YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Periyodik Çözümlere Sahip Olan Diferansiyel Denklemler

Oya Baykal

Yüksek Lisans Tezi

T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERYODİK ÇÖZÜMLERE SAHİP OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OYA BAYKAL

İSTANBUL - 1990

T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERYODİK ÇÖZÜMLERE SAHİP OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OYA BAYKAL

İSTANBUL - 1990

T E Ş E K K Ü R

Çalışmalarım sırasında teşvik ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Yaşar ÖZDEMİR'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Oya BAYKAL

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

Çeşitli bilim dallarının klasik teorilerinde diferansiyel denklemler genellikle lineer tiptedirler. Bu diferansiyel denklemler değişik yollarla çözülebilir.

Bu arada non-lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan çeşitli yöntemlerde geliştirilmiştir. N.W. McLACHLAN'ın "Fizik ve Mühendislik bilimindeki adi lineer olmayan diferansiyel denklemler" adlı kitabında bu çeşitli yöntemlere yer verilmiştir.

Ben yaptığım bu çalışmada, çeşitli fizik olaylarından elde edilen, ikinci mertebe non-lineer diferansiyel denklemlerin, ardışık yaklaşım (iterasyon) ve pertürbasyon yöntemini kullanarak nasıl çözülebildiğini araştırdım.

S U M M A R Y

In classical theories of different branches of science the differential equations are mainly linear in type. This differential equations can be solved by different methods. In the meantime different methods have been developed for the solution of non linear differential equations. Various methods have been discussed in the book title "Ordinary non-linear differential equations in engineering and Physical Sciences" by N.W.McLACHLAN.

In this research I tried to find out how to solve second order non-linear differential equations obtained from various physics phenomena by using successive approximation and perturbation method.

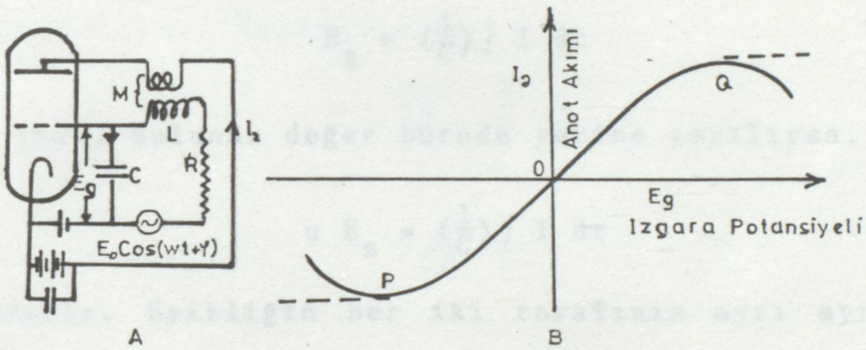
PERYODİK ÇÖZÜMLERE SAHİP OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

1. Özsalınımlı Termiyonik Valf Devresi

Özsalınımlı termiyonik valf devresi, şekil 1.A da şematik olarak verilmiş olup uygulanan

$$E_o \cos(\omega t+\varphi) \tag{1}$$

potansiyel farkı, kısa devre ile yerdeğiştirmiştir.



Şekil 1.

Şekil 1.A: Izgara ile katod arasında salınan devre ve ard arda uygulanan 'sürücü' $E_o\cos(\omega t+\varphi)$ potansiyel farkıyla birlikte, termiyonik valf osilatörü için devre şemasını göstermektedir.
B. Burada anod akımı ve ızgara potansiyeli arasında kübik-parabolik bir bağıntı olduğu farzedilir. Eğrinin işleyen kısmı P ve Q noktaları arasındaki kısımdır. O noktası, salınımın merkezidir. Eğrinin P ve Q noktaları dışında kalan kısmı, kesik çizgilerle gösterilen şekli alır, yani akım P de sıfıra, Q da ise doymuş bir değere yönelir.

Izgara devre etrafındaki potansiyel farkların toplamı, sıfıra eşit olmalıdır dolayısıyla ızgara akımı yoksa, diferansiyel denklem

$$L\,\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt - M\,\frac{dI_a}{dt} = 0 \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada M'in işareti eksidir bu, özsalınımlı hareket için bilinen bir koşuldur.

Anod akımının

$$I_a = \sigma\left[E_g - \frac{E_g^3}{3E_s^2}\right] \tag{3}$$

ile verilmiş olduğunu farzedelim. Bu ifadede σ, valfin geçiş iletimidir ve E_s, doymuş anod akımına karşı gelen ızgara potansiyelidir. (3) bağıntısı, şekil 1.B. deki grafikle gösterilmiştir.

$\frac{E_g}{E_s} = u$ yazılırsa $E_g = u\,E_s$ olur.

$$E_g = \left(\frac{1}{C}\right)\int I\,dt \tag{4}$$

olduğu için, bulunan değer burada yerine yazılırsa,

$$u\,E_s = \left(\frac{1}{C}\right)\int I\,dt \tag{5}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının ayrı ayrı türevi alınırsa

$$E_s\dot{u} = \frac{1}{C}\frac{d}{dt}\int I\,dt \tag{6}$$

veya

$$I = E_s\dot{u}\,C \tag{7}$$

bulunur. (3) ve (7) numaralı ifadeler yardımıyla (2) denklemi

$$LCE_s\ddot{u} + RCE_s\dot{u} + E_s u - \sigma ME_s\left[\dot{u} - \frac{1}{3}\frac{d(u^3)}{dt}\right] = 0 \tag{8}$$

olur.

$$a = \frac{1}{LC} \quad ; \quad b = \frac{\sigma M}{LC} - \frac{R}{L} \quad , \quad c = \frac{\sigma M}{3LC} \tag{9}$$

olarak alınırsa (8) denklemi

$$\ddot{u}-b\dot{u}+c\,\frac{d(u^3)}{dt}+au=0 \tag{10}$$

şeklini alır. (10) denkleminde

$$u=\left(\frac{b}{3c}\right)^{1/2}y \tag{11}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\ddot{y}-b(1-y^2)\dot{y}+ay=0 \tag{12}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde t yerine $a^{-1/2}t$ ve $a^{-1/2}b$ yerine de ε alınırsa,

$$\ddot{y}-\varepsilon(1-y^2)\dot{y}+y=0 \tag{13}$$

sonucuna varılır. Eğer $b>0$ ise (12) denklemi peryodik bir çözüme sahip olur. Dolayısıyla

$$b=\frac{\sigma M}{LC}-\frac{R}{L}>0 \tag{14}$$

veya

$$\sigma\frac{M}{LC}>\frac{R}{L} \tag{15}$$

olur. Buradan

$$M>\frac{CR}{\sigma} \tag{16}$$

bulunur. Böylece kalıcı bir özsalınım elde etmek için, ızgara ve anod bobinler arasındaki ortak indüktans belirli bir kritik değeri aşmak zorundadır.

(12) denklemindeki $-b(1-y^2)$ çarpanı sönüm katsayısını gösterir. Sürekli salınımlı halde işaret, dönüşümlü olarak birbirini takip eder. İşaret pozitif olduğunda enerji devrede dağılır fakat işaret negatif olduğunda enerji dış kaynaktan temin edilir ve hareket peryodik olduğundan dolayı enerji kaybı tamamen karşılanır.

Eğer $a^{-1/2}b<1$ ise $\omega_o=a^{1/2}$ olmak üzere

$$y\cong 2\sin\omega_o t \tag{17}$$

ifadesi (12) denklemindeki $-b(1-y^2)$ çarpanında yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
-b(1-y^2) &\cong -b(1-4\sin^2\omega_o t)\\
&\cong -b\left[1-4\left(\frac{1-\cos 2\omega_o t}{2}\right)\right]\\
&\cong -b(2\cos 2\omega_o t-1)
\end{aligned} \tag{18}
$$

ifadesini verir. Dolayısıyla sönüm katsayısı, şekil 2. de görüldüğü gibi, sürekli salınımın ikinci frekansında işaret değiştirir.

Şimdi

$$0<a^{-1/2}b\ll 1 \tag{19}$$

alarak (12) deki

$$\ddot{y}-b(1-y^2)\dot{y}+ay=0$$

denkleminin yaklaşık peryodik çözümünü bulalım:

$$y=A\sin\omega_o t \tag{20}$$

olsun. Bu ifadenin birinci ve ikinci türevleri

$$\dot{y}=A\omega_o\cos\omega_o t \tag{21}$$

$$\ddot{y}=-A\omega_o^2\sin\omega_o t \tag{22}$$

şeklindedir. (20), (21) ve (22) ifadelerini (12) denkleminde yerleştirelim. Elde edilen ifade, $\Psi=\omega_o t$ olmak üzere $\cos\omega_o t$ ile çarpılıp, t=0 dan $t=\frac{2\pi}{\omega_o}$'a kadar integre edilirse

$$
\begin{aligned}
-A\omega_o^2\int_0^{2\pi/\omega_o}\sin\Psi.\cos\Psi dt-\omega_o bA\int_0^{2\pi/\omega_o}(1-A^2\sin^2\Psi)\cos^2\Psi dt\,+&\\
+\,aA\int_0^{2\pi/\omega_o}\sin\Psi.\cos\Psi dt=0&
\end{aligned} \tag{23}
$$

elde edilir. Burada birinci ve üçüncü integraller sıfıra eşit olduğundan

$$-\omega_o b\, A \int_o^{2\pi/\omega_o} (\cos^2\Psi - A^2 \sin^2\Psi . \cos^2\Psi) dt = 0 \qquad (24)$$

yazılır. Bu integral çözülürse,

$$-bA\pi(1 - \frac{A^2}{4}) = 0 \qquad (25)$$

bulunur. Buradan da A=2 elde edilir.

Şimdi (20),(21) ve (22) ifadelerini yeniden (12) denkleminde yerleştirelim. Elde edilen ifade, bu sefer $\sin \omega_o t$ ile çarpılıp, t=0 dan $t = \frac{2\pi}{\omega_o}$'a kadar integre edilirse

$$-A\omega_o^2 \int_o^{2\pi/\omega_o} \sin^2\Psi dt - \omega_o b\, A \int_o^{2\pi/\omega_o} (1 - A^2 \sin^2\Psi)\cos\Psi . \sin\Psi dt +$$

$$+aA \int_o^{2\pi/\omega_o} \sin^2\Psi dt = 0 \qquad (26)$$

elde edilir. Burada ikinci integral sıfıra eşit olduğundan

$$A(a - \omega_o^2) \int_o^{2\pi/\omega_o} \sin^2\Psi dt = 0 \qquad (27)$$

yazılır. Bu integral çözülürse

$$A \frac{\pi}{\omega_o} (a - \omega_o^2) = 0 \qquad (28)$$

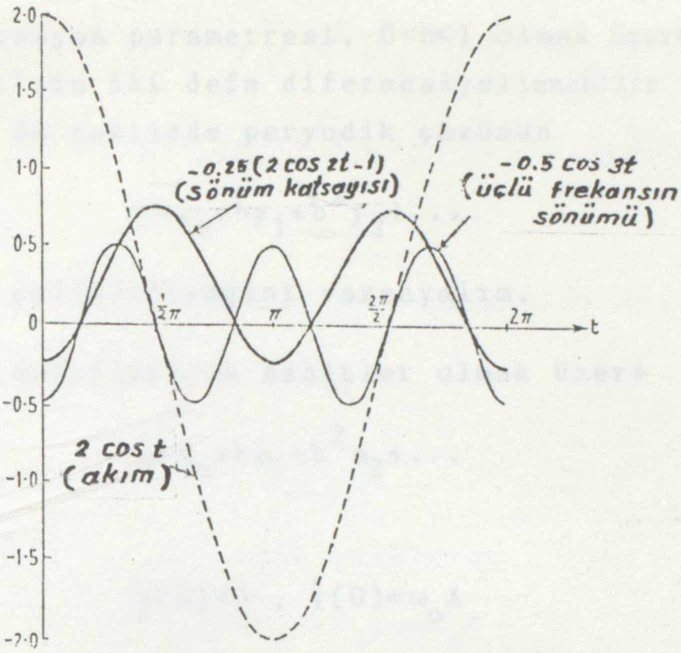
sonucuna varılır. Buradan da

$$\omega_o^2 = a \qquad (29)$$

(kaba) yaklaşımı bulunur. Böylece

$$y = 2 \sin a^{1/2} t \qquad (30)$$

yaklaşık peryodik çözümü elde edilir.



