YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Değişmeli Halkalar ve Modüller

Yüksek Lisans Tezi

Ayten Ustamehmetoğlu

1991

MAT

15 0007c

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALAR

VE

MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ.GÖR.AYTEN USTAMEHMETOĞLU

İSTANBUL-1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot	: R 209 87
Alındığı Yer	: Fen Bilimleri Ens.
Tarih	: 18.03.1992
Fatura	: -
Fiyatı	: 15.000.-TL
Ayniyat No	: 1/1
Kayıt No	: 48204
UDC	: 510
Ek	:

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ 1937 KÜTÜPHANESİ

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
D.B. No 46044
46044

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALAR

VE

MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ.GÖR.AYTEN USTAMEHMETOĞLU

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ 1937 KÜTÜPHANESİ

İSTANBUL-1991

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda hiçbir zaman yardımını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Erol BALKANAY'a teşekkür ederim.

Arş.Gör.Ayten USTAMEHMETOĞLU

ÖZET

Bu çalışmada değişmeli birim elemanlı halkalar ve modüller incelenmiştir.

Beş bölümden meydana gelen çalışmanın ilk iki bölümünde konu ile ilgili temel tanımlar, teoremler verilmiştir. Halka ve modüllere, daha ileri kavram ve teoremler elde edebilmek için, bazı sonluluk koşulları eklemek gerekmektedir. Bunların en uygunu "Zincir koşulları" dır. Zincir koşulları halka ve modüllerin her ikisine de uygulanır.

Üçüncü bölümde tamlık bölgesi, her ne kadar cisim değilse de onun bir cisme gömülebileceğini göreceğiz. Tamsayılar cümlesi ile rasyonel sayılar cümlesi buna bir örnektir.

Dördüncü bölümde radikal, asal radikal ve jocobson radikali incelenmiştir.

Son bölüm ise Boole halkalarının incelenmesine ayrılmıştır.

SUMMARY

In this study we will introduce a commutative rings with identity and modules. These thesis consist of five chapters. Chapter I and Chapter II containsan introduction with the basic definition and theorems about subject. Chain conditions applies both of rings and modules.

In the chapter III whether integral domain is not field, we will see that ıt can embed to a field.

In the chapter IV we will introduce radical, prime radical and jacobson radical.

In the last chapter, Boole rings have been examined.

M O D Ü L L E R

BÖLÜM I

GİRİŞ I.I.

R birimli bir halka ve (M, +) değişmeli grup olsun. $r \varepsilon R$ ve $a \varepsilon M$

1) $ra \varepsilon M$

2) $(r+s)a = ra+sa$

3) $(rs)a = r(sa)$

4) $r(a+b) = ra+rb$

5) $1a = a$

ise M ye bir sol R-modül denir.

Burada

$\alpha: R \times M \to M$

$\alpha(r,a) = ra$ olup

ra elemanı r ve a nın modül çarpımı adını alır.

Eğer $R = F$ ise (F herhangi bir cisim) o taktirde bir sol R-modül F üzerinde bir vektör uzayıdır.

$(G, +)$ değişmeli grubu doğal bir biçimde bir sol Z-modül gibi düşünülebilir.

Yani,

$Z \times G \to G \qquad n \in Z \qquad a \in G$

$(n,a) \to na \qquad na = a + \ldots\ldots + a$

için yukarıdaki aksiyomlar sağlanır.

R bir halka ve I,R nin sol ideali olsun.

$\emptyset : R \times I \to I$

$\emptyset\,(r,x) \to rx$

R deki elemanların çarpımı olarak tarif edilirse, I bir R-modüldür.

Vektör uzaylarında olduğu gibi

1) $0_R . a = 0_R \qquad (A, +)$ nın özdeş elemanı 0_A

2) $0_A . r = 0_A \qquad (R, +)$ nın özdeş elemanı 0_R

3) $r(-a) = (-r)a = -(ra)$ $\forall r \in R$ ve $a \in M$ koşulları geçerlidir.

Tanım: 1)

Bir R-modül M'in baştan farklı alt kümesi N olsun.

1) (N, +) , (M, +) nın alt grubu

2) $\forall r \varepsilon R$ ve $a \varepsilon N$ için $ra \varepsilon N$

olması şartıyla N, M in R-alt modülüdür.

R-modül olan M açıkça iki aşikar altmodüle sahiptir.

Bunlar {0} ve M dir.

I.2 BÖLÜM MODÜLÜ

N, R-modül olan M in bir altmodülü olsun. M komutatif olduğundan $N \triangleleft M$ dir. M/N bölüm grubundan söz edebiliriz. Bu grubun elemanları $a \in M$ olmak koşulu ile $a+N$ kosetleridir.

$$M/N = \{a+N \mid a \in M\}$$

M/N de toplama işlemi

$$(a+N)+(b+N) = a+b+N \quad \text{dir.}$$

Çarpma işlemi ise

$$r(a+N) = ra+N \quad \text{dir.}$$

Bunun iyi tanımlı olduğu ((.) göre) gösterilmelidir.

$$r(a+N) = r(a'+N)$$

$$r(b+N) = r(b'+N)$$

$rab+N = ra'b'+N$ olduğu gösterilmelidir.

$ra+N = ra'+N \qquad ra \in ra'+N$

$rb+N = rb'+N \qquad rb \in rb'+N$

$ra = ra'+N_1$

$rb = rb'+N_2$

$rab = (ra'+N_1)(rb'+N_2)$

$rab = ra'b'+ra'N_2+rb'N_1+N_1N_2$

$rab-ra'b' = ra'N_2+rb'N_1+N_1N_2$

$rab+N = ra'b'+N$ 'dir.

