanın altıncı serbestlik derecesi yönündeki uç yer değiştirmesi genel eksen takımında on numaralı yer değiştirme ile çakışmaktadır. Yani bu 10 x 10 boyutunda olan rijitlik matrisinin K_{1010} değerine bir numaralı elemanın $k_{66}^{(1)}$ değerinin eklenmesinin göstergesidir. Dönme elemanının serbestlikleri genel eksen takımında 6 ve 10 numaralı yer değiştirme serbestliği ile çakışmaktadır. Bu dönme elemanı rijitlik matrisinin $k_{11}^{(c)}$ değerinin sistem rijitlik matrisinde K_{1010} değerine eklenmesi, $k_{12}^{(c)}$ değerinin K_{106} değerine eklenmesini, $k_{21}^{(c)}$ değerinin K_{610} değerine eklenmesini, $k_{22}^{(c)}$ değerinin K_{66} değerine eklenmesini gösterir.

Mesnet koşulları uygulanmış sistem rijitlik matrisi izleyen şekilde verilir:

$$[S]= \begin{matrix} & U_4 & U_5 & U_6 & U_{10} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{EA_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_1}{L_1^3} + \frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{-6EI_1}{L_1^2} \\ 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} + C_e & -C_e \\ 0 & \frac{-6EI_1}{L_1^2} & -C_e & \frac{4EI_1}{L_1} + C_e \end{array} \right] & \begin{matrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{matrix} \end{matrix}$$

Sistem serbestlikleri ile dış kuvvet arasındaki ilişki izleyen şekilde verilir:

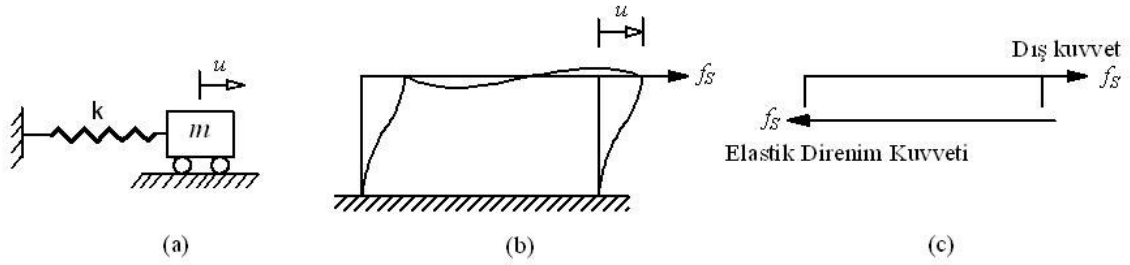
$$\left\{ \begin{matrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_{10} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{EA_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_1}{L_1^3} + \frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{-6EI_1}{L_1^2} \\ 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} + C_e & -C_e \\ 0 & \frac{-6EI_1}{L_1^2} & -C_e & \frac{4EI_1}{L_1} + C_e \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{matrix} \right\}$$

6. YAPI DİNAMIĞI İÇİN TEMEL BİLGİLER*

6.1 Sistem Tepki Kuvvetleri ve Sistem Modeli

6.1.1 Elastik Yay Kuvveti

Sistemin serbestliği doğrultusunda yer değiştirme etkisine karşı direnen iç kuvvet dış kuvvete eşit ve ters yönlüdür. Sistemin şekil 6.1 a da verilen yay modeli ele alınırsa yer değiştirme sonucunda yayda oluşan kuvvet, sistemin yer değiştirme etkisine gösterdiği direnimdir. Bu kuvvet – yer değiştirme ilişkisi, yer değiştirmenin küçük değerleri için doğrusaldır. Fakat bu ilişki büyük yer değiştirme değerleri için doğrusal olmaktan çıkar. Her iki durum için kuvvet-yer değiştirme ilişkisi şekil 6.2 de verilmiştir.

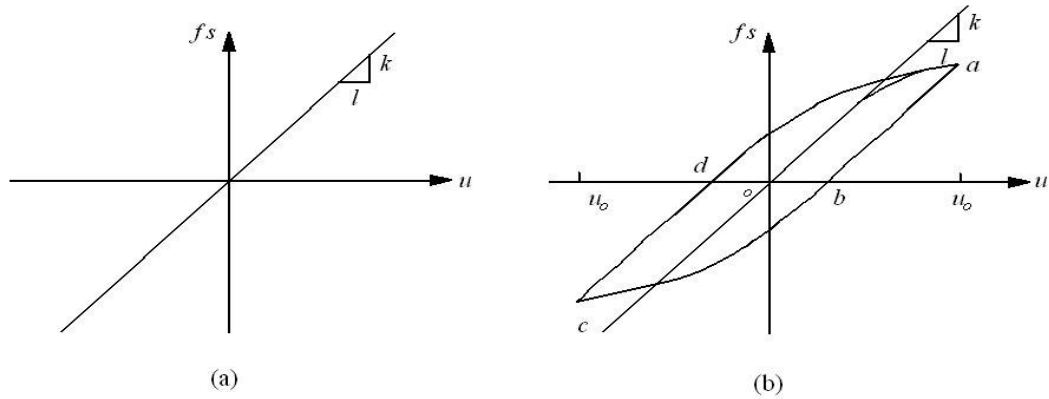


Şekil 6.1 a) Tek serbestlik dereceli sistem yay modeli b) Sisteme etkiyen yük c) sistemin serbest cisim diyagramı

Şekil 6.2 de gösterildiği gibi elastik yay kuvveti ile yer değiştirme arasında izleyen bağıntı vardır:

$$f_s = k u \quad (6.1)$$

Burada k sistemin rijitliğini temsil edip birimi kuvvet / uzunluk şeklindedir.



Şekil 6.2 Elastik yay kuvveti ile yer değiştirme arasındaki ilişki a) Doğrusal kuvvet-yer değiştirme ilişkisi b) Doğrusal olmayan kuvvet-yer değiştirme ilişkisi

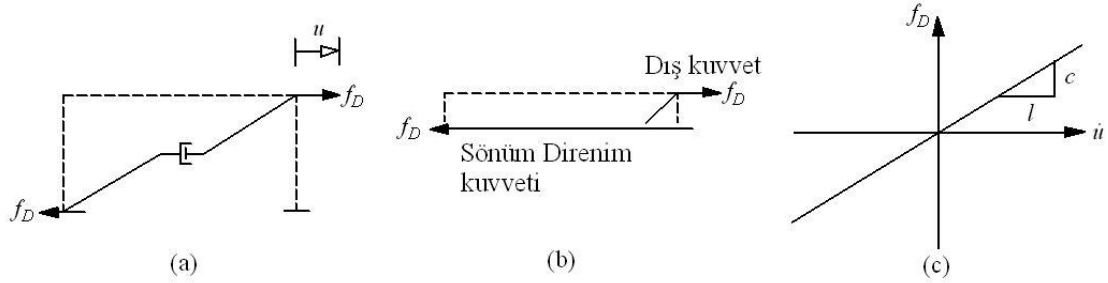
* Bölüm 6, Chopra (1993) nın kitabından çevrilmiştir.

6.1. 2 Sönüm kuvveti

Serbest titreşim genliğinin zamanla yok olması işlemi sönüm olarak isimlendirilir. Titreşim hareketi yapan sistemin enerjisi çeşitli mekanizmalar tarafından sönümlenir ve aynı zamanda birden fazla mekanizma aynı anda bulunabilir. Basit laboratuvar modelleri gibi temiz (clean) sistemlerde sönümlenen enerjinin çoğunluğu tahminen malzemenin tekrarlı elastik şekil değiştirmesinin ve bir katı şekil değiştirdiğinde ortaya çıkan içsel sürtünmenin termal etkisinde ortaya çıkar.

Bununla birlikte gerçek yapılarda enerji sönümüne diğer birçok mekanizma katkıda bulunur. Titreşen bir binada bunlar çelik birleşimlerindeki sürtünmeyi, betondaki mikro çatlakların açılmasını ve kapanmasını, yapının bölme duvarları gibi yapısal olmayan elemanları ile kendisi arasındaki sürtünmeyi kapsar. Gerçek bir yapıda bu enerjiyi sönümleyen mekanizmaların matematiksel olarak tariflenmesi veya belirtilmesi imkânsız görülmektedir.

Sonuç olarak, gerçek yapılardaki sönüm genellikle yüksek oranda idealleştirilmiş tarzda ifade edilir. Birçok amaçlar için tek serbestlik dereceli yapıdaki gerçek sönüm lineer viskoz sönümleyici ile tatmin edici olarak idealize edilebilir. Lineer viskoz sönümleyici yaklaşımında sönüm katsayısı öyle seçilmiştir ki onun sönümlediği titreşim enerjisi gerçek yapıda mevcut olan tüm sönüm mekanizmalarının birleşik etkisine eşdeğerdir. Bu idealleştirme eşdeğer viskoz sönüm olarak isimlendirilir.



Şekil 6.3 a) Çerçeve sistemine etkiyen sönüm kuvveti ve viskoz sönümleyici b) Serbest cisim diyagramı c) Sönüm kuvveti ile yer değiştirmenin hızı arasındaki ilişki

Şekil 6.3 u yer değiştirmesi doğrultusunda f_D kuvvetine maruz lineer viskoz sönümleyiciyi gösterir. Sönümleyicilerdeki iç kuvvet, dış kuvvet f_D kuvvetine eşit fakat ters yöndedir. Burada viskoz sönümleyicinin serbest cisim diyagramı çerçeveden soyutlanıp ayrı olarak çizildiğinden sönüm sebebiyle ortaya çıkan f_D kuvveti sağ tarafta dış kuvvet olarak kabul edilmiştir.

Şekil 6.3 c de gösterildiği gibi sönüm kuvveti f_D ile yer değiştirme hızı \dot{u} arasında izleyen ilişki vardır.

$$f_D = c \dot{u} \quad (6.2)$$

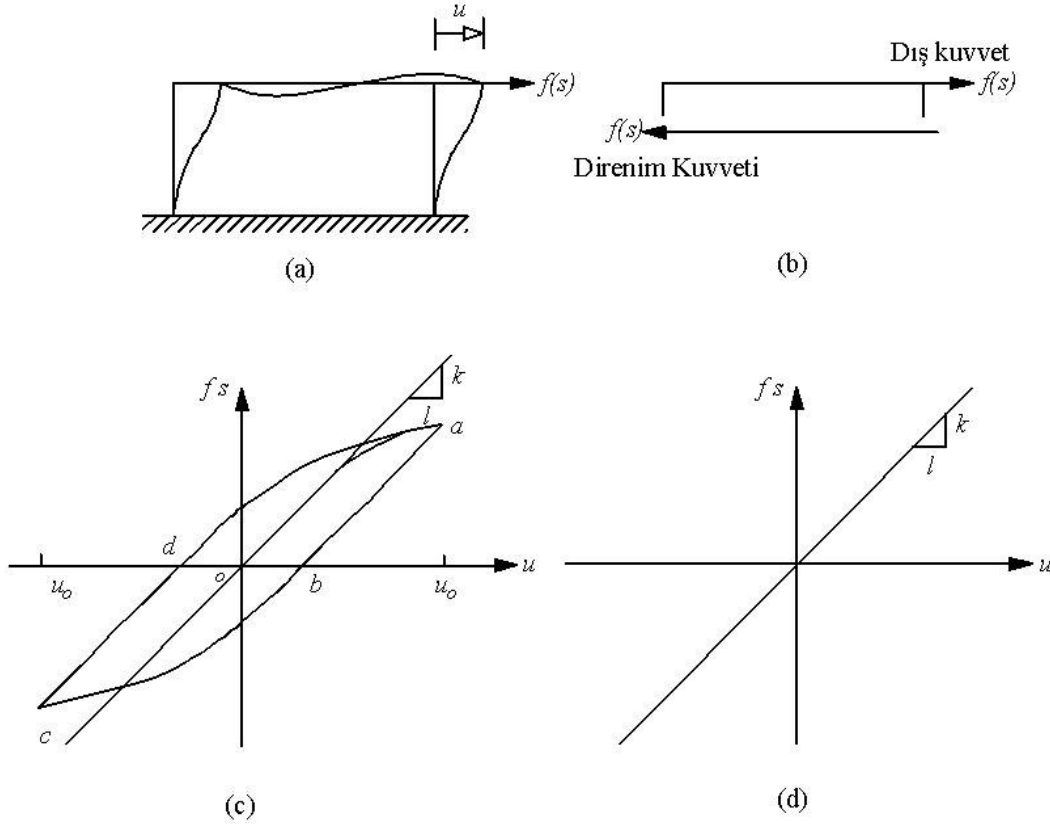
Burada c viskoz sönüm katsayısıdır ve birimi kuvvet zaman/uzunluk şeklindedir.

Yapının rijitliğinin tersine sönüm katsayısı yapının boyutlarından ve yapısal elemanların boyutlarından hesaplanamaz. Bu şaşırıcı olmamalıdır. Çünkü gerçek yapıların titreşim enerjisini sönümleyen tüm mekanizmaları belirlemek makul değildir. Böylece yapılar gerçek yapılar üzerindeki titreşim testleri sönüm katsayısını hesaplamak için veri sağlarlar. Bunlar serbest titreşim deneylerinden elde edilen veriler olabilir; serbest titreşimde hareketin ölçülen yok olma hızı sönüm katsayısını hesaplamada bir taban ortaya koyacaktır. Aynı zamanda zorlanmış titreşim deneylerinden de sönüm özelliği belirlenebilir.

Tüm yapının lineer elastik limiti dahilindeki şekil değiştirme genliklerindeki enerji sönümünü modellemek için eşdeğer viskoz sönümleyici kabulü yapılacaktır.

Şekil değiştirmelerin bu aralığı üzerinde deneylerden elde edilen sönüm katsayısı c şekil değiştirme genliği ile değişebilir. Sönüm özelliğinin bu nonlineerliği dinamik analizde açıkça göz önüne alınmaz. Bu umulan şekil değiştirme genliği için uygun bir sönüm katsayısı değeri seçimi ile dolaylı olarak dikkate alınır. Bu şekil değiştirme genliği genellikle yapının lineer elastik limiti ile alakalı şekil değiştirme olarak ele alınır.

Daha büyük şekil değiştirmelerde elastik olamayan davranış yüzünden ilave enerji sönümlenir. Çevrimsel kuvvetler ve şekil değiştirmeler altında bu davranış bir yük şekil değiştirme hysteresis döngüsünü ifade eder. Bu durumu ifade eden yük şekil değiştirme eğrisi şekil 6.4.c de gösterilmiştir.



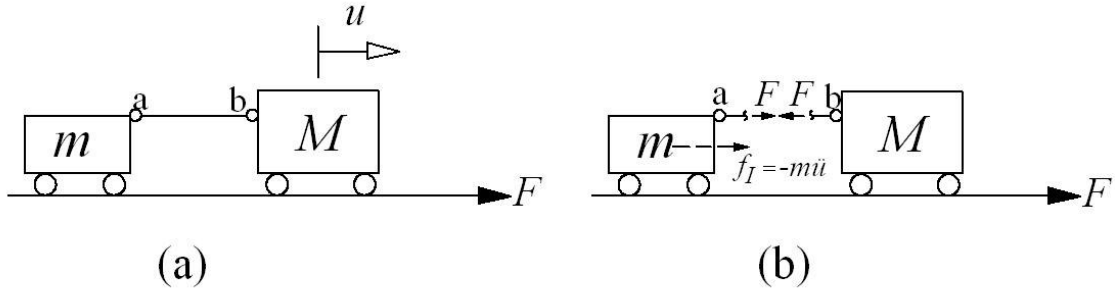
Şekil 6.4 a) Çerçeve sistemine etkiyen yay kuvveti b) Serbest cisim diyagramı c) Elastik olmayan davranış d) Elastik davranış

Şekil değiştirme limitleri $\pm u_0$ arasındaki bir deformasyon çevrimi esnasında sönmülenen sönüm enerjisi şekil 6.4 c de verilen abcd a hysteresis döngüsü dahilindeki alan ile verilir. Bu enerji sönümü genellikle viskoz sönümleyici ile modellenmez. Özellikle eğer tahrik deprem zemin hareketi ise bu böyledir. Bunun yerine elastik olmayan davranış vasıtası ile sönmülenen enerjiyi hesaba katmak için en çok yaygın doğru ve doğru bir yaklaşım; direnimsel kuvveti ve şekil değiştirme arasındaki elastik olmayan ilişkiyi bilmektir.

Böylesi bir yük-şekil değiştirme ilişkisi küçük şekil değiştirme hızlarında yapılar veya yapısal bileşenler üzerindeki deneylerden elde edilir. Böylece hız bağımlı etkilerden ortaya çıkan enerji sönümü dışarıda bırakılmış olur. Genel yaklaşım, lineer elastik sınır dahilindeki daha küçük deformasyonlar için daha önce tanımlanan viskoz sönümleyicinin aynısı ile şekil değiştirmelerin elastik olmayan aralığındaki bu sönüm modellenir.

6.1.3 Kütle (Atalet) Kuvveti

Şekil 6.5 a da pozitif x yönünde \ddot{u} ivmesi ile hareket eden M kütleli cisim rijit ab bağı ile m kütleli cisimle bağlanmıştır. Şekil 6.5 b de m kütleli cismin tepkisini incelemek için kütleleri bağlayan ab rijit bağı kesilmiştir.



Şekil 6.5.a) \ddot{u} ivmesi ile hareket eden M kütleli cisim b) m kütleli cisim üzerindeki kuvvetler

Kütleleri bağlayan ab rijit bağı kesildiğinde m kütleli cisim üzerindeki kuvvetlerin dengesi izleyen şekilde yazılır:

$$F + f_I = 0 \quad (6.3)$$

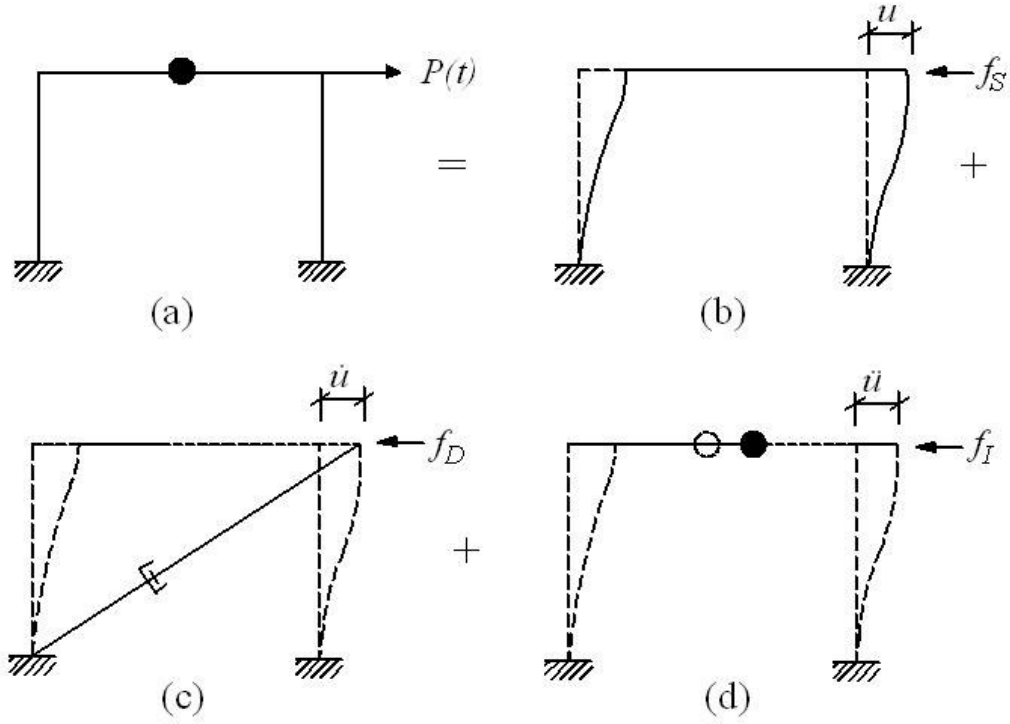
m kütleli cisim üzerindeki kuvvet

$$F = -f_I = -(-m\ddot{u}) = m\ddot{u} \quad (6.4)$$

olarak bulunur.

6.1.4 Sistem Modeli

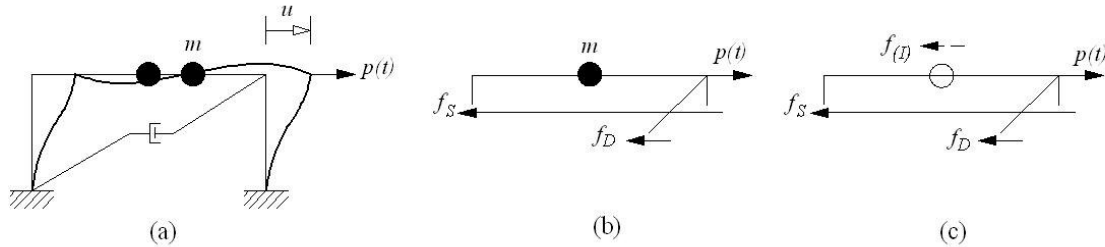
Şekil 6.6 dan görüldüğü üzere sistemi oluşturan her bir element (kütle, rijitlik, sönüm ve dış kuvvet) sadece kendi özelliğini ifade etmekte, hiçbir şekilde diğerini ifade etmemektedir. Dolayısıyla k yay elementi sadece sistemin elastik dengeleyici kuvvetini ve enerji depolamasını ifade eder. c sönüm elementi sadece sistemdeki sürtünme karakteristiğini ve enerji itkisini ifade eder. m kütle elementi sadece sistemin kütle ve atalet karakteristiğini ifade eder. $P(t)$ dış kuvveti zamanın fonksiyonu olup sadece sisteme giren enerjiyi ifade eder.



Şekil 6.6 Sistem üzerindeki tepki kuvvetleri

6.2 Viskoz Sönümlü Serbest Titreşim

Göz önüne alınan bir anda bir kütleye etkiyen kuvvetler şekil 6.7 de gösterilmiştir. Bunlar dış $P(t)$ kuvveti, elastik (veya elastik olmayan) direnme kuvveti f_s ve sönüm direnme kuvveti f_D kuvvetleridir. Dış kuvvet $P(t)$, yer değiştirme $u(t)$, hız $\dot{u}(t)$ ve ivme $\ddot{u}(t)$ pozitif x eksenini doğrultusunda pozitif alınmışlardır.



Şekil 6.7 a) Dış yük altında idailize edilmiş tek serbestlik dereceli sistem b) Newton'un hareket ikinci kanunu temsil eden c) D'Alembert's prensibi

Elastik kuvvet ve sönüm kuvveti şekil değiştirme ve hıza direnme gösteren iç kuvvetler olduklarından hareketin tersi yönünde gösterilmişlerdir. Bu durumda Newton'un ikinci hareket kanunundan izleyen hareket denklemleri elde edilir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \quad (6.5)$$

Bu denklem elastik olmayan sistemlere de kolayca genişletilebilir. Bu durumda izleyen hareket denklemi bulunur:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + fs(u, \dot{u}) = P(t) \quad (6.6)$$

Denklem (6.5) de $P(t) = 0$ alınırsa bu durumda tek serbestlik dereceli sönümlü serbest titreşim hareket denklemi elde edilir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (6.7)$$

Bu denklemin çözümü için yer değiştirme izleyen formda alınır:

$$u = e^{\lambda t} \quad (6.8)$$

Bu durumda hız ve ivme izleyen şekilde elde edilir:

$$\dot{u} = \lambda e^{\lambda t} \quad (6.9)$$

$$\ddot{u} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (6.10)$$

(6.8), (6.9), (6.10) eşitlikleri (6.7) denkleminde yerine yazılırsa izleyen eşitlik elde edilir:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \quad (6.11)$$

Bu durumda (6.7) diferansiyel eşitliğinin karakteristik denklemi izleyen formda elde edilir:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (6.12)$$

Bu denklemin kökleri izleyen şekilde bulunur:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (6.13)$$

Böylelikle yer değiştirme ifadesi u izleyen şekilde elde edilir:

$$u = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.14)$$

Eşitlik (6.13) deki karekök içinde bulunan ifadeyi sıfır yapan c değeri kritik sönüm sabiti olarak tanımlanır ve izleyen şekilde verilir:

$$c^2 - 4mk = 0 \quad (6.15)$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk} \quad (6.16)$$

Sistemin doğal açısal frekansı $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olup bu ifade göz önüne alınırsa (6.16) eşitliği izleyen şekilde verilir:

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \quad (6.17)$$

Sistemin sönümü olan c değerinin, kritik sönüm olan c_{cr} değerine bölümü sönüm oranı olarak tanımlanır ve izleyen şekilde verilir:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (6.18)$$

Sönüm rijitlikle orantılı olarak alındığında, herhangi bir ω_n doğal frekansı için, (6.18) ile verilen sönüm oranı ξ ile (2.48) de verilen sönüm katsayısı η arasında izleyen ilişki bulunur:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{\eta k}{2m\omega_n} = \frac{\eta\omega_n}{2}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (6.19)$$

Sönüm oranı bilirse viskoz sönüm katsayısı

$$c = 2\xi m\omega_n \quad (6.20)$$

şeklinde olur ve (6.7) ile verilen hareket denklemini izleyen şekilde yazılabilir:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (6.21)$$

Sönüm sabiti c serbest titreşimin veya zorlanmış harmonik titreşimin bir turunda (çevriminde) sönümlenen enerjinin bir ölçüsüdür. Bununla birlikte, sönüm oranı- sönümün boyutsuz bir ölçüsü- sistemin bir özelliği olup ayrıca kütle ve rijitliğe de bağlıdır. Eğer $c = c_{cr}$ veya $\xi = 1$ ise sistem denge konumuna titreşim yapmaksızın döner. Eğer $c > c_{cr}$ ise veya $\xi > 1$ ise

sistem denge konumuna yine titreşim yapmaksızın döner; fakat $c = c_{cr}$ durumundakinden daha uzun bir zamanda döner. $c < c_{cr}$ olması durumunda kritik altı sönüm olur ki bundan sonra bu durum ile ilgilenilecektir. Çünkü binalar, köprüler, barajlar, nükleer güç yapıları, kıyı yapıları ve diğerleri kritik altı sönüm sınıfına girerler ve tipik olarak sönüm oranları 0,1 den daha küçüktür. Kritik üstü sönüm durumları, otomatik kapılar gibi geri dönme mekanizmalarında kullanılır. Kararlı hal değerlerini ölçmek için kullanılan cihazlar, ölü ağırlık ölçüm skalası (tartısı) gibi, genellikle kritik sönümlüdür. Otomobil darbe sönümleyici sistemlerinde bile sönüm genellikle kritik sönümün yarısından daha azdır. $\xi < 0.05$

Kritik altı sönümlü sistemlerde, frekansın

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.22)$$

olduğu bilinmektedir.

