YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Parabolik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Numerik Çözümleri

Nurinnisa Özen

Yüksek Lisans Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

NURİNNİSA ÖZEN

İSTANBUL 1987

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

NURİNNİSA ÖZEN

İSTANBUL 1987

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada, parabolik kısmi türevli diferansiel denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri araştırılmıştır. Çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısmi türevli diferansiel denklemlerin tanımı, nümerik çözümleri, ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiel denklem çeşitleri, tek ve iki boyutlu parabolik denklemler anlatılmıştır.

İkinci bölümde, lineer ve lineer olmayan parabolik denklemler için explicit ve implicit çözüm yöntemleri örnekler verilerek anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, bir örnek problemin explicit ve implicit yöntemle çözümü için bilgisayar programı yazılmış ve sonuçları verilmiştir.

Yararlandığım eserler çalışmanın sonuna eklenmiştir.

SUMMARY

This study was devoted to the research of methods for the numeric solution of differential equations with parabolic partial derivatives. The study consists of three parts.

In the first part you will find the definition of differential equations with partial derivatives their numerical solution, types of second grade differential equations with partial derivatives and the description of parabolic equations with single and double dimensions.

Explicit and implicit solution methods to be applied to both linear and non-linear parabolic equations are explained with various examples in the second part.

The third part contains a computer program for the explicit and implicit solution of a sample problem and the results obtained therefrom.

References are given enclosed.

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİEL DENKLEMLER VE PARABOLİK DENKLEMLERE GİRİŞ

1.1. KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİEL DENKLEMİN TANIMI

x_i ler bağımsız değişkenler ve y_j ler bağımlı değişkenler $i=1(1)n$ $j=1(1)m$ olmak üzere genelde bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bağıntılar kısmi türevli diferansiel denklem sistemi oluşturur. Genel yazılışı

$$f(X,Y,\frac{\partial Y}{\partial X},\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2},\ldots,\frac{\partial^p Y}{\partial X^p})=0$$

şeklindedir. Bu sistemde $X=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $Y=[y_1,y_2,\ldots,y_m]$ dir. Bağıntı sayısı bağımlı değişken sayısı kadardır. Bu sistemde $y=[u]$ ise sistemin genel yazılışı

$$\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ldots,\frac{\partial^p u}{\partial x_n^p})=0$$

şeklindedir.

Bağımlı değişkenleri $x_1=x$, $x_2=y$ olduğunda $u=f(x,y)$ veya $f(x,y,u)=0$ kısmi türevli diferansiel denklemin açık ya da kapalı çözümü olarak alınabilir.

Kısmi türevli diferansiel denklemde bulunan türevlerin mertebelerinin en yükseğine kısmi türevli diferansiel denklemin mertebesi denir.

Kısmi türevli diferansiel denklem tam ve rasyonel hale getirildikten sonra, en yüksek mertebeden olan türevli terimin derecesine kısmi türevli diferansiel denklemin derecesi denir.

1.1.1. KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Kısa zamanda hızla işlem yapabilen bilgisayarların gelişmesi fen bilimlerinde ve mühendislik dallarında birçok problemin nümerik yöntemler ile kolayca çözülebilmesi, kısmi türevli diferansiel denklemlerin nümerik çözümleri için çeşitli yöntemlerin gelişmesine neden olmuştur.

Geliştirilen bu yöntemlerden en çok kullanılanları sonlu fark yöntemleridir.

Teorisi basit olan sonlu fark yönteminin kötü olan tarafı sonuçların istenilen hassaslıkta olmasının sağlanması güçlüğü ve çok sayıda kısmi aralık kullanıldığında veya küçük adım uzunluğu kullanıldığında büyük boyutlarda denklem sistemlerinin oluşması ve bilgilerin depolanma güçlüğüdür.

Kısmi türevli diferansiel denklemler ve denklem sistemleri fiziksel olay sonucunda oluşurlar. Bu tür denklemlere ve denklem sistemlerine hidrodinamik, elastitise teorisi, kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği v.b. uygulama alanlarında karşılaşılması halinde analitik çözümleri genellikle çok karmaşık işlemlerle ve diferansiel denklemin özel durumlarına göre çözülebilir. Ancak çoğunlukla analitik çözüm bulma olanağı yoktur.

Kısmi diferansiel denklemlerde çözüm fonksiyonunun tanım bölgesini dikdörtgen bölge alarak inceleyeceğiz. Eğer bölge bir eğri ile sınırlanmışsa (eğrisel bölge) o zaman bu bölge kısmi dikdörtgen bölgelere ayrılır. Bu dikdörtgen alt bölgelerde sonlu fark ifadeleri kısmi türevler için de kullanılır. Ancak bölgeyi sınırlayan eğriye komşu noktalarda eğri bu dikdörtgenlerin köşelerinden geçmez. Bu nedenle eğrinin dikdörtgenin kenarlarını kestiği noktalardaki türevler sonlu fark ifadeleri ile belirlenemez. Bunun için sınır noktasına en yakın nokta civarında seri açılımları kullanılır.

Mühendislik ve diğer bilimlerde karşılaşılan kısmi türevli denklemler veya denklem sistemleri çoğunlukla ikinci mertebedendir ve

$$A(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir. Bu denklem ikinci mertebeden türevli terimlerine göre lineerdir ve f(x,y,u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$) fonksiyonun u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$'ye göre lineer olması halinde kısmi türevli diferansiel denklemlere lineer kısmi türevli diferansiel denklemler, f(x,y,u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$) fonksiyonu u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ye göre lineer değilse quasilineer denir.

İkinci mertebeden bir kısmi türevli diferansiel denklem bir D bölgesinin herhangi bir noktasında $B^2 - 4AC \geq 0$ koşulunu sağladığı halde bir başka noktasında $B^2 - 4AC < 0$ koşulunu sağlayabilir. Bu farklılıklar nedeniyle de D bölgesindeki bir noktada $B^2 - 4AC$ nin alacağı değerlere göre ikinci mertebeden kısmi türevli denklem;

$B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik denklem

$B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik denklem

$B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik denklem

adını alır.