Tanım : 1)

M ve N iki R-modül olsun.

$f: M \to N$ dönüşümü $\forall r \in R$ ve $a \in M$ için

1) $f: M \to N$ bir grup homomorfisi

2) $f(ra) = rf(a)$, $\forall r \in R$ ve $a \in M$ şartlarını sağlıyorsa, f'e R-modül homomorfizmi denir.

Eğer $R = F$ ise (F herhangi bir cisim) o takdirde R homomorfizmalarına M dan N'e lineer dönüşümler denir.

$R = F$ ise R-modül homomorfizmasına R-lineer dönüşümü denir.

Örnek: 1)

Bir R-modül olan M in altmodülü N olsun.

$Nat_N : M \to M/N$ bir R-homomorfisidir.

1) Nat_N bir grup homomorfisidir.

Gerçekten

$$Nat_N(a+b) = a+b+N$$

$$= a+N+b+N$$

$$= Nat_N(a)+Nat_N(b)$$

2) $f(ra) = rf(a)$

$Nat_N(a) = a+N$

$Nat_N(ra) = ra+N$

$= r(a+N)$

$= rNat_{N(a)}$

Örnek: 2)

Tamsayıların $(Z, +)$ grubu bir Z-modüldür.

$mZ = \{mn \mid n\varepsilon Z\}$ cümlesi bir altmodüldür.

Teorem: 1)

M bir R-modül ise ve M in bütün altmodüllerinin cümlesi $\{B_i \mid i\varepsilon I\}$ olsun.

Bu takdirde $A = \bigcap_{i\varepsilon I} B_i$ de M in bir altmodülüdür.

Gerçekten $x,y\varepsilon A$ ise her $i\varepsilon I$ için $x,y\varepsilon B_i$ olacağından $x-y\varepsilon B_i$ dir.

Dolayısıyla $x-y\varepsilon A$ dır. Benzer şekilde her $r\varepsilon R$ için $rx\varepsilon A$ dır.

Örnek: 3)

R halka $f: M \to N$ bir R-modül homomorfizmi

$Çek\ f = \{a\varepsilon M \mid f(a) = 0\}$ cümlesi M in bir altmodülüdür.

BÖLÜM II

ZİNCİR KOŞULLARI

S boş olmayan kısmı sıralı bir küme olsun. Eğer $x,y \epsilon T$ için $x \leqslant y$ veya $y \leqslant x$ oluyorsa S nin bir T alt kümesine zincir denir.

Σ, $\leqslant$ bağıntısı ile kısmı sıralanmış bir küme olsun. Σ üzerinde aşağıdaki koşullar denktir.

(i) Σ , her $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots.$ için artan zinciri durur.

($x_n = x_{n-1} = \ldots\ldots$ olan bir n vardır.)

(ii) Σ nin boş olmayan alt kümesinin bir maximal elemanı vardır.

Eğer Σ, bir M modülün $\subseteq$ bağıntısı ile sıralanmış altmodüllerinin kümesi ise o zaman (i) ye artan zincir koşulu denir. (ii) ye maximum koşul denir.

Bu iki denklem koşuldan birini gerçekleyen bir M modülüne artan zincir koşulunu sağlar denir.

Eğer, $\supseteq$ ile sıralanmış ise o zaman (i) azalan zincir koşulunu sağlar (ii) ye minimal koşul denir.

Tanım: 1)

A bir modül olsun. A nın altmodüllerinin $A_1 \subset A_2 \subset .....$ zinciri her $i \geqslant n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde n tamsayısı varsa A altmodüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlar denir.

B bir modül olsun. B nin altmodüllerinin $B_1 \supset B_2 \supset ...$ zinciri $\forall\, i \geqslant m$ için $B_i = B_m$ olacak şekilde m tamsayısı varsa, B altmodüller üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar denir.

Tanım: 2)

R nin her $I_o \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset .....$ sağ ideallerinin azalan dizisi sonlu bir adımda durursa R ye Artinian halka, R nin her $I_o \subset I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$ sağ ideallerinin artan dizisi sonlu bir adımda durursa R ye Noetherian halka denir.

Örnek: 1)

Z tamsayılar halkası Noetherian fakat Artinian değildir.

Z de ideallerinin artan bir dizisi $(n_1) \subset (n_2) \subset (n_3) \subset ...$ ise bu dizi sonlu bir adımda durmalıdır.

Çünkü $(n_i) \subset (n_j)$ ile n_j nin n_i yi bölmesi demektir. Eğer dizi sonlu bir adımda durmaz ise n_1'in sonsuz sayıda böleni olmalıdır. Bu ise hiçbir sonlu tamsayıda mümkün değildir.

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ 1937 KÜTÜPHANESİ

Diğer yandan

$$(2) \supset (4) \supset (8) \supset (16) \supset \ldots\ldots \supset (2^n) \supset \ldots\ldots$$

dizisi Z de sonlu bir adımda durmaz. Böylece Z tamsayılar halkası Noetherian fakat Artinian değildir.

Tanım: 3)

Bir altmodüller dizisinin terimleri arasına yeni altmodüller ekleyerek elde edilen yeni diziye ilk dizinin incelmiş dizisi denir.

Tanım: 4)

A bir R-modül olsun. A nın bir altmodüller dizisi $A_o \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = A$ olsun. Bu dizi daha fazla inceltilemez ise yani her i için A_i ile A_{i+1} arasına A nın herhangi bir alt modülü ilave edilemez ise diziye kompozisyon dizisi denir.