6.3 Yük İletimi ve Titreşim Sönümü

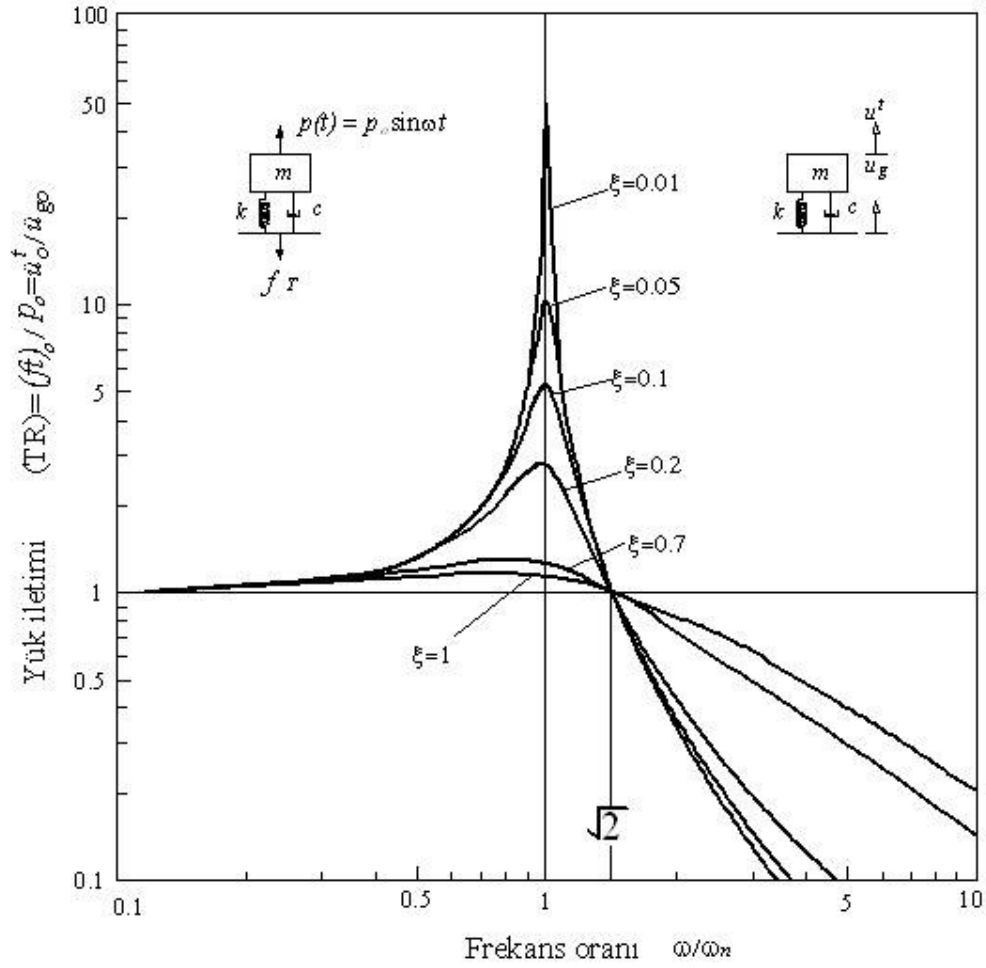
Şekil 6.8 in içinde bulunan küçük şekilde verilen harmonik bir yük etkisindeki kütle-yay-sönümleyici sistemi göz önüne alınsın. Temele iletilen yük

$$f_T = f_s + f_D = k u(t) + c \dot{u}(t) \quad (6.23)$$

şeklinindedir. Oluşabilecek maksimum temele iletilen yükün, dış yükün maksimum değerine oranı yük iletimi olarak adlandırılıp izleyen şekilde elde edilir:

$$TR = \frac{(f_T)_0}{P_0} = \left\{ \frac{1 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2} \quad (6.24)$$

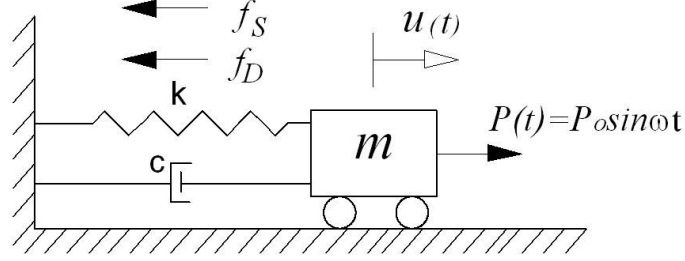
Şekil 6.8 de frekans oranı ω/ω_n e bağlı olarak yük iletimi çeşitli sönüm oranları için çizilmiştir.



Şekil 6.8 Frekans oranı- yük iletimi ilişkisi

Büyük ω/ω_n değerleri için eğrilere vurgu yapmak daha iyi algılanmalarını sağlamak için logaritmik ölçülendirme seçilmiştir. Bilindiği gibi tüm tahrik fonksiyonlarında sönüm, hareketin genliğini azaltırken, yük iletimini sadece $\omega/\omega_n < 2$ olduğunda azaltır. İletilen kuvvetin uygulanan kuvvetten küçük olması için, mesnet sisteminin rijitliği ve bu yüzden de doğal frekans, $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ olsun diye yeterince küçük olmalıdır. Mesnet sisteminde sönüm istenmez çünkü bu frekans aralığında sönüm iletilen kuvveti artırır. Bu durum iletilen kuvveti indirmek için yumuşak bir yay ile kabul edilebilir statik yer değiştirme arasında bir denge kurulması gerektiğini ifade eder.

6.4 Viskoz Sönümlü Sistemin Kararlı Hal Titreşimi ve Sönümlenen Enerji



Şekil 6.9 Tek serbestlik dereceli sistem

Şekil 6.9 da verilen $P(t) = P_0 \sin \omega t$ dış kuvveti etkisindeki tek serbestlik dereceli bir sistemin kararlı hal hareketi göz önüne alınsın. Sistemin hareket denklemi izleyen şekilde verilir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (6.25)$$

$P(t)$ dış kuvveti altındaki sistem için kararlı hal yer değiştirme fonksiyonu $u(t)$ ve yer değiştirme hızı $\dot{u}(t)$ izleyen şekildedir:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (6.26)$$

$$\dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (6.27)$$

Yer değiştirme genliği u_0 , hızın genliği ise ωu_0 , ϕ ise faz açısıdır. Yer değiştirme genliği u_0 ve faz açısı ϕ izleyen şekilde verilir:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} = \frac{(u_{st})_o}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} \quad (6.28)$$

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} \quad (6.29)$$

Buradaki R_d büyüklüğü dinamik büyütme çarpanı adını alır.

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \quad (6.30)$$

Zorlama frekansının ve sistem frekansının eşit olması ($\omega = \omega_n$) durumunda u_0 izleyen şekilde olur:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} = \frac{u_{st}}{2\xi} \quad (6.31)$$

Sistem üzerindeki direnimsel kuvvetleri izleyen şekilde ifade edilir:

$$f_R = f_S + f_D = k u + c \dot{u} \quad (6.32)$$

$$f_S = k u = k u_0 (\sin \omega t - \phi) \quad (6.33)$$

$$f_D = c \dot{u} = c \omega u_0 (\cos \omega t - \phi) \quad (6.34)$$

Harmonik titreşimde viskoz sönüm nedeniyle bir turda (çevrimde) sönümlenen enerji, izleyen şekilde verilir:

$$\begin{aligned} E_D &= \int f_D du = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u}) \dot{u} dt = \int_0^{2\pi/\omega} c \dot{u}^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]^2 dt = \pi c \omega u_0^2 = 2\pi \xi \frac{\omega}{\omega_n} k u_0^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Sönümlenen enerji yer değiştirme genliğinin karesi ile orantılıdır. Sönümlenen enerji tahrik frekansıyla lineer olarak arttığından, herhangi bir verilen sönüm değeri ve genlik için sönüm enerjisi sabit bir değer değildir.

Kararlı hal titreşiminde, uygulanan kuvvet sebebiyle sisteme giren enerji viskoz sönümde sönümlenir. $P(t)$ dış kuvvetinin her bir turda (çevrimde) sisteme verdiği enerji izleyen şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} E_I &= \int P(t) du = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) \dot{u} dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} [P_0 \sin \omega t] [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)] dt = \pi P_0 u_0 \sin \phi \end{aligned} \quad (6.36)$$

(6.30) ifadesinde verilen faz açısı ϕ (6.36) eşitliğinde yerine yazılırsa, (6.36) eşitliği izleyen şekilde elde edilir:

$$E_I = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_n} k u_0^2 \quad (6.37)$$

(6.35) ve (6.37) eşitlikleri $E_I = E_D$ olduğunu gösterir.

Sistemdeki potansiyel ve kinetik enerjiler düşünülürse; harmonik titreşimin her bir turunda potansiyel enerjideki (yayın şekil değiştirme enerjisindeki) ve kinetik enerjideki değişimler sıfırdır. Bu durum izleyen şekilde doğrulanabilir.

$$\begin{aligned} E_S &= \int f_s du = \int_0^{2\pi/\omega} (k u) \dot{u} dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} k [u_0 \sin(\omega t - \phi)] [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)] dt = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} E_K &= \int f_I du = \int_0^{2\pi/\omega} (m \ddot{u}) \dot{u} dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} m [-\omega^2 u_0 \sin(\omega t - \phi)] [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)] dt = 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Önceki enerji kavramları $\omega = \omega_n$ frekanslı harmonik kuvvet nedeniyle oluşan yer değiştirme genliğinin kararlı hale ulaşıncaya kadar büyümesini açıklamaya yardım eder. $\omega = \omega_n$, $\phi = 90^\circ$ için (6.36) eşitliği izleyen hale gelir:

$$E_I = \pi P_0 u_0 \quad (6.40)$$

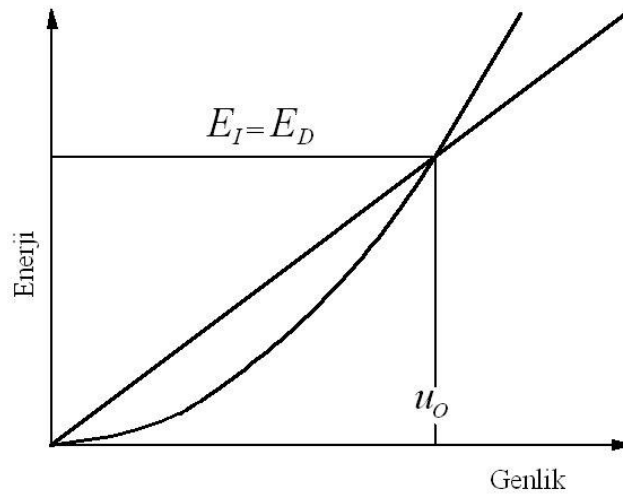
Dış kuvvetin sisteme verdiği giriş enerjisi yer değiştirme genliği ile lineer olarak değişir, Şekil 6.10 bundan farklı olarak, sönüm enerjisi ise yer değiştirme genliği ile karesel olarak değişir. Şekil 6.10 da gösterildiği gibi, kararlı hale varılmadan önce, her bir turdaki giriş enerjisi bu turdaki sönüm enerjisinden büyüktür ki bu durum gelecek turda (çevrimdeki) yer değiştirme genliğinin daha büyük olmasına neden olur. Büyüyen yer değiştirme genliği ile sönümlenen enerji giriş enerjisinden daha hızlı artar. Sonunda, giriş ve sönüm enerjileri kararlı hal yer değiştirme genliği olan u_0 da aynı olacaktır. Kararlı hal titreşiminin genliği, sönüm ne kadar küçük olursa olsun sınırlı olacaktır. Bu enerji dengesi, $\omega = \omega_n$ frekansındaki bir harmonik

kuvvet yüzünden ortaya çıkan u_0 ın bulunmasında bir alternatif yol sağlar. (6.35) ve (6.40) ifadelerinin eşitlenmesi ile izleyen ifade elde edilir:

$$\pi P_0 u_0 = \pi c \omega_n u_0^2 \quad (6.41)$$

Buradan u_0 izleyen şekilde elde edilir:

$$u_0 = \frac{P_0}{c \omega_n} \quad (6.42)$$



Şekil 6.10 Giriş ve sönüm enerjisi

Şimdi viskoz sönümdeki enerjinin grafik yorumu sunulacaktır. Bu amaçla sönüm kuvveti f_D ile yer değiştirme u arasındaki ilişki ile ilgili bir eşitlik türetilecektir.

$$f_D = c \dot{u} = c \omega u_0 (\cos \omega t - \phi) \quad (6.43)$$

$$= c \omega \sqrt{u_0^2 - u_0^2 \sin^2(\omega t - \phi)}$$

$$= c \omega \sqrt{u_0^2 - [u(t)]^2}$$

Bu eşitlik

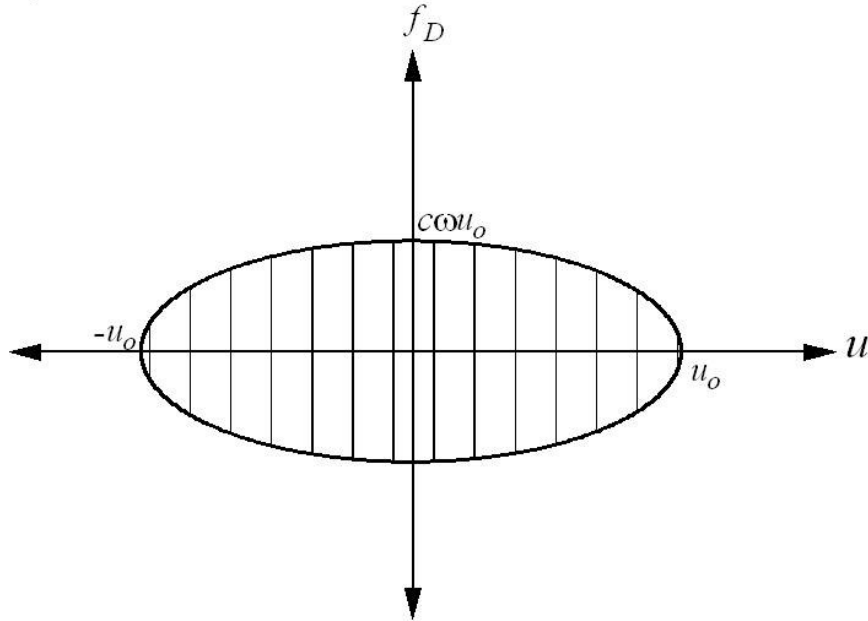
$$\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{f_D}{c \omega u_0} \right)^2 = 1 \quad (6.44)$$

şeklinde ifade edilebilir ki bu ifade Şekil 6.11 de gösterilen elipsin denklemdir. Gözlenebilir ki $f_D - u$ eğrisi tek değerli bir fonksiyon olmayıp bir hysteresis olarak bilinir. Elips tarafından çevrelenen alan;

$$\pi u_0 (c \omega u_0) = \pi c \omega u_0^2 \quad (6.45)$$

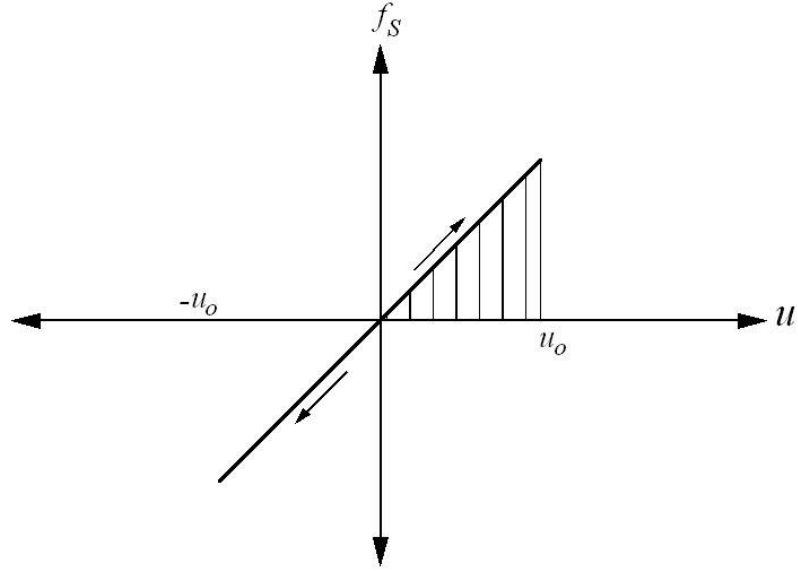
şeklindedir ve bu (6.35) eşitliği ile aynıdır. Sönüm nedeniyle sönümlenen enerji yine elips tarafından kapsanan alandır: Çünkü tek değerli elastik kuvvet , $f_s = k u$ tarafından kapsanan alan sıfırdır.

(6.44) bağıntısının grafiksel gösterimi şekil 6.11 de verilmiştir.



Şekil 6.11 Bir çevrimde sönümlenen enerji

(6.33) ifadesinde verilen elastik direnim kuvveti ile yer değiştirme arasındaki bağıntının grafiksel gösterimi şekil 6.12 de verildiği gibidir.

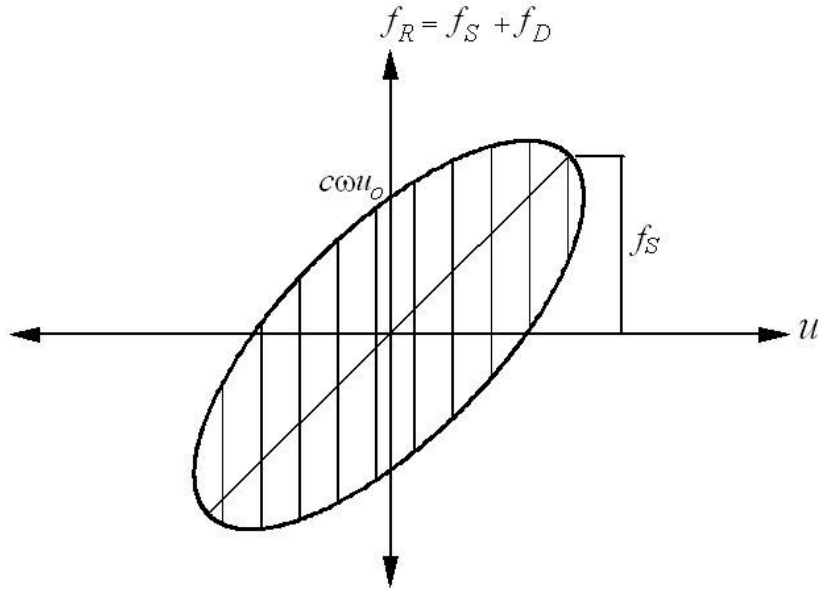


Şekil 6.12 Elastik yay kuvveti-yer değıştirme ilişkisi ve depolanan enerji

Eşitlik (6.32) de verilen toplam direnim kuvvetin ($f_R = f_S + f_D$) u ya karşı çizimi şekil 6.13 de verilmiştir.

$$f_S + f_D = k u(t) + c \dot{u}(t)$$

$$= k u + c \omega \sqrt{u_0^2 - u^2} \quad (6.46)$$



Şekil 6.13 Direnim kuvvetleri ile yer değıştirme arasındaki ilişki

Viskoz sönüm ile ilgili hysteresis eğrisi (loop) dinamik hysteresisin sonucudur. Çünkü hysteresis eğrisi yüklerin dinamik doğası ile ilgilidir. Kapalı eğri (loop) alanı tahrik frekansı ile orantılıdır; bu, eğer çevrimsel yük yeterince yavaş uygulanırsa ($\omega=0$), yük-şekil değiştirme eğrisinin tek değerli olduğunu ifade eder. Dinamik hysteresisin ayırt edici bir karakteristiği, plastik şekil değiştirmelerde hysteresis eğrisinin sivri köşeleri olmasına karşın, dinamik hysteresis durumunda hysteresis eğrileri eliptik şekilde olma eğilimindedir. Sonraki durumda, statik çevrimsel yükler altında bile hysteresis eğrileri oluşur; bu yüzden bu olay yük-şekil değiştirme eğrisi şekil değiştirme hızından etkilenmediği için, statik hysteresis olarak bilinir.

Ek bir bilgi olarak sönümün iki ölçümünden söz edilecektir: Özel sönüm kapasitesi ve özel sönüm çarpanı. Sönüm kapasitesi; sönüm enerjisinin, şekil değiştirme enerjisine oranıdır ve titreşim süresinde enerjinin kaybolmasının karakteristik değeri olarak tariflenebilir ve izleyen şekilde verilir:

$$\psi_c = \frac{E_D}{E_{S_0}} = \frac{\pi u_0 c \omega u_0}{1/2 k u_0^2} = 2\pi\eta\omega \quad (6.47)$$

Özel sönüm çarpanı ise özel sönüm kapasitesinin 2π ye bölünmüş halidir, ayrıca kayıp faktörü olarak ta bilinip izleyen şekilde tanımlanır:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \frac{E_D}{E_{S_0}} = \eta\omega \quad (6.48)$$

Eğer enerji basit bir harmonik hareket çevrimi esnasında üniform bir hızda kaldırılabilirse (böylesi bir mekanizma gerçekçi değildir) ζ her bir radyan için enerji kaybının şekil değiştirme enerjisine (E_{S_0}) bölümü olarak yorumlanabilir. Sönümün bu iki ölçüsü; hafif sönümde çok yararlı olduklarından, yapısal titreşimde sık kullanılmazlar. Bu iki ölçü malzemenin sönüm kapasitelerini karşılaştırmada faydalıdır.

6.5 Eşdeğer Viskoz Sönüm

Daha önce kısım 6.1.2 de tanımlandığı gibi gerçek yapılarıdaki sönüm genellikle eşdeğer viskoz sönüm olarak temsil edilir. Yönetici diferansiyel eşitlik lineer olduğu ve böylece analitik çözümün elde edilmesi kolay olduğundan, bu yaklaşım sönümün en basit formudur. Viskoz sönüm kabulü ile verilen ödümlerden, lineer hareket eşitliği kullanımının avantajı

daha ağır basar. Bu kısımda gerçek yapıda mevcut sönüm mekanizmasının bileşik etkisine bir anlamda eşdeğer olacak şekilde bir sönüm katsayısı belirlenecektir.

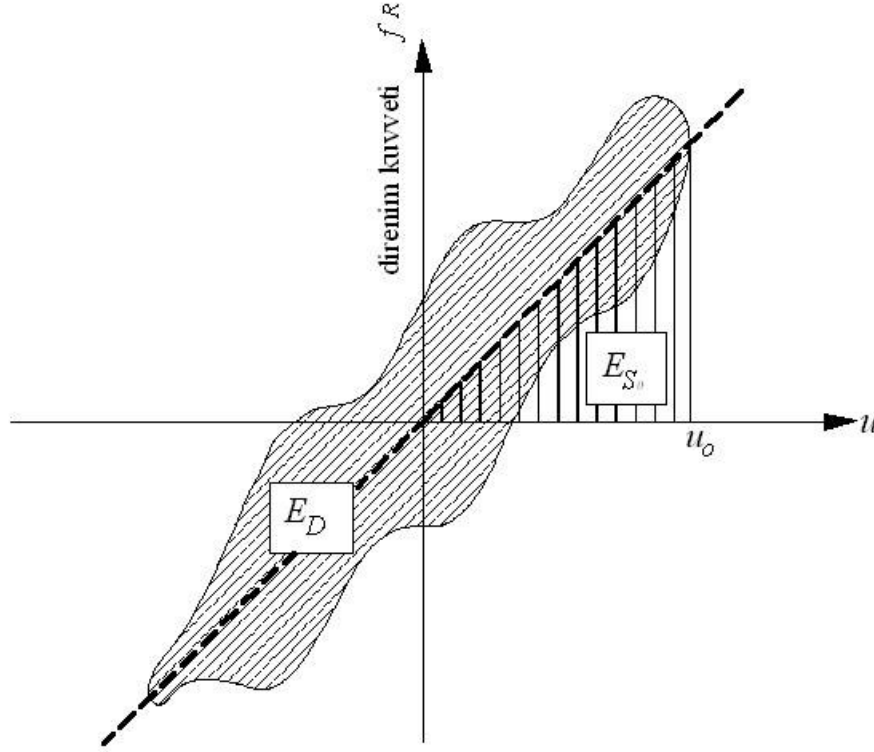
Eşdeğer viskoz sönümün en basit tanımı; sistemin doğal frekansı olan ω_n e eşit bir zorlama frekansına (ω) sahip harmonik bir kuvvetle tahrik edilen bir sistemin ölçülen cevabı üzerine temellendirilmiştir. Eşdeğer sönüm oranı ξ_{eq} eşitlik (6.31) den u_0 ve $(u_{st})_o$ ın ölçülen değerlerinin kullanımı ile hesaplanır. Bu, deneylerdeki tüm enerji sönümleyeci mekanizmaları hesaba kattığı için eşdeğer sönümdür.

Eşdeğer viskoz sönümün belirlenmesi için en yaygın metot, gerçek yapının bir titreşim turunda (çevriminde) sönümlenen enerjinin, eşdeğer viskoz sönüm durumunda sönümlenen enerjiye eşitlenmesidir. Gerçek bir yapı için, u_0 yer değiştirme genlikli çevrimsel yükleme altındaki deneyden elde edilen yük-yer değiştirme ilişkisi belirlenir; keyfi bir şeklin böylesi bir ilişkisi şematik olarak Şekil 6.14 de gösterilmiştir. Gerçek yapıda sönümlenen enerji hysteresis döngüsü ile çevrili E_D alanı ile verilir. Yapıdaki gerçek sönüm enerjisinin (6.35) eşitliğinde verilen viskoz sönümde sönümlenen enerji denkleminde eşitlenmesi ile yapıdaki gerçek sönüm viskoz sönüm cinsinden tariflenir. Buradan eşdeğer viskoz sönüm oranı bulunur ve izleyen şekilde verilir:

$$E_D = \pi c \omega u_0^2 = 2 \pi \xi_{eq} \frac{\omega}{\omega_n} k u_0^2 \quad (6.49)$$

$$E_D = 4 \pi \xi_{eq} \frac{\omega}{\omega_n} E_{S_0} \quad (6.50)$$

$$\xi_{eq} = \frac{1}{4 \pi} \frac{1}{\omega / \omega_n} \frac{E_D}{E_{S_0}} \quad (6.51)$$



Şekil 6.14 Yapıdaki gerçek sönüm enerjisi

Burada $E_{S_0} = k \frac{u_0^2}{2}$ şekil değiştirme enerjisi olup deneyle elde edilmiş olan k rijitliğinin kullanımıyla hesaplanır. Şekil 6.14 deki yük-şekil değiştirme eğrisinin verildiği deney $\omega = \omega_n$ için yapılmalıdır; bu durumda sistem sönüme karşı en çok hassastır. Bu durumda (6.51) eşitliliği izleyen şekli alır:

$$\xi_{eq} = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_{S_0}} \quad (6.52)$$

$\omega = \omega_n$ testinden belirlenen sönüm oranı ξ_{eq} diğer tahrik frekanslarında doğru olmayacaktır, fakat bu tatmin edici bir yaklaşım olacaktır.

Yaygın olarak kabul edilmektedir ki bu puresedür çok serbestlik dereceli sistemlerdeki sönümü modellemeye de genişletilebilir. Sistemin her bir doğal titreşim moduna viskoz sönümde sönümlenen enerji ile gerçekte sönümlenen enerji birbirlerine eşitlenerek sistemin her bir doğal modu için bir eşdeğer sönüm oranı tayin edilir.

Burada eşdeğer viskoz sönüm kavramı tüm yapı üzerinde lineer elastik limit dâhilinde kalan genliklerde titreşen sistemlerle sınırlandırılmıştır. Bazı araştırma çalışmalarında inelastik şekil değiştirmelerde sönümlenen enerji de eşdeğer viskoz sönüm olarak modellenmiştir. Bununla birlikte kuvvetli depremler esnasında ortaya çıkması beklenen büyük elastik olmayan şekil değiştirmeler için bu idealleştirme genellikle tatmin edici değildir.

Örnek 6.1: Sıvı içinde hareket eden bir cisim hızın karesi ile orantılı bir direnç kuvvetine maruzdur. $f_D = \mp a\dot{u}^2$ olup burada + işaret pozitif \dot{u} ve negatif işaret negatif \dot{u} ya uygulanır. Eşdeğer viskoz sönüm katsayısı c_{eq} değerini u_0 genliği ve ω frekansı ortaya çıkaracak şekilde harmonik kuvvetler etkisinde olan bir sistem için belirleyiniz. Ayrıca $\omega = \omega_n$ olduğunda yer değiştirme genliğini bulunuz.