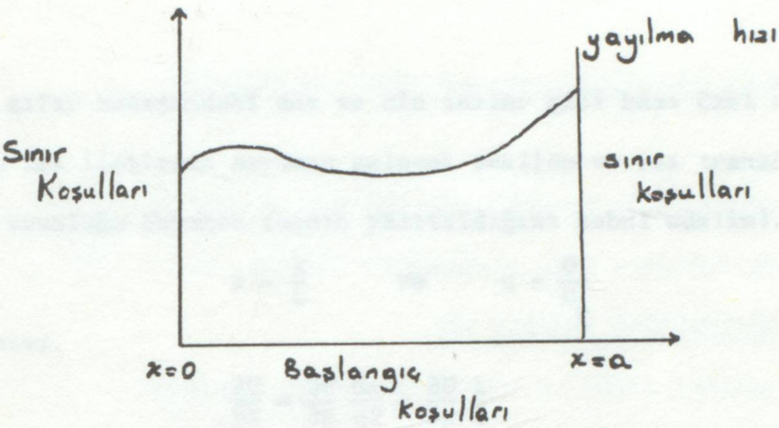
1.2. PARABOLİK DENKLEMLER

Bu tür kısmi türevli diferansiel denklemlere yayılma, büyüme ya da hareket problemlerinde karşılaşılır.

Bölgenin bütün noktalarında $B^2 - 4AC = 0$ ise D bölgesinde ikinci mertebeden diferansiel denklem paraboliktir.

x=sabit sınırları boyunca bir t_o anında u fonksiyonunun başlangıç değeri veya fonksiyonun normal türevi ya da fonksiyon ile türevin lineer kombinasyonu parabolik denklemin sınır koşulları olarak gereklidir.

u(x,0) başlangıç koşulu olarak verilir. Buna karşılık u(0,y) ve u(a,y) sınır koşulları olarak verilebilir. Parabolik tip problemlerde çözüm kapalı bölgede yapılamaz. Verilen başlangıç koşullarından başlanarak açık bulunan tarafa doğru yayılarak nümerik çözümler hesaplanır.



1.2.1. BOYUTSUZ ŞEKLE DÖNÜŞTÜRME, TEK BOYUTLU VE İKİ BOYUTLU PARABOLİK DENKLEMLER

Bir matematik problemi olarak düşünüldüğünde farklı olaylar ve farklı parametreler için karşımıza çıkan diferansiel denklemler boyutsuz olarak ifade edilirler. Boyutsuz matematik formülüyle ifade edilmiş bütün problemler için bir çözüm yöntemi verilir. Örneğin, yapışkan bir ortamda bir sarkacın salınımları ile resistans ve indüktans boyunca elektrik kapasitesinin boşalması fiziksel olarak farklı problemlerdir, ancak, boyutsuz değişkenler cinsinden ifade edildiklerinde matematiksel olarak eşdeğerdir.

Bu durum problemin boyutsal olarak farklı olmasında değil sadece aynı tip problemin değişkenlerinin farklı boyutlu olması halinde geçerlidir. Boyutsuz denklemlere karşılık gelen tek bir çözüm çok değişkenli denklemleri çözmemize yardım eder.

Boyutsuzlaştırma işlemi,

$$\frac{\partial U}{\partial T} = k \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad , \quad k \text{ sabit} \tag{1.1}$$

parabolik denklemi ile ifade edilebilir. Burada U, bir T süresi sonra ince bir üniform çubuğun bir ucundan X uzaklıktaki ısıyı verir. L çubuğun uzunluğunu,

U_o sıfır zamanındaki max ve min ısılar gibi bazı özel ısıları ifade etsin (çubuğun ısı iletişimi meydana gelecek şekilde ve ısı transferi k ucunda olacak şekilde uzunluğu boyunca ısının yalıtıldığını kabul edelim).

$$x = \frac{X}{L} \qquad \text{ve} \qquad u = \frac{U}{U_o}$$

alalım.

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dX} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial U}{\partial X}\right)\frac{dx}{dX} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

(1.1) denklemi düzenlenirse

$$\frac{\partial(uU_o)}{\partial T} = \frac{k}{L^2}\cdot\frac{\partial^2(uU_o)}{\partial x^2}$$

olur. Yani

$$\frac{1}{kL^{-2}}\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ye dönüşür. $t = \frac{kT}{L^2}$ dönüşümüyle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

elde edilir. Bu (1.1) in boyutsuz şeklidir.

İkinci mertebeden parabolik denklemleri tek bağımlı değişkene göre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

veya iki bağımlı değişkene göre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

şeklinde yazabiliriz.

PARABOLİK DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

2.1. LİNEER PARABOLİK DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

2.1.1. TEK VE İKİ BAĞIMLI DEĞİŞKENLER İÇİN EXPLICIT ÇÖZÜM YÖNTEMİ

TEK BAĞIMLI DEĞİŞKENLER İÇİN

Parabolik tip problemlerin en güzel örneklerinden biri ısı yayılma problemidir. Bu problemin ikinci mertebeden parabolik denklem ifadesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklindedir.

L uzunluklu bir dikdörtgen plakayı gözönüne alalım. Bu plakanın iki ucunda başlangıçta sıcaklık u=0 olsun. Bu plakayı alt dikdörtgenlere bölelim. Herhangi bir t anında oluşturulan diferansiel denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklinde gösterebiliriz. Isı eşitliğine yakınsamak istersek altı noktayı kullanırız. Yani bu denklemde $i=0,1,\ldots,6$, $x=ih$ ve $j=0,1,\ldots,6$ $t=jk$ olmak üzere sonlu farklar ile gösterimi

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

şeklindedir. $u_{i,j}$ düğüm noktası için ileri farklar uygulandığında

$$\frac{\partial u}{\partial t} \text{ için } \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ için } \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

ifadeleri kullanılmıştır (EK-2).