Tanım: 5)

A_R bir sağ R-modül olsun.

(i) A_R nin alt modüllerinin her topluluğunun minimal elemanı varsa A_R ye Artinian modül denir.

(ii) A_R nin altmodüllerinin her topluluğunun maximal elemanı varsa A_R ye Noetherian modül denir.

Teorem:1)

A_R bir R-modül olsun. Bu modül ancak ve ancak azalan zincir koşulunu sağlarsa Artiniandır.

Ispat:

A nın alt modüllerinin azalan dizisi $A_o \supset A_1 \supset A_2 \supset ..$ $A_n \supset ....$ ve bu dizide söz edilen A_i lerin topluluğu M ise M, A azalan zincir koşulunu sağladığından bir minimal A_t elemanı bulundurur. A_{t+1}, A_t içinde A_{t+2}, A_{t+1} içinde ve böyle devamla kapsandığı ve A_t de minimal olduğundan $A_t = A_{t+1} = A_{t+2}$ .... elde edilir ve dizi t. adımda durur.

A_R azalan zincir koşulunu sağlamış ve M de A nın altmodüllerinin bir topluluğu olsun. $A_o \varepsilon M$ alalım. A_o, M de minimal ise işlem durur. A_o minimal değilse M de A_o da kapsanan bir A_1 elemanı vardır. $A_1 \varepsilon M$ de minimal ise işlem durur. Minimal değilse M de A_1'in kapsadığı bir A_2 vardır. Böyle devam edilerek M in elemanlarından oluşan bir dizi $A_o \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset .....$ elde edilir.

Kabul gereği bu dizi bir yerde durmalıdır, sonlu bir t için

$$A_t = A_{t+1} = ...$$

Böylece M de aranan minimal eleman A_t dir.

II.I HOMOMORFİ İLE İLGİLİ SONUÇLAR

1) $f:M \to M'$ bir modül homomorfizmi ise Kerf, M in Imf, M' nün altmodülüdür

2) N ve N' bir M modülünün altmodülleri olsun. O taktirde N+N' de bir altmodüldür. ve

$$N/(N \cap N') \simeq (N+N')/N'$$

dir.(İkinci İzomorfizma Teoremi)

3) $M \supset M' \supset M''$ modüller ise o taktirde

$(M/M'' / (M'/M'') \simeq M/M'$ dir. (Üçüncü İzomorfizma Teoremi)

Eğer $f:M \to M'$ bir modül-homomorfizmi ve N', M' nün bir altmodülü ise bir kanonik homomorfizmaya sahibiz.

$$\bar{f} \; : \; M/f^{-1}(N') \longrightarrow M'/N'$$

$\bar{f}$ bir modül-izomorfizmidir.

4) $0 \to G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \to 0$

Imf = Ker g ise bu dizi tam'dır.

Burada f,1-1 ve g örtendir.

H, G nin altmodülü ise

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 0$$

vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[r, "g"] \arrow[d] & G'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$f : G \longrightarrow G'$ $\quad H' \lhd G'$ $\quad$ ve $\quad H = f^{-1}(H')$ $\quad$ olsun.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[d] \\
f^{-1}(H') \arrow[r] & H'
\end{tikzcd}
\qquad f^{-1}(H') \lhd G$$

$$G \longrightarrow G' \longrightarrow G'/H'$$

$\bar{f} : G/H \longrightarrow G'/H'$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H' \arrow[r] & G' \arrow[r] & G'/H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ izomorfizmadır.

BÖLÜM III

BİR TAMLIK BÖLGESİNİN KESİRLER CİSMİ

Q, rasyonel sayılar cismini Z tamsayılar halkasından elde ederken kullandığımız yöntemi herhangi bir A tamlık bölgesine kolayca genişletebiliriz. Böylece A nın kesirler cismini elde ederiz. Bu yöntemde a, $s \varepsilon A$ ve $s \neq 0$ olmak üzere bütün sıralı (a,s) ikilileri arasında;

$(a,s) \equiv (b,t) \leftrightarrow at - bs = 0$ denklik bağıntısı tanımlansın.

Bu ancak, A bir tamlık bölgesi ise geçerlidir. Çünkü bağıntının geçişken olduğu gösterilirken kısaltma yapılıyor. Yani A nın sıfırdan farklı sıfır bölenleri yoktur.

A bir halka olsun. A nın çarpımsal kapalı bir altkümesi denince $1 \varepsilon S$ ve S çarpma altında kapalı olmak üzere A nın bir S altkümesi anlaşılır.

Şimdi $A \times S$ de bir denklik bağıntısını şöyle tanımlayalım.

$(a, s) \equiv (b,t) \leftrightarrow at = bs$

bu bağıntının yansıyan, simetrik olduğu açıktır.

Geçişken olduğunu göstermek için;

$(a,s) \equiv (b,t)$ ve $(b,t) \equiv (c,u)$ alalım.

$at = sb \Rightarrow uat = usb$

$bu = tc \Rightarrow sbu = stc$

$uat = usb$

$stc = sbu$

$$uat-stc = \underbrace{usb-sbu}_{0}$$

$t(au-sc) = 0 \qquad t \neq 0 \qquad au-sc = 0$

$(a,s) \equiv (c,u)$ olur.

$\frac{a}{s}$, (a,s) nin denklik sınıflarını göstersin.

Denklik sınıflarının kümesi $S^{-1}A$ olsun.

