YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# Örtü Uzayları

Yüksek Lisans Tezi

Ertuğrul Yazıcı
Örtü Uzayları

1991

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÖRTÜ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERTUĞRUL YAZICI

İSTANBUL 1991

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÖRTÜ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERTUĞRUL YAZICI



İSTANBUL 1991

# ÖZET

Bu çalışmada örtü Uzayı teorisi incelendi. X ,bir topolojik uzay olmak üzere, X in bir örtü uzayı, bir $\tilde{X}$ uzayı ve $\tilde{X}$'in X üzerine sürekli bir p tasvirinden oluşur. örtü uzayının bu tanımı ile ilgili bazı örnekler verildi.

Örtü uzayı teorisi incelenirken, tüm uzaylar yay bağlantılı ve yerel yay bağlantılı kabul edildi.

Kısımların hepsi bir çok örnekle desteklendi. Sonuçta, Örtü uzayı için varlık teoremi incelendi.



Yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Hamit AVCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖRTÜ UZAYLARI

## S U M M A R Y

In this study, the theory of covering space is examined. Let X be a topological space: a covering space of X consists of a space $\tilde{X}$ and a continuous map p of $\tilde{X}$ onto X. More over some examples related to the definition of covering space is given in this study.

While the theory of covering space is examined, It is admitted that all spaces are arcwise connected and locally arcwise connected.

All of the sections are supported with many examples.In conclusion, existance theorem for covering space is examined.

# ÖRTÜ UZAYLARI

## 1.Giriş

X bir topolojik uzay olmak üzere, X'in bir örtü uzayı, bir $\tilde{X}$ uzayı ve $\tilde{X}$'nin X üzerine sürekli bir p tasvirinden oluşur. kesin tanımı aşağıda vereceğiz. örtü uzaylarının teorisi sadece topolojide önemli değil aynı zamanda diferansiyel geometri,Lie grupları teorisi,Riemann yüzeyleri teorisi gibi ilişkili disip_linlerde de önemlidir.

örtü uzayının teorisi,temel grubun incelenmesiyle ya_kından bağlantılıdır.örtü uzayları hakkındaki bir çok temel topo_lojik sorun,çeşitli uzayların temel grupları hakkındaki sırf ce_birsel sorunlara indirgenebilir.

## 2. örtü uzaylarının tanımı ve bazı örnekleri

Bu çalışmada aksi söylenmedikçe,tüm uzayların yay bağlantılı olduklarını kabul edeceğiz Bundan böyle bu kabulü tek_rarlamadan koruyacağız.İlgilendiğimiz uzayların herhangi bir ayır_ma aksiyomunu sağladığını kabul etmek gerekmez.

Tanım. X bir topolojik uzay olsun. X'in bir örtü uzayı bir $\tilde{X}$ uzayı ve aşağıdaki koşullar geçerli olacak şekilde sürekli bir $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ tasvirin-den oluşan bir ikilidir: her bir $x \in X$ nok_tası, $p^{-1}(U)$ nun her bir yay bileşeni p tarafından U üzerine topo_lojik olarak tasvir edilecek şekilde yay bağlantılı açık bir U komşuluğuna sahiptir. ( özellikle, $p^{-1}(U)$ nun boş olmadığını kabul ediyoruz). yukarıda ifade edilen koşulu sağlayan herhangi bir açık U komsuluğu bir elamenter komsuluk adını alır. p tasvirinede ge_nellikle bir izdüşüm adı verilir.

Bu tanımı açıklamak için bir çok örnek vereceğiz. Bu ör_nekler örtü kavramı için kesin ve formel bir incelemeden daha ya_ rarlıdır.

Örnekler.

2.1. $p: R \longrightarrow S^1$, herhangi bir $t \in R$ için $p(t) = (\sin t, \cos t)$ şeklinde tanımlanmıs olsun. bu taktirde $(R, p)$ ikilisi, $S^1$ birim çemberinin bir örtü uzayıdır. $S^1$ çemberinin herhangi bir açık alt aralığı bir elemanter komşuluk olarak alınabilir. Bu, en basit ve en önemli örneklerden biridir.

2.2. $R^2$ düzleminde $(r, \Theta)$ kutupsal koordinatları gözönüne alalım. O taktirde $S^1$ birim çemberi $r=1$ koşuluyla tanımlıdır. Pozitif ya da negatif herhangi bir n tam sayısı için

$$p_n(1, \Theta) = (1, n\Theta)$$

denklemiyle bir $p_n : S^1 \longrightarrow S^1$ tasviri tanımlansın. $p_n$ tasviri, çemberi kendi etrafında n kez sarar. eğer $n \neq 0$ ise, $(S, p_n)$ ikilisi, $S^1$'in bir örtü uzayıdır. Yine $S^1$'deki herhangi bir öz açık aralık bir elemanter komşuluktur.

2.3. Eğer X herhangi bir uzay ve $i: X \longrightarrow X$ özdeşlik tasvirini gösterirse, o zaman $(X, i)$ ikilisi X' in bir örtü uzayının apaçık bir örneğidir. Benzer şekilde eğer f, Y nin X üzerine bir homeomorfizması ise, o zaman $(Y, f)$, yine oldukça apaçık bir örnek olarak, X in bir örtü uzayıdır. Bu çalışmanın sonunda, eğer X basit bağlantılı ise, o zaman X in herhangi bir örtü uzayının bu apaçık örtü uzaylarından biri olduğunu göstereceğiz. Böylece örtü uzaylarının apaçık olmayan örneklerine sadece basit bağlantılı olmayan uzaylar halinde rastlanabilir.

2.4. Eğer $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ve $(\tilde{Y}, q)$, Y'nin bir örtü uzayı ise, o zaman $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$, $X \times Y$ nin bir örtü uzayıdır [$p \times q$ tasviri $(p \times q)(x, y) = (px, qx)$ şeklinde tanımlanır].

Eğer $U$, $x\in X$ noktasının bir elemanter komşuluğu ve $V$, $y\in Y$ noktasının bir elemanter komşuluğu ise, o zaman $U\times V$ de $(x,y)\in X\times Y$ nin bir elemanter komşuluğudur.

Bu sonuç ve 2.1 ve 2.2 örnekleri gözönüne alınarak, $T=S^1\times S^1$ torunun örtü uzaylarının örnekleri kurulabilir. $R^2=R\times R$ düzlemi, $R\times S^1$ silindiri ya da torun kendisi torun bir örtü uzayı olarak verilebilir.

2.5. $P$ izdüşüm düzlemi 2-boyutlu $S^2$ küresinin bir bölüm uzayı olarak tanımlanabilir. $p:S^2 \longrightarrow P$, doğal tasviri göstersin. O taktirde $(S^2,p)$, $P$ nin bir örtü uzayıdır. $x$, i içeren açık bir disk, herhangi bir $x\in P$ noktasının bir elemanter komuşuluğu olarak alınabilir.

2.6. $X$, bir noktada teğet olan iki çemberden oluşan düzlemin bir altkümesi olsun:

$$C_1=\{\ (x,y)\ |\ (x-1)^2+y^2=1\ \},$$

$$C_2=\{\ (x,y)\ |\ (x+1)^2+y^2=1\ \}.$$

$$X=C_1\cup C_2.$$

$X$, in örtü uzaylarının iki farklı örneğini verecegiz. İlk örnek için, $\tilde{X}$, $x$ ya da $y$ (ya da her ikisi) bir tamsayı olacak şekilde tüm $(x,y)\in R^2$ noktalarının kümesi olsun. Burada $\tilde{X}$ yatay ve düşey doğruların birleşimidir. $p:\tilde{X}\longrightarrow X$,

$$p(x,y)=\begin{cases}(1+\cos(\pi-2\pi x),\ \sin 2\pi x) & \text{eğer } y \text{ birtamsayı ise}\\ (-1+\cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y) & \text{eğer } x\text{bir tamsayi ise}\end{cases}$$

formülü ile tanımlansın. $p$ tasviri herbiryatay doğruyu $C_1$ etrafında ve her bir düşey doğruyu $C_2$ etrafında sarar.

İkinci örnek için, $D_n$ pozitif, negatif ya da sıfır olan herhangi bir $n$ tamsayısı için $\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y-3n)^2 = 1\}$ çemberi olsun ve $L$, $\{(x,y) \mid x=0\}$ düşey doğrusunu göstermiş olsun. $D_n$ çemberleri ikişerli ayrıktır ve her biri $L$ doğrusuna teğettir.

$$\tilde{X}' = L \cup \left( \bigcup_{n\in Z} D_n \right)$$

ve $p':\tilde{X}' \longrightarrow X$ aşağıdaki şekilde tanımlansın: $p'$, her bir $D_n$ çemberini tamamının bir ötelemesiyle $C_1$ üzerine homeomorfik olarak tasvir etmiş olsun. $p'$, $L$ doğrusunu

$$p'(0,y)=\left(-1+\cos\frac{2\pi y}{3},\ \sin\frac{2\pi y}{3}\right)$$

formülüne göre $C$ çemberi etrafına sarmış olsun. Bu taktirde, $(\tilde{X}',p')$, $X_2$ in bir örtü uzayıdır.

2.7. Burada basit bir örneği kompleks fonksiyonlar teorisinden verelim. Herzaman olduğu gibi

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ifadesi üstel fonksiyonu göstersin. Burada $z$ herhangi bir kompleks sayıdır. Üstel fonksiyon bir tasvir olup, $\exp:C \longrightarrow C-\{0\}$ dir. (Burada $C$ kompleks düzlemdir). $(C,\exp)$ 'nin $C-\{0\}$'ın bir örtu uzayı olduğunu ve herhangi bir $z\in C-\{0\}$ için $U_z=\{W\in C \mid |W-z|<|z|\}$ açık diskinin bir elamenter komşuluk olduğunu iddia ediyoruz. Bunu ispatlamak için, $U_z$ nin ters görüntüsünün herhangi bir $V$ bileşeninin exp vasıtasiyle $U_z$ üzerine homeomorfik olarak tasvir edildiğini göstermek istiyoruz. Yani herhangi bir $W\in U_z$ için,

$$\exp[\, f(W)\, ] = W$$

ve herhangi bir $v \in V$ için

$$f(\exp v) = v$$

olacak şekilde sürekli bir $f:U_z \longrightarrow V$ fonksiyonun varolduğunu göstermek istiyoruz. Böyle bir f fonksiyonu, kompleks değişkenli kitaplarda " $U_{-z}$ diskinde logaritma fonksiyonun bir kolu "adını alır.

Eğer $z=x+iy$ ise, o zaman $\exp z=(\exp x)(\cos y+i\sin y)$ olduğu biliniyor. Burada $\exp x=e^{x}$ ifadesi alışılmış reel üstel fonksiyonu yani $\exp:R\longrightarrow\{t\in R\,|\,t>0\}$ fonksiyonunu ifade eder. Bu formülden aşağıdaki sonuç çıkar. $C=RxR$ ve $C-\{0\}=\{r\in R\,|\,r>0\}xS^{1}$ gözönune alınabilir (kutupsal koordinatlarla). Buna göre $\exp:C\longrightarrow C-\{0\}$ tasviri bir $pxq:RxR\longrightarrow\{r\in R\,|\,r>0\}xS^{1}$ tasviri olarak gözönüne alınabilir. Burada $p(x)=e^{x}$ ve $q(y)=(\cos y, \sin y)$ dir

Tanım. Sürekli bir $f:X\longrightarrow Y$ tasviri, eğer $f(V)$ açık ve $f,V$ yi $f(V)$ üzerine topolojik olarak tasvir edecek şekilde herbir $x\in X$ noktasının açık bir $V$ komşuluğu varsa, bir yerel homeomorfizmadır. Buda eğer $(\tilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı ise, o zaman p nin bir yerel homeomorfizma olduğunu gösterir. Ayrıca bir topolojik uzayın bir açık altkümesinin tam uzayı içine kapsama tasviri de bir yerel homeomorfizmadır. Son olarak iki yerel homeomorfizmanınbileşkesi yine bir yerel homeomorfizmadır. Böylece yerel homeomorfizmaların bir çok örnekleri kurulabilir.

öte yandan, üzerine tasvirler olan fakat örtü uzayları olmayan yerel homeomorfizmaların örnekleride verilebilir. örneğin, p, (0,1) açık aralığını aşağıdaki şekilde $S^{1}$ çemberi üzerine tasvir etsin:

$$p(t) = (\cos t, \sin t).$$

Bu durumda p, bir yerel homeomorfizmadır, fakat $((0,10),p), S^{1}$ in bir örtü uzayı değildir. Daha genel olarak, eğer $(\tilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı ve V, X in bağlantılı açık bir öz altkümesi ise, o taktirde $p|V$ bir yerel homeomorfizmadır, fakat $(V,p|V)$, X in bir örtü uzayı değildir. örtü uzayları ve yerel homeomorfizmalar arasındaki bu fark oldukça önemlidir.