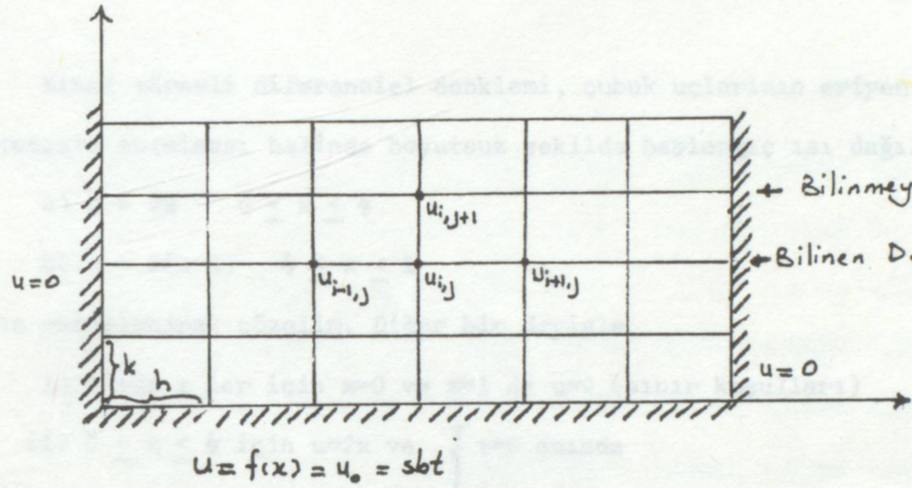
$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)$$

$$r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} = \frac{k}{h^2}$$

seçilerek

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \qquad (2.1)$$

elde edilir.



Şekil - 1

Buradan (i,j+1) rinci noktada $u_{i,j+1}$ bilinmeyen ısı için j inci zamandaki bilinen ısıları kullanarak (2.1) ısı yayılma denklemi bulunur. Bu denklem her adım için yazılırsa bir denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle u değerleri bulunur.

Bir bilinmeyen değeri doğrudan doğruya bilinen değerler cinsinden ifade eden formüle explicit formül denir. Bu formül yardımıyla çözüme gidilen yönteme de explicit yöntem denir.

Explicit yöntemde ısı yayılma denkleminin nümerik çözümünün kararlı (yakınsak) olabilmesi için r değerinin büyüklüğü önemlidir. Bu, $N = \frac{1}{h}$ olmak üzere nümerik integraldeki en iyi yaklaşımı seçmeye bağlıdır. r nin seçimi, nümerik çözümün kararlılığını (yakınsamasını) garanti edebilmek için

$$r \leq r_N = \frac{1}{1 + \sigma \frac{\pi}{2N}}$$

şeklinde olmalıdır. En kaba biçimde n sonsuz için $r \leq \frac{1}{2}$ alınabilir. Bu da bize, explicit yöntemin $0 < r \leq \frac{1}{2}$ olduğu zaman geçerli olduğunu gösterir.

Explicit yöntemdeki r değerinin önemini şöyle gösterebiliriz:

ÖRNEK-1:

Kısmi türevli diferansiel denklemi, çubuk uçlarının eriyen buz bloklarıyla temasta tutulması halinde boyutsuz şekilde başlangıç ısı dağılımının

a) $u = 2x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

b) $u = 2(1-x) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

olmasından yararlanarak çözelim. Diğer bir deyişle

i) Bütün t ler için x=0 ve x=1 de u=0 (sınır koşulları)

$$\text{ii)}\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için } u=2x \text{ ve} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ için } u=2(1-x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=0 \text{ anında} \\ \text{(Başlangıç koşulları)} \end{array}$$

(bu başlangıç ısı dağılımı çubuğun ortası uzun bir süre ısıtılarak ve uçları buzla temas halinde tutularak elde edilir).

a) $\delta x = h = 0.1$, $\delta t = k = 0.001$ alırsak $r = \frac{k}{h^2} = 0.1$ olur. Bu durumda

$$u_{i,j+1} = r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1-2r)u_{i,j}$$

den

$$u_{i,j+1} = 0.1(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + 8u_{i,j}) \tag{2.2}$$

buluruz. Bu sistemin çözülmesiyle u değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.960000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.796000	0.928000	0.796000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.599600	0.789600	0.901600	0.789600	0.599600	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.399960	0.598640	0.781800	0.879200	0.781800	0.598640	0.399960	0.200000	0.000000
0.000000	0.199996	0.399832	0.597088	0.773224	0.859720	0.773224	0.597088	0.399832	0.199996	0.000000

b) $\delta x=h=0.1$ ve $\delta t=k=0.005$, $r=0.5$ alalım. Bu durumda

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + 0.5u_{i-1,j} - 2.0.5u_{i,j} + 0.5u_{i+1,j}$$

$$u_{i,j+1} = \tfrac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \qquad (2.3)$$

Sonlu fark denkleminin sınır ve başlangıç değerlerine uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar:

0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.800000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.700000	0.800000	0.700000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.550000	0.700000	0.700000	0.700000	0.550000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.375000	0.550000	0.625000	0.700000	0.625000	0.550000	0.375000	0.200000	0.000000
0.000000	0.187500	0.375000	0.500000	0.625000	0.625000	0.625000	0.500000	0.375000	0.187500	0.000000
0.000000	0.187500	0.343750	0.500000	0.562500	0.625000	0.562500	0.500000	0.343750	0.187500	0.000000
0.000000	0.171875	0.343750	0.453125	0.562500	0.562500	0.562500	0.453125	0.343750	0.171875	0.000000
0.000000	0.171875	0.312500	0.453125	0.507813	0.562500	0.507813	0.453125	0.312500	0.171875	0.000000
0.000000	0.156250	0.312500	0.410156	0.507813	0.507813	0.507813	0.410156	0.312500	0.156250	0.000000
0.000000	0.156250	0.283203	0.410156	0.458984	0.507813	0.458984	0.410156	0.283203	0.156250	0.000000
0.000000	0.141602	0.283203	0.371094	0.458984	0.458984	0.458984	0.371094	0.283203	0.141602	0.000000
0.000000	0.141602	0.256348	0.371094	0.415039	0.458984	0.415039	0.371094	0.256348	0.141602	0.000000
0.000000	0.128174	0.256348	0.335693	0.415039	0.415039	0.415039	0.335693	0.256348	0.128174	0.000000
0.000000	0.128174	0.231934	0.335693	0.375366	0.415039	0.375366	0.335693	0.231934	0.128174	0.000000
0.000000	0.115967	0.231934	0.303650	0.375366	0.375366	0.375366	0.303650	0.231934	0.115967	0.000000

Görüleceği gibi, bu sonlu fark çözümünün kısmi diferansiel denklemi çözümüne (a) şıkkındaki kadar iyi bir tahmin getirememiştir. Yine de çoğu teknik konularda uygun olabilir.