$S^{-1}A$ da toplama işlemi;

$$\left(\frac{a}{s}\right) + \left(\frac{b}{t}\right) = \left(\frac{at+bs}{st}\right)$$

$S^{-1}A$ da çarpma işlemi;

$\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{t}\right) = \frac{ab}{st}$ şeklinde tanımlansın.

$S^{-1}A$ kümesi yukarıdaki (+) ve (.) işlemlerine göre bir halkadır.

Ayrıca $f(x) = \frac{x}{1}$ ile tanımlı bir $f: A \to S^{-1}A$ homomorfizması vardır.

Bunu ispatlamak için önce yukarıdaki toplama işleminin iyi tanımlı olduğu ispatlanmalıdır.

$S^{-1}A$ da toplama

$a/s + a'/s' = s'a+sa'/ss'$ şeklinde tanımlandı.

İyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$a/s = a'/s'$

$b/r = b'/r'$

$$\frac{ar+bs}{sr} = \frac{a'r'+b's'}{r's'}$$

$(ar+bs)r's' = (a'r'+b's')sr$

$arr's'-a'r'sr = b's'sr-bsr's'$

$arr's'-a'r'sr-b's'sr+bsr's' = 0$

$rr'(as'-a's)+ss'(br'-b'r) = 0$

$r,r' \varepsilon S \qquad s,s' \varepsilon S$

$rr' \varepsilon S \qquad ss' \varepsilon S$

$(as'-a's) = 0 \quad (br'-b'r) = 0$

Toplama iyi tanımlıdır.

Çarpmaya göre;

$ab/sr = a'b'/s'r'$

$abs'r' = a'b'sr$

$abs'r'-a'b'sr-br'a's+br'a's = 0$

$br'(as'-a's)+a's(br'-b'r) = 0$

Sonuçta çarpma iyi tanımlıdır.

$S^{-1}A$ halkası ve $f:A \to S^{-1}A$ homomorfizmi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) $s\varepsilon S \Rightarrow f(s)$, $S^{-1}A$ da birimseldir.

2) $f(a) \Rightarrow 0$ bir $s\varepsilon S$ için $as = 0$ dır.

3) $S^{-1}A$ nın her elemanı, bir $a\varepsilon A$ ve bir $s\varepsilon S$ için $f(a)f(s)^{-1}$ şeklindedir.

Sonuç:1)

Eğer $g: A \to B$

i) $s\varepsilon S \Rightarrow g(s)$, B de birimsel

ii) $g(a) \Rightarrow 0 \Rightarrow$ bir $s\varepsilon S$ için $as = 0$

iii) B nin her elemanı $g(a)g(s)^{-1}$ biçimde olacak şekilde bir homomorfizm ise o zaman tek bir $h:S^{-1}A \to B$ izomorfizmi vardır ve $g = hof$ olur.

$$\begin{tikzcd} g: A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$ ile tanımlı

$h: \; S^{-1}A \to B$ dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu göstereceğiz.

h örtendir ve h nin 1-1 olduğunu göstermek için çekirdeğine bakalım.

Eğer $h(\frac{a}{s}) = 0$ ise $g(a) = 0$ dır.

O halde (ii) den bir $t \varepsilon S$ için $at = 0$ ve böylece $(a,s) \equiv (0,1)$ bulunur. Yani $S^{-1}A$ da $\frac{a}{s} \equiv 0$ dır.

Tanım 1)

B bir halka ve A, B nin bir althalkası olsun. $a_i \varepsilon A$, $c \varepsilon B$ için

$$c^n + a_1 c^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_n = 0 \quad \text{ise}$$

$c \varepsilon B$ ye A da tamdır denir.

Tanım 2)

$f: A \to B$ bir halka homomorfisi olsun (A,B değişmeli halka)

Eğer B, f(A) üzerinde tam ise f'ye tam ve B ye tam A-cebir denir.

$f: A \to B$ ve $g: B \to C$ tam ise o taktirde $gof: A \to C$ tamdır.

Önerme 1.

$g: A \to B$ her $s \varepsilon S$ için $g(s)$, B de birimsel olacak şekilde bir homomorfi olsun. O zaman $g = hof$ olacak şekilde tek bir $h: S^{-1}A \to B$ homomorfisi vardır.

Teklik:

Eğer h koşulları sağlanırsa, o zaman her $a \varepsilon A$ için

$$h(\frac{a}{1}) = hf(a) = g(a) \quad \text{olur.}$$

Böylece $s \varepsilon S$ ise

$$h(\frac{1}{s}) = h(\frac{s}{1})^{-1} = g(s)^{-1}.$$

O halde

$$h(\frac{a}{s}) = h(\frac{a}{1}).h(\frac{1}{s})$$

$$= g(a)g(s)^{-1}$$

Bu yüzden h,g ile tek olarak tanımlanır.

ii) Varlık $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$ olsun. O zaman iyi tanımlı homomorfizm olacaktır.

Şimdi $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ olsun. O halde

$(as'-sa')t = 0$ olacak şekilde $t \varepsilon S$ vardır.

$$(g(a)g(s')-g(s)g(a'))g(t) = 0$$

olur. $g(t)$, B de birimseldir.

$$g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1} \quad \text{elde edilir.}$$

$f: A \to B$ tam olsun. S de A nın çarpımsal alt kümesi olsun. O taktirde $S^{-1}f: \quad S^{-1}A \to S^{-1}B$ homomorfisi vardır.