Bir yerel homeomorfizmanın açık bir tasvir olduğunu belirtelim. Özellikle $(\tilde{X},p)$, X in bir örtu uzayı ise, o zaman p, bir açık tasvirdir.

Örtü uzaylarının bir çok ek örneğini vermeye olanak sağlayan aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı teorem2.1. $(\tilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı, A yay bağlantılı ve yerel yay bağlantılı X 'in bir altuzayı ve $\tilde{A}$, $p^{-1}(A)$ nın bir yay bileşeni olsun. Bu taktirde $(\tilde{A},p|\tilde{A})$, A nın bir örtü uzayıdır.

Örnek2.6 de açıklanan iki örtü uzayı bu yardımcı teoremin örnek 2.4 deki $R^2=RxR$ ve $S^1xS^1$ torunun $RxS^1$ örtü uzaylarına uygulanmasıyla de elde edilebilir. [$S^1xS^1$ in aşağıdaki altkümesi olarak A 'yi seçelim: $A = (S^1 \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times S^1)$, $x_0 \in S^1$ ].

## 3. Yolların bir örtü uzayına kaldırılması

Bu kısımda, bu çalışmadaki sonuçların bir çoğu için temel oluşturan bazı basit yardımcı teoremler vereceğiz. $(\tilde{X},p)$, X 'in bir örtü uzayı ve $g:I \longrightarrow \tilde{X}$, $\tilde{X}$ da bir yol olsun. bu taktirde $pg$, X de bir yoldur. Yine eğer $g_0, g_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ ve $g_0 \sim g_1$ ise, o zaman $pg_0 \sim pg_1$ dir.

Şu soru sorulabilir: eğer $f:I \longrightarrow X$, X de bir yol ise, $pg = f$ olacak şekilde bir $g:I \longrightarrow \tilde{X}$ yolu var mıdır? Eğer $g_0, g_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ $pg_0 \sim pg_1$ ise, $g_0 \sim g_1$ sonucu çıkar mı? Her iki sorunun cevabının olumlu olduğunu göstereceğiz. Bu gerçek, örtu uzaylarının temel özelliklerinden birini ifade eder.

Yardımcı teorem 3.1. $(\tilde{X}, p)$, X 'in bir örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ve $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olsun. Bu taktirde $x_0$ başlangıç noktalı herhangi bir $f:I \longrightarrow X$ yolu için $pg=f$ olacak şekilde $\tilde{x}_0$ başlangıç noktalı bir tek $g:I \longrightarrow \tilde{X}$ yolu vardır.

İspat.Eğer f yolu elemanter bir U komşuluğu içinde bulunsaydı,hiç bir problem olmazdı.Çünkü eğer V,$\tilde{x}_o$ yı içeren $p^{-1}(U_o)$ in yay bileşenini gösterirse,o zaman p,V yi topolojik olarak U üzerine tasvir ettiğinden,gerekli özellikleri taşıyan V de bir tek g varolurdu.

Kuşkusuz genelde f elemanter bir U konşuluğu içinde yer almayacaktır.Bununla birlikte f daima,herbiri elemanter bir komşuluk içinde yer alan "daha kısa" yolların sonlu bir sayısının çarpımı olarak ifade edilebilir ve dolayısiyle yukarıdaki parağrafta yer alan düşünce ard arda bu kısa yolların her birine uygulanır.

Bu yöntemin ayrıntıları aşağıdaki şekilde açıklanabilir. $\{U_i\}$ elemanter komşuluklarla X in bir örtüsü olsun.Buna göre $\{f^{-1}(U_i)\}$, I,tıkız metrik uzayın bir açık örtüsüdür. 1/n , bu örtünün lebesgue sayısından daha küçuk olacak şekilde bir n tamsayısı seçelim.I aralığını $[0,1/n],[1/n,2/n],\ldots[(n-1)/n,1]$ kapalı aralıklarına bölelim. Burada f,her bir alt aralığı X de elemanter komşuluk içine tasvir eder.Bu kez de g yi $[0,1/n]$ ile başlayan bu alt aralıklar üzerine ardışık olarak tanımlayalım.

Kaldırılmış g yolunun tekliği aşağıdaki daha genel yardımcı teoremin bir sonucudur.

Yardımcı teorem 3.2. $(\tilde{X},p)$, X 'in bir örtü uzayı ve Y bağlantılı bir uzay olsun.$pf_o=pf_1$ olacak şekilde herhangi iki sürekli $f_o,f_1:Y \longrightarrow \tilde{X}$ tasviri verildiğinde $\{y\in Y:f_o(y)=f_1(y)\}$ kümesi ya boştur ya da Y 'nin tümüdür.

İspat. Y bağlantılı olduğundan, sorudaki kümenin hem açık hem de kapalı olduğnu göstermek yeter.önce kapalı olduğunu gösterelim.y ,bu kümenin kapanışının bir noktası ve $x=pf_o(y)=pf_1(y)$ olsun. $f_o(y)\neq f_1(y)$ kabul edelim.Bu kabulün bir çelişkiye gittiğini göstereceğiz.U,x in bir elemanter komsuluğu ve $V_o$ ve $V_1$ de sırasiyle $f_o(y)$ ve

$f_1(y)$ yi içeren $p^{-1}(U)$ nun bileşenleri olsun. $f_o$ ve $f_1$ in her ikiside sürekli olduğundan, $f_o(W) \subset V_o$ ve $f_1(W) \subset V_1$ olacak şekilde y'nin bir W komşuluğu bulunabilir. Oysa bunun, y nin herhangi bir W komşuluğu_nun sorudaki kümeye rastlaması gerektiği gerçeğine aykırıdır.

Benzer bir düşünce $\{y \in Y : f_o(y)=f_1(y)\}$ kümesinin her nok_tasının bir iç nokta olduğunu göstermemize olanak sağlar. |

Yardımcı teorem 3.3. $(\tilde{X},p)$, X 'in bir örtü uzayı ve $\tilde{g}_o, \tilde{g}_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ aynı başlangıç noktasına sahip olan X daki yollar olsun. eğer $p\tilde{g}_o \sim p\tilde{g}_1$ ise. o zaman $\tilde{g}_o \sim \tilde{g}_1$ dir; özellikle, $g_o$ ve $g_1$ aynı başlangıç noktasına sahiptir.

İspat. Bu ispatın stratejisi esas olarak yardımcı teorem3.1 inki ile aynıdır. $\tilde{x}_o$, $g_o$ ve $g_1$ 'in başlangıç noktası olsun. $pg_o \sim pg_1$ hipotezi

$$F(s,0) = pg_o(s)\,,$$
$$F(s,1) = pg_1(s)\,,$$
$$F(0,t) = pg_o(0) = p(x_o)\,.$$
$$F(1,t) = pg_o(1)$$

olacak şekilde bir $F : I \times I \longrightarrow X$ tasvirinin varlığını gerektirir.

Lebesgue sayısını gözönüne alan bir düşünce ile v.b. F, her bir küçük $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ dikdörtgenini X 'deki bir elemanter komşuluk içine tasvir edecek şekilde $0=s_o<s_1<\ldots<s_m=1$ ve $0=t_o<t_1<\ldots<t_n=1$ sayıları bulunabilir. $pG=F$ ve $G(0,0)=x_o$ olacak şekilde bir tek $\tilde{G} = I \times I \longrightarrow X$ tasvirinin varolduğunu göstereceğiz. Önce gerekli özellikler geçerli olacak şekilde G yi $[0,s_1] \times [0,t_1]$ küçük dikdörtgeni üzerinde tanımlayalım. Bunun olabileceği açıktır. Çünkü F, bu küçük dikdörtgeni $p(\tilde{x}_o)$ noktasının bir elemanter komşulu_ğu içine tasvir eder. Buna göre; i=1,2,...,m için sırası ile $[s_{i-1}, s_i] \times [0,t_1]$ dikdörtgenleri üzerinde G nin tanımını genişle_

telim. Burada tanımların herhengi iki ardışık dikdörtgenin ortak ayrıtı üzerinde uyuştuğuna dikkat edelim.Böylece G, $I\times[0,t_1]$ şeridisi üzerinde tanımlıdır.Daha sonra G, $I\times[t_1,t_2]$ şeridindeki dikdörtgenler üzerinde tanımlanır.v.b.

G nin tekliği yardımcı teorem 3.2 den dolayı bellidir. Benzer şekilde yardımcı teorem 3.1 in teklik iddeasından $G(s,0)=g_o(s)$ $G(0,t)=\tilde{x}_o$ . $G(s,1)=g_1(s)$ olduğu ve G nin $p(x_1)=pg_o(1)=pg_1(1)$ olacak şekilde $\{1\}\times I$ nin tekli bir $\tilde{x}_1$ noktası içine tasvir ettiği görülür.

Böylece G, $g_o$, $g_1$ yolları arasında gerektiği gibi bir denklik tanımlar.|

Yolların kaldırılması ile ilgili bu sonuçların bir sonucu olarak aşağıdaki yardımcı teoremi vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.4. Eğer $(\tilde{X},p)$ ,X in bir örtü uzayı ise, o taktirde her $x\in X$ için $p^{-1}(x)$ kümeleri aynı kardinal sayıya sahiptir.

İspat. $x_o$ ve $x_1$ , X in herhangi iki noktası olsun.X de $x_o$ başlangıç noktalı ve $x_1$ bitim noktalı bir f yolunu seçelim.f yolunu kullanarak aşağıdaki yöntemle bir $p^{-1}(x_o) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$ tasviri tanımlanabilir.Herhengi bir $\tilde{y}_o \in p^{-1}(x_o)$ noktası verildiğinde f i pg=f olacak şekilde X da $y_o$ başlangıç noktalı bir g yoluna kaldıralım. $y_1$ , g nin bitim noktasını göstersin o taktirde $y_o \longrightarrow y_1$ ifadesi arzu edilen tasvirdir. $\tilde{f}$ ters yolunu kullanarak ; [$\tilde{f}(t)=f(1-t)$ ile tanımlı] benzer bir kuralla bir $p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x_o)$ tasviri tanımlanabilir.Bu tasvirlerin herbiri diğerinin tersi olduğu açıktır.O halde herbiri bire-bir ve üzerinedir.|

$p^{-1}(x), x \in X$ kümelerinin bu ortak kardinal sayısına,(X,p) örtü uzayının yaprak sayısı denir.Örneğin n_yapraklı bir örtü yada sonsuz yapraklı bir örtü diye ifade edilir.

4. Bir örtü uzayının temel grubu

Yardımcı Teorem 3.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki temel sonuç elde edilir.

Teorem 4.1. $(\tilde{X},p)$ X in bir örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ve $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olsun. bu taktirde üretilmiş $p^* : \pi(\tilde{X},\tilde{x}_0) \longrightarrow \pi(X,x_0)$ homomorfizması bir momomorfizmadır.

Bu $g_0$ ve $g_1$ in kapalı yollar olarak kabul edildikleri yardımcı teorem 3.3 ün özel halinin doğrudan bir sonucudur.

Bu teorem aşağıdaki soruya neden olur: $\tilde{x}_0$ ve $\tilde{x}_1$ in $p(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_1)=x_0$ olacak şekilde $\tilde{X}$ in noktaları olduklarını varsayalım. $p^* : \pi(\tilde{X},\tilde{x}_0) \longrightarrow \pi(X,x_0)$,

$p^* : \pi(\tilde{X},\tilde{x}_1) \longrightarrow \pi(X,x_0)$ homomorfizmalarının görüntüleri nasıl olur? Bunun yanıtı çok basittir. $\tilde{x}_0$ dan $\tilde{x}_1$ ya $\tilde{X}$ daki yolların bir $\tau$ sınıfını secelim; bu $u(\alpha) = \tau^{-1}\alpha\tau$ formülü ile bir $u: \pi(\tilde{X},\tilde{x}_0) \longrightarrow \pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$ izomorfizmasını tanımlar. Böylece aşağıdaki değişmeli şema elde edilir:

$$\begin{tikzcd} \pi(\tilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "u"'] & \pi(X,x_0) \arrow[d, "v"] \\ \pi(\tilde{X},\tilde{x}_1) \arrow[r, "p^*"] & \pi(X,x_0) \end{tikzcd}$$

burada $\tau(\beta) = (p^*\tau)^{-1}\,\beta\,(p^*\tau)$ dır. Oysa $p^*(\tau)$ kapalı bir yoldur. Ve dolayısı ile $\pi(X,x_0)$ ın bir elemanıdır. Böylece $p^*$ altında $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ ve $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$ nın görüntülerinin $\pi(X,x_0)$ ın eşlenik alt grupları oldukları görülür. Daha sonra şu soru sorulabilir:

$p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ altgrubunun eslenik sınıftaki her alt grup $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ noktasını bir seçimi için $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$ görüntüsü olarak elde edilebilir mi? Burada cevap evettir.