c) $\delta x=h=0.1$, $\delta t=k=0.01$, $r=1$ olur. Bu durumda

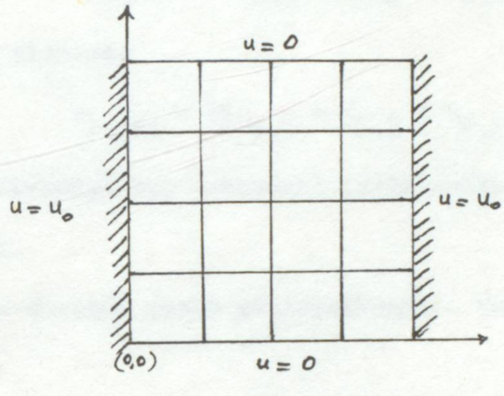
$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} = u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j} \tag{2.4}$$

buluruz. Sonlu fark denkleminin sınır ve başlangıç değerlerine uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar:

0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.600000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.400000	1.000000	0.400000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.200000	1.200000	-0.200000	1.200000	0.200000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.000000	1.400000	-1.200000	2.600000	-1.200000	1.400000	0.000000	0.200000	0.000000
0.000000	-0.200000	1.600000	-2.600000	5.200000	-5.000000	5.200000	-2.600001	1.600000	-0.200000	0.000000
0.000000	1.800001	-4.400001	9.400001	-12.800000	15.400000	-12.800000	9.400001	-4.400001	1.800001	0.000000
0.000000	-6.200001	15.600000	-26.600000	37.600000	-41.000000	37.600000	-26.600000	15.600000	-6.200002	0.000000

Bunlar başlangıç ve sınır değerlerinden yararlanılarak çözülen (2.4) denkleminin doğru çözümleri olduğu halde anlamsızdır.

İKİ BAĞIMLI DEĞİŞKENLER İÇİN



L uzunluklu kenarları olan bir kare plaka gözönüne alalım. Bu plakanın iki ucunda başlangıçta sıcaklık u_o olsun. u_o sıcaklığı iki kenarda sabit tutulurken diğer iki kenarda u=0 dan u_o sıcaklığına erişsin. Zaman ile sıcaklığın değişimi bu plaka içindeki noktalarda plakayı alt dikdörtgen bölgelere ayırmakla belirlensin. Bu plaka için herhangi bir t anında u(x,y,t) sıcaklığı ile oluşturulan diferansiel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

şeklindedir.

Sınır koşulları $u(0,y,t) = u(L,y,t) = u_o$

$u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0$

dır. Başlangıç koşulu t=0 anında u(x,y,0)=0 dır. Bu kare plaka k=L/4 kenar uzunluklu kare bölgelere ayrılmış olsun. $\delta t=k$ zaman aralığı kullanalım. $t=t_j$ anında bir noktadaki ısı $p_{i,j}$ ise $\nabla^2 u$ için merkezi farklar $\partial u/\partial t$ için ileri fark formülleri kullanılır ve $\alpha = Kk/h^2$ alınırsa

$$u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{\ell,j} - 4u_{i,j} = \frac{1}{\alpha}(u_{i,j+1} - u_{i,j})$$

şeklinde bir bağıntı bulunur. Sol taraftaki tüm terimler ve sağ taraftaki ikinci terim bilinmektedir.

$$u_{i,j+1} = \alpha(u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{\ell,j}) + (1 - 4\alpha)u_{i,j}$$

$\alpha = \frac{1}{4}$ olarak alınırsa

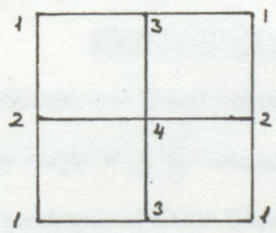
$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{\ell,j})$$

$t=t_j$ anında herhangi bir noktadaki sıcaklıkların komşu noktalardaki sıcaklıkların ortalamasıdır.

Bu durumda çözüm güçleşmektedir. Yani merkezi farkları kullanmak hatadır.

$$\nabla^2 u = k \frac{\partial u}{\partial t}$$

çözülmek istenirse, $t=t_{j+1}$ zamanındaki herhangi bir noktadaki ısı hesabı plakanın çevre noktalarında gerçek değerlerine yakınsamaz. Çünkü bu noktalarda verilen fark bağıntısı gerçek olarak uygulanamaz. Herhangi bir iç noktada t_{j+1} ısısının hesaplanması bu iç noktaya komşu noktalardaki ısı değerlerini



şeklindeki katsayılar alınmak yoluyla elde edilecek bir sistemin çözümü ile belirlenebilir. Denklem sistemi gerçek çözümlere yakınsamaz. Kısmi türevli diferansiel denklemdeki bütün kısmi türev ifadeleri aynı anda farklı doğrultularda merkezi farklar alınarak elde edilir ve fark denklemlerinden bölgenin bütün çevre noktalarındaki bilinen değerleri kullanılarak iç noktalar için çözüm değerleri hesaplanabilir.

Çözümün (x,y,t) koordinatlarını içeren noktaları için $x=i\delta x$, $y=j\delta y$, $t=n\delta t$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu noktalarda u nun değeri

$$u(i\delta x,\ j\delta y,\ n\delta t) = u_{i,j,n}$$

dir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

denkleminin sonlu fark şekli

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\delta t} = \frac{k}{(\delta x)^2}\left(u_{i-1,j,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i+1,j,n}\right) + \frac{k}{(\delta y)^2}\left(u_{i,j-1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j+1,n}\right)$$

dir. Bu denklemin çözülebilmesi için

$$k\left(\frac{1}{(\delta x)^2} + \frac{1}{(\delta y)^2}\right)\delta t \leq \tfrac{1}{2}$$

koşulu geçerli olmalıdır.

Bu yöntem çoğu problemlerde pratik olmaz.