$(S^{-1}f)(x/s) = f(x)/f(s)$ ile tanımlanır.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & S^{-1}B \\
A \arrow[u] \arrow[r] & S^{-1}A \arrow[u, "S^{-1}f"']
\end{tikzcd}$$

Önerme 2.

f: $A \to B$ tam ve S,A nın çarpımsal altkümesi olsun. O taktirde $S^{-1}f: S^{-1}A \to S^{-1}B$ tamdır.

Ispat:

$x \varepsilon B$ ve $a_i \varepsilon A$ için

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n = 0$$ olur.

$$\frac{x}{s} \varepsilon S^{-1}B \quad (x \varepsilon B,\ s \varepsilon S)$$

Yukarıdaki eşitlikten

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n + \left(\frac{a_1}{s}\right)\left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_n}{s_n} = 0$$ dır.

$\frac{x}{s}$, $S^{-1}A$ da tamdır.

Teorem 1)

Eğer $A \subseteq B \subseteq C$ halkalar ve B, A da tam C, B de tam ise o zaman C, A da tamdır.

Tanım 3)

A bir halka olmak üzere, katsayıları A dan alınan bir f(x) polinomu

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

şeklinde bir sonsuz toplamdır. Öyle ki $a_j \varepsilon A$ lara f(x) polinomunun katsayıları ve x'e belirsiz veya değişken adı verilir.

A üzerinde bütün tek değişkenli polinomların cümlesi $A[x]$ ile gösterilir.

Önerme 3. Aşağıdakiler denktir.

1) $x \varepsilon B$, A da tamdır.

2) $A[x]$ sonlu üretilmiş A-modüldür.

Sonuç 2.

A da tam olacak şekilde B nin x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ elemanlarını alalım. O zaman $A[x_1 \ldots x_n]$ halkası sonlu üretilmiş bir A-modüldür.

Ispat:

n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için doğru olduğunu biliyoruz. $n > 1$ ve $A_r = A[x_1 \ldots\ldots x_r]$ alalım. O zaman tümevarıma göre A_{n-1} sonlu üretilmiş bir A-modüldür. x_n, A_{n-1} de tam olduğu için $n = 1$ durumundan $A_n = A_{n-1}[x_n]$ sonlu üretilmiş bir A_{n-1} modüldür. A_n bir A-modül olarak sonlu üretilmiş olur.

Önerme 4)

$A \subseteq B$ tamlık bölgeleri ve B, A da tam olsun. B cisimdir $\Leftrightarrow$ A cisimdir.

Ispat:

A bir cisim olsun. $y \varepsilon B$, $y \neq 0$ alalım, ayrıca,

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0 \quad (a_i \varepsilon A)$$

B tamlık bölgesi olduğu için $a_n \neq 0$ dır. Dolayısıyla

$$y^n y^{-1} + a_1 y^{n-1} y^{-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n y^{-1} = 0$$

$$a_n^{-1}(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \ldots\ldots + a_n y^{-1}) = 0$$

$$y^{n-1} a_n^{-1} + a_1 a_n^{-1} y^{n-2} + \ldots + y^{-1} = 0$$

$$y^{-1} = -a_n^{-1}\,(y^{n-1}+a_1y^{n-2}+\ ......+a_{n-1})\varepsilon B$$

böylece B cisimdir.

Tersine B bir cisim olsun. $x\varepsilon A$, $x \neq 0$ alalım. O zaman $x^{-1}\varepsilon B$ olur.

B, A da tam olduğundan,

$$x^{-m} + a_1'\, x^{-m+1} + \ ......\ + a_m' = 0 \qquad (a_i'\varepsilon A)$$

olur. Buradan

$$x^{m-1}(x^{-m}+a_1 x^{-m+1}+\ ......+ a_m') = 0$$

$$(x^{-1}+a'_1+a'_2 x+\ .....+ a_m' x^{m-1}) = 0$$

$$x^{-1} = -(a_1'+ a_2'x +\ ....+ a_m'x^{m-1})\varepsilon A$$

dan A bir cisimdir.

Tanım: 4)

S değişmeli ve birim elemanlı bir halka ve R, S nin 1_s'i içeren bir alt halkası olsun. O taktirde S'ye R nin halka genişlemesi denir.

Örnek: 1)

Çift tamsayılar kümesi E , Z tamsayılar kümesinin bir althalkasıdır.

1) $E \neq \emptyset$ $(2,4,6 \varepsilon E)$

$m,n \varepsilon Z$ olmak üzere $2m, 2n \varepsilon E$ $E \neq \emptyset$ dır.

2) $2m, 2n \varepsilon E$

$2m-2n = 2(m-n) \varepsilon E$

3) $(2n)(2m) = 4nm \varepsilon E$

E, 1'i içermediğinden Z,E nin bir halka genişlemesi-değildir.

Tanım 5)

S nin her elemanı R üzerinde tam ise S, R nin bir tam genişlemesidir denir.

$r \varepsilon R$ elemanı, $x-r$ $R[x]$ in kökü olduğundan |R halkası kendisi üzerinde tamdır. Z nin |R genişlemesinde

$\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2 - \frac{1}{3}$ 'ün bir kökü olduğundan, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, Z üzerinde cebirseldir, fakat $\frac{1}{\sqrt{3}}$, Z üzerinde tam değildir.

Çünkü $x^2 - \frac{1}{3}$ teki $\frac{1}{3}$ katsayısı Z in elemanı değildir.

Bununla birlikte $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2 - \frac{1}{3}$ ün bir kökü olduğundan Q rasyonel sayılar cismi üzerinde tamdır.