Çözüm:

Eğer zaman en büyük negatif yer değiştirme pozisyonundan itibaren ölçülürse harmonik hareket ;

$$u(t) = -u_0 \cos \omega t$$

Bir çevrimde sönümlenen enerji izleyen şekilde verilir:

$$\begin{aligned} E_D &= \int f_D du = \int_0^{2\pi/\omega} f_D \dot{u} dt = 2 \int_0^{\pi/\omega} f_D \dot{u}^2 dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/\omega} (a\dot{u})^2 \dot{u} dt = 2a\omega^3 u_0^3 \int_0^{\pi/\omega} \sin^3 \omega t dt = \frac{8}{3} a\omega^2 u_0^3 \end{aligned}$$

Bu ifade, viskoz sönümdeki sönüm enerjisine eşitlenirse izleyen ifade elde edilir:

$$\pi c_{eq} \omega u_0^2 = \frac{8}{3} a\omega^2 u_0^3$$

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi} a \omega u_0$$

$\omega = \omega_n$ durumunda yer değiştirme genliği izleyen şekilde olur:

$$u_0 = \sqrt{\left(\frac{3\omega P_0}{8a \omega_n^2} \right)}$$

6.6 Sönümü Viskoz Olmayan Sistemler

6.6.1 Hız Bağımsız Sönüm

Yapısal metaller üzerindeki deneyler göstermektedir ki malzemenin bir çevrimsel şekil değiştirmesinde içsel olarak sönümlenen enerji esasında çevrimsel frekanstan bağımsızdır. Benzer olarak yapılar üzerindeki zorlanmış titreşim testleri göstermektedir ki eşdeğer viskoz sönüm oranı kabaca tüm doğal modlar ve frekanslar için aynı alınabilir. Böylece bu tip sönüm hız bağımsız lineer sönüm olarak adlandırılır. İç sönümün bu mekanizması için kullanılan diğer terimler yapısal sönüm, katı sönüm ve hysteretic sönümdür. Bu terimlerin kullanılması tercih edilmemektedir. Çünkü ilk ikisinin özel bir anlamı yoktur, üçüncüsü ise birkaç anlama gelebilen kafa karıştırıcı bir ifadedir. Çünkü enerji sönümleyen tüm malzemeler ya da yapısal sistemler için hysteresis bir karakteristiktir. Hız bağımsız sönüm plastik şekil değiştirme, yerel plastik şekil değiştirme, kristal plastisitesi ve görünen elastik limit dâhilindeki gerilmelerin aralığında plastik akış yüzünden statik hysteresis ile beraberdir. Mikroskobik ölçekte, kristaller dahilindeki gerilme dağılışı ve bu kristallerin sınır kesişimlerindeki gerilme konsantrasyonu, ortalama (makroskobik) gerilmenin elastik gerilme limitinin oldukça aşağısında olması durumunda bile yerel plastik şekil değiştirmeye sebep olacak büyüklükte yerel gerilmeler üretir. Sönüm mekanizması makroskobik plastik şekil değiştirmelerdeki enerji sönümünü kapsamaz. Böylesi enerji sönümü yük f_s ve şekil değiştirme u ile arasındaki ilişki bir nonlineer şekil değiştirme ile alınır. ω frekansındaki harmonik hareket esnasında ortaya çıkan hız bağımsız lineer sönümü temsil etmek için kullanılacak en basit metot sönüm kuvvetinin hızla orantılı, frekansla ters orantılı olduğunu kabul etmektir.

$$f_D = \frac{\eta k}{\omega} \dot{u} \quad (6.53)$$

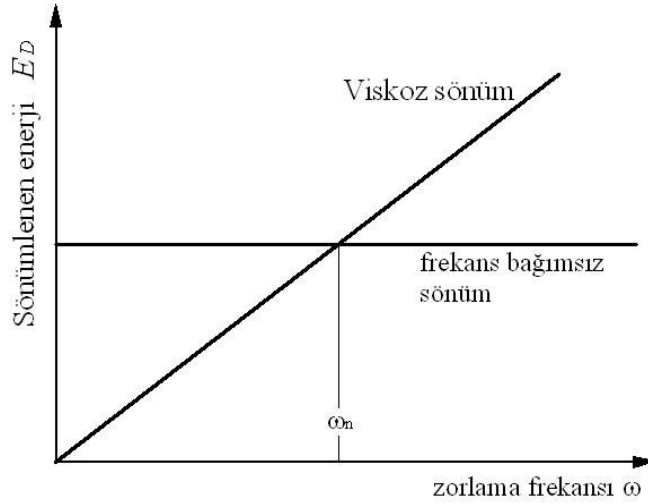
Bu durumda hız bağımsız sönümde c izleyen şekli alır:

$$c = \frac{\eta k}{\omega} \quad (6.54)$$

Burada k sistemin rijitliği η malzeme sönüm katsayısıdır. Dolayısıyla ω frekansındaki titreşimin bir çevrimindeki sönümlenen enerji ω dan bağımsızdır ve şekil 6.15 de gösterilmiştir.

$$E_D = \pi \eta k u_0^2 \quad (6.55)$$

Bunun tersine viskoz sönümde sönümlenen enerji şekil 6.15 de gösterildiği gibi kuvvetin frekansı ile lineer olarak artar.



Şekil 6.15 Viskoz sönümde ve hız bağımsız sönümde sönümlenen enerji

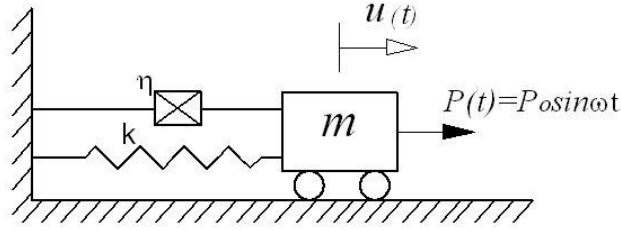
Hız bağımsız sönüm, eğer tahrik harmonik ise ve sistemin sadece kararlı hal cevabı ile ilgileniliyorsa, kolaylıkla tariflenebilir. Bu sönüm mekanizmasını zaman bölgesine dönüştürmekte zorluklar ortaya çıkar. Bu nedenle bu sönüm, analizin frekans bölgesinde yapılması durumunda çok faydalıdır.

6.6.2 Harmonik Kuvvet Altında Kararlı Hal Cevabı

Hız bağımsız lineer sönümlü tek serbestlik dereceli bir sistemin harmonik hareketini veren yönetici eşitlik (6.25) de sönüm teriminin (6.53) ile değiştirilmesi ile elde edilen ifadedir.

$$m\ddot{u} + \frac{\eta k}{\omega} \dot{u} + k u = p(t) \quad (6.56)$$

Bu eşitliğin matematiksel çözümü keyfi bir $P(t)$ için oldukça kompleksdir. Burada sinüsoidal zorlama fonksiyonu yüzünden ortaya çıkan kararlı hal durumu göz önüne alınacaktır.



Şekil 6.16 Hız bağımsız sönümlü tek serbestlik dereceli sistem

Bu zorlama kuvveti izleyen şekildedir:

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (6.57)$$

Bu zorlama kuvveti altındaki yer değiştirme fonksiyonu $u(t)$ nin kararlı hal hareketi izleyen şekilde ortaya çıkar:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (6.58)$$

Genlik u_0 ve faz açısı ϕ izleyen şekilde verilir:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + \eta^2}} = \frac{u_{st}}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + \eta^2}} \quad (6.59)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\eta}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (6.60)$$

Bu sonuçlar, (6.28) ve (6.30) eşitliklerindeki viskoz sönüm oranının (6.53) eşitliği ile verilen hız bağımsız sönümle ilişkili sönüm kuvvetini yansıtacak şekilde değiştirilmesi ile elde edilir.

Yani açıkça ifade etmek gerekirse, ξ büyüklüğü

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{\eta k / \omega}{2 m \omega_n} = \frac{\eta}{2(\omega/\omega_n)} \quad (6.61)$$

ile değiştirilir. Dolayısıyla bu durumda viskoz sönümde sönümlenen enerji ile hız bağımsız sönümde sönümlenen enerji ve sönüm kuvvetleri aynı olacaktır. Sistemin doğal frekansı ile

zorlama frekansının eşit ($\omega = \omega_n$) olması durumunda (6.61) eşitliği izleyen şekilde ifade edilir:

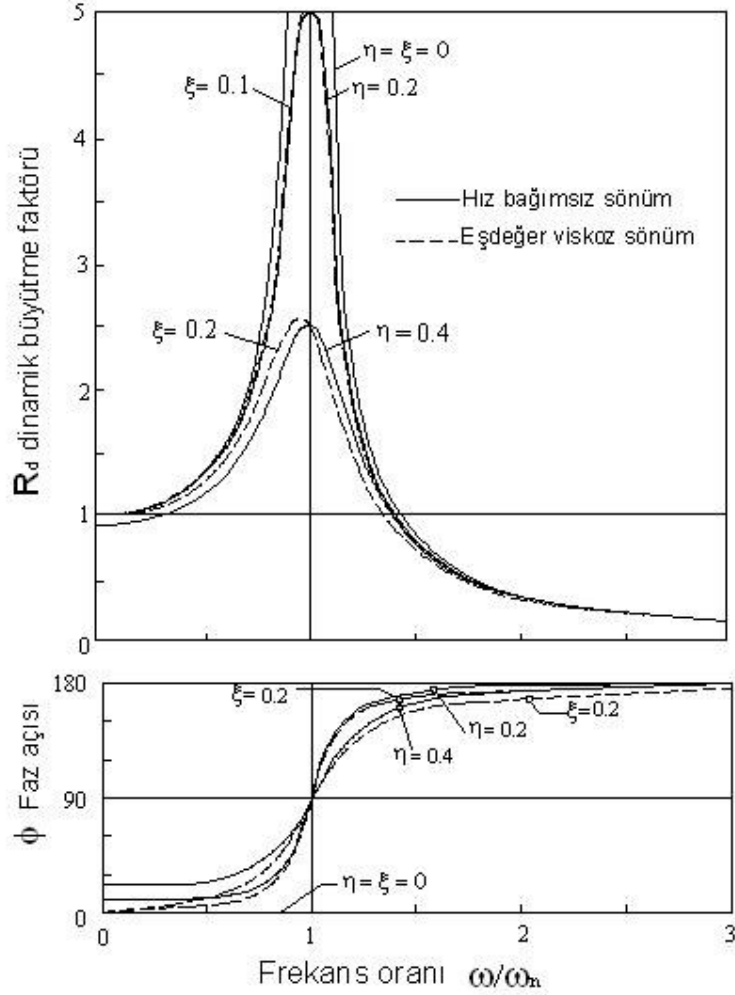
$$\eta = 2\xi \quad (6.62)$$

Şekil 6.17 de hız bağımsız sönüm için düz çizgilerle tariflenen dinamik büyütme faktörü $R_d = \left(\frac{u_0}{u_{st}} \right)$ ve ϕ faz açısının, $\frac{\omega}{\omega_n}$ frekans oranının değişimine karşı çizimleri sönüm katsayısı $\eta = 0$, $\eta = 0.2$ ve $\eta = 0.4$ için verilmiştir. Şekil 6.17 deki kesikli çizgiler eşdeğer viskoz sönüm için dinamik büyütme faktörü ve faz açısının, $\frac{\omega}{\omega_n}$ oranının değişimine karşı çizimlerini, $\xi = 0$, $\xi = 0.1$ ve $\xi = 0.2$ değerleri için temsil etmektedir. Hız bağımsız sönüm için eşdeğer viskoz sönüm katsayısı kısım 6.6.3 de tariflenecektir. Bu sonuçların şekil 6.17 de viskoz sönüm için elde edilenlerle karşılaştırılması sonucunda iki farklılık ortaya çıkar.

1. Hız bağımsız sönüm durumunda maksimum genlik $\omega = \omega_n$ de ortaya çıkar $\omega < \omega_n$ de değil
2. $\omega = 0$ için faz açısı $\phi = \tan^{-1} \eta$ olup viskoz sönümde bu sıfırdır.

Bu ifade etmektedir ki hız bağımsız sönümlü hareket zorlama fonksiyonu ile hiçbir zaman aynı fazda olmaz.

Hız bağımsız sönümlü zorlanmış titreşim ve viskoz sönümlü zorlanmış titreşimdeki bu farklılıklar önemli değildir. Fakat bunlar fiziksel verilerin uyuşturulmasında (eşleştirilmesinde) bazı zorlukların kaynağıdır. Çoğu sönümlü titreşimde sönüm viskoz değildir ve onun gerçek karakteristiğini bilmeden öyle olduğunu kabul etmek bir hata kabulüdür. Bir sonraki kısımda gerçek sönüm hız bağımsız olduğunda bu hatanın küçük olduğu gösterilecektir.



Şekil 6.17 Hız bağımsız sönüm ile eşdeğer viskoz sönümün karşılaştırılması

6.6.3 Eşdeğer Viskoz Sönüm Kullanımı ile Çözüm

Bu kısımda hız bağımsız sönümlü bir sistemin kararlı hal harmonik cevabı için bir yaklaşık çözüm, bu sönüm mekanizması bir eşdeğer viskoz sönüm ile modellenerek elde edilecektir. Hız bağımsız sönümde sönümlenen enerjiyi, viskoz sönümde sönümlenen enerji ile ifade etmek için $\omega = \omega_n$ durumunda enerji eşitlikleri (6.55) ve (6.35) in eşitlenmesi ile eşdeğer viskoz sönüm kat sayısı izleyen şekilde bulunur.

$$\pi \eta k u_0^2 = 2\pi \xi_{eq} k u_0^2 \quad (6.63)$$

$$\xi_{eq} = \frac{\eta}{2} \quad (6.64)$$

Bu ξ_{eq} değeri, (6.26), (6.28) ve (6.30) deki ξ yerine konulursa sistem cevabı elde edilir. Sonuç genlik u_0 ve faz açısı ϕ Şekil 6.17 deki kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Bu yaklaşık çözüm kesine $\omega = \omega_n$ de uyar. Çünkü bu ξ_{eq} i seçmede kullanılan kriterdir.

Geniş bir tahrik frekans aralığı üzerinde yaklaşık çözümün birçok mühendislik uygulamaları için kfi ölçüde doğru olduğu görülür. Böylece (6.56) eşitliği (Bu eşitliğin çözümü keyfi bir kuvvet $P(t)$ için zordur: Çünkü değişik ω frekanslarının çok sayıda harmonik bileŐenlerini içerir.) daha basit bir eşitlik olan (6.25) eşitliği ile deęiŐtirilebilir.

7. SAYISAL HESAPLAMALAR

7.1 Hareket Denklemlerine Toplu Bir Bakış

Sonlu elemanlar yöntemiyle ayrıklaştırılan sistemlerdeki sonlu sayıda ortaya çıkan bilinmeyenler (n) için aynı sayıda denklem yazılır ve elde edilen lineer denklem takımı bilinmeyenler için çözülür. Genel anlamda hareket denklemleri sistemi izleyen şekildedir:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\} \quad (7.1)$$

Sistemde viskoelastik ara bağ olması halinde sistem hareket denklemi en genel hali ile izleyen şekilde verilir:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [D_e]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} + [C_e]\{U\} = \{P\} \quad (7.2)$$

İzleyen tanımlamalar yapılırsa

$$[K] + [C_e] = [S] \quad (7.3)$$

$$[C] + [D_e] = \eta[K] + \eta_e [C_e] = [D] \quad (7.4)$$

hareket denklemi izleyen şekli alır:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [D]\{\dot{U}\} + [S]\{U\} = \{P\} \quad (7.5)$$

Buradaki büyüklükler izleyen şekilde isimlendirilir:

$[M]_{n \times n}$: Sistem Kütle Matrisi

$[C]_{n \times n}$: Düzlem Çerçevenin Sönüm Matrisi

$[D_e]_{n \times n}$: Viskoelastik Bağın Sönüm Matrisi

$[D]_{n \times n}$: Sistem Sönüm Matrisi

$[K]_{n \times n}$: Düzlem Çerçevenin Rijitlik Matrisi

$[C_e]_{n \times n}$: Viskoelastik Bağın Rijitlik Matrisi

$[S]_{n \times n}$: Sistem Rijitlik Matrisi

$\{P\}_{n \times 1}$: Sistem Yük Vektörü

$\{\ddot{U}\}_{n \times 1}$: Düğüm Noktası İvme Vektörü

$\{\dot{U}\}_{n \times 1}$: Düğüm Noktası Hız Vektörü

$\{U\}_{n \times 1}$: Düğüm Noktası Yer Değiştirme (Bilinmeyenler) Vektörü

Burada sistem rijitlik matrisi çerçeve elemanların rijitlikleri ile dönme elemanının rijitliklerinin toplamından oluşmaktadır. Sistem sönüm matrisi ise düzlem çerçevenin sönüm matrisi ve dönme elemanının sönüm matrisinin toplamı olarak verilmiştir.

Sönümsüz serbest titreşim analizi için, denklem (7.2) de dış kuvvet ve iç sönüm sıfır alındığında izleyen matris formunda ifade edilebilen lineer homojen eşitlikler seti elde edilir:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [S]\{U\} = 0 \quad (7.6)$$

$$[[S] - \omega_n^2 [M]] \{\phi\} = 0 \quad (7.7)$$

Yapı dinamiğinden bilindiği üzere, denklem (7.7) den herhangi bir n inci moda ait özvektör, yani $\{\phi_n\}$ hesaplanarak herhangi bir moda ait modal rijitlik, modal kütle, modal sönüm izleyen şekilde elde edilir:

$$K_n = \{\phi_n^T\} [K] \{\phi_n\} \quad (7.8)$$

$$M_n = \{\phi_n^T\} [M] \{\phi_n\} \quad (7.9)$$

$$C_n = \{\phi_n^T\} [C] \{\phi_n\} = \{\phi_n^T\} [K \eta] \{\phi_n\} \quad (7.10)$$

$$P_n = \phi_n^T P(t) \quad (7.11)$$

(7.8) ve (7.11) denklemlerinin kullanımıyla hareket denklemleri ayrıklaştırılabilir. Burada denklem sistemi bir bütün olarak çözümlenip, ayrıklaştırma yoluna gidilmeyecektir. Bununla beraber, modal analizde kullanılan modal sönüm oranının sayısal değerine karşı gelen sönüm katsayısının bulunması da burada arzu edilmektedir. Bu amaçla ayrıklaştırma yoluna gidildiğinde, sistemin indirgenmiş serbestlik derecesinin sayısı kadar birbirinden bağımsız denklem elde edilir. (7.8), (7.9), (7.10) ve (7.11) denklemlerinin kullanımıyla herhangi bir

n inci mod için sistem hareket denklemi ayrıklaştırılır ve her bir doğal frekans için tek serbestlik dereceli hale getirilir. Bu hareket denklemi izleyen şekilde verilir:

$$M_n \ddot{q}_n + D_n \dot{q}_n + S_n q_n = P_n \quad (7.12)$$

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = P_n / M_n \quad (7.13)$$

$$S_n = K_n + (C_e)_n \quad (7.14)$$

$$D_n = C_n + (D_e)_n = \eta K_n + \eta_e (C_e)_n \quad (7.15)$$

Burada q_n genelleştirilmiş yer değiştirmedir ve ξ_n modal sönüm oranı olup herhangi bir n inci moda karşılık gelen modal sönüm oranı izleyen şekilde elde edilir:

$$\xi_n = \frac{C_n}{2M_n (\omega_n)_n} \quad (\text{Ara mafsalsönümü ilave edilmediği durumda}) \quad (7.16a)$$

$$\xi_n = \frac{D_n}{2M_n (\omega_n)_n} \quad (\text{Ara mafsalsönümü ilave edildiği durumda}) \quad (7.16b)$$

Tek serbestlik dereceli bir sistem için sönüm oranı ile sönüm katsayısı arasındaki ilişki (6.18) ile verilmiş olup modal analizde de her bir doğal frekans için elde edilen denklem tek serbestlik dereceli olduğundan bu ifade modal analizle işlem yapıldığında (7.16) ile verilen ifadeye dönüşür. Bu durumda (7.16) ile verilen modal sönüm oranı ile (2.48) ile verilen sönüm katsayısı η arasındaki ilişki izleyen şekildedir:

$$\xi_n = \frac{\eta K_n}{2M_n (\omega_n)_n} \quad (7.17)$$

Bu problemde, yukarıda verilen modal sönüm oranları durumu için viskoelastik ara bağın optimum sönüm katsayısını belirlemek amaçlanmıştır. Bu aşamada modal sönüm oranının belirli bir değerine karşılık gelen sönüm katsayısı sayısal olarak hesaplanacaktır. Ara bağın sönümünün alınması durumunda modal sönüm oranı izleyen şekilde yazılabilir:

$$\xi_n = \frac{\eta K_n + \eta_e (C_e)_n}{2M_n (\omega_n)_n} \quad (7.18)$$

7.2 Periyodik Yük Altında Zorlanmış Titreşim

Düzlem çerçevenin aşağıda verilen periyodik dış yüke maruz kaldığı düşünölsün

$$\{P(t)\} = \{P_0\} e^{i\omega t} \quad (7.19)$$

Bu durumda hareket denklemleri izleyen şekilde verilir.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [D]\{\dot{U}\} + [S]\{U\} = \{P_0\} e^{i\omega t} \quad (7.20)$$

Sistemin çözümü için U izleyen şekilde seçilsin

$$\{U\} = \{\bar{U}\} e^{i\omega t} \quad (7.21)$$

Zamana göre U ifadesinin iki kez türevi alınsın

$$\{\dot{U}\} = \{\bar{U}\} i \omega e^{i\omega t} \quad (7.22)$$

$$\{\ddot{U}\} = \{\bar{U}\} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} \quad (7.23)$$

Bu ifadeler (7.20) denkleminde yerlerine konulursa hareket denklemleri izleyen şekilde elde edilir:

$$[M]\{\bar{U}\} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} + [D]\{\bar{U}\} i \omega e^{i\omega t} + [S]\{\bar{U}\} e^{i\omega t} = \{P_0\} e^{i\omega t} \quad (7.24)$$

$$[M]\{\bar{U}\} i^2 \omega^2 + [D]\{\bar{U}\} i \omega + [S]\{\bar{U}\} = \{P_0\} \quad (7.25)$$

$$-[M]\{\bar{U}\} \omega^2 + [D]\{\bar{U}\} i \omega + [S]\{\bar{U}\} = \{P_0\} \quad (7.26)$$

$$\{\bar{U}\} (-[M] \omega^2 + [D] i \omega + [S]) = \{P_0\} \quad (7.27)$$

İzleyen tanımlamalar yapılırsa

$$[\bar{K}] = (-[M] \omega^2 + [D] i \omega + [S]) \quad (7.28)$$

$$\{\bar{P}\} = \{P_0\} \quad (7.29)$$

hareket denklemi aşağıdaki şekli alır.

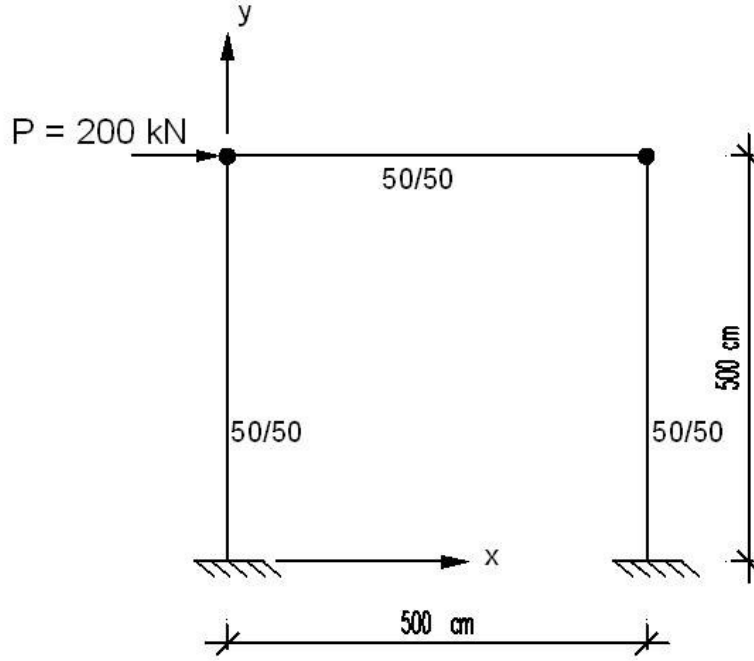
$$[\bar{K}] \{\bar{U}\} = \{\bar{P}\} \quad (7.30)$$

Yukarıdaki denklemin çözümü \bar{U} değerlerini kompleks olarak verir. Bu büyüklüklerin mutlak değerleri yer değiştirmelerin genliklerini verir. \bar{U} değerini etkileyen en büyük parametre sistem doğal frekansı ile yük frekansıdır. Bu iki frekansın birbirine yakın olması \bar{K} değerini küçültecek, dolayısıyla \bar{U} değerini büyütecektir. Bu duruma rezonans durumu denir. İki frekansın birbirine uzak olması \bar{K} değerini büyütecek dolayısıyla \bar{U} değerini küçültecektir.

7.3 Sayısal Uygulamalar

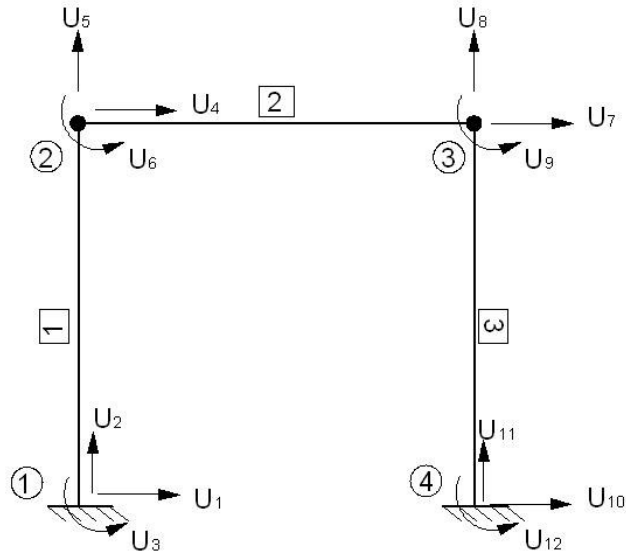
7.3.1 Statik Yatay Yük Altında Düzlem Çerçeve Analizi

Elastisite modülü $E = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$ olan malzemedен yapılmış bir çerçeveye etkiyen yükler, kesit boyutları ve eleman uzunlukları Şekil 7.1 de verilmiştir. Sistemin 200 kN değerinde yatay yük altındaki statik analizi yapıp yük doğrultusundaki yer değiştirme elde edilecektir. Dört düğüm noktasından oluşan sistem on iki serbestlik derecesine sahiptir.



Şekil 7.1 Düzlem çerçeve modeli

Öncelikle sistem düğüm noktaları, elemanları ve yer değiştirme serbestlikleri izleyen şekilde numaralandırılır. Sistem bir ve dört numaralı düğüm noktalarından ankastre bağlıdır.