2.1.2. CRANK-NİCOLSON VE İKİ BAĞIMLI DEĞİŞKENLER İÇİN IMPLICIT ÇÖZÜM YÖNTEMİ

CRANK-NICOLSON IMPLICIT ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Explicit yöntem çok basit olmasına rağmen yakınsama güçlükleri ve sadece $0 \leq \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ için veya $k \leq \frac{h^2}{2}$ koşullarında gerçek çözüme yakınsadığından kullanışlı değildir. Yani parabolik diferansiel denklemin explicit formülle çözümünde $\delta x=h$ ın çok küçük tutulması gerektir. h ın istenilen oranda yakınsama ile sonuca varılabilmesi için küçük tutulmasını gerektirir. Bu da çok sayıda adımla işlem yapılması bölgenin alt bölgelerinin sayısının çoğalmasını ve denklem sisteminin boyutunun artmasını bir dezavantaj olarak getirir. Bu etkenleri ortadan kaldırmak için tek boyutlu parabolik denklemin nümerik çözümü için

CRANK-NICOLSON (1947), toplam hesap hacmini azaltan ve $r = k/h^2$ nin bütün sonlu değerleri için geçerli olan (yani yaklaşık ve dengeli) bir yöntem geliştirmişlerdir.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ nin yerine onun (j+1) inci ve j inci zaman aralığındaki sonlu-fark karşılıklarını koyarsak denklem şöyle belirlenir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

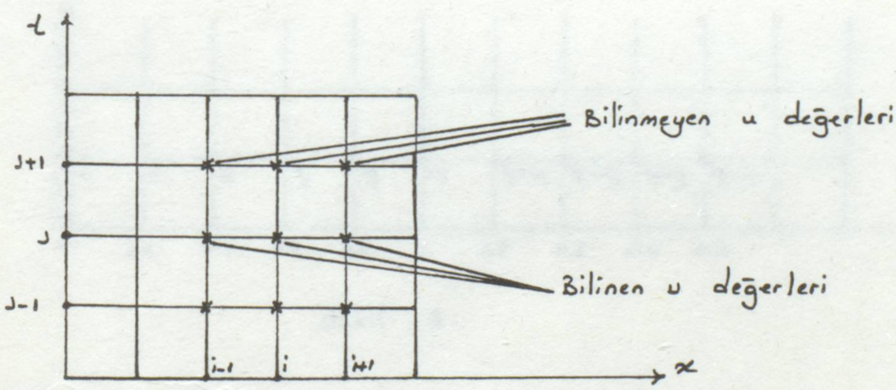
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right\}$$

$$2u_{i,j+1} - 2u_{i,j} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

$$2u_{i,j+1} - 2u_{i,j} = ru_{i+1,j+1} - 2ru_{i,j+1} + ru_{i-1,j+1} + ru_{i+1,j} - 2ru_{i,j} + ru_{i-1,j}$$

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \tag{2.5}$$

Genelde (2.5) denkleminin sol tarafında üç bilinmeyen sağ tarafında üç bilinen değer bulunur.



Başlangıç ve sınır koşulları verildiğinde eğer j inci zaman adımı için i=1,2,..,N olmak üzere N tane dikdörtgen bölge varsa j. zaman adımındaki bilinen değerler cinsinden j+1 zaman adımındaki bilinmeyenleri içeren N tane denklem yazılabilir.

$j=0$ olduğunda N tane denklem başlangıç ve sınır koşullarını içerir.

Bilinmeyen bir değerin hesaplanmasının eş zamanlı bir dizi denklemin çözülmesine bağlı olduğu yönteme implicit yöntem denir.

ÖRNEK-2:

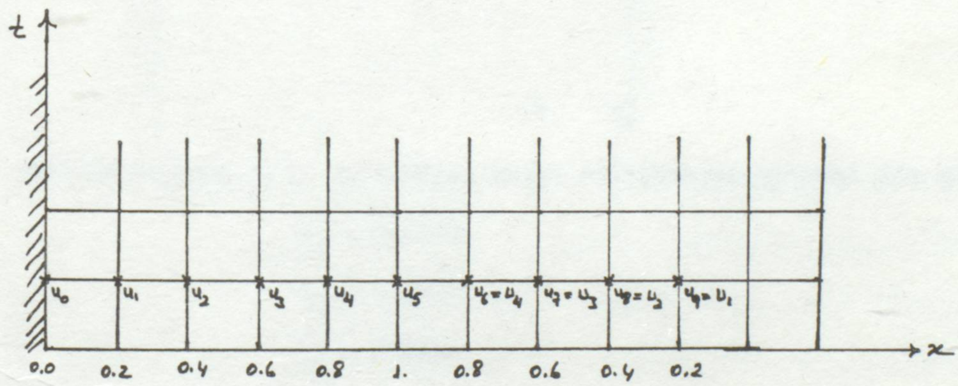
Örnek-1 i CRANK-NICOLSON implicit metodu ile çözelim. $h=0.1$ alalım. Yöntem $r = k/h^2$ nin bütün sonlu değerleri için geçerli olmasına rağmen büyük bir değer $\partial u/\partial t$ için kesin olmayan bir tahmin verecektir. Uygun değerlerden biri $r=1$ dir. $k=0.01$ alırsak

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \qquad (2.6)$$

sonucunu verir.

$u_{i,j+1}$'i u_i $(i=1,2,\ldots,9)$ yazalım. Simetriden dolayı $u_6 = u_4$, $u_7 = u_3$ dür.



Şekil .3.

Birinci zaman aralığındaki u değerleri

$$- 0 + 4u_1 - u_2 = 0 + 0.4 = 0.4$$

$$- u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.2 + 0.6 = 0.8$$

$$- u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.4 + 0.8 = 1.2$$

$$- u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.6 + 1.0 = 1.6$$

$$- u_4 + 4u_5 - u_6 = 0.8 + 0.8 = 1.6$$

$$- u_5 + 4u_6 - u_7 = 1.0 + 0.6 = 1.6$$

$$- u_6 + 4u_7 - u_8 = 0.8 + 0.4 = 1.2$$

$$- u_7 + 4u_8 - u_9 = 0.6 + 0.2 = 0.8$$

$$- u_8 + 4u_9 - 0 = 0.4 + 0 = 0.4$$

elde edilir. Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

dir. Denklem sistemi EK-1 de verilen Gauss eliminasyon yöntemi ile çözülürse

$$u_1 = 0.1989$$

$$u_2 = 0.3956$$

$$u_3 = 0.5834$$

$$u_4 = 0.7381$$

$$u_5 = 0.7691$$

bulunur, ($u_6 = u_4$, $u_7 = u_3$, $u_8 = u_2$, $u_9 = u_1$ dir).