BÖLÜM IV

PRIMARY İDEALLER VE RADİKALLER

Tanım: 1)

I, R halkasının bir ideali olsun. I nın radikali $\sqrt{I}$ ile gösterilip

$$\sqrt{I} = \{a \varepsilon R \mid a^n \varepsilon I, \quad n > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Z halkasında,

$$\sqrt{(12)} = \sqrt{(12)} = \sqrt{(2^2)(3)} = (2)\ (3) = (6)$$

$$\sqrt{(4)} = \sqrt{(2^2)} = (2)$$

$$\sqrt{(32)} = \sqrt{(32)} = \sqrt{2^5} = (2)$$

Teorem: 1)

1) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

2) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

3) $k > 0$ ve $I^k \subseteq J$ ise $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$

Ispat:

1) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

$a \varepsilon \sqrt{\sqrt{I}}$ ise $a^k \varepsilon \sqrt{I}$ $(a^k)^m \varepsilon I$

$a^{km} \varepsilon I$, $km \varepsilon Z$

$a \varepsilon \sqrt{I}$ $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$ 1

$\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$ 2 tanımdan

1 ve 2 den $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq = \sqrt{I}$ dır.

2) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

$a \varepsilon \sqrt{IJ}$ olsun. $a^n \varepsilon IJ \subseteq I \cap J$

$a \varepsilon \sqrt{I \cap J}$

$a \varepsilon \sqrt{I \cap J}$ $a^n \varepsilon I$ ve $a^n \varepsilon J$ => $a \varepsilon \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

$a \varepsilon \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ olsun.

$a^m \varepsilon I$, $a^n \varepsilon J$

$a^{m+n} = a^m . a^n \varepsilon IJ$

$a \varepsilon \sqrt{IJ}$

3) $k > 0$ ve $I^k \subseteq J$ ise $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$

$I^k = I \;........ I$

$a \varepsilon \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$

$a^m \varepsilon I$

$a^{mk} = (a^m .... a^m)^k \;\varepsilon I^k \subseteq J$

$a^{mk} \varepsilon J$ $a \varepsilon \sqrt{J}$ olur.

Teorem: 2)

$\sqrt{I}$, R halkasının bir idealidir.

Ispat:

1) $a-b\varepsilon\sqrt{I}$

2) $ra\varepsilon\sqrt{I}$

1) $a,b\varepsilon\sqrt{I}$ olsun. Buradan

$a^n\varepsilon I$, $b^m\varepsilon I$ olur.

$(a-b)^{n+m} = \binom{n+m}{k} a^{m+n-k} \quad b^k\varepsilon I$ olduğundan

$k \geqslant m$ ise $b^m.b^{k-m}\varepsilon I$ $b^m\varepsilon I$ olduğundan

$b^k\varepsilon I$ olur.

$k \leqslant m$ $m+n-k > m+n-m = n$

$a^n\varepsilon I$ olduğundan $a^{m+n-k}\varepsilon I$ olur.

2) $(ra)^n\varepsilon I$

$(ra)^n = r^n a^n\varepsilon I$ $ra\varepsilon\sqrt{I}$ olur.

Tanım: 2)

Q, değişmeli R halkasının bir ideali olsun. Herhangi $a,b \in R$ için

$ab \in Q$ ve $a \notin Q$ iken $b^n \in Q$ ($n \geq 0$) ise Q ya primary ideal denir.

Örnek:1)

Her asal ideal açıkça primarydir.

$ab \in Q$ ve $a \notin Q$ ise $b \in Q$ olur.

Teorem:3)

Q değişmeli R halkasında primary ideal ise o taktirde $\sqrt{Q}$ asal idealdir.

İspat: $ab \in \sqrt{Q}$ ve $a \notin \sqrt{Q}$ kabul edelim. O taktirde

$a^n b^n = (ab)^n \in Q$ olur. $a \notin \sqrt{Q}$ olduğundan $a^n \notin Q$ olmalıdır. Q primary olduğundan $(b^n)^m \in Q$ olacak şekilde $m > 0$ tamsayısı vardır.

Buradan $b^{nm} \in Q$ ise $b \in \sqrt{Q}$ olur.

$ab \in \sqrt{Q}$, $a \notin \sqrt{Q}$ veya $b \in \sqrt{Q}$ ise $\sqrt{Q}$

asal idealdir.

Teorem: 4)

Y ve P, A halkasında idealler olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa Y primary ve P, onun radikalidir.

1) $Y \subset P$

2) $b \varepsilon P$ ise o taktirde $b^m \varepsilon Y$

3) $ab \varepsilon Y$ ve $a \notin Y$ ise $b \varepsilon P$ dır.

Ispat:

İlk olarak, Y nin primary olduğunu gösterelim.

$ab \varepsilon Y$, $a \notin Y$ ise $b^n \varepsilon Y$

olduğunu göstermeliyiz.

$ab \varepsilon Y$ $a \notin Y$ $b \varepsilon P \subset \sqrt{Y}$

$b \varepsilon \sqrt{Y}$ $b^n \varepsilon Y$ olur.

Bu yüzden Y primarydir.

Y nin, P nin radicali olduğunu göstermek için $P = \sqrt{Y}$ olduğunu göstermek yeterdir.

(1 ve 2 den)

$P \subset \sqrt{Y}$ dir (x)

$b \varepsilon \sqrt{Y}$ ise $b^n \varepsilon Y$ olacak şekilde n tamsayısı vardır.