Şekil 7.2 Sistem elemanlarının ve serbestliklerinin numaralandırılması

Şekil 7.2 den anlaşılacağı üzere sınır şartları uygulandığında sistem serbestlik derecesi 6 ya inecektir. Sistemin indirgenmiş rijitlik (katsayılar) matrisi izleyen şekilde verilir:

$$[K] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1515000 & 0 & 37500 & -1500000 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1515000 & 37500 & 0 & -15000 & 37500 \\ \hline 37500 & 37500 & 250000 & 0 & -37500 & 62500 \\ \hline -1500000 & 0 & 0 & 1515000 & 0 & 37500 \\ \hline 0 & -15000 & -37500 & 0 & 1515000 & -37500 \\ \hline 0 & 37500 & 62500 & 37500 & -37500 & 250000 \\ \hline \end{array}$$

Bilinmeyenler matrisi ve dış yük vektörü sırasıyla izleyen şekilde verilir:

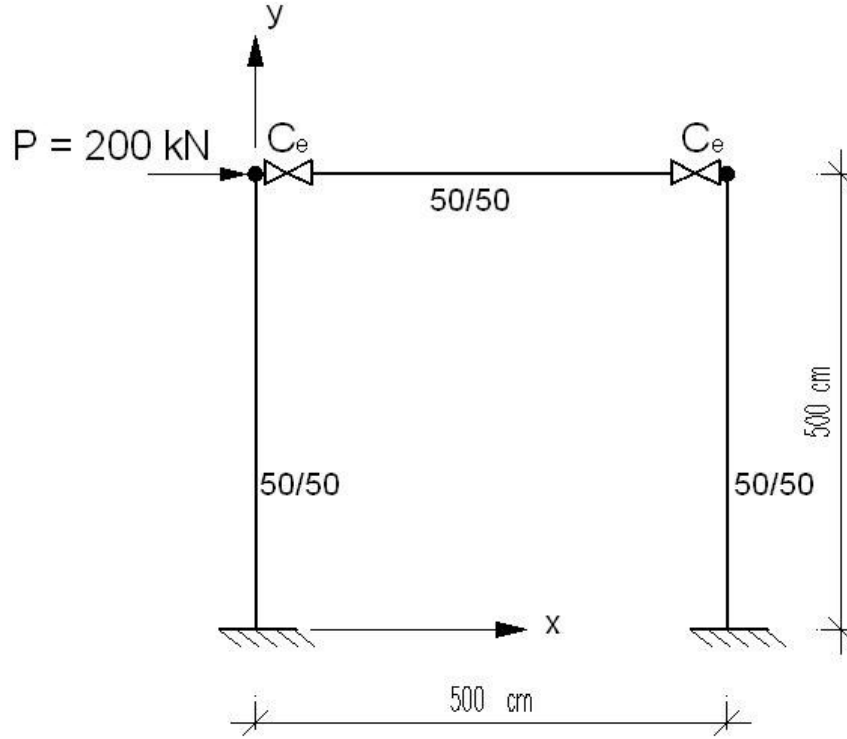
$$\{\delta\} = \begin{array}{c} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{array} \quad \{P\} = \begin{array}{c} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Sistemin verilen statik yük altındaki yer değiştirmeleri izleyen şekilde elde edilir:

$$\{\delta\} = \begin{array}{c} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{array} = \begin{array}{c} 0.0096 \\ 0.0001 \\ -0.0012 \\ 0.0095 \\ -0.0001 \\ -0.0012 \end{array}$$

7.3. 2 Statik Yatay Yük Altında Elastik Ara Bağlı Düzlem Çerçeve Analizi

Bu çalışmada, birinci çalışmada verilen sistem 2 ve 3 numaralı düğüm noktalarında elastik bağlı olarak ele alınmıştır. Elastik bağ katsayısı C_e değeri $0 \sim \infty$ arasında alınarak sistem analizi yapılmıştır. Elastik bağ katsayısı $C_e = 0$ için ideal mafsalsal bağ, $C_e = \infty$ için sürekli bağ söz konusudur.

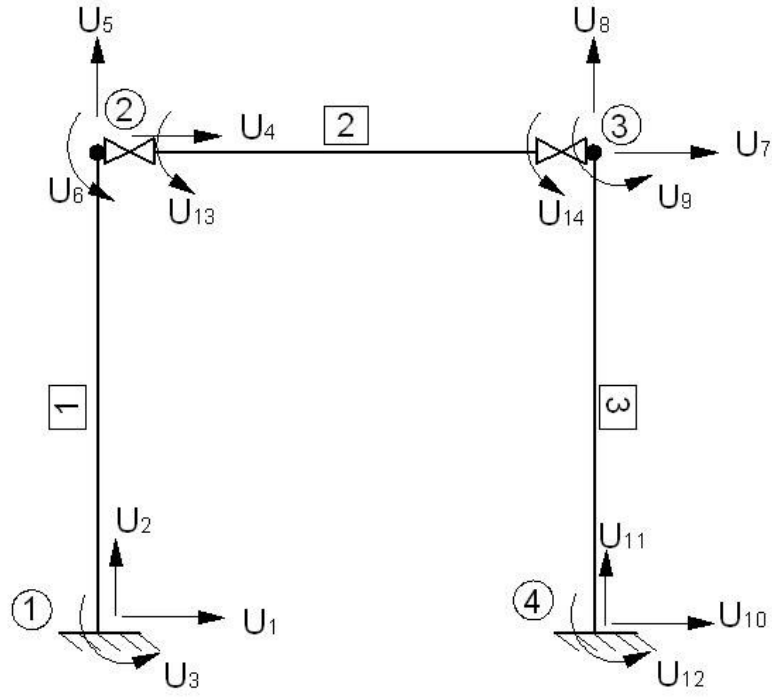


Şekil 7.3 Elastik Bağlı Düzlem Çerçeve

$$E = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$$

$$C_e = 0 \sim \infty$$

Sistemin düğüm noktalarının, elemanlarının ve serbestliklerinin numaralandırılması şekil 7.4 de verilmiştir. Elastik ara bağlantı sebebiyle sistem 14 serbestliğe sahiptir. Sınır koşulları uygulandığında sistem 8 adet serbestliğe sahiptir.



Şekil 7.4 Elastik ara bağlı çerçevenin serbestlikleri

Sınır koşulları uygulandıktan sonra $C_e = 0$ için sistem rijitlik matrisi izleyen şekilde elde edilir:

$$[S] = \begin{bmatrix} U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{13} & U_{14} \\ 1515000 & 0 & 37500 & -1500000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1515000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 37500 & 37500 \\ 37500 & 0 & 125000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1500000 & 0 & 0 & 1515000 & 0 & 37500 & 0 & 0 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 1515000 & 0 & -37500 & -37500 \\ 0 & 0 & 0 & 37500 & 0 & 125000 & 0 & 0 \\ 0 & 37500 & 0 & 0 & -37500 & 0 & 125000 & 62500 \\ 0 & 37500 & 0 & 0 & -37500 & 0 & 62500 & 125000 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{13} \\ U_{14} \end{matrix}$$

Elastik bağ katsayısının $0 \sim \infty$ aralığındaki değerleri için x yönündeki yer değiştirme ilişkisi çizelge 7.1 de verilmiştir. Elastik bağ katsayısının sonsuz değerini ifade etmek için $C_e = 10^8 \text{ kNm/rd}$ alınmıştır.

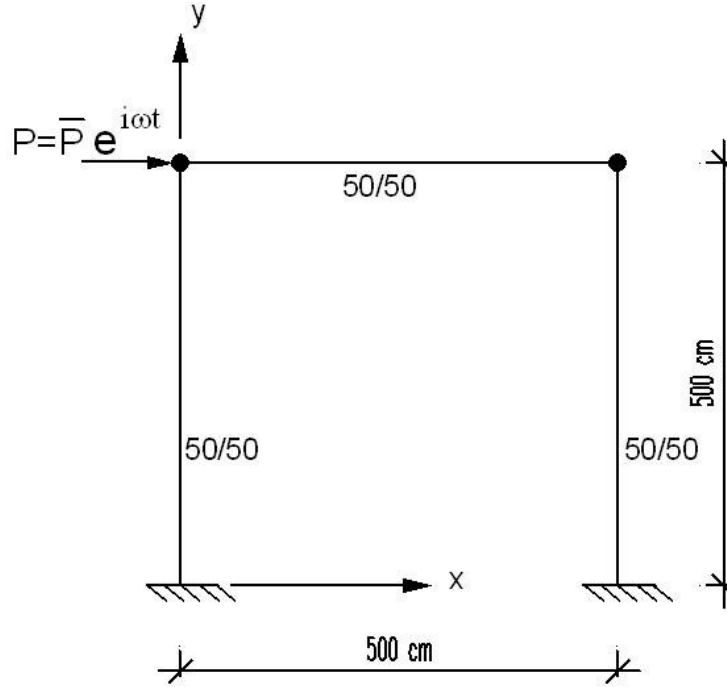
Çizelge 7.1 Elastik bağlantı değerleri ve yer değiştirme ilişkisi

C_e Değerleri (kNm/rd)	Yer değiştirme U4 (m)
0	0.0267
10^4	0.022
$2.5 \cdot 10^4$	0.0184
$5 \cdot 10^4$	0.0156
10^5	0.0132
$2 \cdot 10^5$	0.0116
$4 \cdot 10^5$	0.0107
$8 \cdot 10^5$	0.0102
$1.6 \cdot 10^6$	0.0099
10^7	0.0097
10^8	0.0096

Çizelge 7.1 den görüldüğü üzere $C_e = 10^8 \text{ kNm/rd}$ değeri için bulunan yer değiştirme 7.1 numaralı çalışmada ele alınan sürekli bağlı çerçeve analizinde bulunan yer değiştirme ile aynıdır ve $C_e = 10^8 \text{ kNm/rd}$ değeri sonsuz olarak kabul edilebilir.

7.3.3 Periyodik Yük Altında Düzlem Çerçeve Analizi

Malzeme özellikleri ve dış yük genliği aşağıda verilen şekil 7.5 deki sistem ele alınsın. Birinci problemde ele alınan bu sistem, bu problemde aşağıda verilen çeşitli malzeme sönüm katsayıları için dış yük frekansının 0-2000 (rd/sn) aralığında çözümü yapılacaktır.



Şekil 7.5 Periyodik yük altında düzlem çerçeve

$$\bar{P} = 200 \text{ kN}$$

$$E = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho = 2.5 \text{ kNsn}^2/\text{m}^4$$

$$\eta = 0.00 - 0.001 - 0.002 - 0.005$$

$$0.01 - 0.02 - 0.05$$

Sınır şartları uygulanmış sistemin rijitlik ve kütle matrisleri izleyen şekilde verilir:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1515000 & 0 & 37500 & -1500000 & 0 & 0 \\ 0 & 1515000 & 37500 & 0 & -15000 & 37500 \\ 37500 & 37500 & 250000 & 0 & -37500 & 62500 \\ -1500000 & 0 & 0 & 1515000 & 0 & 37500 \\ 0 & -15000 & -37500 & 0 & 1515000 & -37500 \\ 0 & 37500 & 62500 & 37500 & -37500 & 250000 \end{bmatrix}$$

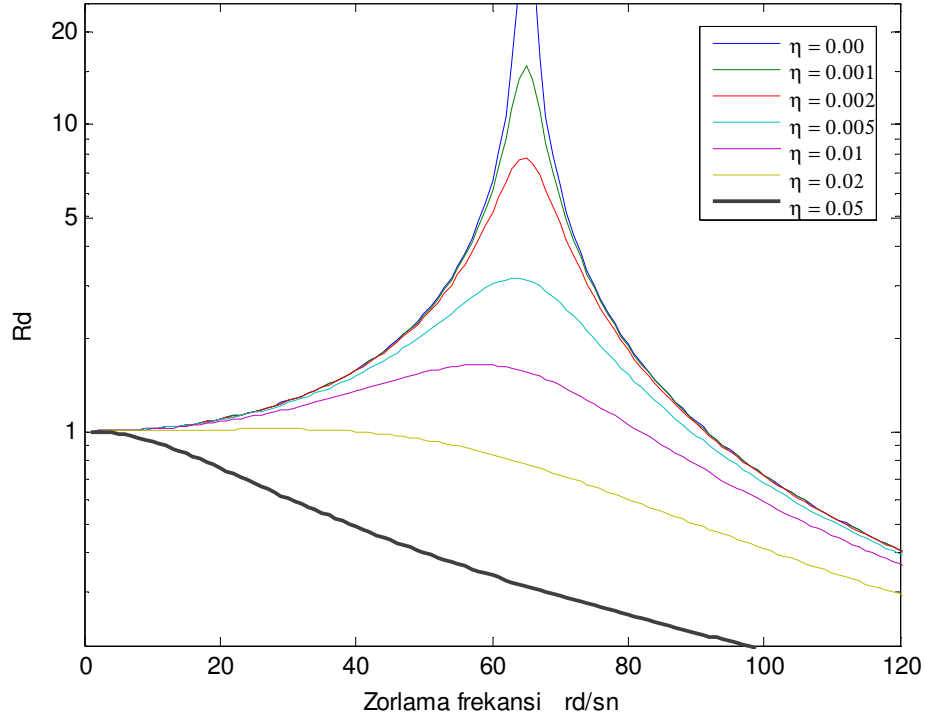
$$[M] = \begin{bmatrix} 2.2024 & 0 & 0.81845 & 0.52083 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2024 & 0.81845 & 0 & 0.40179 & -0.48363 \\ 0.81845 & 0.81845 & 1.4881 & 0 & 0.48363 & -0.55804 \\ 0.52083 & 0 & 0 & 2.2024 & 0 & 0.81845 \\ 0 & 0.40179 & 0.48363 & 0 & 2.2024 & -0.81845 \\ 0 & -0.48363 & -0.55804 & 0.81845 & -0.81845 & 1.4881 \end{bmatrix}$$

Özdeğerler olan ω_n^2 değerleri denklem (7.7) ile verilen eşitlikler sisteminin determinantının sıfır olmasından bulunur. Sistemin doğal frekansları ve periyotları izleyen tabloda verilir:

Çizelge 7.2 Sistemin doğal frekans ve periyotları

Frekans	(ω_n) (rd/sn)	T (sn)
1	64.07	0.0981
2	294.23	0.0214
3	647.46	0.0097
4	911.10	0.0069
5	969.86	0.0065
6	1642.10	0.0038

7.1 numaralı problemde de görüleceği gibi sistem statik yük altında x yönünde 0.0096 m yer değiştirme yapmıştır. (6.29) eşitliği ile verilen $R_d = u_o / (u_{st})_o$ dinamik büyütme çarpanı olmak üzere frekans-dinamik büyütme çarpanı grafikleri izleyen şekilde verilir.



Şekil 7.6 Çeşitli η değerleri için dinamik büyütme çarpanının zorlama frekansı ile değişimi

Şekil 7.6 da zorlama frekansının değişimi ile dinamik büyütme çarpanının değişimi malzeme sönüm katsayıları olan η ların çeşitli değerleri için verilmiştir.

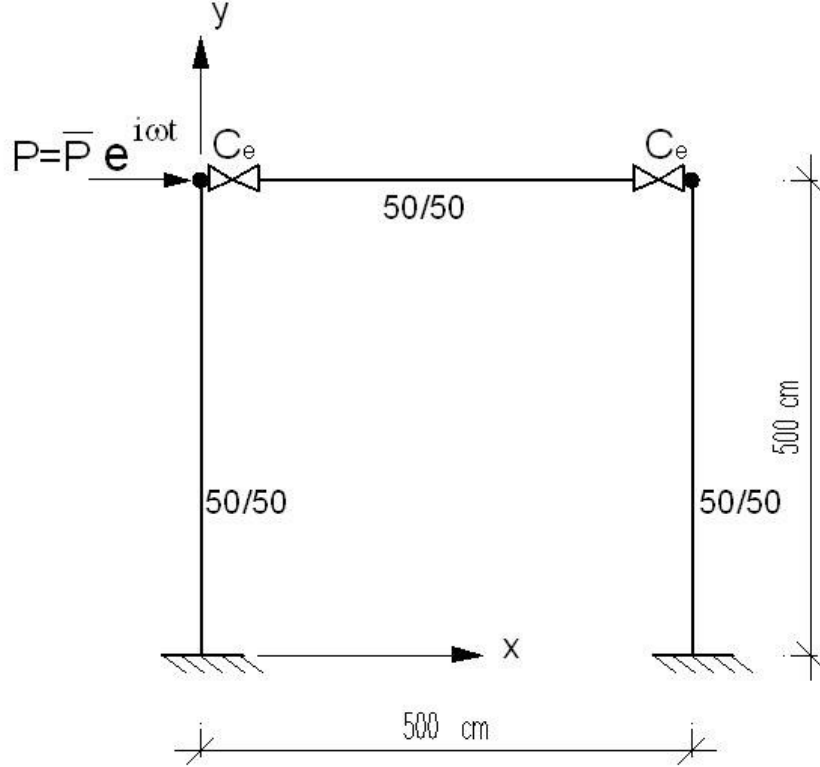
Çizelge 7.3 Malzeme iç sönüm değerleri ile dinamik büyütme çarpanı arasındaki ilişki

η viskoz iç sönüm değerleri	$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o}$
0.00	433 ∞
0.001	15.63
0.002	7.81
0.005	3.16
0.01	1.65
0.02	1.02
0.05	1

Şekil 7.6 dan görülmektedir ki malzeme sönüm katsayısının $\eta = 0$ olması halinde R değeri sonsuza gitmiştir. Sönüm değeri arttıkça R nin değişimini ifade eden eğrinin tepe noktasının sivriliği yumuşamış ve eğrinin tepe noktası sola doğru kaymıştır. Yani maksimum genliği veren zorlama frekansı küçülmüştür. Sönüm değerinin belli bir değeri aşmasından sonra, R_d yi ifade eden eğrinin tepe noktası, dış yük frekansının $\omega = 0$ değerinde ortaya çıkmaktadır.

7.3. 4 Periyodik Yük Altında Viskoelastik Ara Bağlı Düzlem Çerçeve Analizi

Bu problemde, aşağıda ifade edilen modal analizde kullanılan ve aşağıda sayısal değerleri verilen modal sönüm değerlerini sağlayan malzeme iç sönüm katsayısı kullanılarak viskoelastik ara bağı optimum sönüm katsayısını belirlemek amaçlanmıştır. Sistem çözümünde öncelikle sistem elemanlarının ve serbestliklerinin numaralandırılması yapılır. Sistem numaralandırılması problem 7.2 de verilmişti.



Şekil 7.7 Viskoelastik ara bağlı çerçevenin zorlanmış titreşimi

$$\bar{P} = 200 \text{ kN}$$

$$C_e = 100.000 \text{ kNm / rd}$$

$$E = 30.000.000 \text{ kN / m}^2$$

$$\rho = 2.5 \text{ kN sn}^2 / \text{m}^4$$

$$\xi = \% (0, 5, 10, 15, 20)$$

$$\eta = 0.00, 0.0022, 0.0044, 0.0088$$

Denklem (7.20) de dış kuvvet ve sönüm sıfır alınarak sistemin doğal frekansı hesaplanıp izleyen çizelgede verilir:

Çizelge 7.4 Viskoelastik ara bağlı çerçevenin doğal frekans ve periyotları

Frekans	(ω_n) (rd/sn)	T (sn)
1	55.81	0.1126
2	272.17	0.0231
3	553.89	0.0113
4	568.33	0.0111
5	872.49	0.0072
6	1137.90	0.0055
7	1643.90	0.0038
8	2032.30	0.0031

Sistemin birinci doğal frekansı $\omega_{n1} = 55.81 \text{ rd/sn}$ olup bu moda karşı gelen mod şekli izleyen şekilde verilir:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} -0.6937 \\ -0.0022 \\ 0.1294 \\ -0.6937 \\ 0.0022 \\ 0.1294 \\ 0.0457 \\ 0.0457 \end{Bmatrix}$$

(7.8) ve (7.9) ifadeleri kullanılarak birinci moda karşılık gelen K_1 modal rijitliği ve M_1 modal kütlesi, ara bağ olması durumunda izleyen şekilde hesaplanır:

$$K_1 = \{\phi_1^T\} [K] \{\phi_1\} = 5924.6$$

$$(C_e)_1 = \{\phi_1^T\} [C_e] \{\phi_1\} = 1402$$

$$M_1 = \{\phi_1^T\} [M] \{\phi_1\} = 2.3524$$

Buradaki $[K]$ matrisi düzlem çerçeve elemanlarının rijitlik matrisi, $[C_e]$ ise viskoelastik ara bağların rijitlik matrisidir. Yukarıda sayısal değerleri verilen modal rijitlik ve modal kütle durumu için sistem doğal frekansı sistemin bütün olarak çözümünden elde edilen doğal frekansla karşılaştırma amaçlı olarak izleyen şekilde hesaplanır:

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{K_1 + (C_e)_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{7326.6}{2.3524}} = 55.81 \text{ rd / sn}$$

Sadece çerçeve elemanların oluşturduğu, ara bağıın olmadığı durumdaki modal rijitlik ve modal sönüm izleyen şekilde verilir:

$$K_1 = \{\phi_1^T\} [K] \{\phi_1\} = 5924.6$$

$$C_1 = \{\phi_1^T\} [K \eta] \{\phi_1\} = 5924.6 \eta$$

Ara bağıın olmadığı durumda $\xi = 0.05$ değeri için η değeri (7.16a) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde hesaplanır:

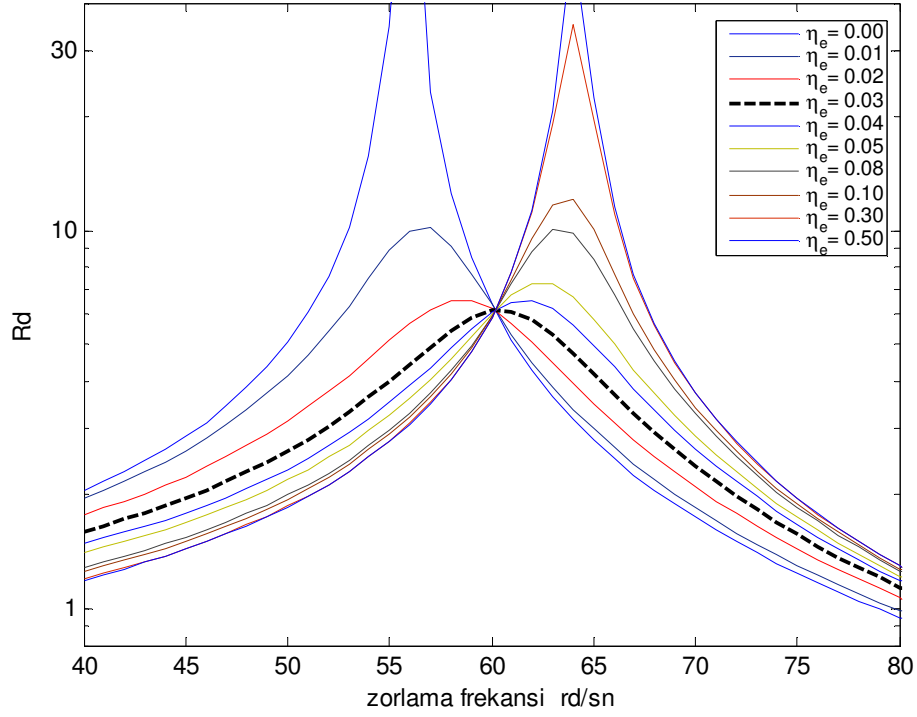
$$0.05 = \frac{5924.6 \times \eta}{2 \times 2.3524 \times 55.81} \rightarrow \eta = 0.0022$$

Benzer işlemler diğer modal sönüm değerleri için yapılırsa izleyen değerler bulunur:

Çizelge 7.5 Çeşitli modal sönüm değerlerine karşılık iç sönüm değerleri

Modal sönüm değerleri ξ	Malzeme sönüm katsayısı η
0.0	0.0
0.05	0.0022
0.10	0.0044
0.15	0.0066
0.20	0.0088

Bu aşamada ilk olarak malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0$ alınıp bu duruma karşı gelen en uygun ara bağı sönümü araştırılacaktır. Ara bağı sönümü için çeşitli değerler alınarak oluşturulan zorlama frekansı-dinamik büyütme katsayısı eğrileri Şekil 7.8 de verilmiştir.



Şekil 7.8 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0$ olması durumunda viskoelastik bağ için çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi

Şekil 7.8 den görülmektedir ki malzeme sönümünün sıfır olması halinde tüm eğriler bir noktada kesişmiştir. Kesişim noktasının sağında ve solunda viskoelastik ara bağ sönüm değerlerine bağlı olarak eğrilerin tepe noktaları oluşmuştur. Şekilden anlaşılacağı gibi sönüm katsayısının belirli bir değer üstünde ya da altında olması durumunda sistem yer değiştirmelerinin arttığı, dinamik büyütme faktörünün artış gösterdiği görülmektedir. Buradan söylenebilir ki eğrilerin kesişim noktasını tepe noktası alan eğriyi veren ara bağ sönüm değeri optimum sönüm olup dinamik büyütme faktörünün en küçük değerini verir. Sönüm değeri arttıkça sistem rijitleşmiş dolayısıyla frekansı büyümüştür; şekil 7.8 den görülebildiği gibi sönüm değeri arttıkça eğrilerin tepe noktalarının sağa doğru ötelenmiştir. Şekil incelendiğinde optimum sönüm değerinin, kesikli çizgi ile belirtilmiş eğriyi veren $\eta_e = 0.03$ katsayısı civarında olduğu görülmektedir.

Viskoelastik ara bağ sönüm katsayısı η_e değerlerine karşı gelen dinamik büyütme çarpanı R_d değerleri izleyen çizelgede verilir:

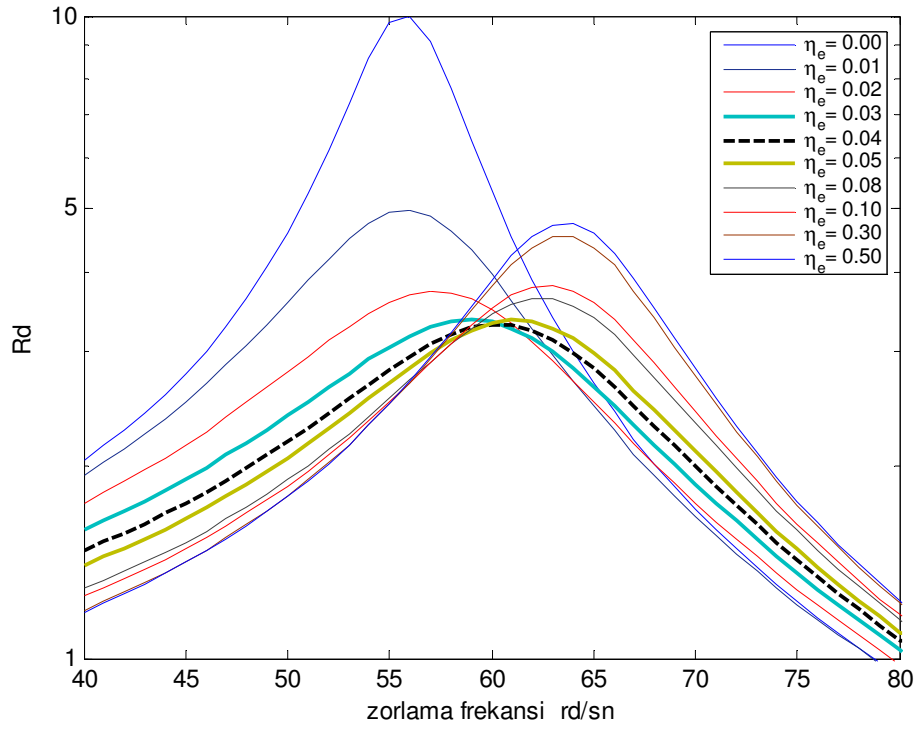
Çizelge 7.6 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre R_d değerleri

Malzeme iç sönüm katsayısı	Dönme elemanının viskoelastik sönüm katsayısı	$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o}$
η	η_c	$R_{d \max}$
0.00	0.00	143.80
	0.01	10.14
	0.02	6.54
	0.03	6.13
	0.04	6.56
	0.05	7.26
	0.08	10.07
	0.10	12.12
	0.30	35.04
	0.50	57.62

Çizelge 7.6 dan görüldüğü üzere R_d teriminin minimum değeri viskoelastik sönüm katsayısının $\eta_e = 0.03$ olması durumunda elde edilmiştir.

İkinci olarak modal sönüm oranının $\xi = \%5$ olmasına karşılık gelen, malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0.0022$ alınarak çözüm yapıldığında elde edilen sonuçlar ve viskoelastik bağın verilen sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı - zorlama frekansı ilişkisi şekil 7.9 da verilmiştir.