Şekil 2.

Bu şekil, ε=0,25 alınarak

$$\ddot{y}-\varepsilon(1-y^2)\dot{y}+y=0$$

denkleminin peryodik çözümü için çizilen eğrileri gösterir.

Burada y=2sint, E_0=0 olduğunda şekil 1.A daki E_0 ye karşı gelen bir ilk yaklaşımdır; $\dot{y}$=2cost ise E_0=0 olduğunda şekil 1.A. daki I ya karşı gelir.

$-\varepsilon(1-y^2)=-0.25(2\cos 2t-1)$, çift frekansın salınımlı sönüm katsayısına;

$-\varepsilon(1-y^2)\dot{y}=-0.5\cos 3t$ ise üçlü frekansın sönüm değişkenine karşı gelir. Herbir devirde kazanılmış yada kaybedilmiş enerji ağı sıfır olduğundan dolayı, peryodik harekete karşı gelen

Esas frekansta herbir devirdeki enerji kaybı $=\varepsilon\int_0^{2\pi}(1-y^2)\dot{y}\,dy=\int_0^{2\pi}(1-4\sin^2 t)\cos^2 t\,dt=0$

olur.

2. $$\ddot{y}-b(1-y^2)\dot{y}+ay=0 \qquad (31)$$

Diferansiyel Denklemine Pertürbasyon Yönteminin Uygulanması

İleri mekanikdeki pertürbasyon problemlerinin çözümünde Lindstedt ve Poincare tarafından çok yaygın olarak kullanılmış olan bu yöntem, daha önce elde edilen (30) ifadesinden daha iyi bir yaklaşım bulmak için kullanılır.

b, pertürbasyon parametresi, $0<b\ll 1$ olmak üzere ve $y_o, y_1, \ldots$ fonksiyonları t'nin iki defa diferansiyellenebilir fonksiyonları olsunlar. Bu taktirde peryodik çözümün

$$y=y_o+by_1+b^2y_2+\ldots \tag{32}$$

şeklinde ifade edilebileceğini varsayalım.

$\alpha_o, \alpha_1, \ldots$ belirlenecek sabitler olmak üzere

$$a=\alpha_o+b\alpha_1+b^2\alpha_2+\ldots \tag{33}$$

olsun.

$$y(0)=0\ ,\ \dot{y}(0)=\omega_o A \tag{34}$$

başlangıç koşulları, $0<b\leq b_o$ aralığında geçerli olduğundan

$$y_o(0)=y_1(0)=\ldots=0$$
$$\dot{y}_o(0)=\omega_o A \tag{35}$$
$$\dot{y}_1(0)=\dot{y}_2(0)=\ldots=0$$

yazılabilir.

(32) ifadesinin birinci ve ikinci türevleri ile, (33) ifadesi gözönüne alınırsa

$$(1-y^2)=(1-y_o^2)-2by_oy_1-b^2(y_1^2+2y_oy_2)-\ldots \tag{36}$$

$$\dot{y}=\dot{y}_o+b\dot{y}_1+b^2\dot{y}_2+\ldots \tag{37}$$

$$-b(1-y^2)\dot{y}=-b\dot{y}_o(1-y_o^2)-b^2[\dot{y}_1(1-y_o^2)-2y_o\dot{y}_oy_1]-\ldots \tag{38}$$

$$\ddot{y}=\ddot{y}_o+b\ddot{y}_1+b^2\ddot{y}_2+\ldots \tag{39}$$

$$ay=\alpha_oy_o+b(\alpha_1y_o+\alpha_oy_1)+b^2(\alpha_oy_2+\alpha_2y_o+\alpha_1y_1)+\ldots \tag{40}$$

elde edilir. (36),(37),(38),(39),(40) bağıntıları (31) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\ddot{y}_o+b\ddot{y}_1+b^2\ddot{y}_2+\ldots-b\dot{y}_o(1-y_o^2)-b^2\left[\dot{y}_1(1-y_o^2)-2y_o\dot{y}_oy_1\right]-\ldots+$$

$$+\alpha_oy_o+b(\alpha_1y_o+\alpha_oy_1)+b^2(\alpha_oy_2+\alpha_2y_o+\alpha_1y_1)+\ldots=0 \quad (41)$$

sonucuna varılır.

Burada $r=0,1,2,\ldots$ için b^r nin katsayısı ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse,

b^o için:

$$\ddot{y}_o+\alpha_oy_o=0 \quad (42)$$

olur. Bu denklem $\alpha_o=\omega_o^2$ alınarak çözülürse

$$y_o=A_o\sin\omega_ot+B_o\cos\omega_ot \quad (43)$$

elde edilir.

$y_o(0)=0$ ve $\dot{y}_o=\omega_oA$ başlangıç koşullarından dolayı $A_o=A$, $B_o=0$ ve $\Psi=\omega_ot$ alınırsa

$$y_o=A\sin\Psi \quad (44)$$

sonucu bulunur.

b için:

$$\ddot{y}_1+\alpha_oy_1 = -\alpha_1y_o+\dot{y}_o(1-y_o^2) \quad (45)$$

$$= -\alpha_1A\sin\Psi+A\omega_o\cos\Psi(1-A^2\sin^2\Psi) \quad (46)$$

$$= -\alpha_1A\sin\Psi+A\omega_o\cos\Psi-A^3\omega_o\cos\Psi.\sin^2\Psi \quad (47)$$

$$= -\alpha_1A\sin\Psi+A\omega_o\cos\Psi-\frac{A^3\omega_o}{4}\cos\Psi+\frac{A^3\omega_o}{4}\cos3\Psi \quad (48)$$

$$= -\alpha_1A\sin\Psi+A\omega_o(1-\frac{1}{4}A^2)\cos\Psi+\frac{A^3\omega_o}{4}\cos3\Psi \quad (49)$$

yazılır.

$\sin\Psi$, $\cos\Psi$ terimlerine karşı gelen (49) denkleminin özel çözümleri, sırasıyla peryodik olmayan $t\cos\Psi$, $t\sin\Psi$ şeklini alır. Çözüm peryodik olduğundan dolayı, $\sin\Psi$ ve $\cos\Psi$ nin katsayıları birbirinden bağımsız olarak sıfıra eşit olmalıdır. Buradan,

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{ve} \quad A=2 \tag{50}$$

olur. Dolayısıyla

$$y_o = 2 \sin\Psi \tag{51}$$

elde edilir. Böylece (49) denklemi

$$\ddot{y}_1 + \alpha_o y_1 = 2\omega_o \cos\Psi \tag{52}$$

şeklini alır. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y_1 = A_1 \sin\Psi + B_1 \cos\Psi - \left(\frac{1}{4\omega_o}\right)\cos 3\Psi \tag{53}$$

dir.

$y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$ başlangıç koşulları için

$$A_1 = 0 \text{ ve } B_1 = \frac{1}{4\omega_o} \tag{54}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$y_1 = \frac{1}{4\omega_o}(\cos\Psi - \cos 3\Psi) \tag{55}$$

olur.

b^2 için:

$$\ddot{y}_2 + \alpha_o y_2 = -(\alpha_2 y_o + \alpha_1 y_1) + \dot{y}_1(1 - y_o^2) - 2y_o \dot{y}_o y_1 \tag{56}$$

olur. (51), (55) bağıntıları bu denklemde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \alpha_o y_2 = &-2\alpha_2 \sin\Psi + \left(-\frac{1}{4}\sin\Psi + \frac{3}{4}\sin 3\Psi\right)(1 - 4\sin^2\Psi) - \\ &-\sin 2\Psi(\cos\Psi - \cos 3\Psi) \end{aligned} \tag{57}$$

$$= -\left(2\alpha_2 - \frac{1}{4}\right)\sin\Psi - \frac{3}{2}\sin 3\Psi + \frac{5}{4}\sin 5\Psi \tag{58}$$

elde edilir. Çözüm peryodik olduğundan dolayı burada, $\sin\Psi$ nin katsayısı sıfıra eşit olmalıdır. Dolayısıyla

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} \tag{59}$$

olur. Böylece (58) denklemi

$$\ddot{y}_2 + \alpha_o y_2 = -\frac{3}{2}\sin 3\Psi + \frac{5}{4}\sin 5\Psi \tag{60}$$

şeklini alır. Bu denklemin genel çözümü

$$y_2 = A_2 \sin\Psi + B_2 \cos\Psi + \frac{3}{16\omega_o^2}\sin 3\Psi - \frac{5}{96\omega_o^2}\sin 5\Psi \tag{61}$$

olur. $y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ başlangıç koşulları için

$$A_2 = -\frac{29}{96\omega_o^2} \quad \text{ve} \quad B_2 = 0 \tag{62}$$

bulunur. Dolayısıyla (60) diferansiyel denkleminin genel çözümü olarak

$$y_2 = -\frac{29}{96\omega_o^2}\sin\Psi + \frac{3}{16\omega_o^2}\sin 3\Psi - \frac{5}{96\omega_o^2}\sin 5\Psi \tag{63}$$

elde edilir.

Böylece (32),(51),(55),(63) ifadeleri kullanılarak,(31) denkleminin b^2'li terime kadar devam eden çözümü

$$y = y_o + by_1 + b^2 y_2 \tag{64}$$

veya

$$y = \left(2 - \frac{29b^2}{96\omega_o^2}\right)\sin\Psi + \frac{b}{4\omega_o}(\cos\Psi - \cos 3\Psi) + \frac{b^2}{16\omega_o^2}\left(3\sin 3\Psi - \frac{5}{6}\sin 5\Psi\right) \tag{65}$$

bulunur. Aynı zamanda (33),(50),(59) ifadelerinin kullanılmasıyla b^2'li terime kadar devam eden

$$a = \alpha_o + \frac{1}{8}b^2 = \omega_o^2 + \frac{1}{8}b^2 \tag{66}$$

veya

$$\omega_o \cong a^{1/2}\left(1 - \frac{b^2}{16a}\right) \tag{67}$$

yazılır. (65) ve (67) ifadelerinde; a yeterince büyük, b yeterince küçük seçildiğinde, (30) bağıntısı ile elde edilen yaklaşık çözümün tatmin edici olduğu açıktır. Sönüm etkisini gösteren (67) ifadesi, salınımın açısal frekansını küçük miktarda azaltmalıdır. Bu durumda

$$\ddot{y}+b\dot{y}+ay=0 \tag{68}$$

lineer denkleminden elde edilen açısal frekans ile (67) ifadesini karşılaştırmak ilginç olmaktadır.