Bunu ispatlamak için bu eşlenik sınıftaki herhangi bir alt grubun $\alpha \in \pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ elemanın bir seçimi için, $\alpha^{-1}[p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)]\alpha$ şeklinde olduğunu belirtelim. $\alpha$ yı tavsir eden kapalı bir $f : I \longrightarrow X$ yolunu seçelim. $\tilde{x}_0$ başlangıç noktalı $\alpha$ yı örten bir $g : I \longrightarrow \tilde{X}$ yolunu elde etmek için yardımcı teorem 3.1 i uygulayalım. $\tilde{x}_1$, bu kaldırılmış yolun bitim noktası olsun. Bu taktirde

$$p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1) = \alpha^{-1}[p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)]\alpha$$

olur. Bunun nasıl ispatlanacağı aşağıdaki teoremde özetlenebilir:

Teorem 4.2 $(\tilde{X},p)$, $X$ in bir örtü uzayı ve $x_0 \in X$ olsun. O taktirde $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ için $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ alt grupları, $\pi(X,x_0)$ ın alt gruplarının bir eşleniklik sınıfıdır.

Bu $\pi(X,x_0)$ alt gruplarının eşlenik sınıfı $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının cebirsel bir invaryantıdır. Daha sonra örtü uzayının izomorfizmayı tam olarak belirteceğini ispatlacağız.

## 5. Keyfi Tasvirlerin Bir Örtü Uzayına Kaldırılması

Kısım 3 de $X$ deki yolların bir $\tilde{X}$ örtü uzayına kaldırılmasını inceledik bu kez de herhangi bir $Y$ uzayının $X$ içine tasvirleri için benzer problemi inceleyeceğiz. Bu soruyu araştırmak için aşağıdaki notasyonu verelim: Eğer $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar ise, $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere $f:(X,x) \longrightarrow (Y,y)$ notasyonu, $f$'nin $X$'in $Y$ içine sürekli bir tasviri ve $f(x)=y$ olduğunu ifade eder. Bu notasyon ile esas sorumuzu aşağıaki şekilde kisaca ifade edebiliriz: $(\tilde{X},p)$, $X$ in bir örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ ve $\Phi : (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ olsun. Hangi koşullar altında

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde X,\tilde x_0) \arrow[d, "p"] \\
(Y,y_0) \arrow[ur, "\tilde\Phi"] \arrow[r, "\Phi"'] & (X,x_0)
\end{tikzcd}$$

şeması değişmeli olacak şekilde bir $\tilde\Phi : (Y,y_0) \longrightarrow (\tilde X,\tilde x_0)$ tasviri vardır? Eğer böyle bir $\tilde\Phi$ tasviri varsa $\Phi$ nin $\tilde\Phi$ ya kaldırılabildiğini ya da $\tilde\Phi$ , $\Phi$ nin bir kaldırılmasıdır diyeceğiz. Gözönüne alınan uzayların temel gruplarının gözönüne alınması ile böyle bir $\tilde\Phi$ kaldırmasının varlığı için gerekli bir koşulu elde etmek kolaydır. Çünkü eger böyle bir $\tilde\Phi$ tasvirinin varlığı kabül edilirse, o zaman aşağıdaki grup ve homomorfizmaların değişmeli şeması elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(\tilde X,\tilde x_0) \arrow[d, "p^*"] \\
\pi(Y,y_0) \arrow[ur, "\tilde\Phi^*"] \arrow[r, "\Phi^*"'] & \pi(X,x_0)
\end{tikzcd}$$

$p^*$ bir monomorfizma olduğundan , bu şemayı değişmeli yapan bir $\tilde\Phi^* : \pi(Y,y_0) \longrightarrow \pi(\tilde X,\tilde x_0)$ homomorfizmasının varlığı tam olarak $\Phi^*$ ın görüntüsünün $p^*$ ın görüntüsünde kapsanmış olduğu koşuluna eş değerdir. Bu da arzu edilen gerekli koşuldur.

Teorem 5.1. $(\tilde X,p)$ , $X$ in bir örtü uzayı $Y$ bağlantılı ve yerel yay bağlantılı bir uzay , $y_0 \in Y$ , $\tilde x_0 \in \tilde X$ ve $x_0 = p(\tilde x_0)$ olsun. Bir $\Phi : (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ tasviri verildiğinde ancak ve ancak $\Phi^*\pi(Y,y_0) \subset p^*\pi(\tilde X,\tilde x_0)$ ise , bir $\tilde\Phi : (Y,y_0) \longrightarrow (\tilde X,\tilde x_0)$

kaldırması vardır.

İspat. Verilen kosulun gerekliliği önceden ispatlandı. Gerıye yeterliliği ispatlamak kalıyor. Bunu yapmak için gercek anlamda $\tilde{\Phi}$ tasvirini tanımlamak gerek. Aşağıdaki düşunceler, eğer asla mevcut değilse, $\tilde{\Phi}$ yı tanımlamak için esas olarak bir tek kuralın var olduğunu gösterir. $\tilde{\Phi}$ nın varolduğunu kabul edelim. $y$, $Y$ nin herhangi bir noktası olsun. $Y$ yay bağlantılı olduğundan $y_o$ başlangıç noktalı ve $y$ bitim noktalı bir $f: I \longrightarrow Y$ yolu seçilebilir. $X$ ve $\tilde{X}$ da sırası ile $\Phi f$ ve $\tilde{\Phi} f$ yollarını gözönüne alalım. $\tilde{\Phi} f$ yolu $\Phi f$ yolunun bir kaldırmaşıdır ve $\tilde{\Phi}(y)$, $\tilde{\Phi} f$ yolu_ nun bir bitim noktasıdır.

Bu düşunceler gereğince, aşağıdaki sekilde $\tilde{\Phi} : (Y, y_o) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_o)$ tasviri tanımlanır: Herhengi bir $y \in Y$ noktası verildiğinde $y_o$ başlangıç noktalı ve $y$ bitim noktalı bir $f : I \longrightarrow Y$ yolu seçilsin. Buna göre $\Phi f$, $x_o$ başlangıç noktalı $X$ deki bir yoldur. $g$ nin başlangıç noktası $\tilde{x}_o$ ve $pg = \Phi f$ olacak şekilde bir $g: I \longrightarrow \tilde{X}$ yolunu elde etmek için yardımcı teeorem 3.1 i kullanalım.

$$\tilde{\Phi}(y) = g \text{ nin uç noktası}$$

tanımlansın. Bu tanımı doğrulamak için $\tilde{\Phi}(y)$ nin $f$ yolunun seçiminden bağımsız olduğunu gostermek gerek. Yardımcı teo. 3.3 kullanılarak $\tilde{\Phi}(y)$ nin tanımını değiştirmeksizin $f$ nin eşdeğer bir yolla yer değiştirilebileceği görülür. Yani, $\tilde{\Phi}(y)$ sadece $f$ yolunun $\alpha$ denklik sınıfına bağlıdır. $\alpha$ ve $\beta$ ın $y_o$ dan $y$ ye $Y$ deki yolların iki farklı denklik sınıfı olduğunu varsayalım. Buna göre $\alpha\beta^{-1}$, $y_o$ da kurul_ muş kapalı bir yoldur. O halde $\alpha\beta^{-1} \in \pi(Y, y_o)$ ve dolayısı ile teoremin hipotezinden dolayı

$\Phi^*(\alpha\beta^{-1}) \in p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_o)$ olur. Böylece $(\Phi^*\alpha)(\Phi\beta)^{-1}$ üzerine izdüşüren $\tilde{X}$ daki $\tilde{x}_o$ da kurulmuş ilmeklerin bir sınıfı vardır. Ya da eğer $x_o$ dan başlayarak $X$ daki bir yola kaldırılmış ise sonuç $\tilde{X}$ da kapalı bir yoldur. O halde eger $\Phi^*\alpha$ ve $\Phi^*\beta$ herbiri $x_o$ dan başlayarak $X$ daki yollara kaldırılmış ise, onlar aynı bitim noktasına sahiptir.

Böyle tanımlanmış $\tilde{\Phi}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ispatlamak gerek. $y \in Y$ ve $U$, $\tilde{\Phi}(y)$ nin keyfi bir komşuluğu olsun. $\tilde{\Phi}(V) \subset U$ olacak şekilde $y$ nin bir $V$ komşuluğunun varolduğunu göstermeliyiz. $U' \subset p(U)$ olacak şekilde $p\tilde{\Phi}(y) = \Phi(y)$ nin elemanter bir $U'$ komşuluğunu seçelim. $W$, $\tilde{\Phi}(y)$ yi içeren $p^{-1}(U')$ nün yay bileşeni olsun. $U'' \subset p(U \cap W)$ olacak şekilde $\Phi(y)$ nin elemanter bir komşuluğu $U''$ olsun. Bu taktirde $\tilde{\Phi}(y)$ yi içeren $p^{-1}(U'')$ nün yay bileşenin $U$ içinde bulunduğunu göstermek kolaydır. $\Phi$ sürekli olduğundan $\Phi(V) \subset U'$ olacak şekilde $V$ seçilebilir. Ayrıca $Y$ yerel yay bağlantılı olduğundan $V$ yay bağlantılı olacak şekilde de seçilebilir.

$\tilde{\Phi}$ nın tanımlanma yönteminden gerekli değişmeli $p\tilde{\Phi}=\Phi$ bağıntısının geçerli olduğu açıktır. |

Uyarılar : 1. $\tilde{\Phi}$ tasviri yardımcı teorem 3.2 gereğince tektir. $\tilde{\Phi}$ nın tekliği teoremin ispatından da açıktır.

2. Bu teorem, cebirsel topolojinin genel stratejisinin güzel bir örneğidir: sırf topolojik bir soru (belirli koşulları sağlayan sürekli bir tasvirin varlığı) sırf bir cebirsel soruya indirgenir.

6. Örtü Uzaylarının Homomorfizmaları ve Otomorfizmaları

Verilen bir $X$ uzayının mümkün olan çeşitli örtü uzayları hakkında bazı bilgiler vereceğiz. Görüleceği gibi $X$ in örtü uzay_ larının homomorfizma ve otomorfizmalarının gözönüne alınması ile bir çok kavram bu probleme dahil edilebilir.Bu yöntem aşağıdaki yarı_mistik ilkeye uygun olarak günümüzdeki bir çok matematik araştırmalarına yardımcı olur.Matematiksel nesnelerin belirli bir sınıfı hakkında yararlı bilgi edinmek istendiğinde bu nesnelerin kabül edilebilir tasvirlerini ve otomorfizmalrının uygun sınıflarını gözönüne almakta genellikle yararlıdır.

Tanım. $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$ ,X'in örtü uzayları olsun. $(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ içine bir homomorfizması,aşağıdaki şema değiş_meli olacak şekilde bir $\Phi: \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ tasviridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

İki homomorfizmanın bileşkesinin yine bir homomorfizma olduğunu ve eğer $(\tilde{X}, p)$ , X in bir örtü uzayı ise,o zaman $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ özdeşlik tasvirinin bir homomorfizma olduğunu belirtelim.

Tanım.$(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ içine bir $\Phi$ homomorfizması, $\mu\Phi$ ve $\Phi\mu$ bileşkelerinin her ikisi de özdeşlik tasvirleri olacak şekilde eğer $(\tilde{X}_2, p_2)$ nin $(\tilde{X}_1, p_1)$ içine bir $\mu$ homomorfizması varsa bir izomorfizmadır denir.Bir otomorfizma,bir örtü uzayının kendi üzerine bir izomorfizması olup,bu otomorfizma özdeşlik tasviri olabilir ya da olmayabilir.

Örtü Uzaylarının Otomorfizmaları literatürde genellikle örtü dönüşümü adını alır.Örtü uzaylarının bir homomorfizmasının , ancak ve ancak olağan anlamda bir homeomorfizma ise,bir izomorfizma olduğunu belirtelim.X in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayının tüm otomorfizma_larının kümesi,açıkça bileşke tasvirlerinin işlemleri altında bir gruptur.Bu grubu göstermek için $A(\tilde{X}, p)$ simgesini kullanacağız.

Burada örtü uzaylarının homomorfizma ve otomorfizmalarının bazı temel özelliklerini vereceğiz.

Yardımcı Teorem 6.1. $\Phi_o, \Phi_1, (X,p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ içine homomorfizmalar olsun. Eğer $\Phi_o(x) = \Phi_1(x)$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$ noktası varsa, o taktirde $\Phi_o = \Phi_1$ dir.

Bu iddea yardımcı teorem 3.2 nin bir özel halidir.