$n = 1$ ise $b \varepsilon Y \subset P$ $b \varepsilon P$ olur.

$n > 1$ kabul edelim.

$b^{n-1} b = b^n \varepsilon Y$

$b^{n-1} \not\varepsilon Y$ olmak koşulu ile (3) den $b \varepsilon P$ dir.

Böylece $b \varepsilon \sqrt{Y}$ den

$\sqrt{Y} \subset P$ olur (x x)

(x) ve (x x) dan $\sqrt{Y} = P$ dir.

Teorem:5)

I nın maximal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a \not\in I$ için $(I,a) = R$ olmasıdır.

Sonuç 1)

M bir R halkasının maximal ideali ise M^n bir primary idealdir.

Ispat: Teorem (4) ün 3 üncü koşulundan $ab \varepsilon M^n$ ve $a \not\varepsilon M$ yazılır.

M maximal ideal olduğundan Teorem 5 den $(M,a) = R$ yazılır. R birimli bir halka olduğundan

$$1 = m+ra$$

$$1 = (m+ra)^n$$

$$1 = (m^n+r'a)$$

$$b = bm^n+r'ab \qquad r'\varepsilon R$$

$$b = bm^n+r'ab$$

$b\varepsilon M^n$ olur ve M^n primary idealdir.

Tanım:3)

I, R halkasının bir ideali ve P de R nin bir asal ideali olsun. $I\subseteq P$ ve bir P' için $I\subseteq P'\subset P$ mümkün değilse P ye I nın en küçük asal ideali denir.

Tanım:4)

R de bir ideal I olsun. n pozitif bir tamsayı ve I nın n kere çarpımı sıfır ideal, $I^n = (0)$ ise I' ya nilpotent ideal denir.

Teorem:6)

I, R halkasının bir ideali olsun. I, ancak ve ancak R/I bölüm halkasının hir sıfır böleni nilpotent ise primarydir.

Ispat:

I, R nin bir primary ideali ve $a+I$, R/I nın bir sıfır böleni olsun.

$(a+I)(b+I) = I$ olacak şekilde $b+I \neq I$ koseti vardır.

$(a+I)(b+I) = I$

$ab+I = I$

$ab \varepsilon I$ ve $b+I \neq I$ olduğundan

$b \notin I$ dır. I primary olduğundan

$a^n \varepsilon I$ olmalıdır.

$(a+I)^n = a^n+I = I$ dır.

$(a+I)$ nilpotenttir.

R/I nın herhangi bir sıfır böleni nilpotent kabul edilsin. R/I nın sıfır böleni $a+I$ olsun.

$(a+I)(b+I) = I$ olacak şekilde

$b+I \neq I$ koseti vardır.

Sıfır bölen nilpotent olduğundan $(a+I)^n = I$ olur.

$ab \in I$, $b \notin I$ $a^n \in I$ dır.

ve I primarydir.

Teorem:7)

$Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_n$ primary ideal ve $\sqrt{Q_i} = P$ ise o taktirde $Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ de $\sqrt{Q} = P$ olmak koşulu ile primary idealdir.

Ispat:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} Q_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{Q_i} = \bigcap P = P$$

Q_i komutatif R halkasında primary ideal ise o taktirde $\sqrt{Q_i}$ asal idealdir.

R/Q bölüm halkasının sıfır böleni $a+Q$ olsun.

$(ab+Q) = (a+Q)(b+Q) = Q$

olacak şekilde $b+Q \neq Q$ koseti vardır.

$b+Q \neq Q$ dan

$b \notin Q = \bigcap Q_i \qquad b \notin Q_i$

Q_i primary ideal olduğundan,

$ab \varepsilon Q_i \qquad b \notin Q_i \qquad a^n \varepsilon Q_i$

$a \varepsilon \sqrt{Q_i} = P = \sqrt{Q}$

$a \varepsilon \sqrt{Q} \qquad a^n \varepsilon Q$

$(a+Q)^n = a^n + Q = Q$

$a+Q$ nilpotenttir.

Q,R nin bir primary idailidir.

Tanım:5)

Değişmeli bir R halkasının ideali I olsun. Her bir Q_i primary olmak koşulu ile $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots\ldots \cap Q_n$ ise I, bir primary ayrışıma sahiptir. Eğer hiçbir Q_i, $Q_1 \cap \ldots\ldots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \ldots\ldots\ldots \cap Q_n$ içermezse ve Q_i nin radikalleri farklı ise o taktirde primary ayrışım indirgenmiştir denir.

R de bir I idealinin primary ayrışımı I nın primary ideallerin sonlu bir arakesiti olarak yazılışıdır, yani

$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ dir.

Ayrıca

1) Bütün $rad(Q_i)$ ler birbirinden farklı

2) $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j\neq i} Q_j \qquad (1 \leq i \leq n)$

sağlanıyorsa $I= \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ primary ayrışıma indirgenmiş denir.

Tanım:6)

R birimli, değişmeli halka ve B bir R-modül olsun. B nin bir A altmodülü $r\varepsilon R$, $b\notin A$ ve $rb\varepsilon A \Rightarrow r^n B \subset A$ olması şartıyla primarydır.

Tanım:7)

Bir R halkasının Jacobson radikali radR ile gösterilir.

$radR = \bigcap \{M | M$, R nin bir maximal idealidir$\}$

Eğer $radR = \{0\}$ ise o taktirde R ye Jacobson radikalsiz halka yada yarı basit halka denir.

Birimli ve değişmeli halka en az bir maximal ideale sahip olduğundan daima Jacobson radikali vardır.