Burada

$$\omega_o^2=(a-\frac{1}{4}b^2) \tag{69}$$

dolayısıyla

$$\omega_o \simeq a^{1/2}(1-\frac{b^2}{8a}) \tag{70}$$

dır. (70) ifadesinde sönüm için yeterli olan ω_o daki azalma terimi, (67) ifadesindeki azalma teriminin iki katıdır.

Ardışık yaklaşımlar, lineer diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle bulunduğunda, başlangıç koşullarını sağlayan çözüm metodunun bir tek olduğu belirtilmelidir.

3. Genlik Sınırlaması Hakkında Uyarılar

θ, bir reel sabit olmak üzere; (12) denkleminde, y yerine θy yazılırsa

$$\ddot{y}-b(1-\theta^2y^2)\dot{y}+ay=0 \tag{71}$$

elde edilir. Böylece, ancak $|\theta|=1$ alınırsa, (12) denklemi yeniden elde edilir. Bu yüzden, bu non-lineer diferansiyel denklemin çözümü, keyfi bir sabitle çarpılamaz. Verilen a,b değerleri için, çözümdeki değişik terimlerin katsayıları tektir. Diferansiyel denklem, (12) formuna sahip olduğunda, esas salınımın genliği yaklaşık olarak 2 olur. Burada $0<a^{-1/2}b\leq 0.1$ dir. Eğer denklem, yukarıda ifade edilmiş olan (71) formunda ise; çözüm, (65) ifadesinin θ^{-1} ile çarpılmasıyla elde edilir. (71) denkleminde

$$\theta^2 = \frac{3c}{b} \qquad (72)$$

değişken değişimi yapılmasıyla elde edilen denklem, (10) denkleminden türetilebilir.

Genlik sınırlaması, aynı zamanda aşağıdaki yolla da göz önüne alınabilir. Büyüme süresince genlik azaldığı zaman; (10) denkleminde, c terimi ihmal edilebilir. Dolayısıyla denklem

$$\ddot{u} - b\dot{u} + au = 0 \qquad (73)$$

şeklini alır.

$$\omega = \left(a - \frac{1}{4}\, b^2\right)^{1/2} \qquad (74)$$

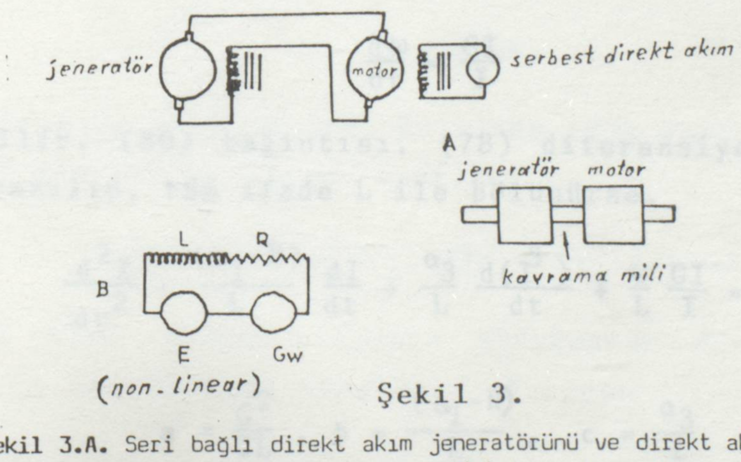
değişken değişimi ile (73) denkleminin çözümü

$$u = e^{\frac{bt}{2}} \sin(\omega t + \theta) \qquad (75)$$

şeklinde yazılabilir.

4. Elektrik Motoruyla Jeneratör Birleşiminin Özsalınımları

Şekil 3.A; bir seri etki alanına sahip olan dinamoyu, elektrik kuvvetiyle ve mekanik olarak birleştiren,etki alanlarını ayrı ayrı harekete geçiren bir elektrik motorunu gösterir.



Şekil 3.

Şekil 3.A. Seri bağlı direkt akım jeneratörünü ve direkt akım motorunu ayrı ayrı harekete geçiren şematik diyagram. **B.** (A) için devre diyagramı.

Eğer I, devresel akım ise; jeneratör terminallerindeki potansiyel fark yaklaşık olarak,

$$E=\alpha_1 I-\alpha_3 I^3 \tag{76}$$

dir. Burada α_1 ve α_3 pozitif sabitlerdir. Kapalı devre etrafındaki potansiyel farkların toplamı sıfır olduğundan dolayı

$$L\,\frac{dI}{dt} + RI+G\omega-E=0 \tag{77}$$

yazılır. Burada L, toplam devre indüktansı; R, rezistans ve G, ω açısal hızı ile birlikte motor terminallerindeki zıt elektromotor kuvvettir. (76) ifadesini (77) denkleminde yerine yazıp, t ye göre diferansiyel alırsak

$$L\,\frac{d^2I}{dt^2} -(\alpha_1-R)\,\frac{dI}{dt} + \alpha_3\,\frac{d(I^3)}{dt} + G\,\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{78}$$

elde edilir.

Ohm'a ait kayıptan farklı olarak; motor gücü, akım ve zıt elektromotor kuvvetin çarpımıdır yani $G\omega I$ dır. Mekanik kaybın olmaması durumunda bu, dönen sistemin kinetik enerji değişiminin oranına eşittir. Böylece **I**, atalet momenti ise

$$G\omega I = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{I}\,\omega^2\right) \tag{79}$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{GI}{\mathbf{I}} \tag{80}$$

elde edilir. (80) bağıntısı, (78) diferansiyel denkleminde yerine yazılıp, tüm ifade L ile bölünürse,

$$\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{(\alpha_1-R)}{L}\,\frac{dI}{dt} + \frac{\alpha_3}{L}\,\frac{d(I^3)}{dt} + \frac{G}{L}\,\frac{GI}{\mathbf{I}} = 0 \tag{81}$$

olur.

$$a = \frac{G^2}{\mathbf{I}L}\ ,\quad b = \frac{(\alpha_1-R)}{L}\ ,\quad c = \frac{\alpha_3}{L} \tag{82}$$

olarak alınırsa (81) denklemi,

$$\ddot{I}-b\dot{I}+c\,\frac{d(I^3)}{dt}+aI=0 \tag{83}$$

şeklini alır. (83) denklemi; termiyonik bir valf devresi için, (10) bağıntısıyla aynı formdadır. Bundan dolayı eğer $b>0$ yani $\alpha_1>R$ ise sistem özsalınımlı olacak ancak $\alpha_1<R$ ise sistem salınmayacaktır. Önceki koşullar sağlandığında, motor-jeneratör birleşimi peryodik olarak her yöne döner. Bir relaxation salınım tipi için b, yeterince büyük ve a, yeterince küçük olmalıdır.

5. a>0 ve b>0 Olmak Üzere

$$\ddot{y}+ay+by^2=0 \tag{84}$$

Diferansiyel Denkleminin Çözülmesi

(84) denklemini

$$\ddot{y}+\omega^2 y=(\omega^2-\omega_o^2)y-by^2 \tag{85}$$

şeklinde yazıp, ardışık yaklaşım yöntemi ile çözelim. Burada $\omega_o^2=a$ dır. İlk olarak sağ tarafın ihmal edildiğini varsayalım. Böylece $\Psi=\omega t$ ile homojen denklemin genel çözümü olarak

$$y=A_1\cos\Psi+B_1\sin\Psi \tag{86}$$

yazılır. Buradan $y=y_o$, $\dot{y}=0$ başlangıç koşulları ile

$$y=y_o\cos\Psi \tag{87}$$

ilk yaklaşımı elde edilir. Bu ifade (85) denkleminin sağ tarafında yerine yazılırsa, denklem

$$\ddot{y}+\omega^2 y=(\omega^2-\omega_o^2)y_o\cos\Psi-\frac{1}{2}\,by_o^2(1+\cos 2\Psi) \tag{88}$$

şeklini alır. Çözüm peryodik olduğundan dolayı, $\cos\Psi$ nin katsayısı sıfıra eşit olmalıdır. Buradan

$$\omega^2=\omega_o^2=a \tag{89}$$

yazılır. Dolayısıyla (88) denklemi

$$\ddot{y}+\omega^2 y = -\frac{1}{2} b\, y_o^2 - \frac{1}{2} b\, y_o^2 \cos 2\Psi \tag{90}$$

şeklini alır. Bu denklemin genel çözümü

$$y=A\cos\Psi+B\sin\Psi+\frac{by_o^2}{6\omega^2}\cos 2\Psi-\frac{by_o^2}{2\omega^2} \tag{91}$$

dir. t=0 olmak üzere $y=y_o>0$, $\dot{y}=0$ başlangıç koşulları için

$$A = y_o + \frac{by_o^2}{3\omega^2}\ , \quad B=0 \tag{92}$$

bulunur. O halde (89) ifadesi ile ikinci yaklaşım olarak

$$y=-\frac{by_o^2}{2\omega^2} + \left(y_o + \frac{by_o^2}{3\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{by_o^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t \tag{93}$$

elde edilir. Eğer

$$\frac{by_o}{6a} \ll 1 \tag{94}$$

ise, $\cos 2\omega t$ nin katsayısı, $\cos\omega t$ nin katsayısına nispeten daha küçük olacaktır.