İkinci zaman aralığındaki u değerleri:

$$- 0 + 4u_1 - u_2 = 0 + 0.3956$$

$$- u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.1989 + 0.5834$$

$$- u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.3956 + 0.7381$$

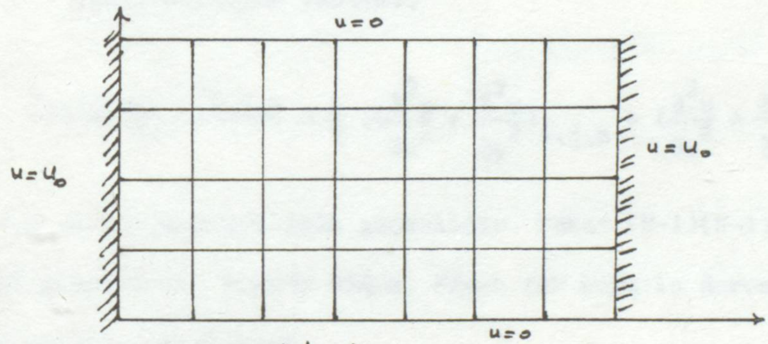
$$- u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.5834 + 0.7691$$

$$- u_4 + 4u_5 - u_6 = 2.0.7381$$

denklem sisteminin çözümünden elde edilir.

İKİ BAĞIMLI DEĞİŞKENLER İÇİN IMPLICIT ÇÖZÜM YÖNTEMİ

L uzunluklu kenarları olan bir plaka gözönüne alalım. Bu plakanın iki ucunda başlangıçta sıcaklık u_o olsun.

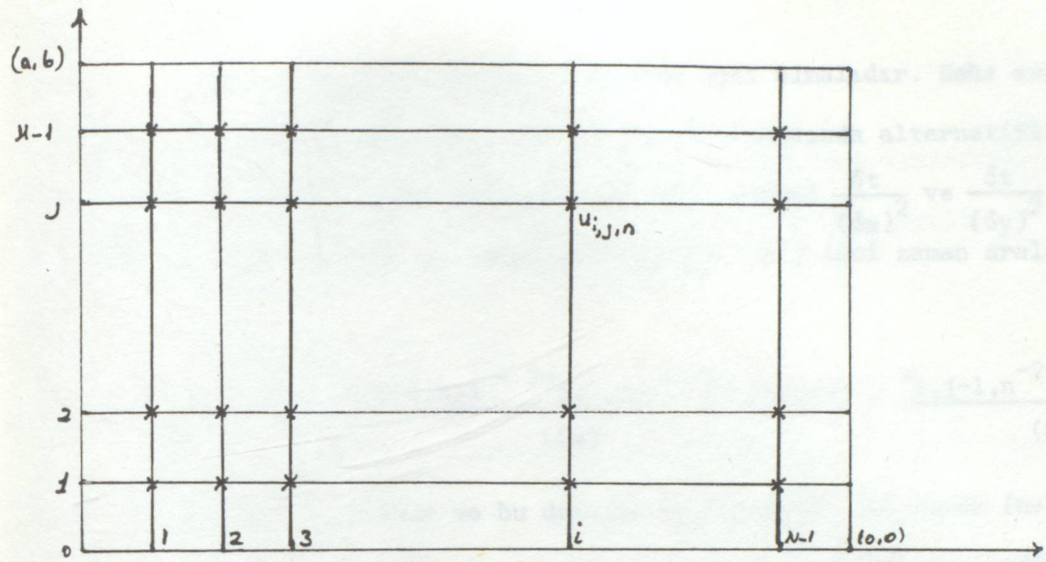


Şekil .4.

u_o sıcaklığı bu iki kenarda sabit tutulurken diğer iki kenarda u=0 dan u_o sıcaklığına erişsin. Zaman ile sıcaklığın değişimi bu plaka içindeki noktalarda plakayı alt dikdörtgen bölgelere ayırmak koşulu ile belirlenebilir. Bu plaka için herhangi bir t anında (x,y,t) sıcaklığı ile oluşturulan diferansiel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2.7)$$

şeklindedir.



Şekil. 5.

CRANK-NICOLSON yöntemi,

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{\delta t} = \frac{k}{2}\{(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{i,j,n} + (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{i,j,n+1}\}$$

bütün x,y ve t değerleri için geçerlidir. Fakat (M-1)(N-1) cebirsel denklemlerin çözümünü gerektirir. Burada $N\delta x=a$, $M\delta y=b$ tek boyutlu durumun tersine basit tekrarlama yoluyla çözülürler.

Bu yöntemde herhangi n inci zaman ve (n+1) inci zaman adımlarında kısmi türevli denklemin sol tarafının merkezi farkları hesaplanıp bunun ortalaması alınarak bütün plaka boyunca eğer x doğrultusunda kısmi aralık sayısı N-1, y - doğrultusunda kısmi aralık sayısı M-1 ise elde edilecek (M-1)(N-1) tane denklemden oluşan lineer denklem sisteminin çözümü ile belirlenebilir. Ancak bu sayıdaki denklemden oluşan sistemin çözümünün güçlüğü başlangıçtaki tanımdan hareketle herhangi bir (n+1) inci zamanda x doğrultusundaki hareketi düşünerek her adımda M-1 veya N-1 denklemden oluşan sistemin bulunarak bu işlemin N-1 veya M-1 kez tekrarlanması ile elde edilecek çözümlerin alınabileceği gösterilmiştir.

Zaman aralığı δt bütün işlemlerde aynı olmalıdır. Daha sonraki zaman aralıkları için çözümlerin sütunlar ve satırlar arasında alternatifli biçimde çıkartılması şartıyla CRANK-NICOLSON implicit yöntemi $\frac{\delta t}{(\delta x)^2}$ ve $\frac{\delta t}{(\delta y)^2}$ nin bütün oranları için geçerlidir. n. zaman aralığından (n+1) inci zaman aralığına geçilmesi

$$\frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{k\delta t} = \frac{u_{i-1,j,n+1} - 2u_{i,j,n+1} + u_{i+1,j,n+1}}{(\delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j+1,n}}{(\delta y)^2}$$

denkleminin çözümü ile olur ve bu denklem daha sonraki adımlarda (n+2) inci zamanda çözümü bulabilmek için kullanılır. (n+1) zaman aralığından (n+2) inci zaman aralığına geçilmesi de aşağıdaki denklemin çözülmesi ile gerçekleşir:

$$\frac{u_{i,j,n+2} - u_{i,j,n+1}}{k\delta t} = \frac{u_{i-1,j,n+1} - 2u_{i,j,n+1} + u_{i+1,j,n+1}}{(\delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1,n+2} - 2u_{i,j,n+2} + u_{i,j+1,n+2}}{(\delta y)^2}$$

Bu yöntemin geçerli olabileceği durumlar hakkında çok az şey bilinmektedir ve dikdörtgen olmayan bölgelerde ve daha genel denklemlerde diğer yöntemlere üstün olup olmadığı da bilinmemektedir.