Sonuç 6.2. $A(\tilde{X},p)$ Grubu $\tilde{X}$ uzayı üzerinde sabit noktasız işler; yani eğer $\Phi \in A(\tilde{X},p)$ ve $\Phi \neq 1$ ise, o zaman $\Phi$ nin hiç bir sabit noktası yoktur.

Yardımcı Teorem 6.3. $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$, X in örtü uzayları ve $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$, i=1,2, $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ şeklinde noktalar olsun. Bu taktirde ancak ve ancak $p_1{}_*\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset p_2{}_*\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ ise $\Phi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ olacak şekilde $(X,p_1)$ in $(X_2,p_2)$ içine bir $\Phi$ homomorfizması vardır.

Bu da teorem 5.1 in bir özel halidir.

Sonuç 6.4 yardımcı teorem 6.3 ün hipotezi altında, ancak ve ancak $p_1{}_*\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_2{}_*\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ ise, $\Phi(\tilde{x}_1) = \Phi(\tilde{x}_2)$ olacak şekilde $(\tilde{X},p_1)$ in $(X_2,p_2)$ üzerine bir $\Phi$ izomorfizması vardır.

Bu da yardımcı teorem 6.3, bir izomorfizmanın tanımı ve sonuç 6.2 nin doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 6.5 $(X,p)$, X in bir örtü uzayı ve $x_o \in X$ olmak üzere $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_o)$ olsun. Ancak ve ancak $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1) = p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_2)$ ise, $\Phi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ olacak şekilde bir $\Phi \in A(X,p)$ otomorfizması vardır.

Bu sonuç, sonuç 6.4 ün bir özel halidir.

Teorem 6.6 $X$ in $(\tilde{X}_1,p_1)$ ve $(\tilde{X}_2,p_2)$ gibi iki örtü uzayı ancak ve ancak $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ ve $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ gibi herhengi iki nokta için $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_o$ olacak şekilde $p_1{}^*\Pi(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ ve $p_2{}^*\Pi(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ alt grupları $\Pi(X.x_o)$ daki aynı eşlenik sınıfın elemanı ise, izomorfiktir.

İspat. İspat sonuç 6.4 ve teo. 4.2 den elde edilir. Bu teorem,teo. 4.2 de adı geçen alt grupların eşlenik sınıfının, tamamen izomorfizmaya bağlı bir örtü uzayını belirtiğini gösterir.

Yardımcı Teorem 6.7 $(\tilde{X}_1,p_1)$ ve $(\tilde{X}_2,p_2)$ , **X** in örtü uzay_ ları ve $\Phi$ birinci örtü uzayının ikincisi içine bir homomorfizması olsun. Bu taktirde $(\tilde{X}_1, \Phi)$ , $\tilde{X}_2$ nın bir örtü uzayıdır.

İspat. önce,herhengi bir $x \in X$ noktasının birlikte her iki örtü uzayı için x in bir elemanter komşuluğu olan açık yay bağlantılı bir U komşuluğuna sahip olduğunu belirtelim.$(\tilde{X}_1,p_1)$ ve $(\tilde{X}_2,p_2)$ örtüleri için sırası ile x in $U_1$ ve $U_2$ açık elemanter komşuluk_ larının seçilmesi ile böyle bir komşuluk elde edilebilir.Ve buna göre U,x 'i içeren $U_1 \cap U_2$ nin yay bileşeni olsun.

$\Phi$ nin $\tilde{X}_1$ yı $\tilde{X}_2$ üzerine tasvir ettiğinin ispatlayacağız. $\tilde{y}$ , $\tilde{X}_2$ nın herhengi bir noktası olsun. Buna göre $\Phi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ olacak şekilde $\tilde{X}_1$ nın bir $\tilde{x}$ noktasının varolduğunu göstermeliyiz. Bir esas $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ noktası seçelim $\tilde{x}_2 = \Phi(\tilde{x}_1)$ , $x_o = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ olsun.$\tilde{x}_2$ başlangıç noktalı ve $\tilde{y}$ bitim noktalı $\tilde{X}_2$ da bir $\tilde{f}$ yolu seçelim ve yine $g = p_2\tilde{f}$ X de bir görüntü yolu olsun.

Yardımcı teorem 3.1 den dolayı $p_1\tilde{h}=g$ olacak şekilde ve $x_1$ başlangıç noktalı $\tilde{X}_1$ da birtek $\tilde{h}$ yolu vardır. Bu taktirde $\Phi\tilde{h}$ ve $f$ yolları her ikisi de aynı başlangıç noktasına sahiptir ve $p_2\Phi\tilde{h} = g = p_2 f$ dir. O halde yardımcı teorem 3.1 in teklik iddeasından dolayı $\Phi\tilde{h}=f$ dir. Bu nedenle gerektiği gibi $\Phi(x)=y$ dir.

Burada herhangi bir $x\in\tilde{X}_2$ noktasının elemanter bir komşuluğunun nasıl seçileceği açıklığa kavuşur. Her iki örtü için elemanter olan $x=p_2(z)$'ın bir $U$ komşuluğunu seçelim ve $W$, $Z$ yi içeren $p_2^{-1}(U)$ nun bileşeni olsun. $W$ gerekli özeliklere sahiptir.

$(\tilde{X},p)$, $\tilde{X}$ basit bağlantılı olacak şekilde X in bir örtü uzayı olsun. Eğer $(X',p')$, X in herhangi bir başka örtü uzayı ise, o zaman yardımcı teorem 6.3 den dolayı $(\tilde{X},p)$ nin $(X',p')$ üzerine bir $\Phi$ homomorfizması vardır. Ve yukarıda ispatlanmış yardımcı teoremden dolayı $(\tilde{X},\Phi)$, X' nin bir örtü uzayıdır. Yani, $\tilde{X}$, X in herhangi bir örtü uzayının bir örtü uzayı olarak kallanılabilir. Bu düşünceden dolayı böyle $(\tilde{X},p)$ gibi basit bağlantılı bir örtü uzayına evrensel bir örtü uzayı adı verilir. Teorem 6.6 dan dolayı X in herhangi iki evrensel örtü uzayı izomorfiktir.

## 7. $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde $\pi(X,x)$ grubunun etkisi

X in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının otomorfizmalarının grubunu ayrıca incelemek için herhangi bir $x\in X$ için $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde $\pi(X,x)$ grubunun bir etkilemini tanımlayalım, yani, $\pi(X,x)$'i, $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde sağdan uygulayalım. Tanım çok doğal ve basittir. Yolların kaldırılması üzerine verilen yardımcı teorem 3.1 ve 3.3'e dayanır.

Tanım: $(\tilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı ve $x\in X$ olsun. Herhangi bir $\tilde{x}\in p^{-1}(x)$ noktası ve herhangi bir $\alpha\in\pi(X,x)$ için, $\tilde{x}\alpha\in p^{-1}(x)$ 'i aşağıdaki şekilde tanımlayalım. Yine yardımcı teorem 3.1 ve 3.3 den dolayı $\tilde{p}^*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ ve $\tilde{\alpha}$ nın başlangıç noktası $\tilde{x}$ noktası olacak şekilde $\tilde{X}$ da bir tek $\tilde{\alpha}$ yol sınıfı vardır. $\tilde{x}.\alpha$ yı $\tilde{\alpha}$ yol sınıfının bitim noktası olarak tanımlayalım.

$$(\tilde{x}\,\alpha)\,\beta = \tilde{x}\,(\alpha\,\beta)$$

$$\tilde{x}\,.1 = \tilde{x}$$

olduğu kolayca görülür. Bunlar tam olarak, $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde sağ operatörlerin bir grubu olarak $\pi(X,x)$ için gerekli olan koşullardır. $\pi(X,x)$ grubunun $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde geçişli olarak uygulandığını iddia ediyoruz. Bunu ispatlamak için $\tilde{x}$ ve $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$ olsun. $\tilde{X}$ yay bağlantılı olarak kabul edildiğinden $\tilde{x}_o$ başlangıç noktalı $\tilde{X}$ da bir $\tilde{\alpha}$ yol sınıfı vardır. $\alpha = p^*(\tilde{\alpha})$ olsun. O taktirde $\alpha$. kapalı yolların bir denklik sınıfıdır. Ve açıkça ispatlandığı gibi $\tilde{x}_o\,\alpha = \tilde{x}_1$ dır.

Böylece $p^{-1}(x)$ kümesi bir homojen sağ $\pi(X,x)$ uzayıdır. Tanımdan herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktası için bu noktaya karşılık gelen izotropi (eş yönlü) altgrubun kesin olarak $(X,x)$ in $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ altgrubu olduğu görülür. O halde bir sağ $\pi(X,x)$_uzayı olarak $p^{-1}(x)$, $\pi(X,x)/p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ eş kümelerinin uzayına izomorfiktir. Ve örtülerin yaprak sayısı $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ altgrubunun damgasına eşittir. Buna göre aşağıdaki önemli sonuç ifade edilebilir. Bu sonuç $p^{-1}(x)$ üzerine $\pi(X,x)$ in etkilerini ve bir örtü uzayının otomorfizmalarının grubu arasındaki bir bağlantıyı kurar.

Önerme 7.1: Herhangi bir $\Phi \in A(\tilde{X},p)$ otomorfizması, herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktası ve herhangi bir $\alpha \in \pi(X,x)$ için

$$\Phi(\tilde{x}\alpha) = (\Phi\tilde{x})\alpha$$

dır; yani her bir $\Phi \in A(\tilde{X},p)$ elemanı bir sağ $\pi(X,x)$_uazyı olarak göz önüne alınmış $p^{-1}(x)$ kümesinin bir otomorfizmasını üretir.

İspat: $\alpha$ yı, $\tilde{x}$ başlangıç noktalı ve $p^*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ olacak şekilde

$\tilde{X}$ da bir $\tilde{\alpha}$ yoluna kaldıralım.O taktirde $x\tilde{\alpha}$ , $\tilde{\alpha}$ nın bitim noktası_ dır. Burada $\tilde{X}$ da $\tilde{\Phi}^*(\alpha)$ yolunu gözönüne alalım.Onun başlangıç nok_ tası $\tilde{\Phi}(x)$ ve bitim noktası ise $\tilde{\Phi}(x\alpha)$ dir.

Bundan sonra,

$$p^*[\tilde{\Phi}^*(\alpha)] = (p\tilde{\Phi})^*(\alpha) = p^*(\alpha) ;$$

olduğu görülür.yani.$\tilde{\Phi}^*(\alpha)$ aynı zamanda $\alpha$ yolunun bir kaldırılma_ sıdır. O halde tanım gereği $(\Phi x)\tilde{\alpha}$ , $\tilde{\Phi}(\tilde{\alpha})$ yolunun bitim noktası_ dır,yani,gerektiği gibi

$$(\Phi x)\tilde{\alpha} = \Phi(x\tilde{\alpha}) \quad \text{dır.} \ |$$

Bundan sonra $A(X.p)$ otomorfizma grubunun yapısını tamamen belir_ leyebiliriz.

Teorem 7.2: $(\tilde{X},p)$ , X in bir örtü uzayı olsun.

Bu taktirde $A(\tilde{X}.p)$ otomorfizmalar grubu bir sağ $\pi(X,x)$_uzayı ola_ rak gözönüne alınmış $p^{-1}(x)$,$x\in X$ kümesinin otomorfizmalarının gru_ buna doğal olarak izomorfiktir.

İspat: Eğer $\Phi$,$(\tilde{X}.p)$ nin herhangi bir otomorfizması ise,o taktirde $\Phi|p^{-1}(x)$ kısıtlaması önerme 7.1 gereğince bir sağ $\pi(X,x)$_uzayı olarak $p^{-1}(x)$ in bir otomorfizmasıdır.Bundan başka sonuç 6.2 den her bir $\Phi$ otomorfizmasının onun tamamen $\Phi|p^{-1}(x)$ kısıtlamasıyla belirlendiği sonucu çıkar.Başka bir deyişle $\Phi \longrightarrow \Phi|p^{-1}(x)$ tasviri, $\tilde{A}(X,p)$ nin $p^{-1}(x)$ sağ $\pi(X,x)$_uzayının otomorfizmalarının grubu için bir monomorfizmasıdır.

Buradan $\Phi \longrightarrow \Phi|p^{-1}(x)$ tasvirinin,$A(\tilde{X}.p)$ nin $p^{-1}(x)$ in otomor_ fizmalar grubu üzerine bir epimorfizması olduğu sonucu çıkar.

Böylece teorem ispatlanmış olur.|

Sonuç 7.3: Herhangi bir $x\in X$ noktası ve herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ için $A(\tilde{X}.p)$ otomorfizma grubu $N[p^*\pi(\tilde{X}.\tilde{x})]$ ifadesi. $\pi(X.x)$ deki $p^*\pi(\tilde{X}.\tilde{x})$ altgrubunun normalleşmesini gösteriyor.