6. $$\ddot{y}+ay+by^2=0 \tag{95}$$

Diferansiyel Denkleminin Daha Hassas Çözümü

$y=A$, $\dot{y}=0$ başlangıç koşulları ile

$$y=y_o+by_1+b^2y_2+\ldots \tag{96}$$

ve

$$a=\omega_o^2+b\omega_1^2+b^2\omega_2^2+\ldots \tag{97}$$

ifadelerini gözönüne alalım. Buradan § 2 dekine benzer olarak

$$y_o(0)=A>0 \tag{98}$$

$$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=\ldots=0 \tag{99}$$

$$\dot{y}_o(0)=\dot{y}_1(0)=\ldots=0 \tag{100}$$

koşulları yazılabilir. (96) bağıntısının ikinci türevi ile (97) bağıntısı, (95) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa

$$(\ddot{y}_o+b\ddot{y}_1+b^2\ddot{y}_2+\ldots)+(\omega_o^2+b\omega_1^2+b^2\omega_2^2+\ldots)(y_o+by_1+b^2y_2+\ldots)+$$

$$+by_o^2+2b^2y_oy_1+b^3(y_1^2+2y_oy_2)\ldots=0 \qquad (101)$$

sonucuna varılır. Burada r=0,1,2,... için b^r nin katsayısı ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

b^o için:

$$\ddot{y}_o+\omega_o^2y_o=0 \qquad (102)$$

olur. Bu denklem, başlangıç koşulları kullanılarak çözülürse

$$y_o=A\cos\omega_o t \qquad (103)$$

elde edilir.

b için:

$$\ddot{y}_1+\omega_o^2y_1=-(\omega_1^2y_o+y_o^2) \qquad (104)$$

$$\ddot{y}_1+\omega_o^2y_1=-\left[\frac{1}{2}A^2+\omega_1^2A\cos\omega_o t+\frac{1}{2}A^2\cos2\omega_o t\right] \qquad (105)$$

yazılır. Özel çözümdeki peryodik olmayan terimden kaçınmak için

$$\omega_1^2=0 \qquad (106)$$

olmalıdır. Dolayısıyla (105) denklemi

$$\ddot{y}_1+\omega_o^2y_1=-\left[\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}A^2\cos2\omega_o t\right] \qquad (107)$$

şeklini alır. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y_1=-\frac{A^2}{2\omega_o^2}+A_1\cos\omega_o t+B_1\sin\omega_o t+\frac{A^2}{6\omega_o^2}\cos2\omega_o t \qquad (108)$$

dir. Yukarıdaki başlangıç koşulları kullanılarak

$$A_1 = \frac{A^2}{3\omega_o^2} \quad \text{ve} \quad B_1 = 0 \tag{109}$$

bulunur. Böylece (107) denkleminin genel çözümü

$$y_1 = \left(\frac{A^2}{\omega_o^2}\right)\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\omega_o t + \frac{1}{6}\cos 2\omega_o t\right] \tag{110}$$

olur.

b^2 için:

$$\ddot{y}_2 + \omega_o^2 y_2 = -(\omega_1^2 y_1 + \omega_2^2 y_o + 2y_o y_1) \tag{111}$$

$$= -\left[\frac{A^3}{3\omega_o^2} + A\left(\omega_2^2 - \frac{5A^2}{6\omega_o^2}\right)\cos\omega_o t + \frac{A^3}{3\omega_o^2}\cos 2\omega_o t + \frac{A^3}{6\omega_o^2}\cos 3\omega_o t\right]$$

yazılır. (112) diferansiyel denkleminin özel çözümündeki peryodik olmayan terimden kaçınmak için, $\cos\omega_o t$ nin katsayısı sıfıra eşit olmalıdır. Buradan

$$\omega_2^2 = \frac{5A^2}{6\omega_o^2} \tag{113}$$

yazılır. Dolayısıyla (112) denklemi

$$\ddot{y}_2 + \omega_o^2 y_2 = -\left[\frac{A^3}{3\omega_o^2} + \frac{A^3}{3\omega_o^2}\cos 2\omega_o t + \frac{A^3}{6\omega_o^2}\cos 3\omega_o t\right] \tag{114}$$

şeklini alır. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y_2 = -\frac{A^3}{3\omega_o^4} + A_2\cos\omega_o t + B_2\sin\omega_o t + \frac{1}{9}\frac{A^3}{\omega_o^4}\cos 2\omega_o t +$$

$$+ \frac{1}{48}\frac{A^3}{\omega_o^4}\cos 3\omega_o t \tag{115}$$

dir. Yukarıdaki başlangıç koşulları kullanılarak

$$A_2 = \frac{29A^3}{144\omega_o^4} \quad \text{ve} \quad B_2 = 0 \tag{116}$$

bulunur. Dolayısıyla (114) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y_2 = -\frac{A^3}{3\omega_o^4} + \frac{29A^3}{144\omega_o^4}\cos\omega_o t + \frac{1}{9}\frac{A^3}{\omega_o^4}\cos 2\omega_o t +$$

$$+\frac{1}{48}\frac{A^3}{\omega_o^4}\cos 3\omega_o t \qquad (117)$$

olur.

Böylece (96),(103),(110),(117) bağıntıları kullanılarak, (95) diferansiyel denkleminin b^2'li terime kadar devam eden çözümü olarak

$$y = -\left[\frac{bA^2}{2\omega_o^2} + \frac{b^2A^3}{3\omega_o^4}\right] + \left[A + \frac{bA^2}{3\omega_o^2} + \frac{29b^2A^3}{144\omega_o^4}\right]\cos\omega_o t +$$

$$+\left[\frac{bA^2}{6\omega_o^2} + \frac{b^2A^3}{9\omega_o^4}\right]\cos 2\omega_o t + \frac{b^2A^3}{48\omega_o^4}\cos 3\omega_o t \qquad (118)$$

bulunur.

$$A \gg \frac{bA^2}{6\omega_o^2} \quad \text{veya} \quad \frac{bA}{6a} \ll 1 \qquad (119)$$

olduğunda, ikinci ve üçüncü harmonikler, birinciye oranla daha küçük olacaktır. Aynı zamanda $\omega_1^2=0$ olduğundan; (97), (113) ifadeleri ile, b^2'li terime kadar devam eden

$$\omega_o^2 = a - \frac{5b^2A^2}{6\omega_o^2} \qquad (120)$$

yazılır. Eğer

$$a \gg \frac{5b^2A^2}{6\omega_o^2} \qquad (121)$$

ise

$$\omega_o \simeq a^{1/2}\left(1 - \frac{5b^2A^2}{12a^2}\right) \qquad (122)$$

olur.

7. a>0 ve b $\gtrless$ 0 Olmak Üzere

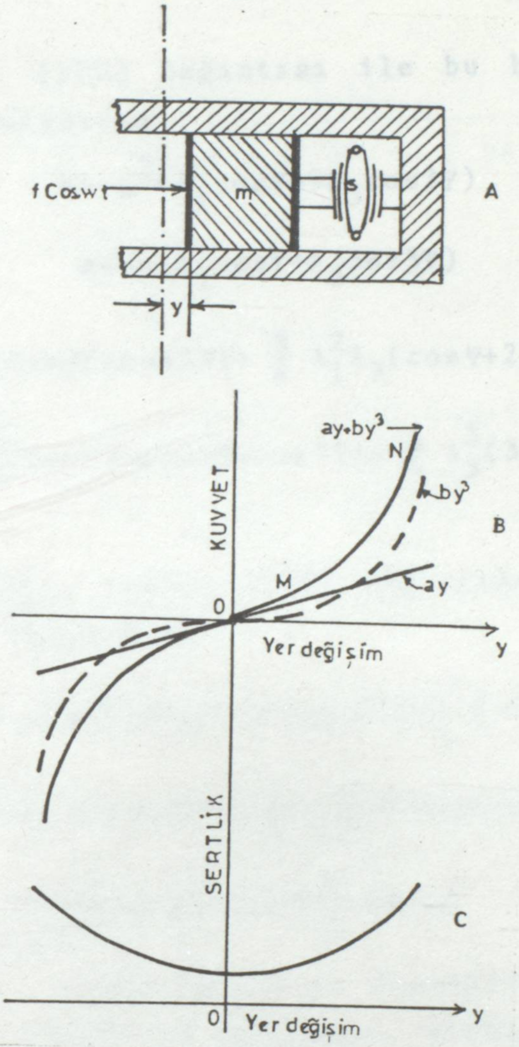
$$\ddot{y}+ay+by^3=f\cos\omega t \qquad (123)$$

Diferansiyel Denkleminin Çözülmesi

Bu diferansiyel denklem; şekil 4.A da şematik olarak gösterildiği gibi $f\cos\omega t$ kuvvetiyle sıkıştırılmış, $ay+by^3$ ile control orantılı, serbest-kayıp kütle-yay (loss-free mass-spring) sistemine ait bir denklemdir. t=0 da sürücü kuvvet uygulamasını, serbest salınım izleyecektir. Ancak, kısa bir zaman aralığından sonra peryodik halin oluşmasını sağlamak ve bunu ortadan kaldırmak için, yeterli sönümün var olduğunu kabul edebiliriz. Sönümün, hareketin genliği üzerinde, yeterince küçük olan ihmal edilebilir bir etkiye sahip olduğu farzedilebilir.

a,b, ω,f uygun değerlere sahip olduğunda, $\frac{\omega}{6\pi}$ frekanslı bir altharmonik meydana gelir. Bu durumda altharmoniğin, mevcudiyeti için gerekli olan koşulları sağlamadığını farzedeceğiz. Buradaki analitik çalışmalarda, etkili olan sürücü üzerindeki sistemin tepkisinin, ihmal edilebilir olduğu kabul edilir. Böylece genlik ve kuvvete uygulanan fonksiyonel form değişmez.

(123) diferansiyel denklemi $\frac{2\pi}{\omega}$ peryotlu bir çözüme sahiptir. $ay+by^3$ ifadesi y nin tek fonksiyonu olduğundan, şekil 4.B de karşılık gelen kuvvet-yerdeğişim grafiği, kuvvet eksenleri etrafında anti-simetriktir.



Şekil 4.

Şekil 4A. Değişken bir fcosωt kuvvetiyle sıkıştırılmış, non-lineer s yayı ve m kütlesinin şematik diyagramı.
B. Şekildeki anti-simetrik eğri, ay lineer yayı ve by^3 kubik yayının birleşimidir. Bu birleşim y'ye göre tek fonksiyondur.
C. (B) durumu için sertlik-yerdeğişim (stiffness-displacement) eğrisini gösterir. $a+3by^2$, y nin düzenli bir fonksiyonudur.

Bunları takiben $\Psi=\omega t$ olmak üzere, (123) diferansiyel denkleminin çözümü

$$y=A_1\cos\Psi+A_3\cos3\Psi+A_5\cos5\Psi+\ldots \qquad (124)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (124) bağıntısını iki terime indirgeyip

$$y=A_1\cos\Psi+A_3\cos3\Psi \qquad (125)$$

olarak alacağız. (125) bağıntısı ile bu bağıntının ikinci türevi gözönüne alınırsa

$$\ddot{y}=-\omega^2(A_1\cos\Psi+9A_3\cos3\Psi) \tag{126}$$

$$ay=a(A_1\cos\Psi+A_3\cos3\Psi) \tag{127}$$

$$by^3=b\Big[\frac{1}{4}A_1^3(3\cos\Psi+\cos3\Psi)+\frac{3}{4}A_1^2A_3(\cos\Psi+2\cos3\Psi+\cos5\Psi)+$$
$$+\frac{3}{4}A_1A_3^2(2\cos\Psi+\cos5\Psi+\cos7\Psi)+\frac{1}{4}A_3^3(3\cos3\Psi+\cos9\Psi)\Big] \tag{128}$$

elde edilir. (126), (127), (128) bağıntıları (123) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$-\omega^2(A_1\cos\Psi+9A_3\cos3\Psi)+a(A_1\cos\Psi+A_3\cos3\Psi)+b\Big[\frac{1}{4}A_1^3(3\cos\Psi+\cos3\Psi)+$$
$$+\frac{3}{4}A_1^2A_3(\cos\Psi+2\cos3\Psi+\cos5\Psi)+\frac{3}{4}A_1A_3^2(2\cos\Psi+\cos5\Psi+\cos7\Psi)+$$
$$+\frac{1}{4}A_3^3(3\cos3\Psi+\cos9\Psi)\Big]=f\cos\omega t \tag{129}$$

sonucuna varılır. (129) bağıntısı düzenlenip, eşitliğin her iki tarafındaki $\cos\Psi$ nin katsayısı birbirine eşitlenirse,

$$(a-\omega^2+\frac{3}{4}bA_1^2)A_1+\frac{3}{4}bA_1^2A_3+\frac{3}{2}bA_1A_3^2=f \tag{130}$$

veya

$$\omega^2=(a+\frac{3}{4}bA_1^2-\frac{f}{A_1})+\frac{3}{4}bA_1^2\Big[\frac{A_3}{A_1}+2(\frac{A_3}{A_1})^2\Big] \tag{131}$$

elde edilir. Bu bağıntı, genlik-frekans bağıntısına bir yaklaşım olarak kabul edilebilir.