Şekil 7.9 dan görülmektedir ki malzeme sönümünün varlığı durumunda dinamik büyütme faktörünü ifade eden eğrilerin bir noktada kesişmesi söz konusu değildir. Eğrilerin tepe noktaları belirli bir bölgede yoğunlaşmıştır. Şekil 7.9 da optimum sönüme karşı gelen zorlama frekansı-dinamik büyütme çarpanı eğrisi kesik çizgili eğri ile temsil edilmiş olup viskoelastik ara bağın optimum sönüm katsayısı $\eta_e = 0.04$ olarak bulunmuştur. Verilen sönüm katsayıları için dinamik büyütme faktörü izleyen çizelge 7.7 de verilmiştir



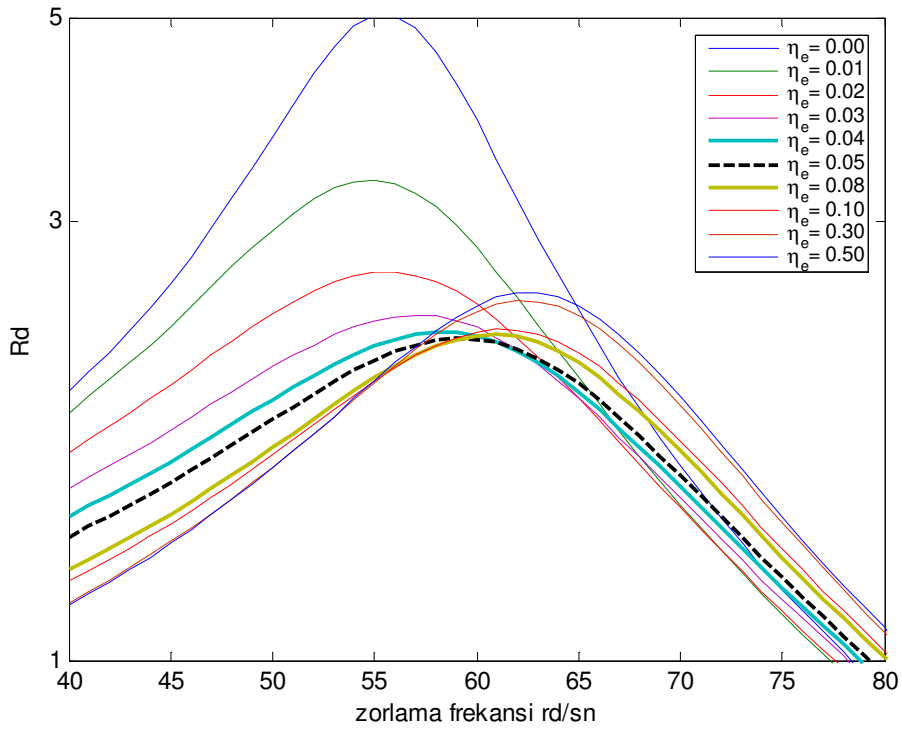
Şekil 7.9 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0022$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi

Çizelge 7.7 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0022$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre R_d değerleri

Malzeme iç sönüm katsayısı	Dönme elemanının viskoelastik sönüm katsayısı	$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o}$
η	η_c	$R_{d\max}$
0.0022	0.00	10.03
	0.01	4.98
	0.02	3.72
	0.03	3.37
	0.04	3.31
	0.05	3.36
	0.08	3.63
	0.10	3.80
	0.30	4.53
	0.50	4.75

Çizelge 7.7 den görüldüğü üzere dinamik büyütme çarpanının minimumu değeri ($R_d = 3.31$) viskoelastik sönüm katsayısının $\eta_e = 0.04$ olması durumunda elde edilmiştir.

Üçüncü olarak modal sönüm oranının $\xi = \%10$ olmasına karşılık gelen, malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0.0044$ alınarak çözüm yapıldığında elde edilen sonuçlar ve viskoelastik bağın verilen sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı - zorlama frekansı ilişkisi şekil 7.10 da verilmiştir.



Şekil 7.10 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0044$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi

Şekil 7.10 göstermektedir ki malzeme sönüm katsayısının artmasıyla sistemin dış kuvvete karşı direnimi artmıştır dolayısıyla dinamik büyütme faktörü R_d değeri küçülmüştür. Analiz sonucunda viskoelastik ara bağın optimum sönüm katsayısı $\eta_e = 0.05$ civarında olduğu görülmüştür ve zorlama frekansı-dinamik büyütme çarpanı eğrisi şekilde kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

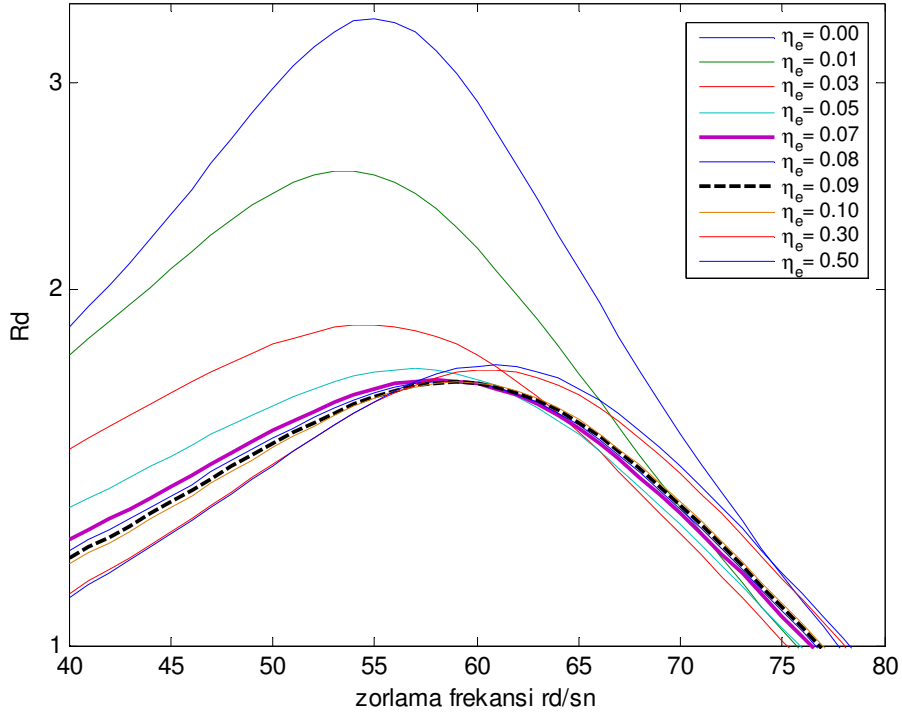
Viskoelastik ara bağıın sönüm katsayısı η_e değerlerine karşı gelen dinamik büyütme çarpanı R_d değerleri izleyen çizelgede verilir:

Çizelge 7.8 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0044$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre R_d değerleri

Malzeme iç sönüm katsayısı	Dönme elemanının viskoelastik sönüm katsayısı	$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o}$
η	η_c	$R_{d\max}$
0.0044	0.00	5.05
	0.01	3.33
	0.02	2.64
	0.03	2.37
	0.04	2.27
	0.05	2.24
	0.08	2.26
	0.10	2.29
	0.30	2.46
	0.50	2.51

Çizelge 7.8 den görüldüğü üzere dinamik büyütme çarpanının minimum değeri ($R_d = 2.24$) viskoelastik sönüm katsayısının $\eta_e = 0.05$ olması durumunda elde edilmiştir.

Dördüncü olarak modal sönüm oranının $\xi = \%15$ olmasına karşılık gelen, malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0.0066$ alınarak çözüm yapıldığında elde edilen sonuçlar ve viskoelastik bağıın verilen sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı - zorlama frekansı ilişkisi şekil 7.11 de verilmiştir. Analiz sonucunda viskoelastik ara bağıın sönüm katsayısının optimum değeri $\eta_e = 0.09$ olarak bulunmuştur. Analiz sonucu görülmektedir ki malzeme sönüm katsayısının artmasıyla, viskoelastik ara bağıın sönüm katsayısının optimum değeri de artmakta olup cevabın sönüm oranlarına hassaslığı da azalmaktadır. Yani viskoelastik ara bağıın değişim aralığına göre dinamik büyütme çarpanının değişimi aralığı azalmıştır çizelge 7.9 dan görüleceği üzere ara bağıın sönüm katsayısının yüzde 1 lik değişimine karşılık R_d değeri binde birlik değişim göstermiştir. Viskoelastik ara bağıın sönüm katsayısının verilen değerleri için $R_{d\max}$ değerleri çizelge 7.9 da verilmiştir.



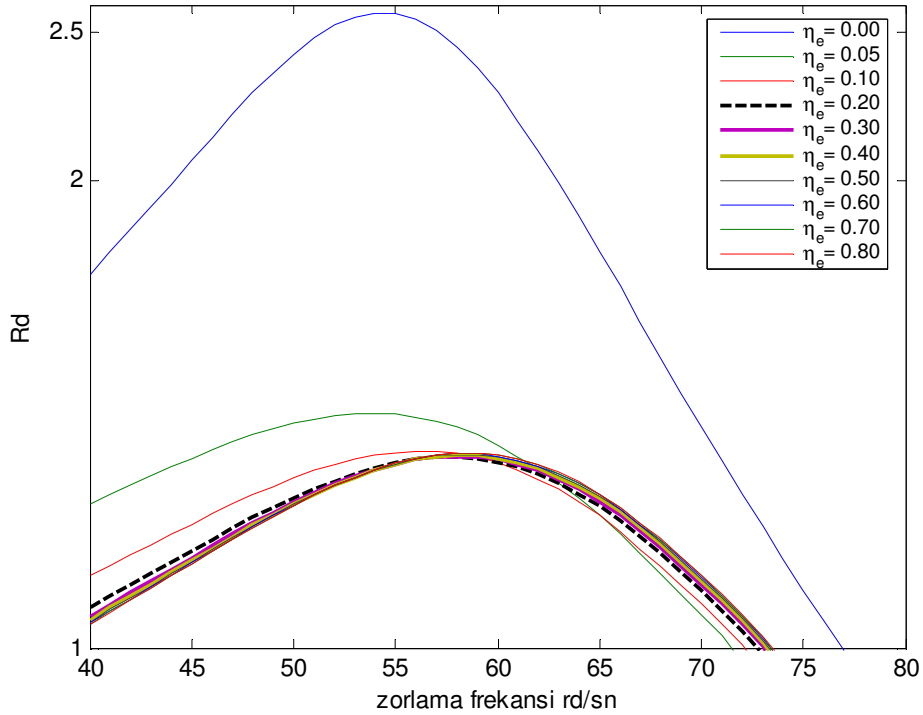
Şekil 7.11 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0066$ olması durumunda viskoelastik bağ için çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi

Çizelge 7.9 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0066$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre R_d değerleri

Malzeme iç sönüm katsayısı	Dönme elemanının viskoelastik sönüm katsayısı	$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o}$
η	η_c	$R_{d \max}$
0.0066	0.00	3.40
	0.01	2.52
	0.03	1.87
	0.05	1.72
	0.07	1.679
	0.08	1.673
	0.09	1.672
	0.10	1.673
	0.20	1.71
	0.30	1.73

Çizelge 7.9 dan görüldüğü üzere dinamik büyütme çarpanının minimum değeri ($R_d = 1.672$) viskoelastik sönüm katsayısının $\eta_e = 0.09$ olması durumunda elde edilmiştir.

Beşinci olarak modal sönüm oranının $\xi = \%20$ olmasına karşılık gelen, malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0.0088$ alınarak çözüm yapıldığında elde edilen sonuçlar ve viskoelastik bağın verilen sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı - zorlama frekansı ilişkisi izleyen grafikte verilmiştir.



Şekil 7.12 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0088$ olması durumunda viskoelastik bağın çeşitli sönüm değerleri için dinamik büyütme çarpanı ve zorlama frekansı ilişkisi

Şekil 7.12 de görülmektedir ki iç sönüm katsayısının $\eta = 0.0088$ alınması ile viskoelastik ara bağın optimum sönüm katsayısı $\eta_e = 0.20$ civarında bulunmuştur. Daha önceki çözümde belirtildiği gibi iç sönümün artmasıyla, direnim kuvvetleri artmış olup dinamik büyütme faktörü küçülmüştür. İç sönümün artmasına karşılık cevabın viskoelastik ara bağın sönüm katsayısına bağlı hassalığı azalmıştır. Şekil 7.12 incelendiğinde bu açıkça görülmektedir. Viskoelastik ara bağın sönüm katsayısının geniş aralıklarla artmasına karşın dinamik büyütme çarpanını temsil eden eğriler bir nokta etrafında toplanmış olup aralarındaki hassasiyet 0.001

civarındadır. Bu durum çizelge 7.10 da net bir şekilde görülmektedir. Viskoelastik ara bağın verilen sönüm katsayısı değerlerine karşılık gelen dinamik büyütme çarpanı R_d değerleri çizelge 7.10 da verilmiştir.

Çizelge 7.10 Malzeme iç sönümünün $\eta = 0.0088$ olması durumunda viskoelastik sönüm katsayısı değişimine göre R_d değerleri

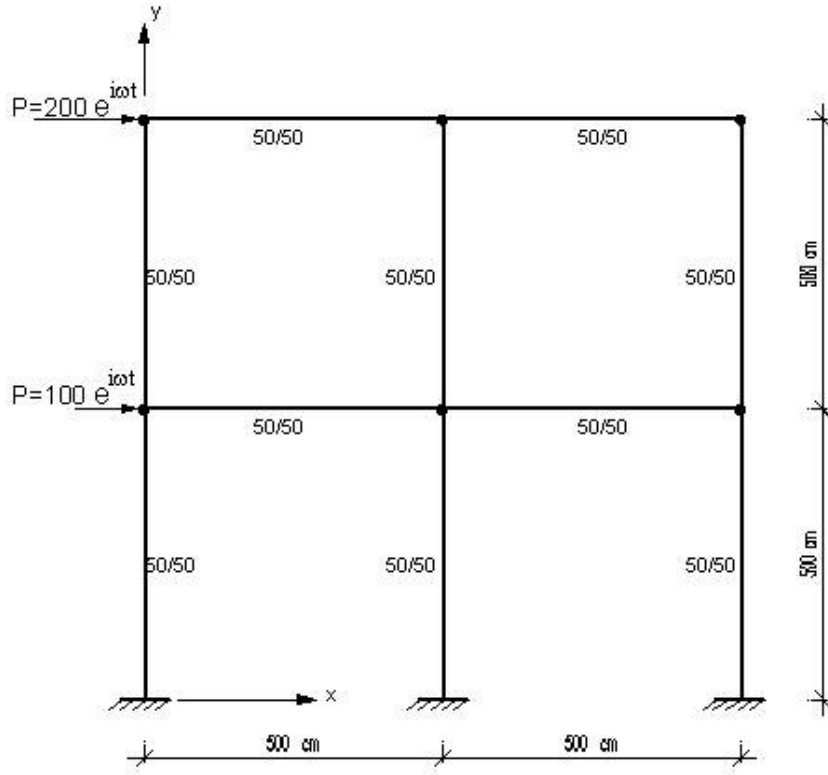
Malzeme iç sönüm katsayısı	Dönme elemanının viskoelastik sönüm katsayısı	$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o}$
η	η_c	$R_{d\max}$
0.0088	0.00	2.57
	0.05	1.42
	0.10	1.34
	0.20	1.328
	0.30	1.329
	0.40	1.332
	0.50	1.333
	0.60	1.334
	0.70	1.335
	0.80	1.336

Çizelge 7.10 dan görüldüğü üzere dinamik büyütme çarpanının minimum değeri ($R_d = 1.328$) viskoelastik sönüm katsayısının $\eta_e = 0.20$ olması durumunda elde edilmiştir.

Bu çalışma sonucunda söylenebilir ki belirli bir malzeme sönümünü ve elastik bağ rijitliği için çerçeve tepe noktası yer değiştirmesini en aza indirecek en uygun viskoelastik ara bağ sönüm katsayısı elde edilebilir.

7.3.5 Periyodik Yük Altında Düzlem Çerçeve Analizi ve Sonuçların SAP 2000 Programından Elde Edilen Sonuçlar ile Karşılaştırılması

Şekil 7.13 de verilen düzlem çerçevenin, verilen dış yük altında düğüm noktalarının sürekli bağlı olması ve viskoelastik bağlı olması halleri göz önüne alınarak frekans alanında kararlı hal hareketi incelenecektir.



Şekil 7.13 İki açıklıklı ve iki katlı düzlem çerçeve

$$P_{01} = 200 \text{ kN}$$

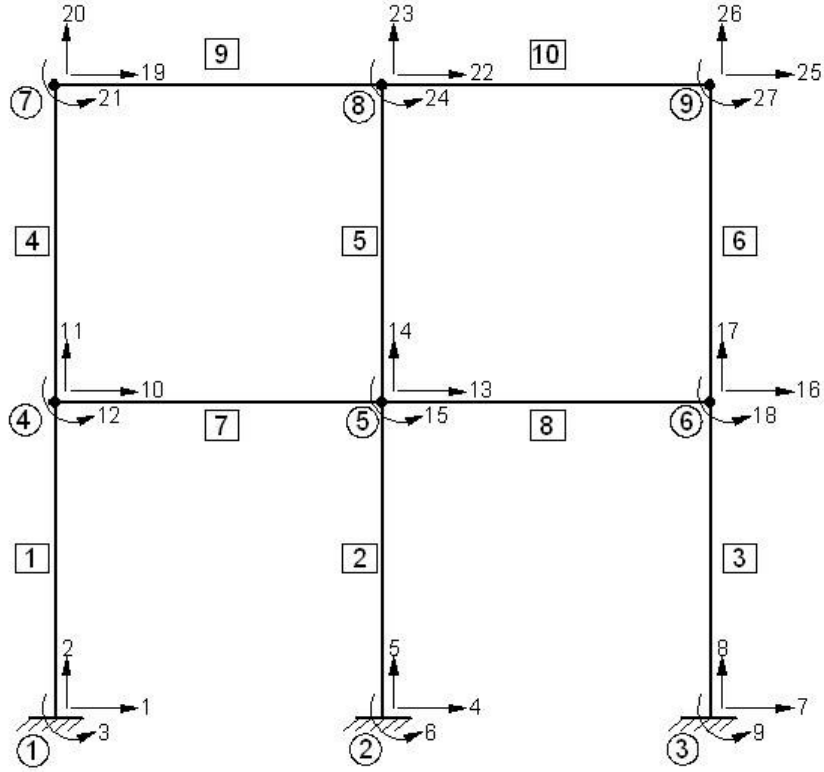
$$P_{02} = 100 \text{ kN}$$

$$E = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho = 2.5 \text{ kN sn}^2 / \text{m}^4$$

$$\eta = 0.003$$

Sistemin düğüm noktalarının, elemanlarının ve yer değiştirme serbestliklerinin numaralandırılması şekil 14 de verilmiştir.



Şekil 7.14 Sistem elemanlarının numaralandırılması ve yer değiştirme serbestlikleri

Düğüm noktalarının viskoelastik bağlı olma durumu iki durum için göz önüne alınacaktır. İlk durumda 7 ve 8 numaralı elemanların 4, 5 ve 6 numaralı düğüm noktalarına viskoelastik bağlı olma durumu, diğeri ilk duruma ek olarak 9 ve 10 numaralı elemanların 7, 8, 9 numaralı düğüm noktalarına viskoelastik bağlı olma durumudur. Sistem 3 aşamalı olarak çözülecek ve sistem tepe noktasının dış yük doğrultusundaki yer değiştirmeleri kıyaslanacaktır. Bulunan sonuçlar SAP2000 programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

SAP2000 programında aynı problem iki farklı çözüm metodu ile ele alınacaktır. Bunlardan biri bu çalışmada ele alınan çözüm yöntemi ile aynı olan frekans alanında çözüm yapan kararlı hal analizi (steady-state analysis), diğeri zaman tanım alanında hesap yapan (linear time history analysis) analizdir.

SAP2000 programındaki kararlı hal analizin (steady-state analysis) bu çalışmada ele alınan çözüm yönteminden tek farkı sönümün hızdan bağımsız olmasıdır; yani viskoz sönüm yerine hızdan bağımsız sönüm (yapısal sönüm veya hysteritic sönüm) kullanmasıdır. Bu yöntemde çözümlerin özdeşleştirilmesi için 6. bölümde (6.62) eşitliği ile verilen iç sönüm katsayısı olan η ile modal sönüm oranı ξ arasındaki ilişki kullanılacaktır. Yani verilen sistemin modal sönüm oranının iki katı SAP2000 programına iç sönüm katsayısı olarak tanımlanacaktır.

Diğer çözüm metodu olan zaman tanım alanındaki analizde (lineer time history analysis) dış yük fonksiyonu olarak sinüs fonksiyonu kullanılmaktadır. Dolayısıyla tek bir frekans değeri için tanımlanan zamana bağlı sinüs fonksiyonu alınarak çözüm yapılabilir. Bu yöntemde çözümlerin özdeşleştirilmesi için verilen sistemin modal sönüm oranı hesaplanarak SAP2000 programına modal sönüm değeri olarak girilecektir.

7.3.5.1 Tüm Elemanların Sürekli Bağlı Olması Durumu

- **Matlab Programı ile Çözüm:**

Tüm elemanların sürekli bağlı olması durumunda sistem 27 adet yer değiştirme serbestliğine sahiptir. Sınır koşullarının uygulanmasından sonra sistem yer değiştirme serbestliği 18'e inmiştir. Sistem analizi sonucunda elde edilen doğal frekans ve periyotlar ilk sekiz mod için izleyen çizelgede verilmiştir.

Çizelge 7.11 Düzlem çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri

Frekans	(ω_n) (rd/sn)	T (sn)
1	28.912	0.2174
2	92.01	0.0682
3	240.81	0.0261
4	303.29	0.0207
5	339.45	0.0185
6	344.87	0.0182
7	466.36	0.0135
8	482.13	0.0130

Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktası yer değiştirme değeri $U_{19_s} = 0.02096m$ olarak, periyodik yük altında tepe noktasının maksimum yer değiştirme değeri $U_{19} = 0.2349m$ olarak bulunmuştur.

Sistemin etkin doğal frekansı $\omega_{n_1} = 28.912rd/sn$ olup bu frekansa gelen mod şekli izleyen şekilde verilir:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 0.2708 \\ 0.0025 \\ -0.0440 \\ 0.2710 \\ -0.0000 \\ -0.0264 \\ 0.2708 \\ -0.0025 \\ -0.0440 \\ 0.5081 \\ 0.0033 \\ -0.0203 \\ 0.5080 \\ -0.0000 \\ -0.0120 \\ 0.5081 \\ -0.0033 \\ -0.0203 \end{Bmatrix} \begin{matrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \\ U_{19} \\ U_{20} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{24} \end{matrix}$$

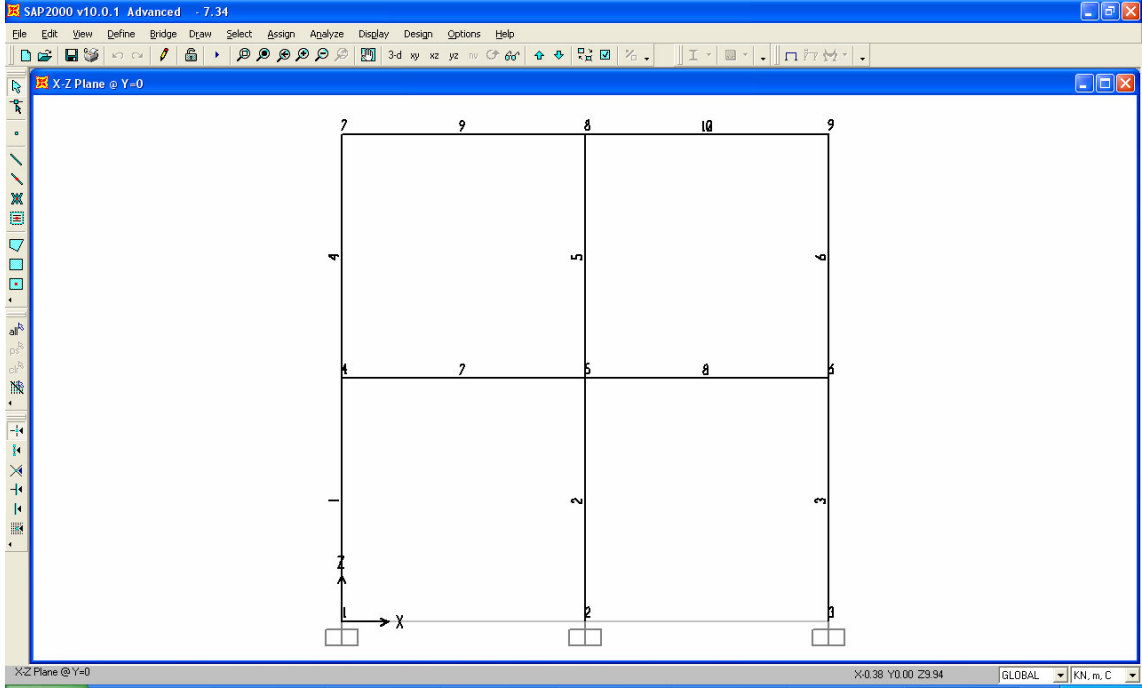
SAP2000 çözümü ile sonuçların karşılaştırılması amacıyla sistemin 1. modu için modal sönüm oranı hesaplanmalıdır. Modal sönüm oranı ile sönüm katsayısı arasındaki ilişki (7.17) ile verilmiş olup $\eta = 0.003$ için izleyen şekilde hesaplanır:

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_n} = \frac{\eta K}{2M\omega_n} = \frac{\eta\omega_n}{2} = \frac{0.003 \times 28.912}{2} = 0.0433$$

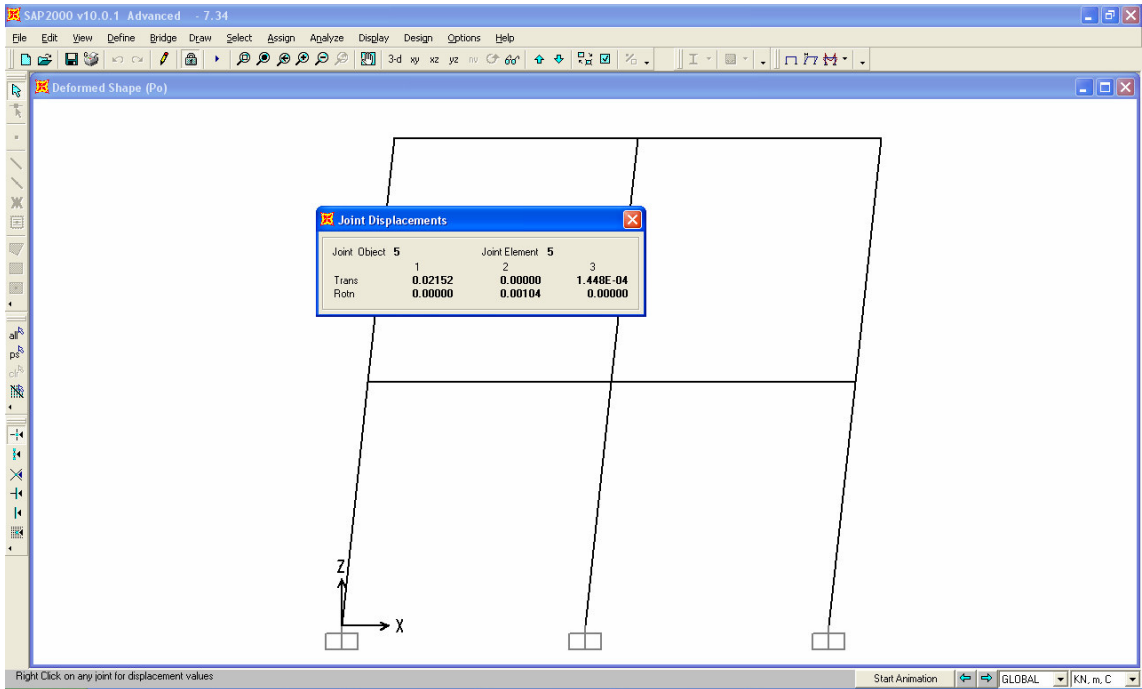
- **SAP2000 Programı ile Çözüm:**

SAP2000 programında yapılan analiz sonucunda 7 numaralı düğüm noktasının statik yük altında x yönündeki yer değiştirme değeri $U_{st} = 0.02152m$ olarak bulunmuştur. Sistemin zorlanmış titreşim hareketinin incelenmesinde ilk olarak verilen sistem için iç sönüm katsayısı $\eta = 2\xi = 2 \times 0.0433 = 0.0866$ alınarak frekans alanında kararlı hal (steady-state) çözümü yapılmış olup tepe noktasının yer değiştirme değeri $U = 0.2439m$ olarak bulunmuştur. İkinci olarak $P = P_0 \sin \omega t$ dış yükü altında zorlama frekansı $\omega = 27.95 \text{ rd/sn}$ ($T = 0.2247 \text{ sn}$) ve sönüm oranı $\xi = 0.0433$ alınarak zaman tanım alanında (linear time history) çözüm yapılmış

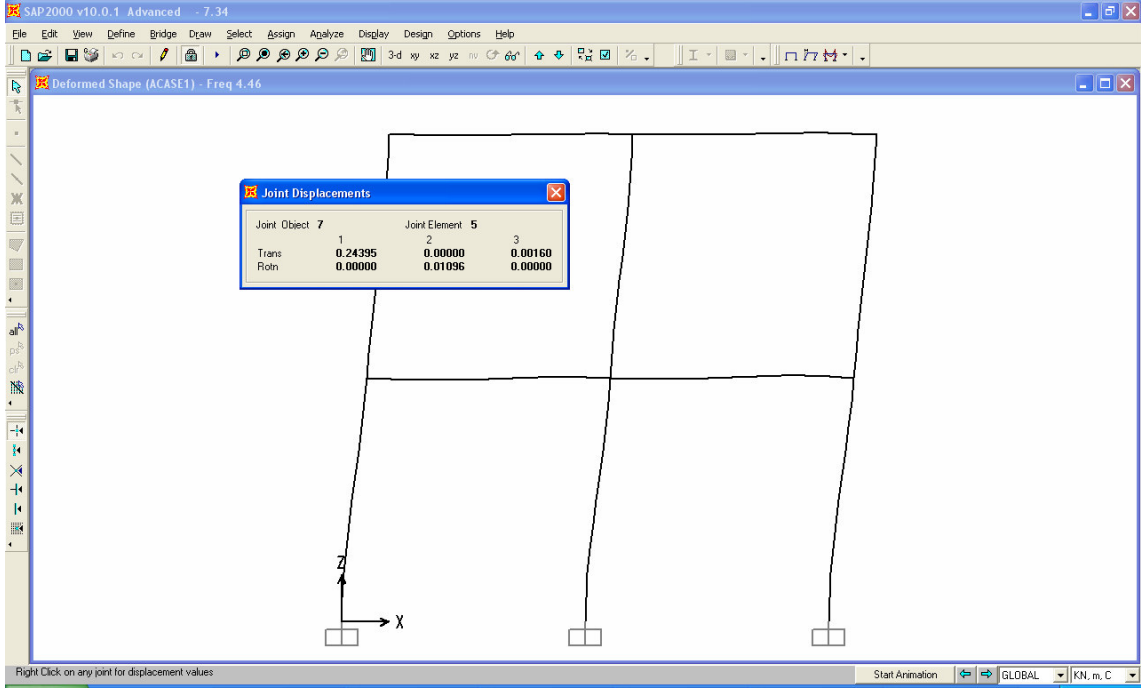
ve yer değiştirme değeri $U = 0.23216m$ olarak bulunmuştur. Sistem modeli, dđęüm numaraları ve analiz sonucu bulunan yer değiştirme değerleri izleyen şekilde verilir.