Örtü uzaylarının özel önemli bir sınıfı. $p^*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ nin $\Pi(X,x)$ in normal bir altgrubu olduğu örtü uzaylarından oluşur. [Bu koşulun $\tilde{x}\in p^{-1}(x)$ noktasının seçiminden bağımsız olduğunu belirtelim. Böyle bir örtü uzayına düzenlidir, denir.

Sonuç 7.4: Eğer $(\tilde{X},p)$, X in düzenli bir örtü uzayı ise, o taktirde $A(\tilde{X},p)$, herhangi bir $x\in X$ ve herhangi bir $\tilde{x}\in p^{-1}(x)$ için, $\Pi(X,x)/p^*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ bölüm grubuna izomorfiktir. Bu da sonuç 7.3 den elde edilir. Çünkü bu durumda $N[p^*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})]=\Pi(X,x)$ dir.
Bu sonuç özellikle evrensel örtü uzayına uygulanır.

Sonuç 7.5: $(\tilde{X},p)$, x in bir evrensel örtü uzayı olsun. O taktirde $A(\tilde{X},p)$, $\Pi(x)$'e izomorfiktir. ve $\Pi(x)$ grubunun mertebesi $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının yapraklarının sayısına eşittir.

Örnekler.

7.1 Herhangi bir $t\in R$ için $p(t)=(\sin t,\cos t)$ şeklinde tanımlı $S^1$ çemberinin $(R,p)$ örtü uzayını gözönüne alalım. R reel ekseni büzülebilir olduğundan basit bağlantılıdır. Bu nedenle $(R,p)$ $S^1$ in evrensel bir örtü uzayıdır. Ve Sonuç 7.5 uygulanabilir.
Bu örtü uzayının otomorfizmalarının grubunu belirlemiş olalım.
Sint ve cost fonksiyonlarının bilinen periyodikliğinden
$T_n(t)=t+2n\pi$ ve tanımlı $T_n:R\longrightarrow R$ öteleme dönüşümünün herhangi bir n tamsayısı için bir otomorfizma olduğu açıktır.
Ayrıca eğer $x, S^1$'in herhangi bir noktası ve $(t_1,t_2)$, $p^{-1}(x)$ in herhangi iki noktası ise, o taktirde $T_n(t_1)=t_2$ olacak şekilde bir n tamsayısının varolduğu açıktır. $(R,p)$ örtü uzayının her otomorfizmasının böyle bir öteleme dönüşümü olduğu sonucu çıkar. Tüm böyle $\{T_n:n\in Z\}$ ötelem dönüşümlerinin grubu açıkça sonsuz çevrimsel olduğundan yine $\Pi(S^1)$ in sonsuz çevrimsel olduğu ispatlanabilir. Gerçekten, herhangi bir $z\in S^1$ için a(z) açı_

sı kavramı tam olarak $S^1$ in $(R,p)$ örtü uzayını kapsar. Ve $S^1$ deki kapalı bir yolun derecesini tanımlamak için arguman verildiğinde, $S^1$ deki böyle bir yolun $(R,p)$ örtü uzayına kaldırılmasına gider.

7.2 $p:S^2 \longrightarrow P$ 2-küresinin, onun bölüm uzayı izdişüm düzlemi üzerine doğal tasvirini göstermiş olsun. Bu taktirde $(S^2,p)$, $P$ nin bir örtü uzayıdır. Ve $S^2$ basit bağlantılı olduğundan, evrensel bir örtü uzayıdır. O 2-yapraklı bir örtü uzayı olduğundan $\pi(P)$ temel grubu ve otomorfizma grubu her ikisi de 2. mertebeden olacaktır. Otomorfizma grubunun $T:S^2 \longrightarrow S^2$ $T(x,y,z)=(-x,-y,-z)$ zıt tazviri tarafından üretildiği açıktır.

8. Düzenli örtü Uzayları ve Bölüm Uzayları

$(\tilde{X},p)$, $X$ in bir örtü uzayı olsun. $p$ açık bir tasvir olduğundan, $X$, $p$ tarafından üretilmiş bölüm topoljisine sahiptir. Böylece $X$'e belirli noktaları özdeşleyen bir işlemle $\tilde{X}$ dan elde edilmiş olarak bakılabilir: herhangi bir $x \in X$ noktası için, $p^{-1}(x)$ kümesinin tüm noktaları bir tek noktaya özdeşlenmiş olur. $\tilde{A}(X,p)$ otomorfizma grubunun, $p^{-1}(x)$ kümesinin noktalarını kendi aralarında değistirdiğini belirtelim. Bununla birlikte bu genelde $\tilde{X} / \tilde{A}(X,p)$ bölümuzayının $X$ e doğal olarak homeomorfik olduğu doğru değildir. Çünkü $\Phi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$ olduğu hiç bir $\Phi \in A(\tilde{X},p)$ otomorfizması varolmayacak şekilde farklı $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ noktaları varolabilir. Başka bir deyişle $A(\tilde{X},p)$ otomorfizma grubu, $p^{-1}(x)$ üzerinde geçişli olarak işlem gerektirmez. Buna göre aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edebiliriz.

Yardımcı teorem 8.2. $(\tilde{X},p)$, $X$ in bir öryü uzayı olsun. $\tilde{A}(X,p)$ otomorfizma grubu, ancak ve ancak $(\tilde{X},p)$, $X$ in bir düzenli örtü uzayı ise, $p^{-1}(x)$, $x \in X$ üzerinde geçişli olarak işler.

Bu iddia teorem 4.2 ve sonuç 6.5 in doğrudan bir sonucudur. Bir sonuç olarak, eğer $(\tilde{X},p)$, X in düzenli bir örtü uzayı ise, o taktirde X in $\tilde{X} / A(\tilde{X},p)$ bölüm uzayına doğal olarak homeomorfik olduğu görülür. Bu da daha çok aşağıdaki doğal bölüme gider: Y topolojik bir uzay ve G, Y nin homeomorfizmalarının bir grubu olsun. $p:Y \longrightarrow Y / G$, Y nin kendi bölüm uzayı üzerine doğal tasvirini göstersin. Hangi koşullar altında $(Y,q)$, $A(Y,p) = G$ koşuluyla Y/G nin düzenli bir örtü uzayıdır ? önce sağlanması gereken gerekli bir koşulun varolduğu açıktır. örneğin eğer $(\tilde{X},p)$, X in bir düzenli örtü uzayı ise, o zaman $A(\tilde{X},p)$, sabit noktasız $\tilde{X}$ üzerinde işler. Aynı zamanda $A(\tilde{X},p)$ grubunun işlemesi altında herhangi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktasının yörüngesi [yani $\{\Phi(\tilde{x}) : \Phi \in A(\tilde{X},p)$ noktalar kümesi$\}$ $\tilde{X}$ nın ayırtık, kapalı bir altkümesidir. Aslında aşağıdaki güçlü koşul bile geçerlidir. Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktası $\Phi(U)$, $\Phi \in (A,p)$ kümeleri ikişerli ayrık olacak şekilde bir U komşuluğuna sahiptir. ( Burada U, X de uyğun elemanter bir komşuluğun ters görüntüsünün bir bileşeni olarak seçilebilir).

Bu koşulu sağlayan homeomorfizmaların bir grubuna öz olarak sükeksizdir denir. Homeomorfizmaların bir öz süreksizlik grubunun serbest sabit nokta olduğunu belirtelim. Bu gerekli koşullar aynı zamanda yeterlidir.

önerme 8.2. Y bağlantılı, yerel yay bağlantılı bir topolojik uzay ve G, Y nin homeomorfizmalarının bir öz süreksiz grubu olsun. $p:Y \longrightarrow Y/G$, Y nin kendi bölüm uzayı üzerine doğal izdüşümünü göstersin. Bu taktirde $(Y,p)$, Y/G nin bir düzenli örtü uzayıdır ve $G = A(Y,p)$ dir.

İspat. $x \in Y/G$ olsun; x in bir elemanter komşuluğa sahip olduğunu göstermek gerek. $p(y) = x$ olacak şekilde bir $y \in Y$ noktası seçelim. Hipotez gereği $\Phi(N)$, $\Phi \in G$ kümeleri ikişerli ayrık olacak şekilde Y nin bir N komşuluğu vardır. Y yerel yay bağlantılı olduğundan $V \subset N$ olacak şekilde y nin açık, yay bağlantılı bir V komşuluğu vardır. $U = p(V)$ olsun. U nun x in bir elemanter komşuluğu olduğunu iddia ediyoruz. p bir açık tasvir olduğundan U bir açık küme olup ve açıkça yay bağlantılıdır. p nin V yi U üzerine bire_bir. sürekli bir tarzda tasvir ettiği yine açıktır ve p, açık bir tasvir olduğundan p tasviri V nin U üzerine bir homeomorfizmasıdır. Eğer W , V den farklı $p^{-1}(U)$ nun herhangi bir bileşeni ise, o zamn $W = \Phi(V)$ olacak şekilde bir $\Phi \in G$ vardır. $\Phi$, V nin W üzerine homeomorfizması ve $p = p\Phi$ olduğundan p nin W yi U üzerine homeomorfik olarak tasvir ettiğide sonuç olarak çıkar. Böylece U, X in bir elemanter komşuluğu ve (Y,p), Y/G nin bir örtü uzayıdır. Her $\Phi \in G$ nin,(Y,p) nin bir otomorfizması olduğu açıktır. Böylece $G \subset A(Y,p)$ dir. G nin A(Y,p) nin bir öz altgrubu olması iddiası , A(Y,p) nin sabit noktalı elemanlara sahip olduğunu ifade ettiği kolayca görülür. O halde $G = A(Y,p)$ dir. sonuçta, yardımcı teorem 8.1 den (Y,p) nin Y/G nin bir düzenli örtü uzayı olduğu sonucu çıkar. |

Aşağıda bu teoremin bazı basit örneklerini vereceğiz.

Örnekler.

8.1. $Y = R$, reel eksen ve herbir n tamsayısı için $\Phi_n(x) = x + n$ ile $\Phi_n : R \longrightarrow R$ tanımlanmış olsun. $G = \{ \Phi_n : n \in Z\}$ olsun. Bu taktirde G, R nin homeomorfizmalarının uyğun bir süreksizlik grubudur: Gerçekten herhangi bir $x \in R$ için eğer U, $(x - \frac{1}{3} , x + \frac{1}{3})$ açık aralığı olarak alınırsa, o taktirde $\Phi_n(U)$ komşulukları ikişerli ayrıktır. O halde biraz önce ispatlanan öner_ meden dolayı R, R/G bölüm uzayının düzenli bir örtü uzayıdır R/G nin aralığın iki uç noktasının özdeşlenmesiyle elde edilmiş [0,1] kapalı birim aralığının bölüm uzayına homeomorfik olduğu sonucu çıkar.

Böylece R/G bir çemberdir. Bir çemberin evrensel örtü uzayının reel eksen olduğu ve otomorfizmaların grubunun sonsuz çevrimsel olduğu yine ispatlanır.

8.2. $Y = S^n$, (n+ 1)-öklid uzayında birim n – küresi ve $T: S^n \longrightarrow S^n$, herhangi bir $x \in S^n$ için $T(x) = -x$ ile tanımlı tasvir olsun. Açıkca $T^2$, Özdeşlik dönüşümüdür. O halde T, ikinci mertebeden çevrimsel olan $S^n$ in homeomorfizmalarının bir G grubunu üretir. G nin homeomorfizmaların uygun bir süreksizlik grubu olduğu açıktır. Bu nedenle $S^n$. bir reel izdüşüm n – uzayı olan $S^n / G$ nin bir örtü uzayıdır. Çünkü $S^n$ basit bağlantılı olup, bir evrensel örtü uzayıdır ve bir reel izdüşüm n – uzayının temel grubu, ikinci mertebeden çevrimseldir.

Bu kısımı önerme 8.2 deki bazı gerçekleşmesi mümkün olayları iki örnekle açıklamakla bitireceğiz. İlk örnekte Y/G bölüm uzayının Y uzayı tüm ayırma aksiyomlarını sağlasa bile, Hausdorff uzayı olması gerekmediği gösteriliyor: Gerçekten Y nin $R^2$ öklid düzlemi ve G nin $R^2$ nin homeomorfizmalarının bir sonsuz çevrimsel uygun süreksizlik grubu olduğu böyle bir örnek veriyoruz.

Örnekler.