(129) bağıntısı düzenlenip, bu sefer eşitliğin heriki tarafındaki $\cos3\Psi$ nin katsayısı birbirine eşitlenirse

$$(a-9\omega^2)A_3+\frac{1}{4}bA_1^3+\frac{3}{2}bA_1^2A_3+\frac{3}{4}bA_3^3=0 \tag{132}$$

veya

$$A_3 = \frac{\frac{1}{4}\, bA_1^3}{9\omega^2 - a - \frac{3}{2}\, bA_1^3 - \frac{3}{4}\, bA_3^2}$$

bulunur. (131) bağıntısında

$$\left|\frac{A_3}{A_1}\right| \ll 1 \qquad (134)$$

olduğunu farzedelim. Dolayısıyla (131) bağıntısındaki

$$\frac{3}{4}\, bA_1^2 \left[\frac{A_3}{A_1} + 2\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2\right] \qquad (135)$$

elemanını ihmal edebiliriz. Bu taktirde (131) bağıntısı

$$\omega^2 = a + \frac{3}{4}\, bA_1^2 - \frac{f}{A_1} \qquad (136)$$

şeklini alır. (136) bağıntısı, peryodik olan (123) denkleminin çözümü için yaklaşık olarak sağlanması gereken bir koşuldur. Eğer f ve A_1, sabit değerler ise ω, (136) bağıntısında verildiği gibidir.

Eğer (136) bağıntısı

$$\frac{3}{4}\, bA_1^3 + (a-\omega^2)A_1 - f = 0 \qquad (137)$$

şeklinde yazılabilirse, ω ve f sabitleri için temel titreşimin genliği araştırılabilir. Eğer b=0 ise lineer sistem için bilinen

$$A_1 = \frac{f}{a-\omega^2} \qquad (138)$$

formülü bulunur.

(137) denklemi kübik bir denklemdir. a, b, ω, f sabitleri için denklemin köklerinin

(i) hepsi reel olabilir

(ii) biri reel, diğer ikisi karmaşık olup eşlenik olabilir.

(136) bağıntısı, (133) bağıntısında yerine yazılıp, $\frac{3}{4}bA_3^2$ ifadesi ihmal edilirse A_3 olarak

$$A_3 = \frac{bA_1^3}{32a+21bA_1^2-\frac{36f}{A_1}} \tag{139}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{A_3}{A_1} \simeq \frac{1}{\left[21+\{32a-\frac{36f}{A_1}\}/bA_1^2\right]} \tag{140}$$

yazılır. (134) koşulu sağlanırken eğer,

$$\left|21+\frac{(32a-\frac{36f}{A_1})}{bA_1^2}\right| \gg 1 \tag{141}$$

ise, (140) bağıntısı $b>0$, $b<0$ gibi iki durum içerir. Bundan dolayı, (141) koşulunun sağlanması halinde sistemin zorunlu hareketi, hemen hemen kosinüsoidal olur.

8. Enerjinin Gözönüne Alınması

(123) diferansiyel denklemi

$$\nu = \frac{dy}{dt} \tag{142}$$

değişken değişimiyle

$$\nu\frac{d\nu}{dy} + ay+by^3=f\cos\omega t \tag{143}$$

şeklini alır. Heriki taraf dy ile çarpılıp integre edilirse

$$\int\nu d\nu+a\int ydy+b\int y^3dy=f\int\cos\omega t\ dy \tag{144}$$

sonucuna varılır. (124) bağıntısının diferansiyeli alınırsa

$$dy=-\omega(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+...)dt \tag{145}$$

elde edilir. (144) bağıntısının sağ tarafında (145) diferansiyeli yerine yazılır ve $(0, \frac{2\pi}{\omega})$ peryodu boyunca integral alınırsa, sağ taraf, devresel fonksiyonun ortogonalliğinden, sol taraf ise peryodiklikten dolayı sıfıra eşit olur. Bu sebepten sürekli hareket müddetince, dağılma olmadığından dolayı, sürücü mekanizmadan sisteme, sistemde bulunmayan enerji temin edilir.

9. $$\ddot{y}+2K\dot{y}+ay+by^3=f\cos(\omega t+\varphi) \qquad (146)$$

Diferansiyel Denklemi İçin Genlik-Frekans Bağıntısı

Bu denklem, § 7 de gözönüne alınan tipteki bir dinamik sistemi için elde edilmiştir. Burada $2K\dot{y}$ terimi, viskos sönümünü gösterir. Bu durumda sürücü kuvvet, temel titreşime karşı gelen, yerdeğişimi ile faz dışında olacaktır. Çözümü basitleştirmek için φ faz açısı önceden belirlenmelidir.

Yukarıda verilmiş olan (146) denklemi, peryodik bir çözüme sahip olduğundan, $\Psi=\omega t$ olmak üzere

$$y=A_1\cos\Psi+A_3\cos3\Psi \qquad (147)$$

bağıntısının bir ilk yaklaşım olduğunu farzedelim. Bu taktirde

$$2K\dot{y}=-2\omega K(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi) \qquad (148)$$

ve

$$f\cos(\omega t+\varphi)=f(\cos\Psi.\cos\varphi-\sin\Psi.\sin\varphi) \qquad (149)$$

elde edilir.

(148),(149) bağıntıları ile (126), (127), (128) bağıntıları, (146) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılır ve eşitliğin heriki tarafındaki $\sin\Psi$ ve $\cos\Psi$ nin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$(a-\omega^2+\frac{3}{4}b_1A^2)A_1=f\cos\varphi \qquad (150)$$

$$2\omega KA_1=f\sin\varphi \qquad (151)$$

bulunur. Burada A_3, A_3^2, A_3^3 nü içeren terimler, küçük olmalarından dolayı ihmal edilebilir. (150), (151) bağıntılarının karesi alınıp, taraf tarafa toplanırsa

$$\left[(a-\omega^2+\frac{3}{4}bA_1^2)^2+4\omega^2K^2\right]A_1^2=f^2 \qquad (152)$$

elde edilir. Bu bağıntı, viskosu sönümlü olan bir non-lineer sistem için genlik-frekans bağıntısıdır.

10. Enerjinin Gözönüne Alınması

(146) diferansiyel denkleminde, (142) bağıntısında verilen değişken değişimi yapılırsa, denklem

$$\nu \frac{d\nu}{dy} + ay+by^3+2K\nu=f\cos(\omega t+\varphi) \qquad (153)$$

şeklini alır. Yukarıdaki denklemin heriki tarafı dy ile çarpılırsa

$$\nu d\nu+aydy+by^3dy+2K\nu dy=f\cos(\omega t+\varphi)dy \qquad (154)$$

olur. (145) ve

$$\nu = \frac{dy}{dt} = -\omega(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+\ldots) \qquad (155)$$

bağıntıları, (154) eşitliğinin sağ tarafında ve $2K\nu dy$ teriminde yerlerine yazılırsa

$$\nu d\nu+aydy+by^3dy+2K(-\omega A_1\sin\Psi-3\omega A_3\sin3\Psi+\ldots).$$
$$(-\omega A_1\sin\Psi-3\omega A_3\sin3\Psi+\ldots)dt=-\omega f\cos(\Psi+\varphi)(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+\ldots)dt \qquad (156)$$

elde edilir.

(156) bağıntısı düzenlenip, integrali alınır ve $(0, \frac{2\pi}{\omega})$ arasında integrali hesaplanırsa

$$\int_0^{2\pi/\omega}\nu d\nu+a\int_0^{2\pi/\omega}ydy+b\int_0^{2\pi/\omega}y^3dy+2K\omega^2\int_0^{2\pi/\omega}(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+\ldots)^2dt=$$
$$=-\omega f\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\Psi+\varphi)(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+\ldots)dt \qquad (157)$$

yazılır. Bu bağıntının sol tarafındaki ilk üç integral periyodik olmalarından dolayı sıfıra eşit olur. Böylece (157) bağıntısı

$$2K\omega^2\int_0^{2\pi/\omega}(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+\ldots)^2dt =$$
$$=-\omega f\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\Psi+\varphi)(A_1\sin\Psi+3A_3\sin3\Psi+\ldots)dt \qquad (158)$$

şeklini alır. Buradan

$$\pi(\frac{2K}{\omega})[\omega^2 A_1^2+(3\omega)^2 A_3^2+(5\omega)^2 A_5^2+\ldots] = \pi f A_1 \sin\varphi \qquad (159)$$

bağıntısı bulunur.

(159) bağıntısının sol tarafındaki ifade, peryot içinde viskos kaybını önleyen çalışmayı gösterir. Sağ taraf ise, sürücü mekanizma tarafından sağlanan enerjiyi gösterir. Sol taraftaki her bir terim harmoniğin yerini tuttuğu için, kaybı gösterir. (158) bağıntısının sağ tarafından tek kolaylık, $(\sin\psi)^2$ ni içeren terimden geldiğinden; enerji, $\frac{\omega}{2\pi}$ temel frekansında sürücü mekanizma tarafından sağlanır. Sürücü kuvvet, yüksek harmonik bileşimlere sahip olmadığından, fiziksel bakış açısından durum böyle olmalıdır.

Yaklaşık çözümlemenin tabiatı nedeniyle, (159) bağıntısının iki tarafı birbirine eşit değildir. Bunu göstermek için, (151) bağıntısında

$$\sin\varphi = 2\omega K \frac{A_1}{f} \qquad (160)$$

alınarak, eşitliğin sol tarafı için

$$2\pi\omega K A_1^2 \left[1+(3\frac{A_3}{A_1})^2+(5\frac{A_5}{A_1})^2+\ldots\right] \qquad (161)$$

ve sağ tarafı için

$$2\pi\omega K A_1^2 \qquad (162)$$

elde edilir.

$$\left[\frac{(2r+1)A_{2r+1}}{A_1}\right]^2 \ll 1 \qquad (163)$$

olduğundan, çözümlemenin geri kalan kısmında, (159) yaklaşımı korunma halindedir.