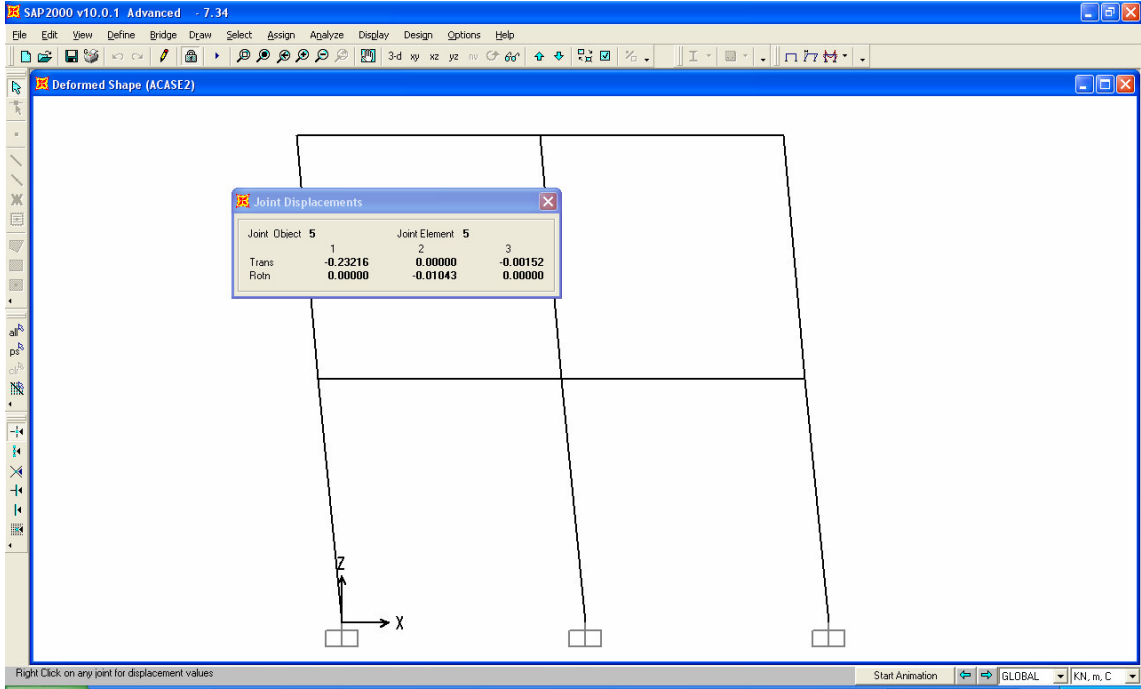
şekil 7.15 SAP2000 sistem modeli ve dđęüm noktası numaraları



şekil 7.16 SAP2000 modeli statik yđk altında yer değiştirme değeri



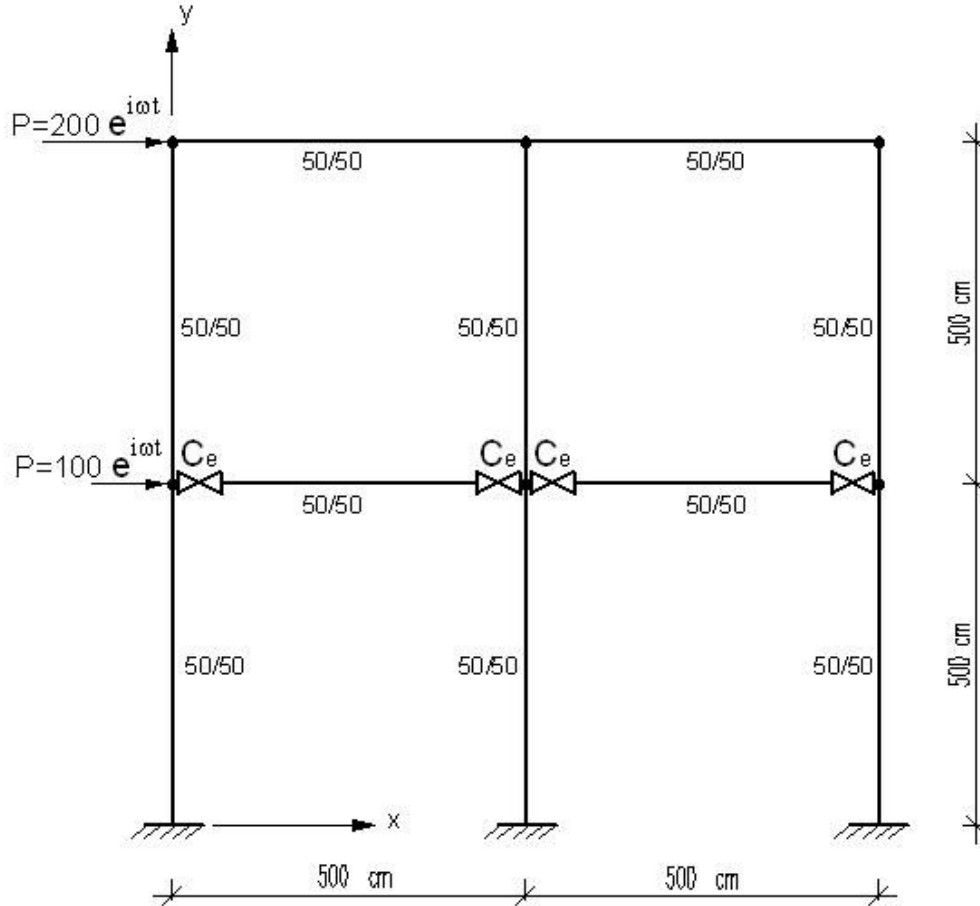
7.17 SAP2000 modeli frekans alanında çözüm sonucu yer değıştirme değeri



Şekil 7.18 SAP2000 modeli zaman tanım alanında çözüm sonucu yer değıştirme değeri

7.3.5.2 Birinci Kat Kirişlerinin Viskoelastik Bağlı Olması Durumu

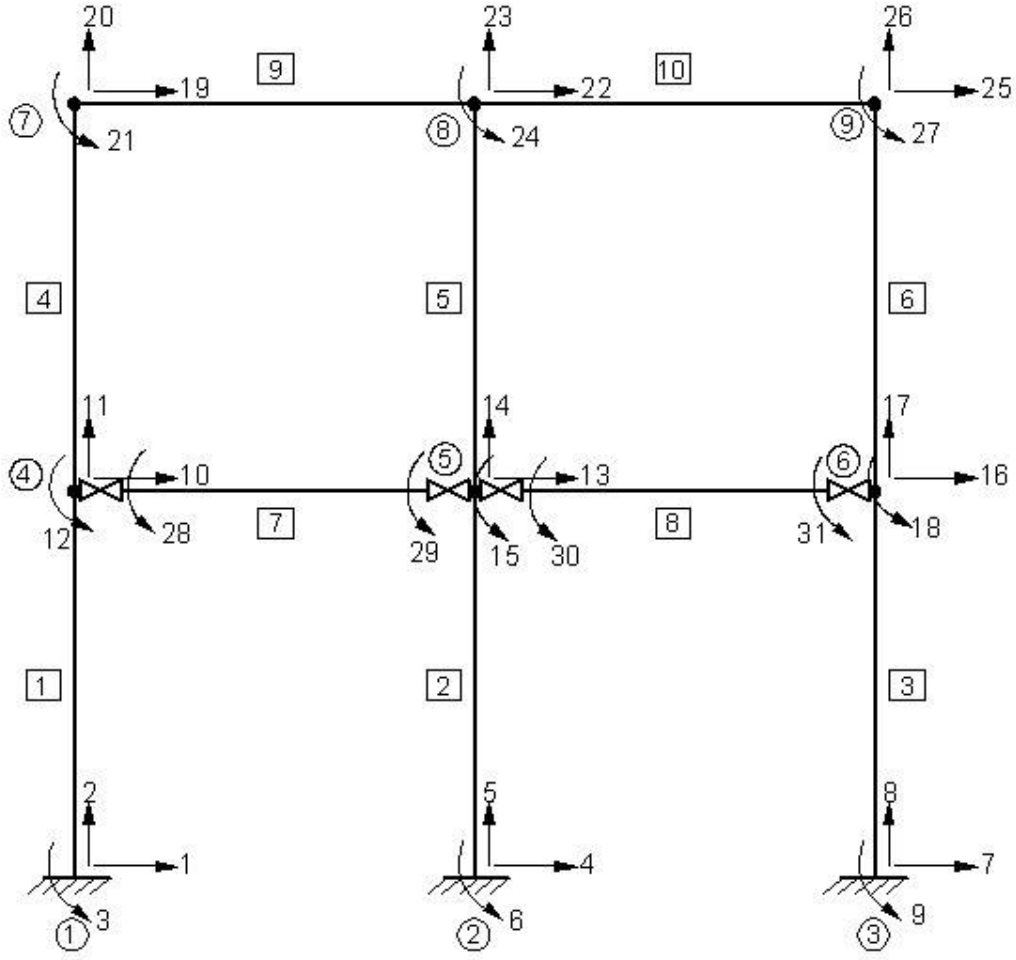
Bu çalışmada, 7.3.5.1 numaralı çalışmada verilen sistemin 7 ve 8 numaralı elemanlarının düğüm noktalarında viskoelastik bağlı olması durumu ele alınmıştır. Elastik bağ katsayısı değeri $C_e = 100000 \text{ kN m/rd}$ ve viskoz sönüm katsayısı $\eta_e = 0.05$ alınarak sistem analizi yapılmıştır. Sistem modeli şekil 7.19 da verilmiştir.



Şekil 7.19 Viskoelastik ara bağlı iki açıklıklı iki katlı düzlem çerçeve

- **Matlab Programı ile Çözüm:**

Şekil 7.19 dan görüldüğü üzere bu aşamada sistemde 4 adet viskoelastik bağ mevcuttur ve bu durumda sistemin serbestlik derecesi elastik bağ sayısı kadar artarak 31 adete çıkmıştır. Sistem serbestlikleri şekil 7.20 de verilmiştir. Sınır koşullarının uygulanmasından sonra sistem serbestliği 22 ye inmiştir.



Şekil 7.20 Sistem elemanlarının numaralandırılması ve yer değiştirme serbestlikleri

Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktası yer değiştirme değeri $U_{19_{st}} = 0.02917 m$ olarak, periyodik yük altında tepe noktasının maksimum yer değiştirme değeri $U_{19} = 0.1120 m$ olarak bulunmuştur. Sistemin ilk sekiz doğal frekans ve periyotları izleyen çizelgede verilmiştir.

Çizelge 7.12 Viskoelastik ara bağlı çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri

Frekans	(ω_n) (rd/sn)	T (sn)
1	24.48	0.2567
2	91.67	0.0686
3	240.34	0.0261
4	286.33	0.0219
5	297.35	0.0211
6	299.65	0.0209
7	428.17	0.0147
8	456.41	0.0138

Sistemin etkin doğal frekansı $\omega_{n_1} = 24.48 \text{ rd/sn}$ olup bu frekansa gelen mod şekli izleyen şekilde verilir:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} -0.2621 \\ -0.0016 \\ 0.0580 \\ -0.2622 \\ 0.0000 \\ 0.0487 \\ -0.2621 \\ 0.0016 \\ 0.0580 \\ -0.5107 \\ -0.0023 \\ 0.0194 \\ -0.5107 \\ 0.0000 \\ 0.0098 \\ -0.5107 \\ 0.0023 \\ 0.0194 \\ 0.0217 \\ 0.0159 \\ 0.0159 \\ 0.0217 \end{Bmatrix} \begin{matrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \\ U_{19} \\ U_{20} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{24} \\ U_{25} \\ U_{26} \\ U_{27} \\ U_{28} \end{matrix}$$

Sistemin sönüm matrisi düzlem çerçeve elemanların sönümü ve viskoelastik bağın sönümü olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Denklem (7.18) den modal sönüm izleyen şekilde hesaplanır:

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_n} = \frac{\eta K + \eta_e C_e}{2M\omega_n}$$

(7.8) ve (7.9) ifadelerinde verildiği üzere K ; düzlem çerçeve elemanların oluşturduğu modal rijitlik, C_e ; viskoelastik bağın oluşturduğu modal rijitlik, M ; sistemin modal kütesidir.

$$K_1 = \{\phi\}^T K \{\phi\} = 1802.6$$

$$C_{e_1} = \{\phi\}^T C_e \{\phi\} = 479.2$$

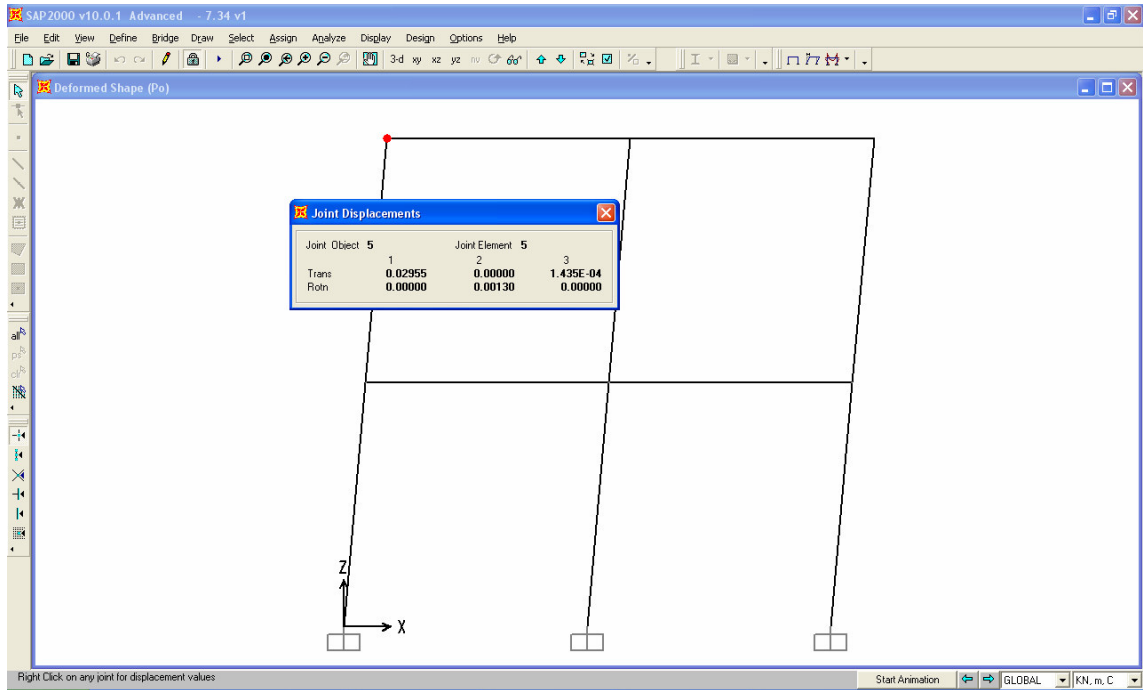
$$M_1 = \{\phi\}^T M \{\phi\} = 3.8091$$

Buradan sönüm oranı izleyen şekilde bulunur:

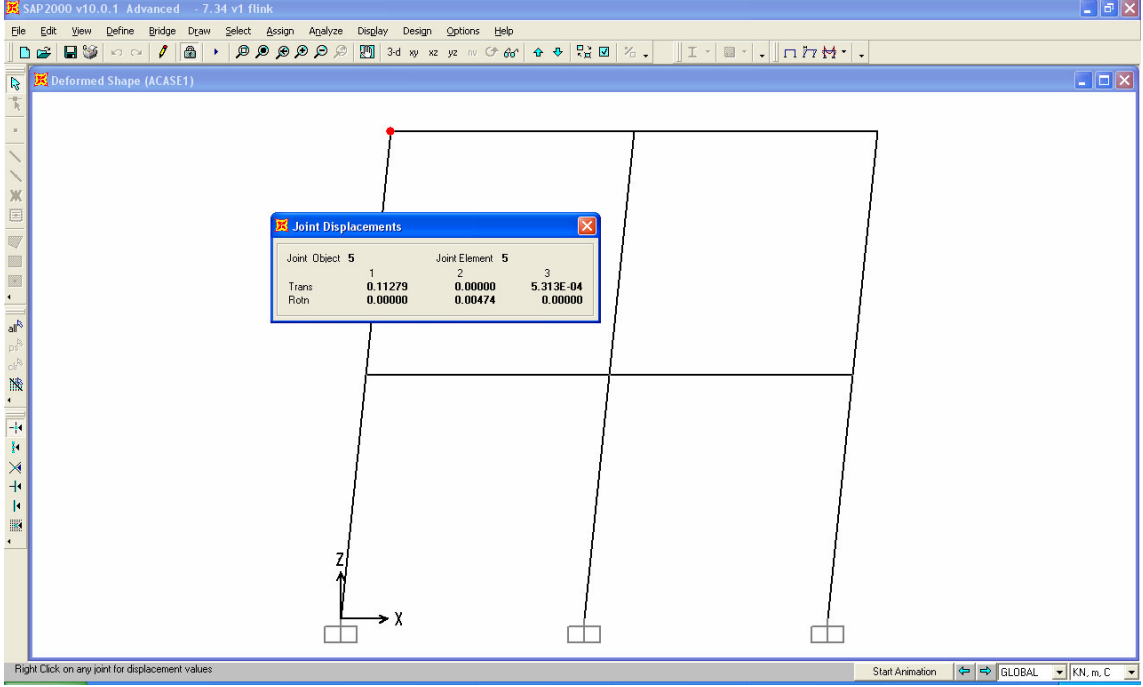
$$\xi = \frac{\eta K + \eta_e C_e}{2M \omega_n} = \frac{0.003 \times 1802 + 0.05 \times 479}{2 \times 3.81 \times 24.48} = 0.157$$

- **SAP2000 programı ile Çözüm:**

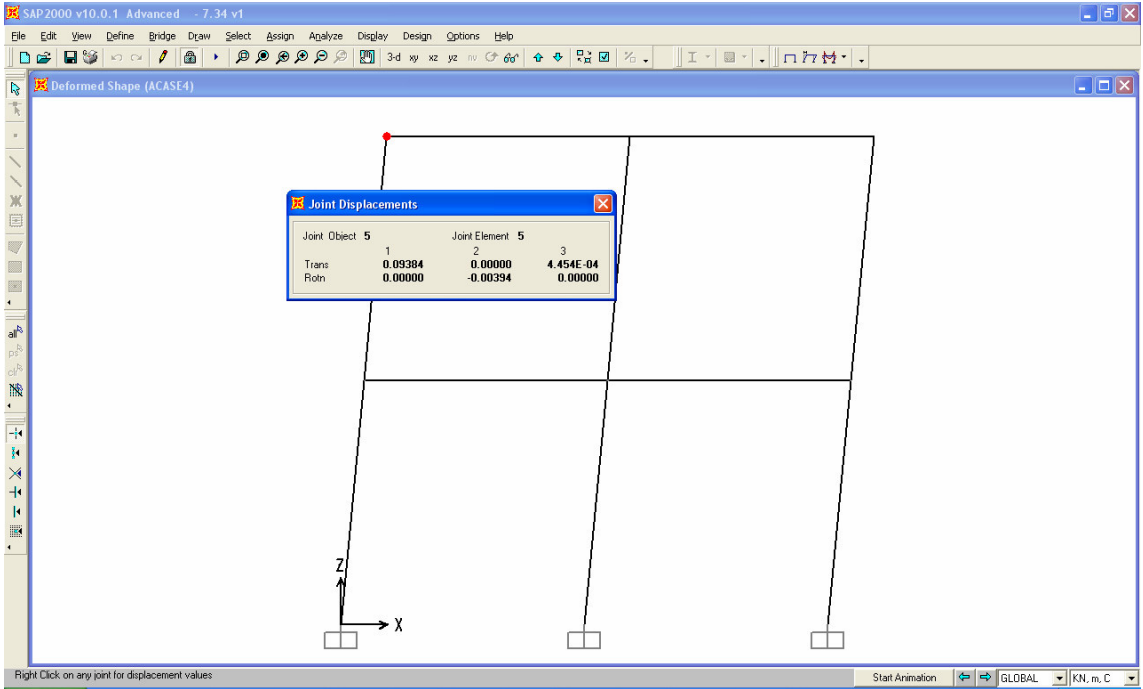
SAP2000 programında viskoelastik ara bağ, bağ eleman (Link eleman) kullanılarak tanımlanmıştır. Viskoelastik bağ özelliği lineer bağ elemanına (Link elemana) elastik yay katsayısı C_e ve sönüm sabiti D_e girilerek tanıtılmıştır. Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktasının yatay yük doğrultusundaki yer değiştirme değeri $U_{st} = 0.02955 m$ olarak bulunmuştur. SAP2000 programının frekans alanında çözüm metodundaki hysteritic sönüm ile viskoz sönümün özdeşleştirilebilmesi için iç sönüm katsayısının $\eta = 2\xi = 2 \times 0.157 = 0.314$ alınarak programa girilmesi sonucu tepe noktası yer değiştirme değeri $U = 0.1128 m$ olarak bulunmuştur. Zaman tanım alanında yapılan hesap yönteminde, zorlama frekansı $\omega = 23.65 rd / sn$ ($T = 0.2657 sn$) ve modal sönüm oranı $\xi = 0.157$ alınarak bu değerlerin programa girilmesi sonucu tepe noktasının yer değiştirme değeri $U = 0.09384 m$ olarak bulunmuştur. Analiz sonucu bulunan yer değiştirme değerleri izleyen şekilde verilir.



Şekil 7.21 Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile statik yük altında çözümünü sonucu yer değiştirme değeri



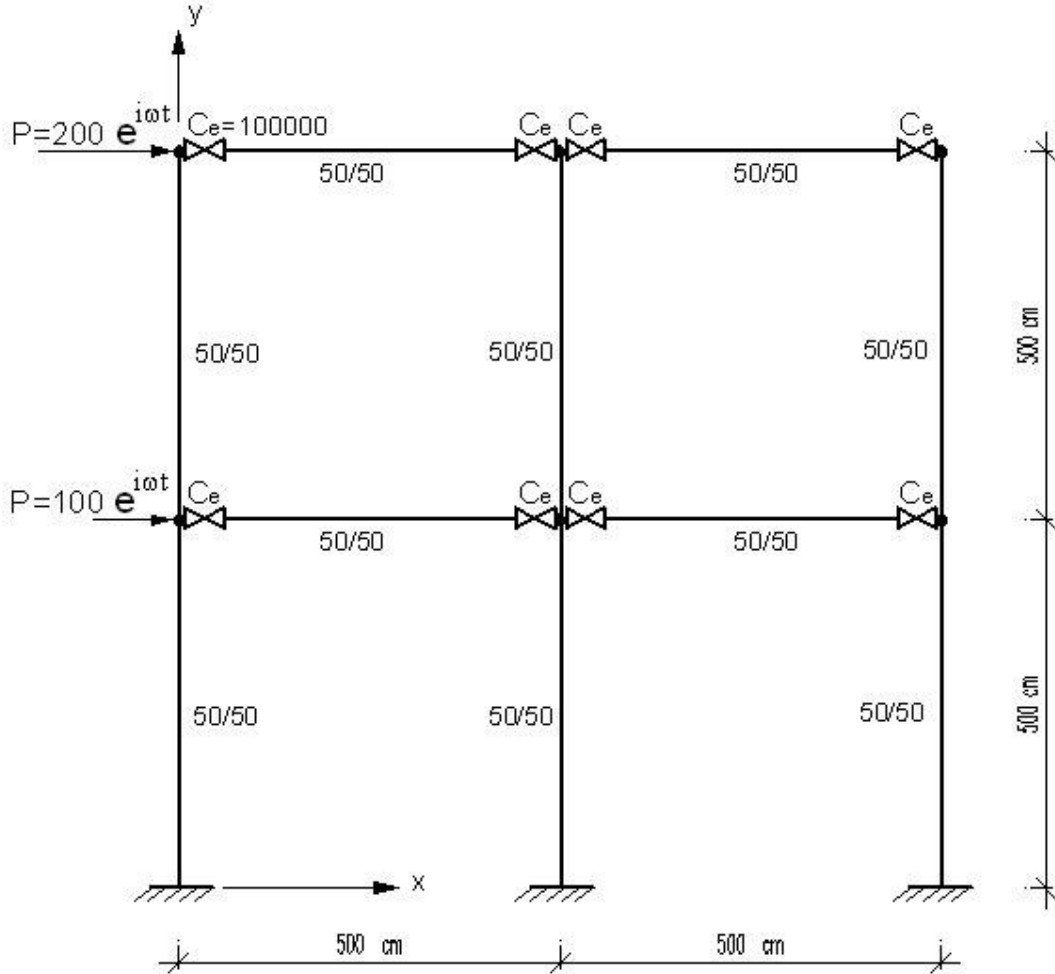
Şekil 7.22 Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile frekans alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri



Şekil 7.23 Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri

7.3.5.3 Birinci ve İkinci Kat Kirişlerinin Viskoelastik Bağlı Olması Durumu

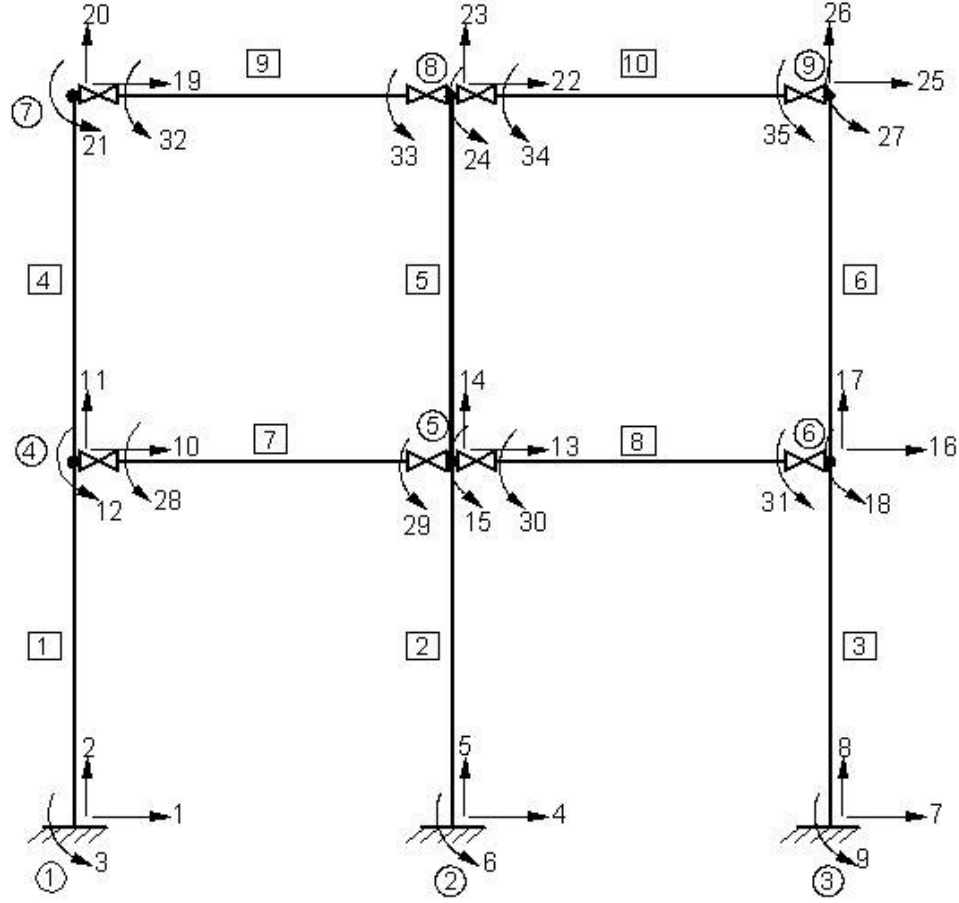
Bu çalışmada, 7.3.5.1 numaralı çalışmada verilen sistemin 7, 8, 9 ve 10 numaralı elemanlarının düğüm noktalarında viskoelastik bağlı olması durumu ele alınmıştır. Elastik bağ katsayısı değeri $C_e = 100000 \text{ kN m/rd}$ ve viskoz sönüm katsayısı $\eta_e = 0.05$ alınarak sistem analizi yapılmıştır. Sistem modeli şekil 7.24 de verilmiştir.