8.3. (x,y) düzleminde adi diferansiyel denklemlerin aşağıdaki basit sistemini gözönüne alarak başlayalım;

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos^2 x \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin x \end{cases}$$

integral eğrilerinin C integrasyon sabitinin değişik değerleri için $y = \sec x + C$ eğrileri ve her n tamsayısı için $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ düşey doğruları oldukları kolayca görülür. Diferansiyel denklemlerin bu sistemleri düzlemde bir parçacığın hareket denklemleri ol... gözönüne alınabilir. Burada t, zamanı göstermekte ve (x,y) ikilisi de t anında parçacığın koordinatlarını gösteriyor. Parçacık, integral eğrilerinden biri boyunca hareket etmeli. Bu eğri, onun başlangıç konumuna bağlı olarak hareket edecek. Bu diferansiyel denklemi kullanarak öklid düzlemi üzerinde R reel sayılarının toplamsal grubunun bir işlemini tanımlayacağız. Herhangi bir t reel sayısı ve düzlemin herhangi bir (x,y) noktası için t.(x,y) yi 0 anında (x,y) noktasında olan bir parçacığın t anındaki konumu olarak tanımlıyoruz.

$$s.[\, t(x,y)\,] = (s+t).(x,y)$$

$$0.(x,y) = (x,y)$$

olduğu açıktır. Ayrıca $(t,(x,y)) \longrightarrow t.(x,y)$ ile tanımlı $R \times R^2 \longrightarrow R^2$ tasviri süreklidir (Hatta türetilebilirdir). Bu diferansiyel denklemlerle ilgili standart teoremlerin bir sonucudur. R in düzlem üzerindeki bu etkisi sabit serbest nokta olduğu açıktır.

Bukez de düzlemde R in Z alt grubunun etkisini gözönüne alalım. Bu aradığımız örneği verecektir. önce $R^2$ üzerinde Z in etkisinin uygun süreksizlik olduğunu ispatlayacağız. Herhangi bir $P = (x,y)$ noktası verildiğinde C , P den geçen tek integral eğrisi olsun. $C_1$ ve $C_2$, C nin herbir tarafında yer alan yakın iki integral eğrisi olsun. $T_o$ , $C_1$ ve $C_2$ arasında tüm integral eğrilerine dik olan, P den geçen düzgün bir eğri olsun. Herhangi bir t reel sayısı için $T_t = t.T_o$ olsun. U, $T_{-1/3}$ , $T_{+1/3}$ ve $C_1$ ve $C_2$ eğrileri ile sınırlı P nin komsuluğu olsun . Bu taktirde U nun$\{n.U: n\in Z\}$ ardışık öteleme dönüşümlerinin ikişerli ayrık oldukları kolayca görülür.

Bundan sonra bölüm uzayının Hausdorff olmadığını göstereceğiz. Düzlemde $P_1 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $P_2 (-\frac{\pi}{2}, 0)$ noktalarını gözönüne alalım. Bu noktaların $R^2/Z$ bölüm uzayındaki görüntülerinin ayrık komşuluklara sahip olmadıklarını ispatlayacağız. Bu amaç için, $P_1$ in $N_1$ ve $P_2$ nin $N_2$ gibi herhangi komşulukları verildiğinde ,Z grubunun etkisi altında $N_1$ de $N_2$ nin bir noktasına eşdeğer olan bir noktanın var olduğunu göstermek yeterdir. Bunu yapmak için herhangi bir küçük a>0 sayısı için $((\pi/2)-a,0)$ ve $(-(\pi/2)+a,0)$ noktalarını gözönüne alalım. Bu iki niokta açıkça aynı integral eğrisi üzerindedir. $(-(\pi/2)+a,0)$ noktasında yerleşmiş bir parçacığın integral eğrisi boyunca $((\pi/2)-a,0)$ noktasına hareket etmesi için hangi uzunluk kateder. Bunu hesaplamak için, Onun x ekseni üzerindeki izdüşümünün birinci konumdan ikinci konuma geçişte hangi uzunlukta olduğunu hesaplamak yeter. Çünkü

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x \text{ olup}$$

$$I_n = \int_{-(\pi/2)+a}^{(\pi/2)-a} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x] \Big|_{-(\pi/2)+a}^{(\pi/2)-a} = 2\tan(\pi/2-a)$$

integrali ile verilmistir. Geçen zaman için bu formülden bir kaç sonuç çıkarılabilir.

(1) Geçen zaman a nın sürekli bir fonksiyonudur.

(2) $a \to 0$ iken $I_a$ geçen zamanı $+\infty$ ' a yaklaşır.

(3) Herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı için $0<a<\epsilon$ ve $I_a$ bir tamsayı olacak şekilde a nın sonsuz sayıda değeri vardır.

$((\pi/2)-a,0)$ ve $(-(\pi/2)+a,0)$ noktalarının ancak ve ancak geçen $I_a$ zamanı bir tamsayı ise esdeğer olduklarını belirtelim.

## 9-) Uygulama: 2-Küresi İçin Borsuk-Ulam Teoremi

$S^n$, $R^{n+1}$ de birim n-küresini göstersin:

$S^n_m = \{ x \in R^{n+1}_m : |x|_m = 1 \}$ herhangi pozitif n ve m tamsayıları için, bir $f : S_m \longrightarrow S_m$ tasviri herhangi $x \in S_m$ için $f(-x) = -f(x)$ halinde zıtlığı koruyan tasvir olsun. Polonyalı matematikçilerden K-Borsuk ve S.Ulama' ait olan aşağıdaki bilinen teorem bir çok ilginç sonuç verir.

Teorem 9.1: Herhangi bir sürekli zıt-koruyan $f : S^n \to S^{n-1}$, $n > 0$ tasviri mevcut değil.

sonuç 9.2:

$f : S^n \longrightarrow R^n$ nin herhangi $x \in S^n$ için $f(-x) = -f(x)$ olacak sekilde sürekli bir tasvir olduğunu kabul edelim bu taktirde $f(x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in S^n$ noktası vardır.

İspat: Her $x \in S^n$ için $f(x) \neq 0$ şeklinde aksini kabul edelim herhangi bir $x \in S^n$ için

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$ tanımlayalım.

Bu taktirde g, teorem 9.1 e aykırı olarak zıt_koruyan sürekli bir $S^n \longrightarrow S^{n-1}$ e tasviridir.

Sonuç 9.3: $f : S^n \longrightarrow R^n$ sürekli bir tasvir olsun. Bu taktirde $f(x) = f(-x)$ olacak şekilde bir $x \in S^n$ noktası vardır. özellikle f, bire_bir değildir.

İspat: Her $x \in S^n$ noktası için $f(x) \neq f(-x)$ şeklinde aksini kabul edelim $g(z) = f(z) - f(-x)$ tanımlayalım. O taktirde $g(-x) = -g(x)$ ve her x için $g(x) \neq 0$ olup bu da sonuç 9.2 ye aykırıdır.

Sonuç 9.4 ün açık bir sonucudur. Sonuç 9.3 ün ilginç olan başka bir açıklaması da vardır. Eğer $f : S^n \longrightarrow R^n$ şeklinde bir tasvir varsa $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ yazılabilir. Burada $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ . $S^n$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar_dır. Böylece sonuç şu şekilde tekrar ifade edilebilir. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $S^n$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar olsun. Buna göre $i = 1, \ldots, n$ için $f_i(x) = f_i(-x)$ olacak şekilde bir $x \in S^n$ noktası var_dır. örneğin, eğer $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, yer yüzeyi üzerinde herhangi bir x noktasında belirli bir andaki sıcaklık ve barometrik basıncı gös_terirse ve sıcaklık ve barometrik basıncın her ikisinin de yer yüzeyi üzerinde sürekli olarak değiştiğini kabul edersek,o zaman yer kürenin yüzeyi üzerinde birlikte aynı sıcaklık ve basınca sa_hip olan çap ucu noktalarının bir çiftinin var olduğu sonucu çı_kar.Bu olağan üstü bir teorem olup sadece toplojik hipotezler ifade ve ispatta yer almıştır.

Teorem 9.1 in İspatı: $n \leq 2$ için:Burada $n=1$ hali apaçık_tır.Çünkü $S^1$ bağlantılıdır.Fakat $S^o$ bağlantılı değildir.Bu nedenle $n=2$ olması halini ele alacağız.İspatı çelişkiyle olup sürekli bir zıt_koruyan $f:S^2 \longrightarrow S^1$ tasvirinin varolduğunu kabul edelim. Çap_sal zıt noktaların özdeşleşmesiyle elde edilmiş $S^2$ ve $S^1$ in bölüm uzaylarını gözönüne alalım.Bu uzaylar reel izdüşüm $P_2$ düzlemidir ve $S^1$ 'e yine homeomorfik olan bir uzay olup sırasıyla herbir u_zayın onun bölüm uzayı üzerine doğal tasvirleri $P_2:S^2 \longrightarrow P_2$ ve $P_1:S^1 \longrightarrow S^1$ ile göstereceğiz.f,zıt_koruyan olduğundan aşağı_daki sema degişmeli olacak şekilde sürekli bir $g:P_2 \longrightarrow S^1$ tas_virini üretir.

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & S^1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle P^2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle P^1} \\ P_2 & \xrightarrow[\quad g \quad]{} & S^1 \end{array}$$

$(S^2,p_2)$ ve $(S^1,p_1)$ nin sırasıyla $P_2$ ve $S^1$ in 2_yapraklı örtü uzay_ları olduklarını belirtelim.Bu,önerme 8.2 nin bir sonucudur. (2.mertebeden çevrimsel bir G grubuyla) burada temel grupların ü_retilmiş $g^*:\pi(P_2) \longrightarrow \pi(S^1)$ homomorfizmasını içeren bir yak_ laşımla bir çelişkiye varacağız.Bir yandan $\Pi(P_2)$ nin 2.mertebeden çevrimsel olduğu ve $\Pi(S_1)$ in sonsuz çevrimsel olduğu biliniyor. Bu nedenle $g^*$ homeomorfizması sadece cebirsel düşünce için apaçık olmalıdır.öte yandan $\alpha$, $\alpha$ nın uç noktaları $S^2$ nin çap ucu noktaları olacak şekilde $S^2$ üzerinde yolların bir denklik sınıfını $f^*(\alpha)$ nın uç noktaları $S^1$ üzerinde kapalı yollardır ve dolayısıyla $\Pi(P_2)$ ve $\Pi(S^1)$ temel gruplarının elemanlarını gösterir.

$P_2^*(\alpha) \neq 1$ ve $P_1^*f^*(\alpha) \neq 1$ olduğunu iddia ediyoruz.Bu iddia, $\Pi(P_2.x_o)$ ve $\Pi(S^1.y_o)$ temel gruplarının sırasıyla $P_2(x_o)$ ve $P_1(y_o)$ yol kümeleri üzerindeki etkisinin gözönüne alınmasıyla sonuç olarak çıkar.$P_2^*(\alpha)$ ve $P_1^*f^*(\alpha)$ nın bu kümeler üzerinde sonucu apaçık olmayan işlevi,tanımların sonucu olarak çıkar.Daha sonra yukarıdaki şemanın değişmeliliğinden

$$g^*P_2^*(\alpha) = P_1^*f^*(\alpha)$$ olur.Bu nedenle $g^*$, $P_2^*(\alpha)$ yı $P_1^*f^*(\alpha)$ üzerine gönderir.Bu da $g^*$ ın apaçık olduğu gerçeğine aykırıdır.|

10. örtü Uzayları İçin Varlık Teoremi

X in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayının, $\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ in $p^*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ altgrubunun eşlenik sınıfıyla izomorfizmaya bağlı olarak belirlendiğini kanıtladık. Bu gerçek aşağıdaki soruya neden olur: X in topolojik bir uzay olduğunu varsyalım ve $\Pi(X,x)$ in altgruplarının eşlenik bir sınıfının verildiğini varsayalım. $p^*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$, verilen eşlenik sınıfın elemanı olacak şekilde X in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayı mevcut olur mu? X , önemli olmayan bir ek hipotezi sağlamak koşuluyla bu sorunun olumlu cevaplandırılabileceğini göstereceğiz

önce apaçık altgruptan oluşan altgrupların eşlenik sınıfının verilmiş özel hali için bu problemi gözönüne almanın yeterli olacağını göstereceğiz.

yardımcı teorem 10.1. X, evrensel bir örtü uzayına sahip olan bir topolojik uzay olsun .Bu taktirde $\pi(X,x)$ in altgruplarının herhangi bir eşlenik sınıfı için, $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$verilen eşlenik sınıfın elemanı olacak şekilde X in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayı vardır.