11. $\frac{1}{3}$ lü Harmonikler

a,b,f>0 olmak üzere, belirli koşullar altında

$$\ddot{y}+ay+by^3=f\cos\omega t \tag{164}$$

diferansiyel denkleminin peryodik çözümü, cos $\frac{1}{3}$ ωt yi içeren bir terime sahiptir. (164) diferansiyel denkleminde

$$t=t+\frac{2n\pi}{\omega} \tag{164}$$

değişken değişimi yapılırsa, denklem değişmediğinden, cos $\frac{1}{3}\omega t$ bir çözüm ise, cos $\frac{1}{3}$ ($\omega t+2\pi$) ve cos $\frac{1}{3}$ ($\omega t+4\pi$) ifadeleride bir çözümdür. Böylece matematiksel bakış açısından, aynı genliğe sahip ancak $\frac{2\pi}{3}$ radyanlarıyla faz içinde ayrılan, üç düzenli üç altharmonik vardır.

Aşağıda verilmiş olan çözümleme, altharmoniğin varlığını ispatlamaz. Bu çözüm

$$\frac{b}{a} \ll 1 \tag{166}$$

ise (164) diferansiyel denkleminin bir altharmonik çözüme sahip olduğu hipotezine dayanır.

İlk yaklaşımın

$$y=A_{\frac{1}{3}}\cos\frac{1}{3}\omega t+A_1\cos\omega t \tag{167}$$

olduğunu farzedelim. (167) bağıntısı ve bu bağıntının ikinci türevi (164) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılıp, eşitliğin heriki tarafındaki cos $\frac{1}{3}$ ωt ve cosωt nin katsayıları eşitlenirse

$$\left[(a-\frac{1}{9}\omega^2)+\frac{3}{4}b(A_{\frac{1}{3}}^2+A_{\frac{1}{3}}A_1+2A_1^2)\right]A_{\frac{1}{3}}=0 \tag{168}$$

ve

$$(a-\omega^2)A_1+\frac{1}{4}b(A_{\frac{1}{3}}^3+6A_{\frac{1}{3}}^2A_1+3A_1^3)=f \tag{169}$$

elde edilir.

$$A_{\frac{1}{3}} \neq 0 \tag{170}$$

olması koşuluyla, (168) denklemi

$$\left(A - \frac{1}{9}\omega^2\right) + \frac{3}{4} b \left(A_{\frac{1}{3}}^2 + A_{\frac{1}{3}} A_1 + 2A_1^2\right) = 0 \tag{171}$$

şeklini alır. (169) ile (171) bağıntısı arasında ω^2 terimi yok edilirse,

$$A_{\frac{1}{3}}^3 - A_1\left(21\, A_{\frac{1}{3}}^2 + 27\, A_{\frac{1}{3}} A_1 + 51\, A_1^2 + 32\, \frac{a}{b}\right) = \frac{4f}{b} \tag{172}$$

olur. (169) bağıntısında

$$A_{\frac{1}{3}} = 0 \tag{173}$$

olduğu zaman, A_1 yerine $\bar{A}_1$ yazılarak

$$\frac{3}{4} b\bar{A}_1^3 - (\omega^2 - a)\bar{A}_1 - f = 0 \tag{174}$$

bağıntısı elde edilir. (169), (171) bağıntıları, altharmonik için uygun olmalıdır.

(171) bağıntısı $A_{\frac{1}{3}}$ e göre çözülürse

$$A_{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}\left[A_1 \mp \left\{\frac{16}{27b}(\omega^2 - 9a) - 7\, A_1^2\right\}^{1/2}\right] \tag{175}$$

şeklinde iki değer elde edilir. $A_{\frac{1}{3}}$ ün reel olması gerektiğinden, (175) bağıntısından

$$\omega^2 \geq 9\left(a + 21\, \frac{A_1^2 b}{16}\right) \tag{176}$$

yazılır. Burada eşitlik işareti, altharmonik varolduğu zaman

$$A_{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} A_1 \tag{177}$$

değerine karşı gelir.

(177) ifadesi (172) bağıntısında yerine yazılıp, gerekli kısaltmalar yapılırsa, sadece bir reel köke sahip olan

$$\frac{343}{32} b A_1^3 + 8aA_1 + f = 0 \qquad (178)$$

denklemi elde edilir. Burada a,b,f değerleri, pozitifdir. Eğer

$$A_1^2 \ll \frac{256a}{343b} \quad \text{veya} \quad \frac{0.02bf^2}{a^3} \ll 1 \qquad (179)$$

ise, (178) denklemindeki ilk terim ihmal edilerek, yeterli bir yaklaşım olan

$$A_1 \simeq -\frac{f}{8a} \qquad (180)$$

olur.

$$A_1^3 = -(\frac{f}{8a})^3 \qquad (181)$$

ifadesi, (178) denkleminde yerine yazılıp, çözülürse, altharmoniğin başlangıç değeri olan

$$A_1 \simeq -\frac{f}{8a}(1 - \frac{343bf^2}{16384a^3}) \simeq -\frac{f}{8a}(1 - \frac{0.02bf^2}{a^3}) \qquad (182)$$

ikinci yaklaşımı bulunur. Aynı zamanda

$$\omega^2 \simeq 9(a + \frac{21bf^2}{1024a^2}) \qquad (183)$$

dolayısıyla

$$\frac{21bf^2}{1024a^3} \ll 1 \qquad (184)$$

koşuluyla,

$$\omega \simeq 3a^{1/2} \qquad (185)$$

yazılır. (176) ifadesi (174) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{354}{32} b \bar{A}_1^3 + 8a \bar{A}_1 + f = 0 \qquad (186)$$

denklemi elde edilir. (178), (186) bağıntılarıyla, tasarlanan yaklaşımın derecesine ulaşılmaya çalışılır. Altharmonik başladığı zaman A_1 de küçük bir değişiklik vardır.

(180) deki A_1 değeri, şekil 5 deki ① eğrisini gösterir. (171) denklemi çözülerek, $A_{\frac{1}{3}} \neq 0$ olması koşuluyla

$$A_1 = -\frac{1}{4}\left[A_{\frac{1}{3}} \mp \left\{\frac{32}{27b} - (\omega^2 - 9a) - 7A_{\frac{1}{3}}^2\right\}^{1/2}\right] \qquad (187)$$

bulunur. (171) ve (172) bağıntılarında $A_1 = 0$ yazılırsa

$$A_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4f}{b}\right)^{1/3} = \left[\frac{4}{27b}(\omega^2 - 9a)\right]^{1/2} \qquad (188)$$

elde edilir. Burada (169) bağıntısını sağlamadığı için, negatif işaretli değer alınmamıştır.

$$A_1 = 0 \quad \text{ve} \quad A_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4f}{b}\right)^{1/3} \qquad (189)$$

olduğu zaman, (171) bağıntısı

$$\omega^2 = 9a + 27\left(\frac{bf^2}{4}\right)^{1/3} \qquad (190)$$

şeklini alır. O taktirde (164) diferansiyel denkleminin çözümü olarak

$$y = \left(\frac{4f}{b}\right)^{1/3} \cos \frac{1}{3}\,\omega t \qquad (191)$$

elde edilir.

Bu sonuçlar, bizim bir $A\cos\omega t$ altharmonik çözümüne sahip bir denklem bulmamızı sağlar. (190) ifadesi,

$$\frac{4f}{b} = A^3 \quad , \quad \omega = 3\omega \qquad (192)$$

değişken değişimiyle

$$a = \left(\omega^2 - \frac{3f}{A}\right) \qquad (193)$$

ifadesini verir. Dolayısıyla (164) diferansiyel denklemi

$$\ddot{y}+(\omega^2 - \frac{3f}{A})y + \frac{4fy^3}{A^3} = f\cos 3\omega t \qquad (194)$$

şeklini alır.

Diğer altharmonik çözümler

$$A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \text{ ve } A\cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \qquad (195)$$

olur. Eğer

$$3f=A\omega^2 \qquad (196)$$

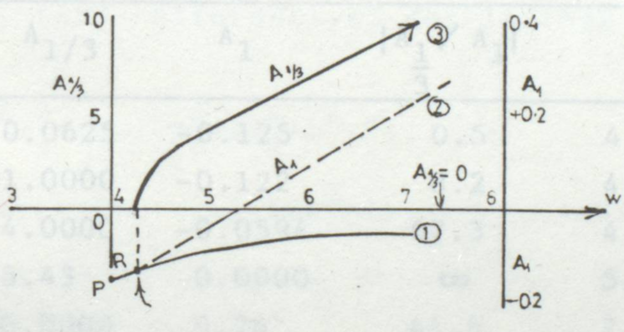
ise,

$$\ddot{y}+(\frac{4\omega^2}{3A^2})y^3=(\frac{A\omega^2}{3})\cos 3\omega t \qquad (197)$$

diferansiyel denkleminin bir altharmonik çözümü

$$A\cos\omega t \qquad (198)$$

den ibaret olur.



Şekil 5.

Şekil 5. $\ddot{y}+2y+0.05y^3=2\cos\omega t$ diferansiyel denkleminin peryodik çözümündeki temel ve $\frac{1}{3}$ harmoniğin genliğini gösteren eğriler.

① $A_{\frac{1}{3}} = 0$ olduğu zaman A_1 eğrisini

② $A_{\frac{1}{3}}$ eğrisini

③ $A_{\frac{1}{3}} \neq 0$ olduğu zaman A_1 eğrisini gösterir.

$\omega=4$, $A_1=OP$ olduğu zaman eğer ω değeri artarsa, A_1, $\omega \tilde{=} 3a^{1/2}=3\sqrt{2}$ ile altharmoniğin başladığı R noktasına kadar azalır. Daha sonra A_1, 3 eğrisini izler.

12. Örnek

§ 11 deki çözüm yöntemini bir örnekle açıklamak için

$$a=2, \quad b=0.05, \quad f=2 \tag{199}$$

alalım. Altharmonik başladığı zaman

$$A_1 \cong -\frac{f}{84} = -0.125 \quad \text{ve} \quad A_{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} A_1 = 0.0625 \tag{200}$$

olur. (176) bağıntısı kullanılarak

$$\omega^2 = 18.004 \quad \text{ve} \quad \omega = 4.243 \cong 3a^{1/2} \tag{201}$$

bulunur. (171), (172) bağıntılarını kullanarak ve $A_{\frac{1}{3}}$ e değerler verilerek, tablo 1 de görülen değerler elde edilir. Bu değerler, şekil 5 deki grafikle gösterilmiştir. Burada A_1 ve ω arasındaki ilişki lineerdir.

Tablo 1.

$\frac{1}{3}$ Harboniğe Bağlı Veriler Tablosu

$A_{1/3}$	A_1	$\lvert A_{\frac{1}{3}} / A_1 \rvert$	ω
0.0625	-0.125	0.5	4.24
1.0000	-0.122	8.2	4.28
4.0000	-0.0594	67.3	4.83
5.43	0.0000	∞	5.29
10.0000	0.24	41.6	7.25

13. $$\ddot{y}+ay+by^2=f\cos\omega t \tag{202}$$

Diferansiyel Denkleminin Çözülmesi

$\Psi=\omega t$ olmak üzere, (202) diferansiyel denklemi

$$\omega^2 y'' + ay + by^2 = f\cos\Psi \tag{203}$$

şeklini alır. Burada $a,b>0$ dır.