Şekil 7.24 Viskoelastik ara bağlı iki açıklıklı iki katlı düzlem çerçeve

- **Matlab Programı ile Çözüm:**

Şekil 7.22 den görüldüğü üzere bu aşamada sistemde 8 adet viskoelastik bağ mevcuttur ve bu durumda sistemin serbestlik derecesi elastik bağ sayısı kadar artarak 35 adete çıkmıştır. Sistem yer değiştirme serbestlikleri şekil 7.25 de verilmiştir. Sınır koşullarının uygulanmasından sonra sistem yer değiştirme serbestliği 26'ya inmiştir.



Şekil 7.25 Viskoelastik ara bağlı düzlem çerçeve serbestliklerinin numaralandırılması

Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktası yer değıştirme değeri $U_{19_{st}} = 0.03394 m$ olarak, periyodik yük altında tepe noktasının maksimum yer değıştirme değeri $U_{19} = 0.1026 m$ olarak bulunmuştur. Sistemin ilk sekiz doğal frekans ve periyotları izleyen çizelgede verilmiştir:

Çizelge 7.13 Viskoelastik ara bağlı çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değeri

Frekans	(ω_n) (rd/sn)	T (sn)
1	23.25	0.2702
2	84.12	0.0747
3	238.47	0.0263
4	257.68	0.0244
5	279.87	0.0225
6	286.11	0.0220
7	385.99	0.0163
8	394.07	0.0160

Sistemin etkin doğal frekansı $\omega_{n_1} = 23.25 \text{ rd/sn}$ olup bu frekansa gelen mod şekli izleyen şekilde verilir:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0.2413 \\ 0.0014 \\ -0.0558 \\ 0.2414 \\ 0.0000 \\ -0.0466 \\ 0.2413 \\ -0.0014 \\ -0.0558 \\ 0.5202 \\ 0.0020 \\ -0.0358 \\ 0.5201 \\ 0.0000 \\ -0.0277 \\ 0.5202 \\ -0.0020 \\ -0.0358 \\ -0.0208 \\ -0.0152 \\ -0.0152 \\ -0.0208 \\ -0.0138 \\ -0.0088 \\ -0.0088 \\ -0.0138 \end{Bmatrix} \begin{matrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \\ U_{19} \\ U_{20} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{24} \\ U_{25} \\ U_{26} \\ U_{27} \\ U_{28} \\ U_{29} \\ U_{30} \\ U_{31} \\ U_{32} \end{matrix}$$

Sistemin sönüm matrisi düzlem çerçeve elemanların sönümü ve viskoelastik bağın sönümü olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Denklem (7.18) den modal sönüm izleyen şekilde hesaplanır:

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_n} = \frac{\eta K + \eta_e C_e}{2M\omega_n}$$

(7.8) ve (7.9) ifadelerinde verildiği üzere K ; düzlem çerçeve elemanların oluşturduğu modal rijitlik, C_e ; viskoelastik bağın oluşturduğu modal rijitlik, M ; sistemin modal kütesidir.

$$K_1 = \{\phi\}^T K \{\phi\} = 1383$$

$$C_{e_1} = \{\phi\}^T C_e \{\phi\} = 610$$

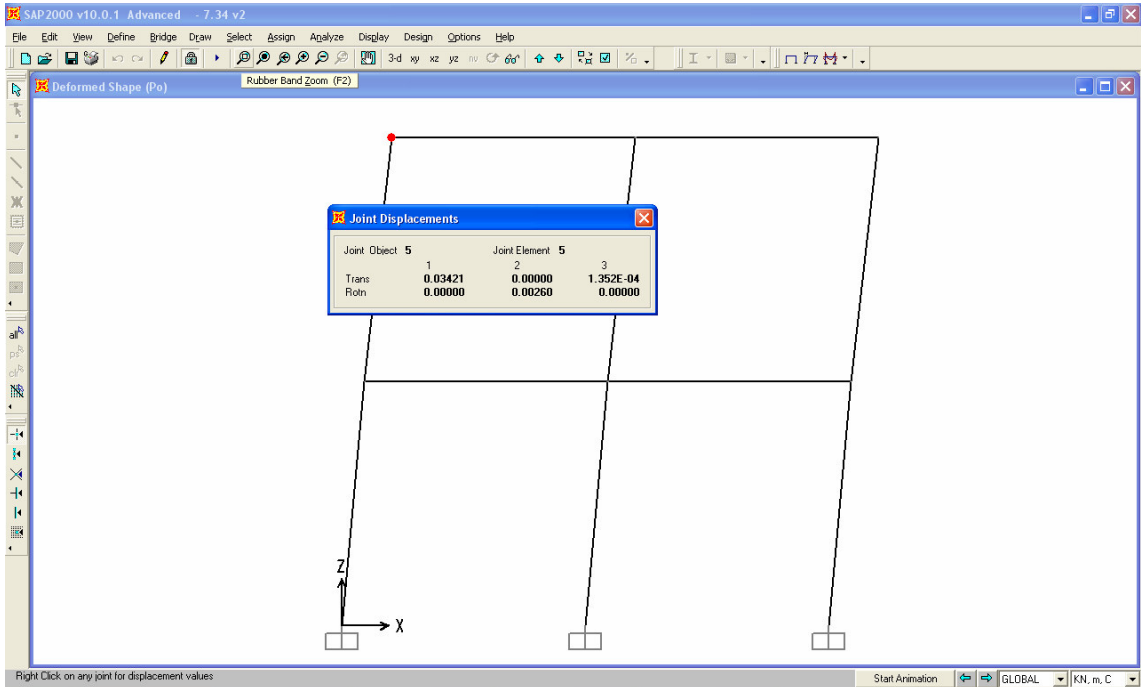
$$M_1 = \{\phi\}^T M \{\phi\} = 3.6866$$

Buradan sönüm oranı izleyen şekilde bulunur:

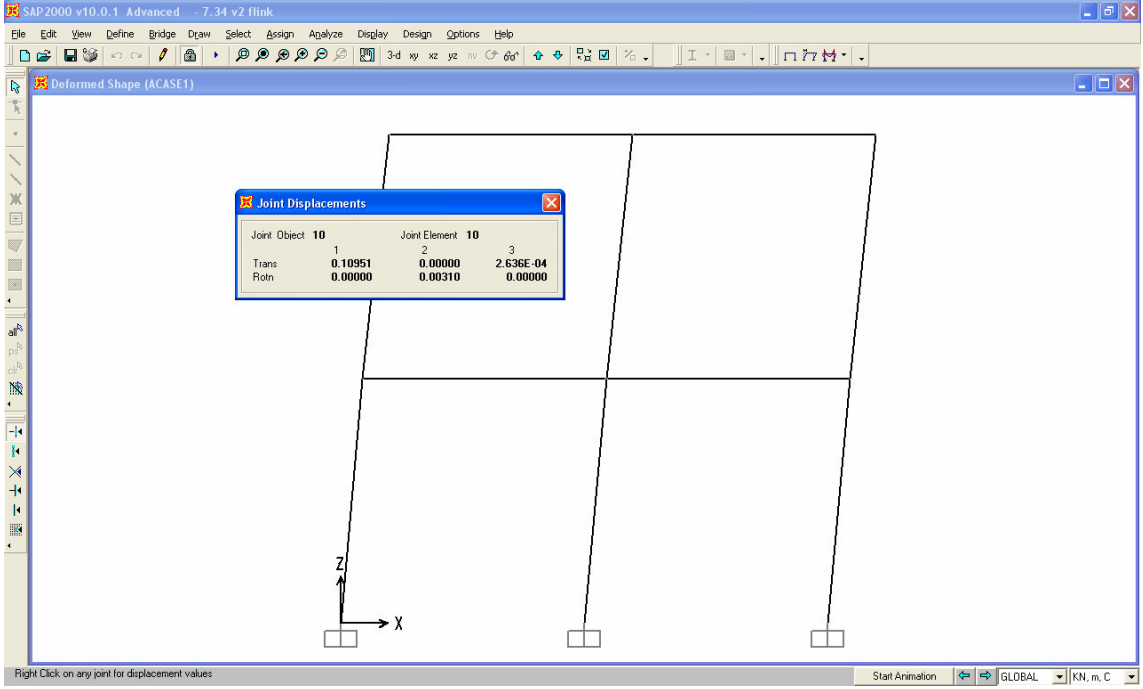
$$\xi = \frac{\eta K + \eta_e C_e}{2M \omega_n} = \frac{0.003 \times 1383 + 0.05 \times 610}{2 \times 3.6866 \times 23.35} = 0.202$$

- **SAP2000 programı ile Çözüm:**

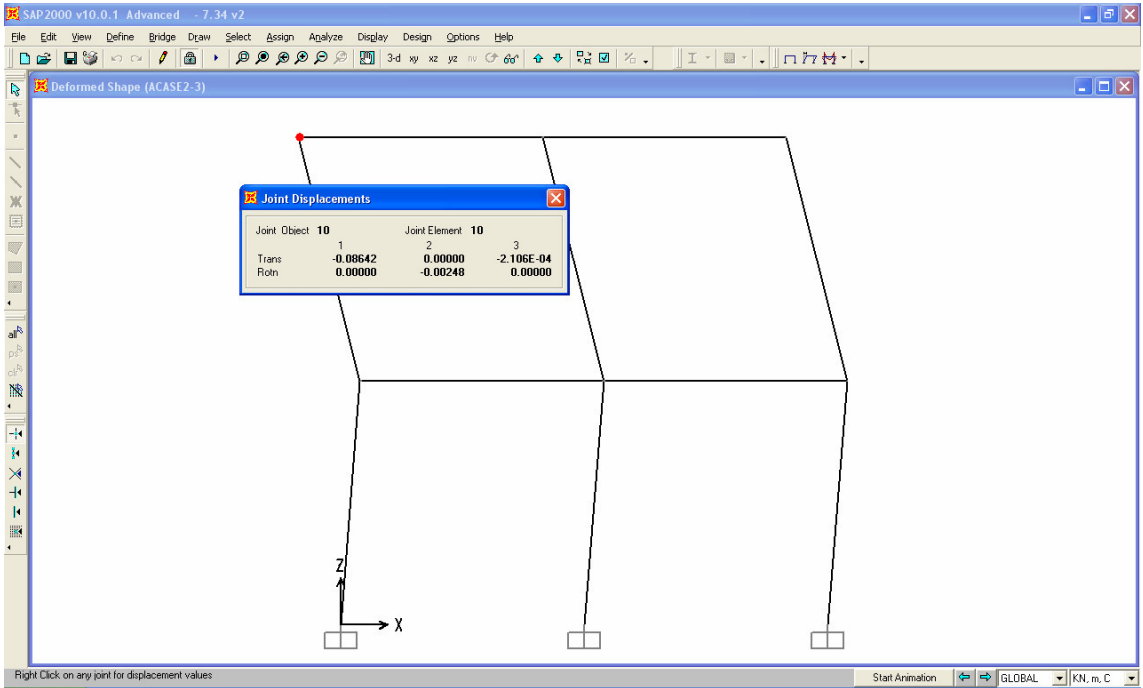
Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktasının yatay yük doğrultusundaki yer değiştirme değeri $U_{st} = 0.03421m$ olarak bulunmuştur. Frekans alanında iç sönüm katsayısı $\eta = 2\xi = 0.404$ alınarak yapılan çözümlemede tepe noktasının yer değiştirme değeri $U = 0.1095m$ olarak bulunmuştur. Zaman tanım alanında zorlama frekansı $\omega = 22 \text{ rd/sn}$ ($T = 0.286 \text{ sn}$) ve sönüm oranı $\xi = 0.202$ alınarak yapılan zorlanmış titreşim analizinde tepe noktasının yer değiştirme değeri $U = 0.08642m$ olarak bulunmuştur. Analiz sonucu bulunan yer değiştirme değerleri izleyen şekilde verilir.



Şekil 7.26 Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı statik yük altında çözümünü sonucu yer değiştirme değeri



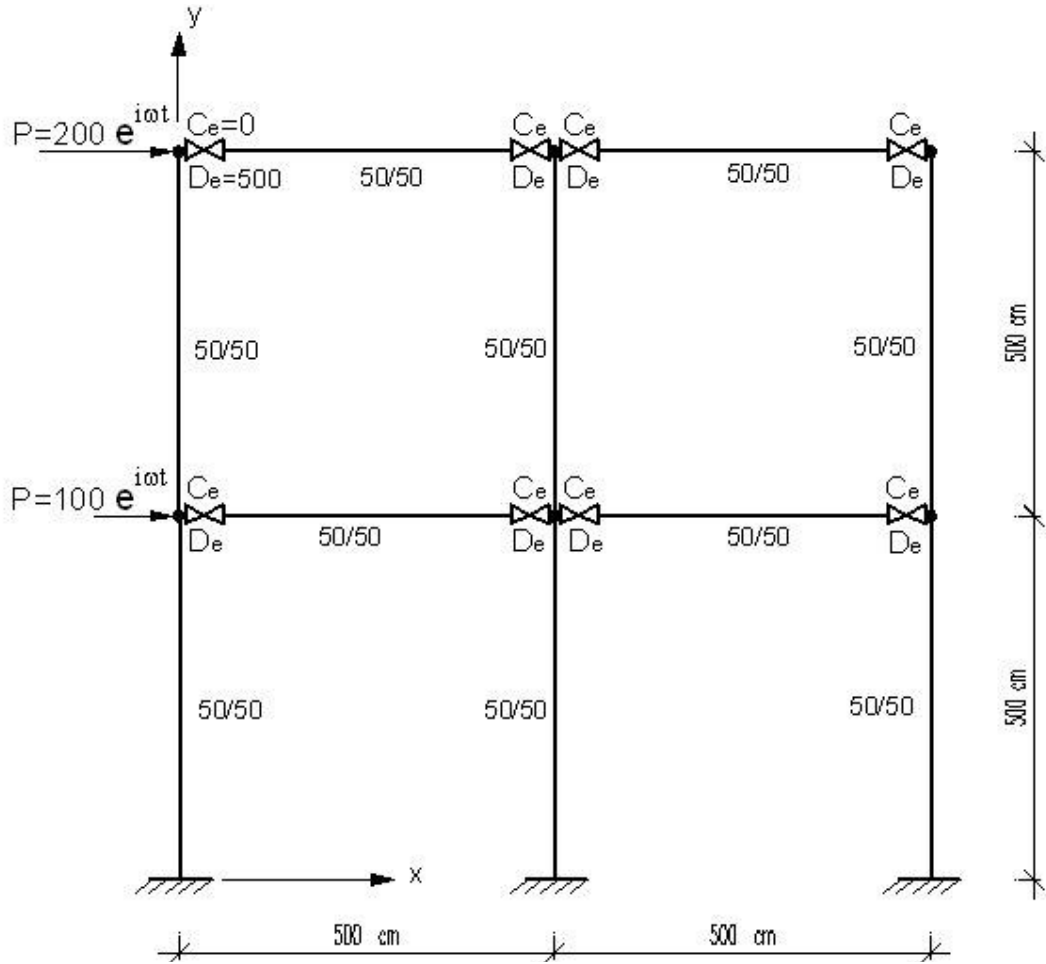
Şekil 7.27 Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile frekans alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri



Şekil 7.28 Viskoelastik ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri

7.3.5.4 Birinci ve İkinci Kat Kirişlerinin Viskoz Bağlı Olması Durumu

Bu çalışmada, 7.3.5.3 numaralı çalışmada verilen sistemin 7, 8, 9 ve 10 numaralı elemanlarının düğüm noktalarında sadece viskoz bağlı olması durumu ele alınmıştır. Yani bu durum statik yükleme durumunda sürtünmesiz ideal mafsalsı olarak davranan (elastik bağ katsayısı değeri $C_e = 0$) dinamik yükleme durumunda viskoz davranan (viskoz sönüm sabiti $D_e = \eta_e C_e = 500 \text{ kNm s / rd}$) ara bağ durumu göz önüne alınmıştır. Sistem modeli şekil 7.29 de verilmiştir.



Şekil 7.29 Viskoz bağlı düzlem çerçeve

- **Matlab Programı ile Çözüm:**

Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktası yer değıştirme değeri $U_{19_s} = 0.1645 \text{ m}$ olarak, periyodik yük altında tepe noktasının maksimum yer değıştirme değeri $U_{19} = 0.2973 \text{ m}$ olarak bulunmuştur. Sistemin ilk sekiz doğal frekans ve periyotları izleyen çizelgede verilmiştir:

Çizelge 7.14 Viskoz ara bağlı düzlem çerçevenin ilk 8 mod için frekans ve periyot değerleri

Frekans	(ω_n) (rd/sn)	T (sn)
1	11.12	0.5652
2	68.06	0.0923
3	200.43	0.0313
4	212.2	0.0296
5	216.46	0.0290
6	218.2	0.0288
7	260.24	0.0241
8	264.46	0.0237

Sistemin etkin doğal frekansı $\omega_{n_1} = 11.12 \text{ rd/sn}$ olup bu frekansa gelen mod şekli izleyen şekilde verilir:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} -0.1772 \\ 0.0000 \\ 0.0618 \\ -0.1773 \\ 0.0000 \\ 0.0618 \\ -0.1772 \\ 0.0000 \\ 0.0618 \\ -0.5404 \\ -0.0000 \\ 0.0775 \\ -0.5405 \\ -0.0000 \\ 0.0775 \\ -0.5404 \\ 0.0000 \\ 0.0775 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{Bmatrix} \begin{matrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \\ U_{19} \\ U_{20} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{24} \\ U_{25} \\ U_{26} \\ U_{27} \\ U_{28} \\ U_{29} \\ U_{30} \\ U_{31} \\ U_{32} \end{matrix}$$

Sistemin sönüm matrisi düzlem çerçeve elemanların sönümü ve viskoz bağıın sönümü olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Denklem (7.18) den modal sönüm izleyen şekilde hesaplanır:

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_n} = \frac{\eta K + \eta_e C_e}{2M\omega_n}$$

(7.8), (7.9) ve (7.10) ifadelerinde verildiği üzere K ; düzlem çerçeve elemanların oluşturduğu modal rijitlik, D_e ; viskoz bağıın oluşturduğu modal sönüm, M ; sistemin modal kütesidir.

$$K_1 = \{\phi\}^T K \{\phi\} = 414.5$$

$$D_{e_1} = \{\phi\}^T D_e \{\phi\} = 19.67$$

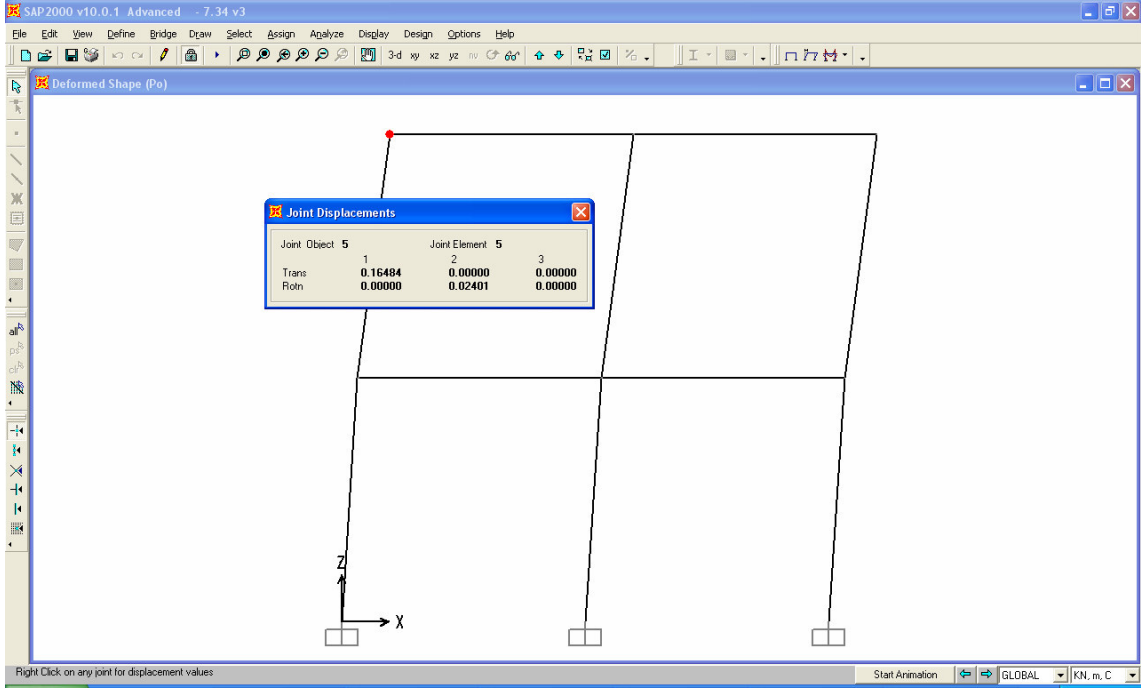
$$M_1 = \{\phi\}^T M \{\phi\} = 3.3544$$

Buradan sönüm oranı izleyen şekilde bulunur:

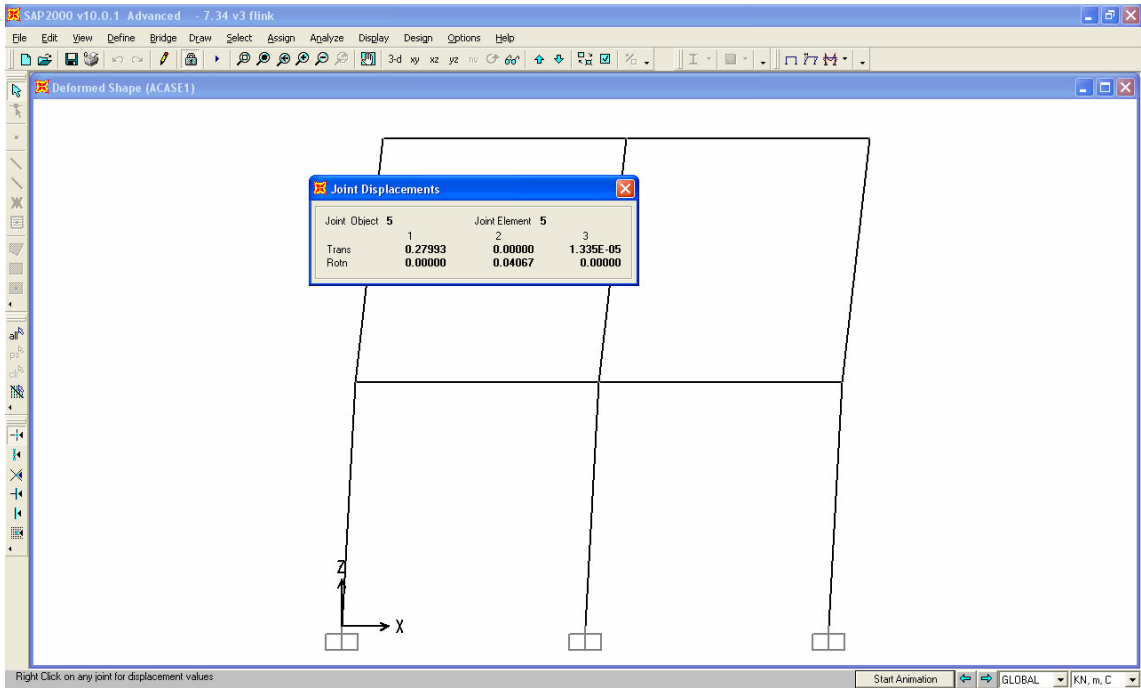
$$\xi = \frac{\eta K + \eta_e C_e}{2M\omega_n} = \frac{0.003 \times 414.5 + 19.67}{2 \times 3.3544 \times 11.12} = 0.28$$

- **SAP2000 programı ile Çözüm:**

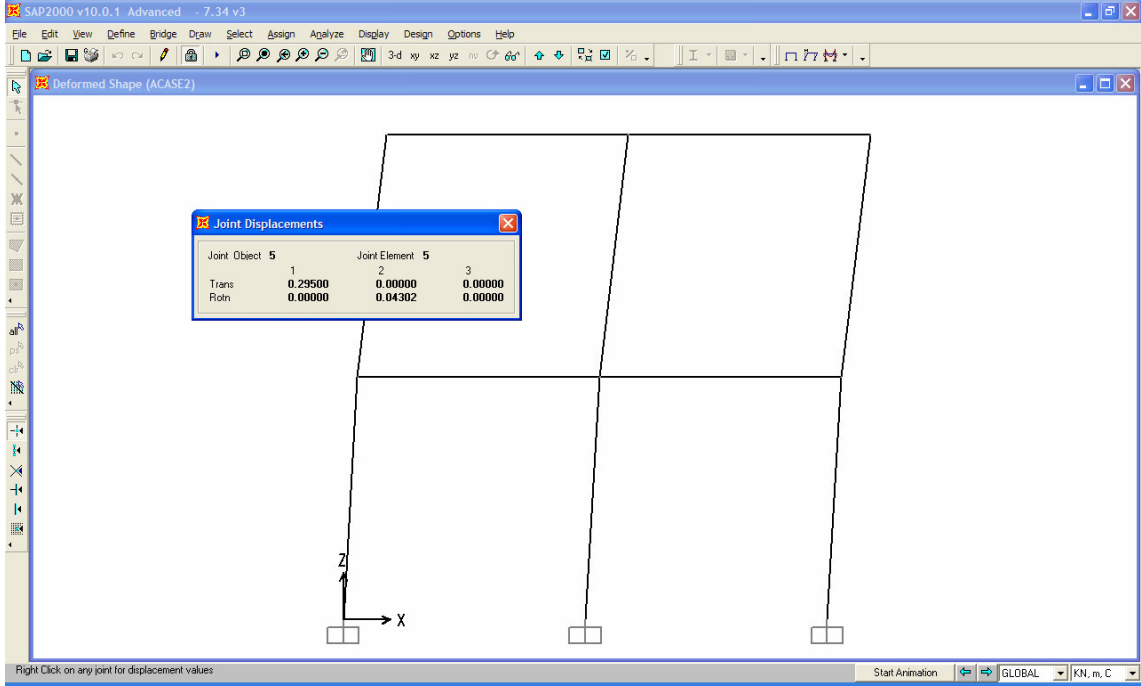
Yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktasının yatay yük doğrultusundaki yer değiştirme değeri $U_{st} = 0.1648m$ olarak bulunmuştur. Frekans alanında iç sönüm katsayısı $\eta = 2 \times 0.28 = 0.56$ alınarak yapılan hız bağımsız sönümlü (hysteritic damping) zorlanmış titreşim analizi sonucunda tepe noktası yer değiştirme değeri $U = 0.2799m$ olarak bulunmuştur. Zaman tanım alanında zorlama frekansı $\omega = 9 \text{ rd/sn}$ ($T = 0.7 \text{ sn}$) ve sönüm oranı $\xi = 0.28$ alınarak yapılan zorlanmış titreşim analizinde tepe noktasının yer değiştirme değeri $U = 0.2950m$ olarak bulunmuştur. Analiz sonucu bulunan yer değiştirme değerleri izleyen şekilde verilir



Şekil 7.30 Viskoz ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı statik yük altında çözümü sonucu yer değiştirme değeri



Şekil 7.31 Viskoz ara bağlı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile frekans alanında çözümü sonucu yer değiştirme değeri



Şekil 7.32 Viskoz ara bağı çerçeve düzlem çerçevenin SAP2000 programı ile zaman tanım alanında çözümü sonucu yer değıştirme değeri

Bu çalışmada sürekli bağı düzlem çerçeve ile viskoelastik ara bağı düzlem çerçevenin periyodik dış yük altında elde edilen cevaplarının karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda öncelikle sürekli bağı düzlem çerçeve ele alınmış ve sonra iki aşamalı olarak kiriş elemanların viskoelastik ara bağı oldukları durum ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde; sürekli bağı çerçeve için 7.3.5.1 numaralı çalışmada malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0.003$ alınarak yapılan analiz sonucunda periyodik yük altında tepe noktası yer değıştirmesi $U_{19} = 0.2349m$ olarak bulunmuştur. Viskoelastik ara bağı düzlem çerçeve için 7.3.5.2 numaralı çalışmada malzeme iç sönüm katsayısı $\eta = 0.003$, ara bağıın elastik yay katsayısı $C_e = 100000 kNm/rd$ ve ara bağıın viskoz sönüm katsayısı $\eta_e = 0.05$ alınarak yapılan analiz sonucunda periyodik yük altında tepe noktası yer değıştirmesi $U_{19} = 0.1026m$ olarak elde edilmiştir. Bu iki yer değıştirme değeri karşılaştırıldığında sistemde viskoelastik ara bağı bulunması durumunda yer değıştirme değeri sürekli bağı sisteme göre yaklaşık 2,5 kat azaldığı görülmüştür.