İspat. (Y,q), X in bir evrensel örtü uzayı olsun, yani, Y, basit bağlantılıdır. Kısım 7 ye göre $\pi(X,x)$, $q^{-1}(x)$ kümesi üzeride sağdan geçişli olarak işler ve Y basit bağlantılı olduğundan, herhangi bir sabit nokta dışında işler. Ayrıca A(Y,q) otomorfizmalar grubu $\pi(X)$ e izomorfiktir. Ve o da $q^{-1}(x)$ kümesi üzerinde soldan sabit noktalar dışında geçişli olarak işler. Bir $y \in q^{-1}(x)$ noktasını ve verilen eşlenik sınıfa ait olan, $\pi(X,x)$ in bir G alt grubunu seçelim. H aşağıdaki şekilde tanımlanan A(Y,q) nun altgrubu olsun :ancak ve ancak $\Phi(y) = y.\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in G$ elemanı varsa $\Phi \in H$ dır. G ve H ın aşağıdaki eşleme altında izomorfik oldukları kolayca görülür: Ancak ve ancak $\Phi(y)=y.\alpha$ ise $\Phi \longleftrightarrow \alpha$ dır. H , A(Y,q) nun bir altgrubu olduğundan O,Y nin homeomorfizmalarının uygun bir süreksiz grubudur.$\tilde{X}$,Y/H bölüm uzayını,$r:Y \longrightarrow \tilde{X}$ doğal izdüşümü ve $P:\tilde{X} \longrightarrow X$ ifadeside $q: Y \longrightarrow X$ tarafından üretilmiş tasvir olsun.Bu taktirde aşağıdaki değişmeli şema elde edilir.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "r"] & \\ X & \tilde{X} = Y/H \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

Kabulden dolayı, $(Y,q)$, X in bir örtü uzayıdır ve $(Y,q)$ de önerme 8.2 den dolayı X nin bir örtü uzayıdır.$(\tilde{X},p)$ nin X in bir örtü uzayı olduğu sonucuna varılır.$(X,p)$ , x in bir örtü uzayı olduğundan $\pi(X,x)$ grubu $P^{-1}(x)$ kümesinin sağında işler.$\tilde{x}=r(y)\in p^{-1}(x)$ olsun.

$\tilde{X}$ nin kuruluşundan dolayı $\tilde{x}$ noktasına karşılık gelen $\pi(X,x)$ in eş yönlü altgrubunun kesin olarak G altgrubu olduğu açıktır. Bu da tam olarak $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{x})=G$ iddiasına eşdegerdir.|

Bu kez de aşağıdaki problemi gözönüne alalım. Bir X topo_ lojik uzayı verildiğinde X, bir evrenesel örtü uzayına sahip olur mu? Önce daha ziyade gerekli basit bir koşulu çıkaralım $(\tilde{X},p)$, X in bir evrensel örtü uzayı x, X in keyfi bir noktası, $\tilde{x}$, $p^{-1}(x)$ in bir x bir noktası U, x in bir elemanter komşuluğu ve V, $\tilde{x}$ noktasını içe_ ren $p^{-1}(U)$ nun bileşeni olsun. O taktirde temel grupları içeren aşağı_ daki değişmeli şema elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
\pi(V,\tilde{x}) \arrow[r] \arrow[d, "(P|V)^*"'] & \pi(\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "p^*"] \\
\pi(U,z) \arrow[r, "i^*"'] & \pi(X,x)
\end{tikzcd}$$

P|V, X in U üzerine bir homeomorfizması olduğundan, $(P|v)^*$ bir izo_ morfizmadır. Ayrıca hipotez gereği $\pi(\tilde{X},\tilde{x})=\{1\}$ olduğunu belirtelim. Bu iki gerçek ve bu şemanın değişmeliliğinden $i^*$ ın bir apaçık homomorfizma yani $i^*=\{1\}$ görüntüsü olduğu sonucu çıkar. Böylece X uzayının aşağıdaki özeliğe sahip olduğu sonucuna varılır:

$\pi(U,x) \longrightarrow \pi(X,x)$ homomorfizması apaçık olacak şekilde her $x \in X$ noktasının bir U komşuluğu vardır. Bu özeliği taşıyan bir uzaya yarı yerel basit bağlantılıdır denir.

Bu tanım aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir: Bir X uzayı ancak ve ancak herhangi bir ilmek X deki bir noktaya büzü_ lebilecek şekilde her $x \in X$ noktasının bir U komşuluğu varsa, yarı yerel basit bağlantılıdır.

Aşağıdaki örnek bağlantılı ve yerel yay bağlantılı olan fakat yarı yerel basit bağlantılı olmayan bir uzayın basit bir örneğidir.

Herhangi bir pozitif n tamsayısı için

$C_n = \{ (x,y) \in R^2 : (x-1/2)^2 + y^2 = 1/n^2 \}$ ;

yani $C_n$, $(1/2,o)$ merkezli ve $1/n$ yarıçaplı bir çemberdir. X, tüm n tamsayıları için $C_n$ çemberlerinin birleşimini göstersin. O taktirde X yarı yerel basit bağlantılı değildir. (o,o) noktası komşuluğun gerekli türüne sahip değildir.

Burada bir evrensel örtü uzayının varlığı için gerekli koşulun aynı zamanda yeterli olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 10.2: X, bağlantılı, yerel yay bağlantılı ve yarı yerel basit baglantılı bir topolojik uzay olsun. O taktirde $\Pi(X,x)$ in alt gruplarının herhangi bir eşlenik sınıfı verildiğinde verilen eşlenik sınıfa karşılık gelen yani, $p^*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ verilen eşlenik sınıfın elemanı olacak şekilde X in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayı vardır.

İspat: Yardımcı teorem 10.1 gereğince. X in bir evrensel örtü uzayına sahip olduğunu göstermek yeter. Bunu doğrudan kurarak yapacağız. Bu kuruluşu yapmak için bir eski toplojicinin onu nasıl ortaya çıkardığını açıklamaya çalışacağız.

Bir an için X in bir $(\tilde{X},p)$ evrensel örtü uzayına sahip olduğunu kabul edelim. Bir $\tilde{x}_o \in \tilde{X}$ taban noktası seçelim ve $x_o = p(\tilde{x}_o)$ olsun herhangi bir $y \in \tilde{X}$ noktası verildiğinde, $\tilde{X}$ yay bağlantılı olduğundan $\tilde{x}_o$ başlangıç noktalı ve y bitim noktalı bir $\alpha$ yol sınıfı vardır. $\tilde{X}$ basit bağlantılı olduğundan bu yol sınıfı tektir. Bu kez de X deki $p^*(\alpha)$ yol sınıfını y noktasına karşılık getiren fonksiyonu gözönüne alalım. Yardımcı teorem 3.1 ve 3.3 den bu fonksiyonun Y nin $x_o$ başlangıç noktasına sahip olan X deki yol sınıflarının kümesi üzerine bir_bir tasvir olduğu sonucu çıkar. Böylece $\tilde{X}$

nın noktaları $x_0$ da başlayan X deki yol sınıfları ile özdeşlene_ bilir. Bu basit gözlem, aşağıdaki kuruluşun temelidir.

Bir $x_0 \in X$ taban noktası seçelim ve onların başlangıç nok_ tası olarak $x_0$'a sahip olan X deki $\alpha$ yollarının tüm denklik sı_ nıflarının kümesi olarak $\tilde{X}$ yı tanımlayalım. $\alpha$ yol sınıfının bitim noktasına eşit $p(\alpha)$ konularak bir $p:\tilde{X} \longrightarrow X$ fonksiyonu tanımla_ yalım. Burada $\tilde{X}$ basit bağlantılı bir uzay ve $(\tilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı olacak şekilde $\tilde{X}$ nın nasıl topolojikleşeceğini göstereceğiz.

Bu hipotezimiz, X üzerindeki topolojinin aşağıdaki öze_ likleri taşıyan açık U kümelerinden oluşan bir tabana sahip olma_ sını gerektirir. U, yay bağlantılıdır ve $\pi(U) \longrightarrow \pi(X)$ homomorfiz_ ması (kapsama tasviri ile iletilmiş) apaçıktır. Başka bir deyişle U daki her kapalı yol, sabit bir yola eş değerdir. (X de).

Basitleştirmek için, böyle bir açık U kümesine temel adını vereceğiz. Eğer x ve y bir U temel açık kumesinde herhangi iki nokta ise, o taktirde x başlangıç noktalı ve y bitim noktalı U daki herhangi iki f ve g yolunun eşdeger olduklarını belirtelim. (X de). herhangi bir $\alpha \in \tilde{X}$ yolu ve $p(\alpha)$ uç noktasını içeren her- hangi U temel açık kümesi verildiğinde, U daki bir $\alpha'$ yol sınıfı için $\beta = \alpha.\alpha'$ olacak şekilde tüm $\beta \in \tilde{X}$ yollarının kumesini $(\alpha,U)$ şeklinde göstereceğiz. Buna göre $(\alpha,U)$, $\tilde{X}$ in bir altkümesidir. Tüm böyle $(\alpha,U)$ kümelerinin ailesi, açık kümelerin bir temel ailesi olarak seçilmekle $\tilde{X}$, topolojikleşir. $(\alpha,U)$ şeklindeki tüm kümele- rin ailesinin, $\tilde{X}$ üzerindeki bir topoloji için bir taban olabile- ceğini göstermek için aşağıdaki ifadeleri ispatlamak gerek: Eğer $\tau \in (\alpha,\beta) \cap (\beta,V)$ ise, o taktirde $(\tau,W) \subset (\alpha,U) \cap (\beta,V)$ olacak şekilde bir temel açık W kümesi vardır. Bununla birlikte bu ifadenin ispa- tı kolaydır: W yi $p(\tau) \in W \subset U \cap V$ olacak şekilde herhangi bir te- mel açık küme olarak seçelim. $(\tilde{X},p)$ nin X in bir evrensel örtü uzayı olduğunu ispatlamadan önce aşağıdaki iki basit gözlemi yapmak uygun olacaktır.

(a) $\alpha \subset \tilde{X}$ ve U. $p(\alpha)$ nın bir temel açık komşuluğu olsun. O taktirde $p|(\alpha,U)$. $(\alpha,U)$ nun U üzerine bire_bir bir tasviridir.

(b) U, herhangi bir temel açık küme ve $x'$U nun herhangi bir noktası olsun. O taktirde

$$p^{-1}(U) = U_k (\alpha_k, U)$$

dır.

Burada $\{\alpha_k\}$, $x_o$ başlangıç noktalı ve $x$ bitim noktalı, X deki yol sınıflarının tümünü göstersin. Ayrıca $(\alpha_k, U)$ kümeleri iki_şerli ayrıktır. (b) den p nin sürekli olduğu sonucu çıkar. O halde $p|(\alpha,U)$ nın , $(\alpha,U)$ nun U üzerine açık bir tasviri olduğunu iddia ediyoruz. Çünkü $(\alpha,U)$ nun herhangi bir açık alt kümesi $(\beta,V)$ şek_lindeki kümelerin bir birleşimidir. Burada $V \subset U$ olup ve dolayısiy_le $p|(\alpha,U)$ nın açık olduğu gerçeği yine (a) nın sonucu olarak çıkar.

Böylece p, $(\alpha,U)$ yu U üzerine homeomorfik olarak tasvir eder. U yay bağlantılı olduğundan dolayı,$(\alpha,U)$ da yay bağlantılıdır. Çünku (b) ifadesinde oluşan $(\alpha_k, U)$ kümeleri ikişerli ayrık olup , herhangi bir temel açık $U \subset X$ kümesinin bir elemanter komşuluğun gerekli olan tüm özelliklerine sahip olduğu sonucu çıkar.

Bundan sonra da $\tilde{X}$ uzayının yay bağlantılı olduğunu is_patlayacağız. $\tilde{x}_o \in \tilde{X}$ , $x_o$ daki sabit yolun denklik sınıfını göster_sin.Herhangi bir $\alpha \in \tilde{X}$ noktası verildiğinde, $\tilde{x}_o$ ve $\alpha$ noktalarını bir yayı göstermek yeter. Bu amaçla, $\alpha$ denklik sınıflarının elemanı olan bir f:I———>X yolu seçelim. Herhangi bir $s \in I$ reel sayısı için $f_s(t) = f(st)$, $t \in I$ ile $f_s$ :I———>X tanımlayalım. Bu taktirde $f_1 = f$ ve $f_o$ , $x_o$ da $f_o$ = sabit yol dur. $\alpha_s$ $f_s$ yolunun denklik sını_fını göstersin. Burada $s$———>$\alpha_s$ tasvirinin sürekli bir I———>$\tilde{X}$ tas_ viri yani $\tilde{X}$ da bir yol olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiayı ispatlamak için , herhangi bir $s_0 \in I$ ve $f(s_0)$ ın herhangi bir temel U komşuluğu için, eğer $|s-s_0|<\delta$ ise, o zaman $\alpha_s \in (\alpha_{s_0}, U)$ olacak şekilde bir $\delta>0$ reel sayısının varolduğunu görmek gerek. Bu amaçla eğer $|s-s_0|<\delta$ ise, o zaman $f_0 \in U$ olacak şekilde $\delta$ yı seçelim. f sürekli olduğundan böyle bir $\delta$ sayısı vardır. Böylece $s \longrightarrow \alpha_s$ tasviri gerektiği gibi $\tilde{x}_0$ başlangıç noktalı ve $\alpha$ bitim noktalı $\tilde{X}$ daki bir yoldur.