2.1.3. SİLİNDİRİK VE KÜRESEL KOORDİNATLARDA PARABOLİK DENKLEMLER

Üç boyutta ısı iletimi için denklemin boyutsal olmayan formu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

dir. Burada silindirik polar koordinatlar (r,θ,z)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

dir. Basitleştirmek amacıyla u nun z den bağımsız olduğunu farzedersek $\partial u/\partial t$ denklemi iki boyutlu bir denkleme indirgenir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{2.8}$$

r nin sıfır olmayan değerleri için türevlerin sonlu fark yaklaşımlarıyla gösterilmesi güçtür. Fakat r=0 da sağ tarafın teklik içerdiği görülür. $\nabla^2 u$ nun polar koordinat formu yerine (2.8) no.lu denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.9}$$

şekle dönüştüren kartezyen koordinatlarla değiştirmek suretiyle çözülebilir.

δr yarıçaplı bir daire çizelim. Merkezleyelim, ve Ox, Oy nin bu daireyi 1, 2, 3, 4 noktalarında kestiğini kabul edelim. Bu noktalara karşılık gelen fonksiyon değerlerini u_1, u_2, u_3, u_4 ile gösterelim. Orijindeki fonksiyon değerini u_o olarak alalım. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

idi. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ nin değerlerini yazarsak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u = \frac{u_1 - 2u_o + u_3}{(\delta x)^2} + \frac{u_2 - 2u_o + u_4}{(\delta y)^2}$$

$$= \frac{u_1 - 2u_o + u_3}{(\delta r)^2} + \frac{u_2 - 2u_o + u_4}{(\delta r)^2}$$

$$= \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_o}{(\delta r)^2} + O\{(\delta r)^2\} .$$

Eksenlerin küçük bir açıyla döndürülmesi benzeri bir denklemi oluşturur. Bu dönüşün tekrarlanması ve bazı denklemlerin eklenmesi ise

$$\nabla^2 u = \frac{4(u_M - u_o)}{(\delta r)^2} + O\{(\delta r)^2\}$$

eşitliğini verir.

Burada u_M daire çevresinde u nun bir orta değeridir.

Silindirik koordinatlar içinde iki boyutlu bir problem dairesel bir simetriye sahipse $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ ve (2.8) no.lu denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.10}$$

şeklinde basitleşir.

$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ olması problemin merkeze göre simetrik olması durumunda görülür. $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ olduğunu varsayarak $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$ nin bu noktada $\frac{0}{0}$ formunu aldığı görülür.

Maclaurin seri açılımıyla

$$u'(r) = u'(0) + ru''(0) + \tfrac{1}{2} r^2 u'''(0) + \dots$$

olur. Ancak $u'(0)=0$ dır. Böylece $r=0$ da $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$ nin değeri $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ ye eşittir. Dolayısıyla (2.10) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \tag{2.11}$$

şeklinde yazılır.

Dairesel simetriden dolayı $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ idi. x eksenini r yönünde buna uygun hale getirebiliriz. O zaman yine (2.8) denkleminden (2.11) denklemi bulunmuş olur. (2.11) in sonlu-fark gösterimi $r=0$ da $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ ile basitleştirilebilir. Çünkü $u_{-1,j} = u_{1,j}$ sonucunu verir. Örneğin (2.11) no.lu denklemi

$$\frac{u_{o,j+1} - u_{o,j}}{\delta t} = \frac{2(u_{1,j} - 2u_{o,j} + u_{-1,j})}{(\delta r)^2}$$

şeklinde gösterebiliriz ve

$$\frac{u_{o,j+1} - u_{o,j}}{\delta t} = \frac{4(u_{1,j} - u_{o,j})}{(\delta r)^2}$$

elde edilir. $r=0$ da $\nabla^2 u$ küresel polar formu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

şeklinde ortaya çıkar. $r=0$ da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ile değiştirilebilir ve $\frac{6(u_M - u_o)}{(\delta r)^2}$, u_M ile yaklaşık değerleri bulunur. Ox, Oy, Oz küreyi altı noktada keser. Problemin merkeze göre simetrik olduğu durumlarda yani θ ve ϕ den bağımsız olduğu durumlarda r=0 da $\nabla^2 u$, $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ olacak şekilde $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\frac{2}{r})\frac{\partial u}{\partial r}$ nın dışında kalan terimleri sıfırdır. Bu durumda ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

şekline dönüşür.

r=0 hariç silindirler ve küreler için simetrik ısı akış problemleri bahsedilenlerden daha basit denklemlerle çözülebilirler. Çünkü R=logr ile tanımlanan bağımsız değişkenin değişimi silindirik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{den} \quad e^{2R}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2}$$

ye dönüştürür. Ve $u = \frac{w}{r}$ ile verilen bağımsız değişkenin değişimi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{den} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

ye dönüşür.

2.2. LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Lineer olmayan parabolik denklemlere sonlu-fark yöntemlerini uygulamak güç değildir. Güçlükler fark denklemlerinin kendisinden kaynaklanmaktadır.

Bilinmeyenlerin katsayıları daha önceki zaman aralığında çözüm fonksiyonları olacağından lineer olmayan parabolik denklemler lineerleştirilmelidir. Taylor açılımı lineerleştirmek için standart bir yoldur ve genellikle NEWTON yöntemi adını alır.

Lineer olmayan parabolik denklemlerde implicit yöntemini kullanmak avantajlıdır. Çünkü explicit yöntem sadece $r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ koşulu için doğru sonuçlar verir.