Teorem:8)

Herhangi bir R halkasında a elemanı ancak ve ancak her $r \in R$ için 1-ra tersinir ise rad R nin elemanıdır.

Sonuç:2)

Bir a elemanı, ancak ve ancak $a+radR$, $R/radR$ bölüm halkasında tersinir ise R halkasında tersinirdir.

İspat:

$a+radR$, $R/radR$ de bir inverse sahip olsun.

$(a+radR)(b+radR) = 1+radR$

$1-ab \in radR$

Bir önceki teoremde $r = 1$ alınırsa

$ab = 1-1(1-ab)$ den ab tersinirdir ve a elemanı R de bir inverse sahip olur.

Sonuç:3)

R nin her nilideali radR da bulunur.

Ispat:

N, R nin nilideali olsun. $a\varepsilon N$ alalım. Her $r\varepsilon R$ için $ra\varepsilon N$ dir. Böyle ra çarpımı nilpotenttir. ra, R halkasında nilpotent eleman olduğundan 1-ra, R de tersinirdir ve $a\varepsilon rad\ R$ olur. $N \subseteq radR$ dir.

Teorem:9)

rad R de idempotent eleman sadece 0 dır.

Ispat:

$a^2 = a$ olmak koşulu ile $a\varepsilon radR$ olsun. 1-a, R de bir inverse sahiptir.

$(1-a)b = 1 \quad b\varepsilon R$

$a(1-a)b = (a-a^2)b = 0 \quad a = 0$ dır.

Teorem:10)

Herhangi bir R halkası için R/radR bölüm halkası yarı basittir yani $rad(R/radR) = \{0\}$ dır.

Ispat:

rad R yi I ile gösterelim. $a-I\varepsilon radR/I$ olmak üzere, göstermek istediğimiz $a+I = I$ için $a\varepsilon I$ olduğudur.

$a+I$, $rad(R/I)$ nın elemanı olduğundan

$(1+I)-(r+I)(a+I) = 1-ra+I$

R/I da tersinirdir.

$(1-ra+I)(b+I) = (1+I)$ olacak şekilde $b+I$ koseti vardır.

$$(1-ra+I)(b+I) = 1+I$$

$$1-(b-rab) \varepsilon I = radR$$

$$b-rab = 1-1(1-b+rab)$$

R de bir c inversine sahiptir.

$$(1-ra)bc = (b-rab)c = 1$$

Şöyle ki

$(1-ra)$, R de bir çarpımsal inverse sahiptir.

Buradan $a \varepsilon radR = I$ bulunmuş olur.

Teorem:11)

R birimli bir halka olsun. R nin her maximal ideali asal idealdir.

Ispat:

M bir maximal ideal olsun. M in maximal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a \notin M$ için $(M,a) = R$ olmasıdır.

$1 = m+ra$

$b = \underbrace{bm}_{\varepsilon m}+\underbrace{bra}_{\varepsilon m}$

$b\varepsilon \bar{m}$ bulunur ve M asal idealdir.

Tanım:8)

R bir halka olsun. R nin asal ideallerinin arakesitine asal radikal denir.

$P(R) = \bigcap\{P;\ P\ ,\ R \text{ de asal ideal}\}$

Eğer $P(R)=\{0\}$ ise R halkasına asal radikalsiz yada sıfır asal radikaline sahiptir denir.

BÖLÜM V

BOOLE HALKALARI

X bir küme, R, X'in bütün alt kümelerinin topluluğu olsun. $a,b \in R$ için

$a+b = a \Delta b = (a \cup b)/(a \cap b) = a$ ile b nin simetrik farkı,

$ab = a \cap b = a$ ile b nin arakesiti olarak R üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. R nin bir halka olduğu aşikardır. R in birimi X in kendisi, sıfırı $\emptyset$ kümedir. Herhangi bir a elemanı için $a^2 = a.a = a \cap a = a$ dan R nin her elemanı idempotent olacaktır.

$ab = a \cap b = b \cap a = ba$ dan da R nin değişmeli olacağı sonucu çıkar. Böyle kurulan $R^{\cdot}$ halkasına X in alt kümeleri halkası denir.

Tanım:1)

Her elemanı idempotent olan halkaya Boole halkası denir.

Teorem: 2)

Her boole halkası değişmelidir.

Ispat:

$a,b \in R$ ve R boole halkası olsun.

$a+b = (a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2 = a+ab+ba+b$ den

$$ab+ba = 0 \qquad (1)$$

elde edilir. (1) her a,b için doğru olduğundan

$$a+a = aa+aa = 2a = 0 \qquad (2)$$

(2) den her a için

$$a = -a \qquad (3)$$

(1) ve (3) den

$ab = -(ba) = ba$ olur ki

bu da R nin değişmeli olması demektir.

KAYNAKÇA

1) Thomas Hungerford. Algebra.Springer Werlag (1974)

2) David M. Burton. A.First Course In rings and İdeals. Addıson-Wesley series in mathematıcs (1970)

3) Serge Lang. Algebra. Addıson-wesley Publishing Company (1984)

4) Hıdeyukı Matsumura. Commutative ring Theory.Cambridge Unıversıty Press (1980)

5) Mustafa Bayraktar. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Atatürk Üniversitesi (1988)

6) M.F.Atiyah, I.G. Macdonald H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi (1980)

7) Doç.Dr.Abdullah HARMANCI. Cebir II. Hacettepe Üniversitesi Basımevi (   )

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ 1937 KÜTÜPHANESİ