Sonuçta, $\tilde{X}$ nın basit bağlantılı olduğunu göstermeliyiz. Burada $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ , $\pi(X,x_0)$ ın $p^{-1}(x_0)$ üzerindeki etkisi için $\tilde{x}_0$ noktasına karşılık gelen eş yönlü altgrubudur. Böylece herhangi bir $\alpha \in \pi(X,x_0)$ için $\tilde{x}_0.\alpha$ yı belirlemeliyiz. $\alpha$ denklik sınıfnın elemanı olan kapalı bir $f_0 : I \longrightarrow X$ yolunu seçelim ve bir önceki parağrafın yöntemi ile $\tilde{X}$ da $s \longrightarrow \alpha_s$ yolunu tanımlayalım. $\tilde{X}$ daki bu yol, başlangıç noktası olarak $\tilde{x}_0$ ya , bitim noktası olarak $\alpha \in \tilde{X}$ ya sahiptir ve açıkça f yolunun bir kaldırmasıdır. O halde $\pi(X,x_0)$ ın $p^{-1}(x_0)$ üzerindeki etkisinin tanımından $\tilde{x}_0.\alpha = \alpha$ dir. Bu nedenle ancak ve ancak $\alpha = 1$ ise $\tilde{x}_0 . \alpha = \tilde{x}_0$ dır. O halde eş yönlü alt grup gerektiği gibi, yalnız bir elemandan oluşur.

## 11-Bir AltUzay Üzerinde Üretilmis örtü Uzayı :

$(\tilde X,p)$, X in bir ortü uzayı, A, baglantılı ve yerel bağlantılı olan, X in bir alt uzayı ve $\tilde A$, $p^{-1}(A)$ nın bir yay bileşeni olsun. O taktirde yardımcı teorem 2.1'e göre $(\tilde A, p|\tilde A)$, A nın bir örtü uzayıdır. Şunu sormak doğaldır: $\pi(A)$ nın altgruplarının eşlenik gruplarına bu örtü uzayı karsılık gelir mi ? Hangi koşullar altında $P^{-1}(A)$ olur? Görüleceği gibi bu soruların nispeten basit cevapları vardır. Notasyonu sabitleştirmek için $\tilde a \in \tilde A$, $a=p(\tilde a)$, $\tilde p = p|\tilde A$ : $\tilde A \longrightarrow A$ olsun ve $i: A \longrightarrow X$, kapsama tasvirini göstersin.

Önerme 11.1: Yukarıdaki hipotezler altında
$p'*\pi(\tilde A,\tilde a) = i^{-1}*[p*\pi(\tilde x,\tilde a)]$ dır.

İspat: önce $p'*\pi(\tilde A,\tilde a) \subset i^{-1}*[p*\pi(\tilde x,\tilde a)]$ olduğunu göstere_lim. Bu, aşağıdaki şemanın değişmezliğinin doğrudan bir sonucudur.

$$\begin{array}{ccc}
\pi(\tilde A,\tilde a) & \longrightarrow & \pi(\tilde X,\tilde a) \\
{\scriptstyle p'*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p*} \\
\pi(A,a) & \xrightarrow{\;i*\;} & \pi(X,a)
\end{array}$$

Bundan sonra, $p'\pi(\tilde A,\tilde a) \supset i^{-1}*[p*\pi(\tilde x,\tilde a)]$ ters kapsamayı göstereceğiz. $\alpha \in i^{-1}*[p*\pi(\tilde x,\tilde a)]$ olsun; yani, $i*(\alpha)$ $p*(\beta)$ olacak şekilde bir $\beta \in \pi(\tilde X,\tilde a)$ vardır. $\alpha$ yı gösteren kapalı bir $f: I \longrightarrow A$ yolu seçelim. Lemma 3.1 den, $pg=f$ olacak şekilde başlangıç noktalı bir tek $g: I \longrightarrow \tilde A$ yolu vardır. Teklikten dolayı $g, p \in \pi(\tilde X,\tilde a)$ , g nin denklik sınıfına ait olmalı (elemanı); yani g, kapalı bir yoldur. $\Gamma \in \pi(\tilde A,\tilde a)$ , g nin gerektiği gibi $p'*(\Gamma)=\alpha$ dır.|

Önerme 11.2: Yukarıdaki hipotez altında, ancak ve ancak $i*\pi(A,a)$ altgrubu , $p*\pi(\tilde X,\tilde a)$ altgrubunun her eşkümesine (koset) rastlarsa $p^{-1}(A)$ bağlantılıdır. { yani $\tilde A = p^{-1}(A)$ dır.}

İspat: *Kısım 7 nin yaklaşımını kullanacağız.* $p^{-1}(a)$ kümesi, bir homogen sağ $\pi(X,a)$_uzayıdır ve $p^*\pi(\tilde{X},\tilde{a})$, $\tilde{a}$ noktasına karşılık gelen eşyönlü altgrubudur. Benzer şekilde $p'^{-1}(a) = \tilde{A} \cap p^{-1}(a)$ kümesi $\tilde{a}$ noktasına karşılık gelen eşyönlü homogen sağ $\pi(A,a)$_uzayıdır. $\pi(X,a)$ ve $\pi(A,a)$ gruplarının bu iki küme üzerindeki etkilerinin tanımından herhangi bir $x \in p'^{-1}(a)$ ve herhangi bir $\alpha \in \pi(A,a)$ için $x\alpha = x(i^*\alpha)$ olacaktır.

Bu kez de eğer $p^{-1}(A)$ bağlantılı ise, o zaman $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$ olduğu görülür. Karşıt olarak eğer, $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$ ise, o zaman $p^{-1}(A)$ nın bağlantılı olduğunu iddia ediyoruz. Bunu için eger, $x$, $p^{-1}(A)$ nın herhangi bir noktası ise, $f: I \longrightarrow A$, $p(x)$ başlangıç noktalı ve $a$ bitim noktalı bir yol olsun. Yardımcı teorem 3.1 den dolayı $pg = f$ ve $g$ nin başlangıç noktası $x$ olacak şekilde bir $g: I \longrightarrow \tilde{X}$ yolu vardır. Buna göre $g$ nin bitim nokktası $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$ nın bir noktası ve dolayısıyle $\tilde{A}$ nın da bir noktasıdır. $pg$, A da bir yol olduğundan $g$, $p^{-1}(A)$ da bir yoldur. Böylece $p^{-1}(A)$ nın her noktasının $p^{-1}(A)$ daki bir yolla $\tilde{A}$ nın bir noktasına birleşebileceği gösterilmiş oluyor. Dolayısıyla $p^{-1}(A)$ bağlantılıdır. Buna karşılık, hangi koşul altında $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$ olduğunu araştırmak gerek, bir homogen sağ $\pi(X,a)$_uzayı olarak $p^{-1}(a)$, $\pi(X,a)/p^*\pi(\tilde{X},\tilde{a})$ eş küme uzayına izomorfiktir. benzer şekilde $p'^{-1}(a)$, bir sağ $\pi(A,a)$_uzayı olarak $\pi(A,a)/p'^*\pi(\tilde{A},\tilde{a})$ ya izomorfiktir. $p'^{-1}(a) \longrightarrow p^{-1}(a)$ kapsama tasviri bu ispatın ilk paragrafının koşulları gereğince $i^*\pi(A,a) \longrightarrow \pi(X,a)$ tarafından üretilmis

$$\frac{\pi(A,a)}{p'^*\pi(\tilde{A},\tilde{a})} \longrightarrow \frac{\pi(X,a)}{p^*\pi(\tilde{X},\tilde{a})}$$

eşküme uzaylarının tasvirine bu izomorfizmalar altında eşdegerdir.

Böylece ancak ve ancak eşküme uzaylarının bu tasviri üzerine ise, $p'^{-1}(a) = p^{-1}(a)$ dır. Buradan da önermenin ifadesinde yer alan koşul çıkar. |

Aşağıda bu teoremin bazı özel hallerini ve örneklerini gözönüne alacağız. Aynı notasyonları kullanacağız.

Örnekler.

11.1. $(\tilde X, p)$ nin X in düzenli bir örtü uzayı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $(\tilde A, \tilde p')$, A nın düzenli bir örtü uzayıdır. Çünkü, eğer $p_*\pi(\tilde X,\tilde a)$, $\pi(X,a)$ nın normal bir alt grubu ise o zaman $i_*^{-1}[p_*(\tilde X,\tilde a)]$, $\pi(A,a)$ nın normal bir altgrubudur. $(\tilde A, p')$ nün otomorfizmalarının grubu $(\tilde X,p)$ nin otomorfizmalarının grubunun bir alt grubu olarak gözönüne alınabilir.

Bu durumda $p^{-1}(A)$, ancak ve ancak $i_*$ tarafından üretilmiş

$$\frac{\pi(A,a)}{p'_*\pi(\tilde A,\tilde a)} \longrightarrow \frac{\pi(X,a)}{p_*\pi(\tilde X,\tilde a)}$$

bölüm gruplarının homomorfizması bir epimorfizma ise (o daima bir monomorfizmadır.), bağlantılıdır. $(\tilde X,p)$, X in düzenli bir örtü uzayı olmasa bile $(\tilde A,p')$, A nın düzenli bir örtü uzayı olabilir.

11.2. $(\tilde X,p)$ nin X in bir evrensel örtü uzayı olduğunu kabul edelim. O taktirde $p'_*\pi(\tilde A,\tilde a)$, $i_*$ in çekirdeğidir. O halde $\tilde A$ ancak ve ancak $i_*$ bir monomorfizma ise basit bağlantılıdır. Önerme 11.2 den dolayı ancak ve ancak $i_*$ bir epimorfizma ise, $\tilde A = p^{-1}(A)$. Böylece $p^{-1}(A)$ ancak ve ancak $i_*$, $\pi(A)$ nın $\pi(X)$ üzerine bir epimorfizması ise, A nın basit bağlantılı bir örtü uzayıdır.

11.3. $i_*:\pi(A) \longrightarrow \pi(X)$ nin apaçık homomorfizma olduğunu yani, $i_* = \{1\}$ görüntüsü olduğunu kabul edelim. O taktirde $p' : \tilde A \longrightarrow A$ bir apaçık örtü uzayıdır. Yani $p'$, $\tilde A$ nın A üzerine bir homeomorfizmasıdır. Böylece, bu durumda $p^{-1}(A)$, herbiri p ta_ rafından A üzerine homeomorfik olarak tasvir edilmiş yay bileşleri_ne ayrılır.Bu özellikle A nın açık, yay bağlantılı bir küme olması halinde uygulanabilir: eğer $i: \pi(A) \longrightarrow \underset{\sim}{\pi}(X)$ e homomorfizması ap_açık ise, o taktirde A.X in herhangi bir (X,p) örtü uzayı için X de bir elemanter komsuluktur.

11.5. Eğer $i^{*}$ $\underset{\sim}{\pi}(A)$ nın $\underset{\sim}{\pi}(X)$ üzerine bir izomorfizması ise, o zaman A nın herhangi bir (A,p') örtü uzayı verildiğinde,(A,p'), $(p^{-1}(A), p|(p^{-1}(A)))$ örtü uzayına (burada X yarı yerel basit bağlan_lıdır.) izomorfik olacak sekilde X in bir (X,p) örtü uzayı vardır.

Başka bir deyişle,bu koşullar altında A nın her örtü u_zayı, X in bir örtü uzayının A üzerindeki kısmı olarak gözönüne alı_nabilir.Böylece X in örtü uzayları ve A nın örtü uzayları arasında bir doğal bire bir eşleme vardır.

KAYNAKLAR

1. Spanier,E.H.,Algebraic Topology, Mc.Graw_Hill.Nev york 1966.

2. I.M.Singer. and J.A . Torpe lecture Notes on Elementary Topology and Geometry.1967

3. F.Hirzebrach. Aserres of Comprehensive Studies in Mathematics Topological Methods in Algebraic Geometry

4.Gray,W.J. A Note on Covering Transformations. 1969

# Ö Z G E Ç M İ Ş

1968 yılında Kırşehir, Çiçekdağı'nda doğdum. İlkokulu Safalı Köyünde okudum. Orta Okul ve Liseyi Yerköy'de okudum. 1985 yılında Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümünü kazandım. 1987-1988 Öğretim ylında Yıldız Üniversitesi, Matematik Bölümüne yatay geçiş ile kayıt oldum. 1988-1989 Öğretim yılı sonunda mezun oldum. 1990 yılında araştırma görevlisi olarak Y.Ü.Fen-Ed.Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. Halen Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalında göreve devam etmekteyim.

Haziran 1991

Ertuğrul YAZICI