Ayrıca elde edilen sonuçlar SAP2000 programı ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada kütle eleman üzerinde yayılı olarak ele alınmıştır SAP2000 programı kütleli düğüm noktalarında toplu olarak ele almaktadır. Bu da sonuçların değerlendirilmesinde göz önüne alınmalıdır.

Sonuçlar incelendiğinde hesap sonucu bulunan değerlerin SAP2000 programı ile elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğu gözlenmektedir. Elde edilen sonuçların toplu olarak karşılaştırılması çizelge 7.15 de verilmiştir.

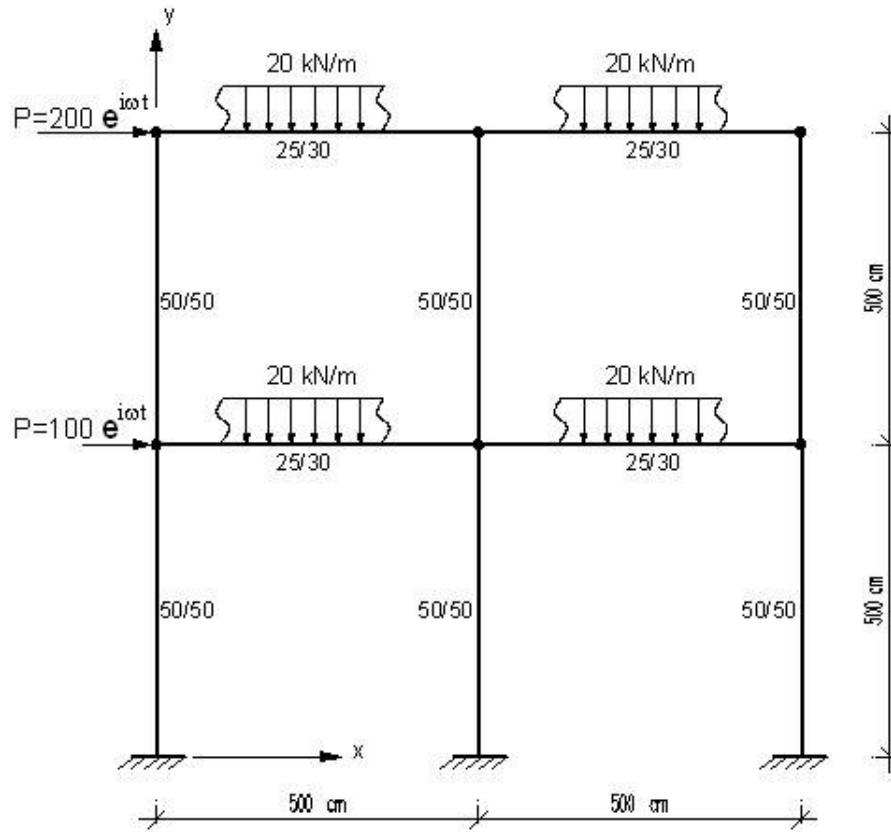
Çizelge 7.15 Sonuçların SAP2000 programından elde edilenlerle karşılaştırılması

		Matlab Programı	SAP2000 Programı	
		Frekans Alanında Çözüm	Frekans Alanında Çözüm	Zaman Tanım Alanında Çözüm
Tüm elemanların sürekliliği bağlı olması durumu	<i>Periyot T (sn)</i>	0.2174 sn	0.2246 sn	0.2246 sn
	Statik Yükleme	0.02096 m	0.02152 m	0.02152 m
	Periyodik Yükleme	0.2349 m	0.2442 m	0.2322 m
	R_d	11.21	11.35	10.79
1. kat kirişlerinin viskoelastik ara bağlı olması durumu	<i>Periyot T (sn)</i>	0.2567 sn	0.2623 sn	0.2623 sn
	Statik Yükleme	0.02917 m	0.02955 m	0.02955 m
	Periyodik Yükleme	0.1120 m	0.1128 m	0.0938 m
	R_d	3.84	3.82	3.18
Tüm kirişlerinin viskoelastik ara bağlı olması durumu	<i>Periyot T (sn)</i>	0.2702 sn	0.2777 sn	0.2777 sn
	Statik Yükleme	0.03394 m	0.03421 m	0.03421 m
	Periyodik Yükleme	0.1026 m	0.1095 m	0.0864 m
	R_d	3.02	3.2	2.53
Tüm kirişlerinin viskoz ara bağlı olması durumu	<i>Periyot T (sn)</i>	0.5652 sn	0.5921 sn	0.5921 sn
	Statik Yükleme	0.1645 m	0.1648 m	0.1648 m
	Periyodik Yükleme	0.2973 m	0.2799 m	0.2950 m
	R_d	1.81	1.70	1.79

7.3.6 Yayılı Yük Taşıyan Sürekli Bağlı Düzlem Çerçeve ile Viskoz Bağlı Düzlem Çerçevenin Periyodik Yük Altında Cevaplarının Karşılaştırılması

Şimdiye kadar ele alınan sayısal çalışmaların hepsinde sadece elemanların kütlesi göz önünde bulunduruldu. Bu çalışmada kirişlerin üzerinde ek kütle ele alınacaktır ve kolon ve kiriş birleşim bölgelerinde oluşturulacak sönüm mekanizmasının, sönüm değerlerine bağlı olarak sistem davranışına etkisi ele alınacaktır.

İlk olarak sistem elemanlarının sürekli bağlı olma durumu ele alınarak sistemin verilen periyodik yük altında analizi yapılacaktır. İkinci aşamada kirişlerin düğüm noktalarına viskoz bağlı olması durumu ele alınarak periyodik yük altında viskoz bağın sistem davranışına etkisi araştırılacaktır. Bir önceki problemde ele alınan çerçeve bu çalışmada göz önüne alınmış fakat kiriş kesitleri kolon kesitlerine göre küçük tutulmuştur. Kirişlerin üzerinde 20 kN/m yayılı yük alınmıştır.



Şekil 7.33 Yayılı yük taşıyan sürekli bağlı düzlem çerçeve

$$P_{01} = 200 \text{ kN}$$

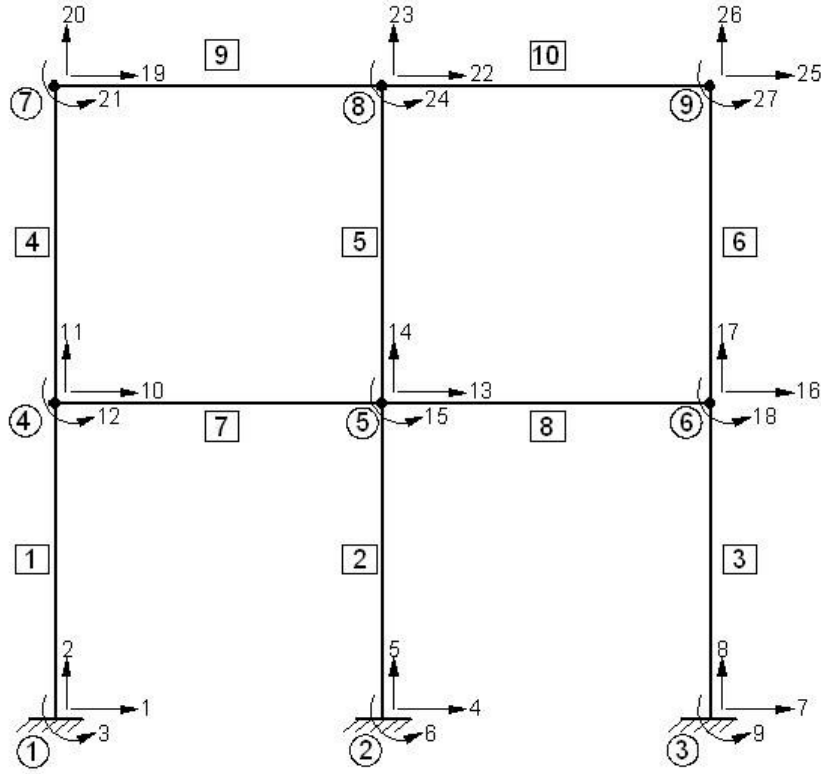
$$P_{02} = 100 \text{ kN}$$

$$E = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho = 2.5 \text{ kN sn}^2 / \text{m}^4$$

$$\eta = 0.003$$

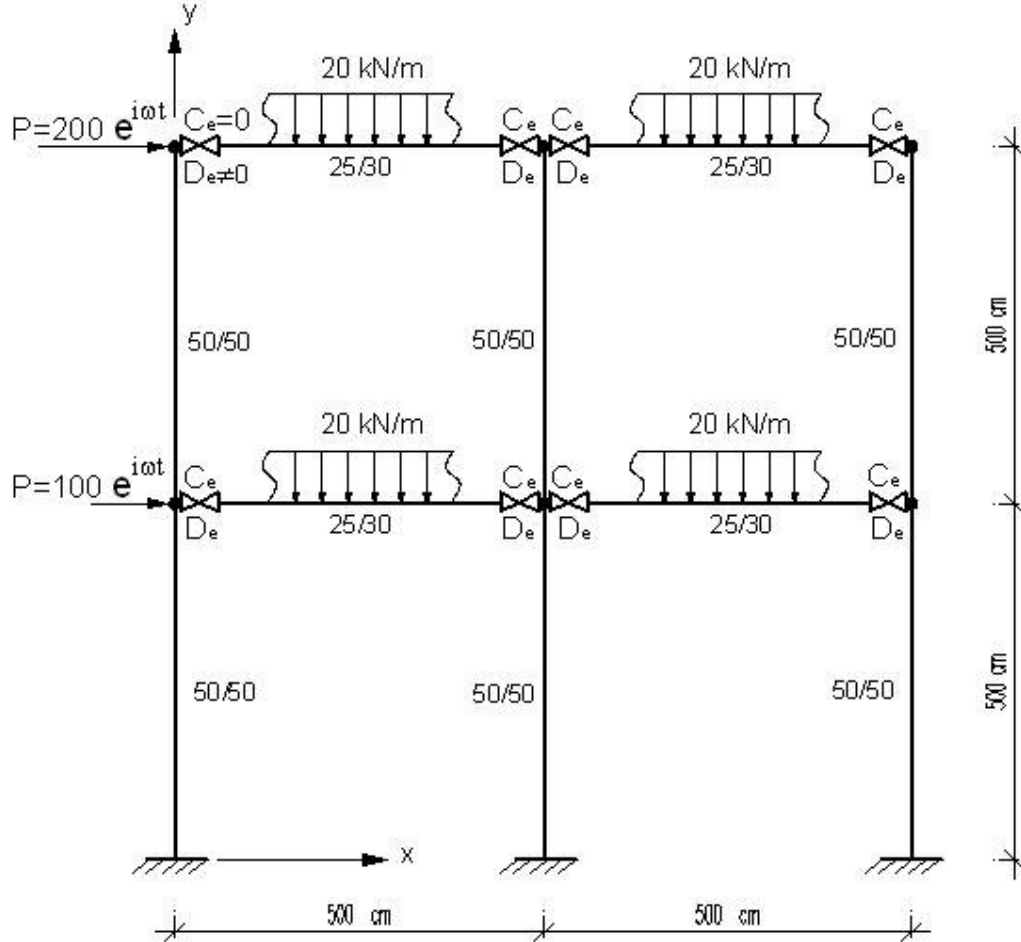
Sistemin düğüm noktalarının, elemanlarının ve yer değiştirme serbestliklerinin numaralandırılması şekil 34 de verilmiştir.



Şekil 7.34 Sistem elemanlarının numaralandırılması ve yer değiştirme serbestlikleri

Yapılan analiz sonucunda, dış yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktasının x yönündeki yer değiştirmesi $U_{19} = 0.063m$ olarak bulunmuştur. Periyodik yükleme altında tepe noktası yer değiştirme değeri $U_{19} = 1.698m$ olarak bulunmuştur. Periyodik yük altında elde edilen yer değiştirme değerini, statik yer değiştirme değerine oranlarsak, dinamik büyütme çarpanı $R_d = 26.95$ olarak bulunur. Bir önceki problemde sürekli sistem için yapılan analizde dinamik büyütme çarpanı $R_d = 11.21$ olarak bulunmuştur. Burada kütlelerin yapı davranışına etkisi açıkça görülmektedir. Problemin genel çözümünde (7.28) denklemi ile tanımlanan \bar{K} ifadesi incelendiğinde net bir şekilde görülmektedir ki kütle matrisinin büyümesi \bar{K} ifadesini küçültecek dolayısıyla yer değiştirme ifadesi \bar{U} değerini büyütecektir.

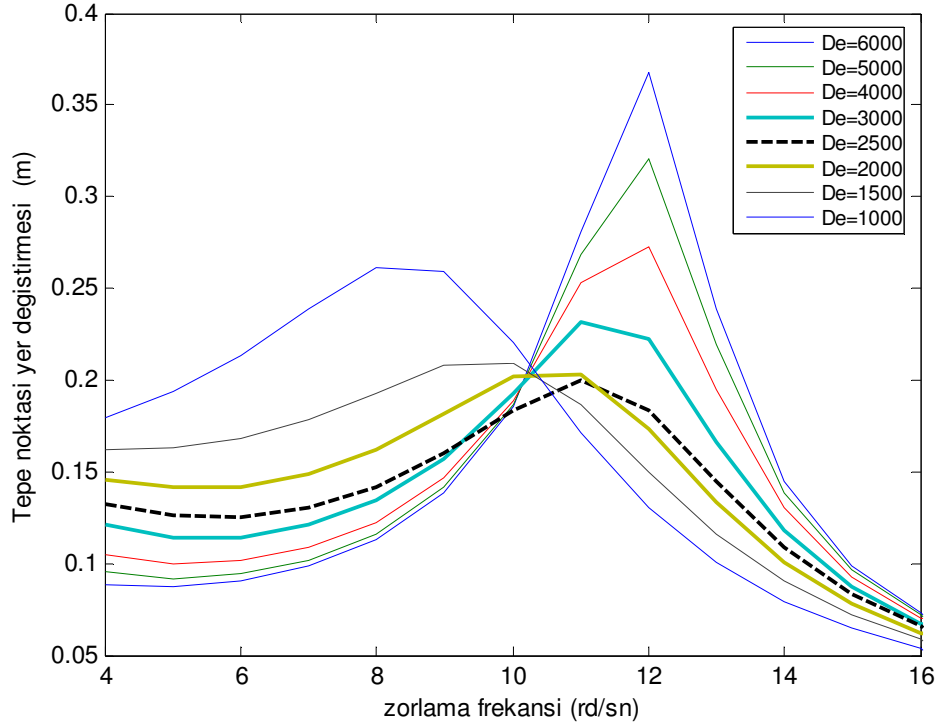
İkinci aşamada kirişlerin düğüm noktalarına viskoz bağlı ($C_e = 0$ $D_e \neq 0$) olması durumu ele alınıp değişken sönüm değerleri için çözüm yapılacaktır. Viskoz bağlı çerçeve modeli izleyen şekilde verilmiştir.



Şekil 7.35 Yayıllı yük taşıyan viskoz bağlı düzlem çerçeve

Yapılan analiz sonucunda, dış yükün statik olarak etkimesi sonucu tepe noktasının x yönündeki yer değiştirmesi $U_{19} = 0.1646m$ olarak bulunmuştur.

Kirişlerin düğüm noktalarına viskoz bağlı olması ile düğüm noktalarında ek sönüm mekanizması oluşmakta ve bu sönüm mekanizmasının D_e değerine bağlı olarak yer değiştirme değeri minimum değer almaktadır. Ele alınan sistem için yer değiştirme değerini en aza indirecek optimum sönüm değeri $D_e = 2500 kNm sn / rd$ olarak bulunmuştur. Bu sönüm değerine karşı gelen yer değiştirme $U_{19} = 0.1955m$ olarak hesaplanmıştır. Çeşitli sönüm değerleri yapılan analiz sonucunda elde edilen yer değiştirme-zorlama frekansı ilişkisi izleyen grafikte verilmiştir.



Şekil 7.36 Çeşitli sönüm değerleri altında hesaplanan yer değiştirme değerleri

Yukarıdaki grafik incelendiğinde eğrilerin tepe noktalarının bir bölge etrafında yoğunlaştığı görölmektedir. Daha önceki çalışmada da belirtildiği gibi bu bölgeyi tepe noktası alan eğri optimum sönüm değerini vermektedir. Bu problem için optimum sönüm değeri kesikli çizgilerle gösterilen $D_e = 2500 \text{ kNm sn / rd}$ olarak elde edilmiştir. Ele alınan sönüm değerleri için elde edilen yer değiştirme değerleri izleyen tabloda verilmiştir.

Çizelge 7.16 Viskoz sönüm değerleri için hesaplanan yer değiştirme değerleri

Viskoz Sönüm Değerleri	Yer Değiştirme Değerleri
$D_e \text{ (kNm sn / rd)}$	$U_{19} \text{ (m)}$
6000	0.3674
5000	0.3211
4000	0.2727
3000	0.2318
2500	0.1955
2000	0.2032
1500	0.2095
1000	0.2612

İki farklı çerçeve sitemi için yapılan çalışma sonucunda elde edilen yer değiştirme değerleri izleyen çizelgede verilmiştir.

Çizelge 7.17 Sürekli bağlı çerçeve ile viskoz bağlı çerçeve sonuçlarının karşılaştırılması

Yükleme durumu	Tüm kirişlerin sürekli bağlı olması durumu	Tüm kirişlerin viskoz bağlı olması durumu
Yer değiştirme (m)	$U_{19} (m)$	$U_{19} (m)$ ($D_e = 2500 \text{ kNm sn / rd}$)
Statik Yükleme	0.063	0.164
Periyodik Yükleme	1.698	0.1955

Bu çalışma sonucunda sürekli bağlı sistemin cevabı ile viskoz bağlı sistemin cevabı karşılaştırılırsa sönümün sistem üzerindeki etkisi açıkça görülmektedir. Ele alınan örnek için öncelikle kirişlerin düğüm noktalarına sürekli bağlı olması durumu ele alınmış ve periyodik yük altında tepe noktası yer değiştirme değeri $U_{19} = 1.698m$ olarak hesaplanmıştır. İki aşamada ise kirişlerin düğüm noktalarına viskoz bağlı olması durumu ele alınmış ve periyodik yük altında tepe noktası yer değiştirme değeri $U_{19} = 0.1955m$ olarak hesaplanmıştır. Kirişlerin viskoz bağlı olması sistemde ek sönüm mekanizmasını oluşturmuştur. Yer değiştirmeler incelendiğinde kirişlerin viskoz bağlı olması durumunda hesaplanan yer değiştirme değeri sürekli bağlı olması durumundaki değerden yaklaşık 9 kat küçüktür.

8. SONUÇ

Bu çalışmada, sürekli bağlı düzlem çerçevelerin ve viskoelastik ara bağlı düzlem çerçevelerin Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde enerji tabanlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak periyodik yük altında davranışı incelenmiştir. Bu amaçla Matlab programlama dili kullanılarak bir bilgisayar programı hazırlanmış ve elde edilen sonuçlar SAP200 bilgisayar programı ile karşılaştırılmıştır.

Öncelikle viskoelastik ara bağın düzlem çerçeve davranışına etkisi ele alınmıştır. Bunun için ele alınan düzlem çerçevenin çeşitli modal sönüm değerleri altında kararlı hal cevabı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar viskoelastik ara bağın düzlem çerçevenin dinamik davranışı üzerinde olumlu katkısı olduğunu göstermiştir. İncelemelerden görülmektedir ki her bir malzeme sönümü durumu için maksimum yer değiştirme değerlerinin en küçüğünü verecek bir ara bağ sönümü değeri ilgili ara bağın elastik yay katsayısının değerine bağlı olarak elde edilebilmektedir.

Viskoelastik ara bağlı sistem statik olarak yüklendiğinde elde edilen yer değiştirmeler ara bağısız sisteme göre büyük olmakta, yani viskoelastik ara bağlı sistemin rijitliği sürekli sisteme göre daha düşük olmaktadır. Bununla birlikte, dinamik yükleme altında viskoelastik ara bağlı çerçevenin yer değiştirmeleri ara bağısız durumdaki çerçevenin dinamik yükleme altındaki yer değiştirmelerinden dikkate değer derecede küçük olmaktadır (Ele alınan son örnekte 9 kat daha küçük bulunmuştur). Bilindiği gibi günümüzde yapıların dinamik analizinde çerçeveler sürekli alınarak çözüm yapılmakta, daha sonra elde edilen cevaplar sistem davranış katsayısı kullanılarak sürekli durumdakinin 1/8 ine kadar düşürülmekte ve boyutlamada bu indirgenmiş değerler kullanılmaktadır. Böylesi bir yaklaşımın nedeni sistemin düğüm noktalarında meydana gelmesi tasarlanan plastik mafsallarda enerji yutulmasının öngörülmesidir. Deprem yönetmeliğine göre sürekli çerçeve çözümünden bulunan yükler normal süneklikli çerçevelerde 1/4, yüksek süneklikli çerçevelerde 1/8 oranında azaltılabilmektedir.

Yapılan çalışmada belirli bir malzeme sönümü ve viskoelastik ara bağ rijitliği için çerçeve tepe noktası yer değiştirmelerini en aza indirecek en uygun viskoelastik ara bağ sönüm katsayısının elde edilebileceği ortaya konmuştur.

Bu çalışmada ayrıca görülmüştür ki malzeme sönümünün düşük olması durumunda, viskoelastik ara bağın sönüm etkisi sistem üzerinde etkin olmakta, malzeme sönüm değeri arttıkça viskoelastik ara bağın sistem üzerindeki etkiliği azalmaktadır.

Çerçevelerin dinamik yüklemeler altındaki cevaplarının incelenmesinde, doğal olarak tüm yapı malzemelerinde bulunan iç sönümün de dikkate alınmasının gerekli olduğu ve cevapları önemli düzeyde azalttığı görülmüştür.

Elde edilen bazı sonuçlar problemlerin SAP2000 programında modellenerek çözülmesiyle elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Kıyaslama sonucu elde edilen sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görülmüştür. SAP2000 programı ile frekans tanım alanında bulunan yer değiştirme değerleri buradaki çalışmada elde edilen değerlerden biraz büyük çıkmaktadır: Bunun nedeni burada çerçeve elemanlarının modellenmesinde Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmasına karşın SAP2000 programında Timoshenko kiriş teorisi kullanılması, yani serbestliğin daha fazla olması olabilir.

KAYNAKLAR

- Aköz, Y., (2005), “Enerji Yöntemleri ve Yapı Sistemleri”, İ.T.Ü, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Beards C.F., (1996), “Structural Vibration”, University Of London
- Clough, R.W., Penzien, J.,(2004), “Dynamics Of Structures”, University of California, Berkeley, McGraw-Hill International Editions.
- Chopra, A.R., (1993), “Dynamics Of Structures”, University of California, Berkeley. McGraw-Hill International Editions.
- Celep, Z., Kumbasar, N.,(1996) “Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliğine Giriş”, İTÜ, İstanbul
- Computer and Structures Inc., (2005), “Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS”, Berkeley, California
- Hutton, D., (2004), “Fundamentals Of Finite Element Analysis ”,Washington State University, McGraw-Hill International Editions.
- İnan, M., (1996), “ Cisimlerin Mukavemeti”, İTÜ, İstanbul.
- Kocatürk, T., (2004), “Determination of steady-state response of viscoelastically supported cantilever beam under sinusoidal base excitation”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1145-1156.
- Kocatürk, T., Demir, C., İlhan, N., Şimşek., M., (2005), “Determination of steady-state response of viscoelastically point-supported beam under forced vibration”, 12-16 Eylül 2005, Hatay, XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, 591-600.
- Kocatürk, T., Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 108-122
- Kocatürk, T., Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Elastically Supported Timoshenko Beams”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 79-93.
- Kasımzade, A.A., (2004), “Yapı Dinamiği Temelleri ve Deprem Mühendisliğinde Uygulamaları”, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Omurtag, M. H., (2006), “Yapısal Çözümlemede Sonlu Eleman Yöntemi”, İMO Kurs Notları, İstanbul.
- Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Beams Subjected to Axial Load Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1-10.
- Wilson, E.L., (2002), “Three Dimensional Axial Static and Dynamic Analysis Of Structures”, University of California, Berkeley. Computer and Structures inc

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	15.01.1979	
Doğum Yeri	Geyve / Sakarya	
Lise	1992-1995	Pamukova Lisesi
Lisans	1997-2001	Kocaeli Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	2004-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Programı