$y'(0)=0$, $y(0)=A$ başlangıç koşullarını sağlayan, 2π peryoduna sahip olan bir çözüm arayalım. b, çok küçük seçilen bir pertürbasyon parametresi olmak üzere

$$bF=f \tag{204}$$

değişken değişimi yapalım.

y_r, Ψ nin iki defa diferansiyellenebilir fonksiyonları olsun.

$$y=y_o+by_1+b^2y_2+\ldots \tag{205}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

ω_r^2, belirlenebilir sabitler olmak üzere

$$\omega^2=\omega_o^2+b\omega_1^2+b^2\omega_2^2+\ldots \tag{206}$$

olduğunu varsayalım. (206) bağıntısında b nin kuvvetini arttırırsak ω^2, genişler.

(205) bağıntısının ikinci türevi alınıp, (206) bağıntısıyla birlikte, (203) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{gathered}(\omega_o^2+b\omega_1^2+b^2\omega_2^2+\ldots)(y_o''+by_1''+b^2y_2''+\ldots)+\\ +a(y_o+by_1+b^2y_2+\ldots)+b(y_o^2+2by_oy_1+\ldots)=bF\cos\Psi\end{gathered} \tag{207}$$

elde edilir. Burada $r=0,1,2,\ldots$ için b^r nin katsayısı, ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

b^o için:

$$\omega_o^2y_o''+ay_o=0 \quad \text{veya} \quad y_o''+\left(\frac{a}{\omega_o^2}\right)y_o=0 \tag{208}$$

olur. 2π peryodundan dolayı

$$\omega_o^2=a \tag{209}$$

almalıyız. Dolayısıyla (208) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y_o=A_o\sin\Psi+B_o\cos\Psi \qquad (210)$$

olur. § 2 deki gibi başlangıç koşullarının

$$y_o(0)=A,y_1(0)=y_2(0)=...=0=y'_o(0)=y'_1(0)=...=0 \qquad (211)$$

olması gerekir. Dolayısıyla bu koşulları sağlayan çözüm,

$$y_o=A\cos\Psi \qquad (212)$$

olur.

b için:

$$\omega_o^2y_1''+ay_1=F\cos\Psi-(\omega_1^2y_o''+y_o^2) \qquad (213)$$

olur. Burada (209), (212) bağıntıları kullanılarak,

$$y_1''+y_1=\frac{1}{a}\left[(F+\omega_1^2A)\cos\Psi-\frac{1}{2}A^2(1+\cos2\Psi)\right] \qquad (214)$$

bulunur. (214) denkleminin özel çözümündeki peryodik olmayan terimden kaçınmak için, $\cos\Psi$ nin katsayısı sıfıra eşit olmalıdır. Buradan

$$F+\omega_1^2A=0 \qquad (215)$$

yazılarak

$$\omega_1^2=-\frac{F}{A} \qquad (216)$$

bulunur. Böylece (214) denklemi

$$y_1''+y_1=-\frac{1}{2a}A^2-\frac{1}{2a}\cos2\Psi \qquad (217)$$

şeklini alır. Bu denklemin genel çözümü ise

$$y_1=A_1\sin\Psi+B_1\cos\Psi+\frac{A^2}{6a}\cos2\Psi-\frac{A^2}{2a} \qquad (218)$$

dir. $y_1(0)=y'_1(0)=0$ başlangıç koşulları gözönüne alınırsa,

$$A_1=0 \quad \text{ve} \quad B_1=\frac{A^2}{3a} \qquad (219)$$

bulunur. Dolayısıyla (217) denkleminin genel çözümü olarak

$$y_1 = -\frac{A^2}{2a} + \frac{A^2}{3a}\left(\cos\Psi + \frac{1}{2}\cos 2\Psi\right) \tag{220}$$

elde edilir.

b^2 için:

$$\omega_o^2 y_2'' + a y_2 = -(\omega_2^2 y_o'' + \omega_1^2 y_1'' + 2 y_o y_1) \tag{221}$$

yazılır. (209), (212), (220) bağıntılarıyla, (221) denklemi

$$y'' + y_2 = \frac{A}{a}\left(\omega_2^2 + \frac{\omega_1^2 A}{3a} + \frac{5A^2}{6a}\right)\cos\Psi - \frac{A}{3a^2}(A^2 - 2\omega_1^2 A)\cos 2\Psi -$$

$$- \frac{A^3}{6a^2}\cos 3\Psi - \frac{A^3}{3a^2} \tag{222}$$

şeklini alır. Özel çözümdeki peryodik olmayan terimden kaçınmak için $\cos\Psi$ nin katsayısı sıfır olmalıdır. Buradan(216) bağıntısıyla

$$\omega_2^2 = -\frac{1}{3a}\left(\omega_1^2 A + \frac{5}{2}A^2\right) = \frac{F}{3a} - \frac{5A^2}{6a} \tag{223}$$

yazılır. Bu taktirde (222) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y_2 = A_2 \sin\Psi + B_2 \cos\Psi + \frac{A}{9a^2}(A^2 + 2F)\cos 2\Psi + \frac{A^3}{48a^2}\cos 3\Psi - \frac{A^3}{3a^2} \tag{224}$$

olur. $y_2(0) = y_2'(0) = 0$ başlangıç koşullarıyla

$$A_2 = 0 \quad \text{ve} \quad B_2 = \frac{A}{3a^2}\left(\frac{29}{48}A^2 - \frac{2}{3}F\right) \tag{225}$$

bulunur. Dolayısıyla (222) diferansiyel denkleminin genel çözümü olarak

$$y_2 = -\frac{A^3}{3a^2} + \frac{A}{3a^2}\left(\frac{29}{48}A^2 - \frac{2}{3}F\right)\cos\Psi + \frac{A}{9a^2}(A^2 + 2F)\cos 2\Psi +$$

$$+ \frac{A^3}{48a^2}\cos 3\Psi \tag{226}$$

elde edilir. Böylece b^2 yi içeren terime kadar devam eden çözüm,

$$y=y_o+by_1+b^2y_2 \tag{227}$$

$$= -\frac{bA^2}{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{bA}{3a}\right)+A\left(1+\frac{bA}{3a}+\frac{29b^2A^2}{144a^2}-\frac{2bf}{9a^2}\right)\cos\omega t +$$

$$+\frac{bA^2}{3a}\left(\frac{1}{2}+\frac{bA}{3a}+\frac{2f}{3aA}\right)\cos 2\omega t+\frac{b^2A^3}{48a^2}\cos 3\omega t \tag{228}$$

olur. Aynı zamanda, b^2 yi içeren terime kadar devam eden ω^2 bağıntısı da

$$\omega^2=\omega_o^2+b\omega_1^2+b^2\omega_2^2=a-\frac{5b^2A^2}{6a}-f\left(\frac{1}{A}-\frac{b}{3a}\right) \tag{229}$$

şeklinde yazılır.

14. $\frac{1}{2}$ li Harmonikler

Pertürbasyon yöntemini kullanarak $\frac{2\pi}{\omega}$ peryotlu, 2. mertebeden altharmonikler için

$$\ddot{y}+2K\dot{y}+ay+by^2=f\cos 2\omega t \tag{230}$$

diferansiyel denkleminin çözümünü arayalım. $a>0$, $b,K>0$ küçük olmak üzere

$$\omega t=z,\quad 2K=\varepsilon b^2,\quad f=bF \tag{231}$$

değişken değişimleri yapılırsa (230) denklemi

$$\omega^2y''+\omega\varepsilon b^2y'+ay+by^2=bF\cos 2z \tag{232}$$

şeklini alır. y_r, z in iki defa diferansiyellenebilir peryodik fonksiyonları olsun.

$$y=y_o+by_1+b^2y_2+\ldots \tag{233}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. ω_r belirlenebilir sabitler olmak üzere

$$\omega=\omega_o+b\omega_1+b^2\omega_2+\ldots \tag{234}$$

olduğunu varsayalım.

(233) bağıntısının birinci, ikinci türevleri ile (234) bağıntısı (232) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\{\omega_o^2+2b\omega_o\omega_1+b^2(\omega_1^2+2\omega_o\omega_2)+\ldots\}(y_o''+by_1''+b^2y_2''+\ldots)+$$

$$+\varepsilon(b^2\omega_o+\ldots)(y_o'+by_1'+\ldots)+a(y_o+by_1+b^2y_2+\ldots)+$$

$$+(by_o^2+2b^2y_oy_1+\ldots)=bF\cos 2z \qquad (235)$$

elde edilir. Burada r=0,1,2,... için b^r nin katsayısı, ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

b^o için:

$$\omega_o^2 y_o''+ay_o=0 \qquad (236)$$

olur. Dolayısıyla 2π peryotlu bir çözüm için

$$\omega_o^2=a \qquad (237)$$

almalıyız. Bu taktirde (236) diferansiyel denkleminin genel çözümü olarak

$$y_o=A\sin z+B\cos z \qquad (238)$$

bulunur. Burada A,B değerleri, a,b,f,K,ω nın fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonları baştan sona aynı şekilde tutacağız. Denklem non-lineer olduğundan, bu safhada bilinmeyen, enson başlangıç koşulları

$$y(0)=B\ ,\ y'(0)=A \qquad (239)$$

dan farklıdır.

b için:

$$\omega_o^2 y_1''+ay_1=-2\omega_o\omega_1 y_o''-y_o^2+F\cos 2z \qquad (240)$$

yazılır. Burada (238) bağıntısı kullanılarak (240) denklemi

$$y_1''+y_1=2\left(\frac{\omega_1}{\omega_o}\right)(A\sin z+B\cos z)-\left(\frac{1}{a}\right)\left\{\frac{(A^2+B^2)}{2}+AB\sin 2z-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{(A^2-B^2)}{2}+F\right]\cos 2z\right\} \qquad (241)$$

şeklini alır. y_1 deki peryodik olmayan terimden kaçınmak için

$$\omega_1 = 0 \tag{242}$$

olmalıdır. Böylece

$$g = \frac{A^2+B^2}{2}\ , \quad h = F + \frac{A^2-B^2}{2} \tag{243}$$

olmak üzere

$$y_1 = \frac{g}{a} + \frac{AB}{3a}\sin 2z - \frac{h}{3a}\cos 2z \tag{244}$$

elde edilir.

b^2 için:

$$\omega_o^2 y_2'' + a y_2 = -\varepsilon\omega_o y_o' - 2\omega_o\omega_2 y_o'' - 2y_o y_1 \tag{245}$$

$$= -\varepsilon\omega_o(A\cos z - B\sin z) + 2\omega_o\omega_2(A\sin z + B\cos z) -$$

$$-2(A\sin z + B\cos z)\left\{-\left(\frac{g}{a}\right) + \left(\frac{AB}{3a}\right)\sin 2z - \left(\frac{h}{3a}\right)\cos 2z\right\} \tag{246}$$

yazılır. Buradan da; P ve Q aşağıda verilmiş değerler olmak üzere, (246) denklemi,

$$y_2'' + y_2 = P\sin z + Q\cos z + \left(\frac{A}{3a^2}\right)(h - B^2)\sin 3z +$$

$$+\left(\frac{B}{3a^2}\right)(h + A^2)\cos 3z \tag{247}$$

şeklini alır. y_2 deki peryodik olmayan terimden kaçınmak için; P ve Q sıfıra eşit olmalıdır.

A ve B sıfır olmamak üzere

$$\frac{P}{A} = 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_o}\right) + 2\left(\frac{g}{a^2}\right) - \left(\frac{h}{3a^2}\right) - \left(\frac{B^2}{3a^2}\right) + \left(\frac{\varepsilon B}{\omega_o A}\right) = 0 \tag{248}$$

$$\frac{Q}{B} = 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_o}\right) + 2\left(\frac{g}{a^2}\right) + \left(\frac{h}{3a^2}\right) - \left(\frac{A^2}{3a^2}\right) - \left(\frac{\varepsilon A}{\omega_o B}\right) = 0 \tag{249}$$

dır. (248), (249) ifadeleri taraf tarafa toplanarak ve elde edilen ifade

$$\frac{a}{2}=\frac{\omega_o^2}{2} \qquad (250)$$

ile çarpılarak

$$2\omega_o\omega_2=-5\ \frac{A^2+B^2}{6a}+\frac{K\omega_o}{b^2}\left(\frac{A}{B}-\frac{B}{A}\right) \qquad (251)$$

elde edilir.

Bu sefer (248), (249) ifadeleri taraf tarafa toplanarak ve elde edilen ifade

$$\frac{\omega_o}{\varepsilon}=\frac{b^2\omega_o}{2K} \qquad (252)$$

ile çarpılarak

$$\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)=\frac{bf}{3K\omega_o^3}=\beta \qquad (253)$$

bulunur. (253) denklemi çözülürse

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{2}\{\beta\mp(\beta^2-4)^{1/2}\} \qquad (254)$$

dolayısıyla

$$K\omega_o\left(\frac{A}{B}-\frac{B}{A}\right)=\mp\left\{\left(\frac{bf}{3a}\right)^2-4K^2a\right\}^{1/2} \qquad (255)$$

olur. (234) bağıntısından

$$\omega^2=\omega_o^2+2b\omega_o\omega_1+b^2(\omega_1^2+2\omega_o\omega_2)+\ldots \qquad (256)$$

yazılır. (237), (242), (251), (255) bağıntıları yardımıyla

$$\omega^2=a-5b^2\ \frac{A^2+B^2}{6a})+\left\{\left(\frac{bf}{3a}\right)^2-4K^2a\right\}^{1/2} \qquad (257)$$

elde edilir. buradan, altharmoniklerin genliklerini veren

$$Y=(A^2+B^2)^{1/2}=\mp\left\{\left(\frac{6a}{5b^2}\right)\left[(a-\ {}^2)+\left\{\left(\frac{bf}{3a}\right)^2-4K^2a\right\}^{1/2}\right]\right\}^{1/2} \qquad (258)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece b yi içeren terime kadar devam eden çözüm

$$y=y_o+by_1 \tag{259}$$

$$=A\sin z+B\cos z+\left(\frac{bAB}{3a}\right)\sin 2z-\left(\frac{bh}{3a}\right)\cos 2z-\left(\frac{bg}{a}\right) \tag{260}$$

$$=-\left(\frac{b}{2a}\right)Y^2+Y\cos(z-\theta_1)-\left(\frac{b}{6a}\right)Y^2\cos(2z+\theta_2)-\left(\frac{f}{3a}\right)\cos 2z \tag{261}$$

olur. Burada

$$\tan\theta_1=\frac{A}{B},\quad \tan\theta_2=\frac{AB}{\frac{A^2-B^2}{2}},\quad \theta_2=-2\theta_1 \tag{262}$$

dir. Bu çözüm altharmonikler mevcut olduğunda yani Y, sadece pozitif reel değerlere sahip olduğunda geçerli olur. İlk terim, tek yönlü bir yerdeğişimini gösterir. Burada, salınımın merkezi orijinin sol tarafındadır. Son terim sürücü kuvvet olarak aynı peryoda sahip olan zorunlu salınımı verirken, ikinci ve üçüncü terimler sırasiyle, altharmoniği ve onun birinci yüksek tonunu gösterirler.

15. Özsalınımlı Termiyonik Valf Devresindeki Zorunlu Salınım

Bu durum, şekil 1.A da şematik olarak gösterilmiştir. Ancak burada (8) denkleminin sağ tarafı

$$E_o\cos(\omega t+\varphi) \tag{263}$$

olarak alınır. Böylece, a,b,c>0 ve

$$F_o=a\left(\frac{E_o}{E_s}\right) \tag{264}$$

olmak üzere, (10) diferansiyel denklemine karşılık olarak

$$\ddot{u}-b\dot{u}+c\,\frac{d(u^3)}{dt}+au=F_o\cos(\omega t+\varphi) \tag{265}$$

diferansiyel denklemine varılır.

Başlıca iki salınma vardır. Birincisi, valfın negatif rezistans özelliğinden dolayı serbest salınım; ikincisi uygulanan (263) potansiyel farkına uygun zorunlu salınım.

16. (265) Diferansiyel Denkleminin Çözümü

ω_o, serbest salınımın açısal frekansı ve ω, mecburi salınımın açısal frekansı olmak üzere

$$\Psi_o = \omega_o t \quad , \quad \Psi = \omega t \tag{266}$$

değişken değişimi ile

$$u = A_o \cos\Psi_o + A\cos\Psi \tag{267}$$

olduğunu varsayalım.

(267) bağıntısının birinci ve ikinci türevleri ile(267) bağıntısının küpü alınırsa; $2\Psi_o, 3\Psi_o, \ldots$ vb. yi içeren terimler atlanarak,

$$-b\dot{u} = b\left[\omega_o A_o \sin\Psi_o + \omega A \sin\Psi\right] \tag{268}$$

$$\ddot{u} = -\omega_o^2 A_o \cos\Psi_o - \omega^2 A\cos\Psi \tag{269}$$

$$c\,\frac{d(u^3)}{dt} = -c\left|\left(\frac{3}{4}A_o^3\omega_o + \frac{3}{2}A_o A^2\omega_o\right)\sin\Psi_o + \left(\frac{3}{4}A^3\omega + \frac{3}{2}A_o^2 A\right)\sin\Psi\right| \tag{270}$$

elde edilir. (268), (269), (270) bağıntıları, (265) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa

$$-\omega_o^2 A_o \cos\Psi_o - \omega^2 A\cos\Psi + b\left[\omega_o A_o \sin\Psi_o + \omega A\sin\Psi\right] - c\left[\left(\frac{3}{4}A_o^3\omega_o + \frac{3}{2}A_o A^2\omega_o\right)\sin\Psi_o + \left(\frac{3}{4}A^3\omega + \frac{3}{2}A_o^2 A\right)\sin\Psi\right] + a(A_o\cos\Psi_o + A\cos\Psi) = F_o\cos(\omega t + \varphi) \tag{271}$$

sonucuna varılır. (271) bağıntısı düzenlenip; $\cos\Psi$, $\sin\Psi$, $\cos\Psi_o$, $\sin\Psi_o$ nin katsayıları bağımsız olarak sıfıra eşitlenirse

$$\cos\Psi \text{ için : } \quad -\omega^2 A + aA = F_o\cos\varphi \tag{272}$$

$$\sin\Psi \text{ için : } \quad b\omega A - \frac{3A^3\omega c}{4} - \frac{3}{2}A_o^2 A\omega c = -F_o\sin\varphi \qquad (273$$

$$\cos\Psi_o \text{ için : } -\omega_o^2 A_o + aA_o = 0 \qquad (274)$$

$$\sin\Psi_o \text{ için : } b\omega_o A_o - \frac{3}{4} A_o^3 \omega_o c - \frac{3}{2} A_o A^2 \omega_o c = 0 \qquad (275)$$

yazılır. (275) bağıntısından

$$|A_o| = \left(\frac{4b}{3c} - 2A^2\right)^{1/2} \quad \text{veya} \quad A_o = 0 \qquad (276)$$

bulunur. Uygulanan bir potansiyel farkın yokluğunda A=0 dır. Eğer

$$b > 0 \;,\; \frac{CR}{\sigma M} \ll 1 \qquad (277)$$

ise, serbest salınımın genliği, (9) ifadeleri yardımıyla

$$|\bar{A}_o| = \left(\frac{4b}{3c}\right)^{1/2} = 2\left(1 - \frac{CR}{\sigma M}\right)^{1/2} \qquad (278)$$

şeklinde yazılır.

$A_o=0$ olduğu zaman, serbest salınım sıfıra eşit olur. Dolayısıyla mecburi salınımın genliği, (276) ifadesi ile

$$|A| = \frac{|\bar{A}_o|}{\sqrt{2}} \qquad (279)$$

şeklini alır. (276) ifadesinde A_o, reel olduğundan dolayı; eğer

$$|A| \geq \frac{|\bar{A}_o|}{\sqrt{2}} \qquad (280)$$

ise, mecburi salınım mevcut olur.

(274) bağıntısından

$$\omega_o^2 = a = \frac{1}{LC} \qquad (281)$$

elde edilir. Eğer serbest salınım durdurulursa, $A_o=0$ olur. Dolayısıyla (272), (273) ifadeleri ile

$$(\omega^2-\omega_o^2)^2+\omega^2(b - \frac{3A^2c}{4})^2 = (\frac{F_o}{A})^2 \qquad (282)$$

veya

$$\frac{(\omega^2-\omega_o^2)^2}{\omega^2 b^2} + (1 - \frac{3A^2c}{4b})^2 = (\frac{F_o}{Ab\omega})^2 \qquad (283)$$

yazılır.

$$\frac{(\omega^2-\omega_o^2)}{\omega b} = x \ , \quad \frac{3A^2c}{4b} = y, \quad \frac{3F_o^2c}{4b^3\omega^2} = E \qquad (284)$$

değişken değişimiyle (283) bağıntısı

$$x^2y+(1-y)^2y=E \qquad (285)$$

şeklini alır. Bu bağıntı, serbest salınımın bulunmadığı durumda geçerli olur. (275) bağıntısı,

$$y = \frac{3A^2c}{4b} \quad , \quad y_o = \frac{3A_o^2c}{4b} \qquad (286)$$

değişken değişimiyle

$$y_o = \frac{3A_o^2c}{4b} = (1-2y) \qquad (287)$$

bağıntısını verir. Burada y_o, $y>0$ dır.

K A Y N A K L A R

1. McLACHLAN, N.W. Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences.

2. SANSONE, G. and CONTI, R. Non-Linear Differential Equations.

3. DAVIES, T.V. and JAMES, E.M. Non-Linear Differential Equations.

4. INCE, E.L. Ordinary Differential Equations.

TEZ YAZARININ ÖZGEÇMİŞİ

Oya BAYKAL 1963 yılında Karabük'de doğdu. İlk öğrenimini Karabük Atatürk İlkokulu, orta öğrenimini İstanbul Suadiye Lisesi'nde yaptı. 1984 yılında yüksek öğrenime başladığı, Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Lisans'dan, 1988 Haziran döneminde mezun oldu. 1988-89 öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında araştırma görevlisi oldu. Aynı yıl yüksek lisans sınavını kazanarak Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı.

Halen Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında görevine devam etmektedir.