2.2.1. NEWTON YÖNTEMİYLE LİNEERLEŞTİRME

$$f_i(u_1,u_2,\ldots,u_N) = 0 \qquad i = 1(1)N \qquad (2.12)$$

varsayalım. u_i $(i=1(1)N)$ nin v_i bilinen bir yaklaşımı olsun. $u_i = v_i + \varepsilon_i$ alalım. Bunu (2.12) denkleminde yerine koyalım. Taylor açılımı ile birinci sıra terimlerini ε_i $i=1(1)N$ şeklini

$$f_i(v_1,v_2,\ldots,v_N) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial u_N}\varepsilon_N\right)_{u_i=v_i} = 0 \quad i=1(1)N \qquad (2.13)$$

yazabiliriz. (2.13) denklemi N bilinmeyenli N tane lineer denklemi ifade eder. Burada v_i $i=1(1)N$'ler bilinmektedir. ε_i ler hesaplandığı zaman işlem tekrarlanır. Çünkü bir sonraki işlemde bağımlı değişkenlerin başlangıç değerleri $(v_i + \varepsilon_i)$ $i=1(1)N$ dir. Bu yaklaştırma işlemine $|\varepsilon_i| < 10^{-8}$ $i=1(1)N$ gibi hassasiyet derecesinde u_i ler bulunana kadar devam edilir.

ÖRNEK-3:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$ $0<x<1$ lineer olmayan parabolik denklem verilsin. Başlangıç koşulu $u=4x(1-x)$ $0 < x < 1$ $t=0$ sınır koşulu $u=0$, $x=0$ ve $x=1$, $t\geq 0$ verilsin. Denklemin x-t düzleminde $\{ih, (j+\frac{1}{2})k\}$ noktasında sonlu fark çözümünü düşünelim. O halde

$$\frac{1}{k}\,\delta_t u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h^2}\left(\delta_x^2 u_{i,j+1}^2 + \delta_x^2 u_{i,j}^2\right)$$

$x_i = 1/6\ i$, $i=1(1)5$, $t=k=1/36$ ile tanımlanan noktada $u_i = v_i + \varepsilon_i$ dönüşümü yaparak lineerleştirelim.

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{2h^2}\{(u^2_{i-1,j+1} - 2u^2_{i,j+1} + u^2_{i+1,j+1}) +$$

$$+ (u^2_{i-1} - 2u^2_{i,j} + u^2_{i+1,j})\}$$

$p = h^2/k$ koyalım ve $u_{i,j+1}$ yerine u_i diyelim. Bu durumda denklem

$$u^2_{i-1} - 2(u^2_i + pu_i) + u^2_{i+1} + \{u^2_{i-1,j} - 2(u^2_{i,j} - pu_{i,j}) + u^2_{i+1,j}\} = 0 \equiv$$

$$\equiv f_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$$

şekline dönüşür. (2.13) denkleminden

$$f_i(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_{i-1}}\varepsilon_{i-1} + \frac{\partial f_i}{\partial u_i}\varepsilon_i + \frac{\partial f_i}{\partial u_{i+1}}\varepsilon_{i+1}\right]_{u_i = v_i} = 0$$

bulunur. Buradan da

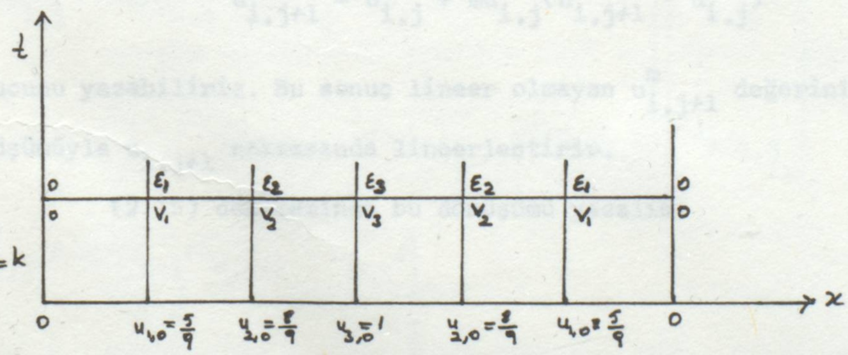
$$2v_{i-i}\,\varepsilon_{i-1} - 2(2v_i + p)\varepsilon_i + 2v_{i+1}\,\varepsilon_{i+1} + \Big[\{v^2_{i-1} - 2(v^2_i + pv_i) + v^2_{i+1}\} +$$

$$+ \{u^2_{i-1,j} - 2(u^2_{i,j} - pu_{i,j}) + u^2_{i+1,j}\}\Big] = 0 \quad (2.14)$$

bulunur. Burada v_i, $u_{i,j+1}$ dönüşümüdür. Problem $x = \frac{1}{2}$ de simetriktir. v_i $(j=0)$ için (2.14) denklemi

$$2u_{i-1,o}\,\varepsilon_{i-1} - 2(2u_{i,o} + p)\varepsilon_i + 2u_{i+1,o}\,\varepsilon_{i+1} + \{2u^2_{i-1,o} - 4u^2_{i,o} + 2u^2_{i+1,o}\} = 0$$

bulunur.



$x_i=1/6\ i$, $i=1(1)5$ $t=0$ noktasında başlangıç değerlerine eşit olarak alındığı taktirde ($p=1$ olmak üzere)

$$-19\varepsilon_1+8\varepsilon_2+14/9=0$$

$$5\varepsilon_1-25\varepsilon_2+9\varepsilon_3-22/9=0$$

$$16\varepsilon_2-27\varepsilon_3-34/9=0$$

denklem sistemi bulunur. Buradan ε_i ler çözülür. v_i ler bilinen değerlerdir. $u_i=v_i+\varepsilon_i$ den u_i ler de bulunur.

2.2.2. RICHTMYER'İN LİNEERİZASYON YÖNTEMİ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} \qquad m \geq 2$$

olmak üzere tanımlanan lineer olmayan parabolik denklemi ele alalım.

Implicit ağırlıklı ortalama sonlu farklarla

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1}-u_{i,j})=\frac{1}{h^2}\{\theta\delta_x^2(u^m_{i,j+1})+(1-\theta)\delta_x^2(u^m_{i,j})\} \qquad (2.15)$$

yazılabilir. (i,j) noktasındaki Taylor seri açılımı

$$u^m_{i,j+1}=u^m_{i,j}+k\frac{\partial u^m_{i,j}}{\partial t}+\ldots=u^m_{i,j}+k\frac{\partial u^m_{i,j}}{\partial u_{i,j}}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t}+\ldots$$

dır. k sırasındaki terimler için

$$u^m_{i,j+1}=u^m_{i,j}+mu^{m-1}_{i,j}(u_{i,j+1}-u_{i,j})$$

sonucunu yazabiliriz. Bu sonuç lineer olmayan $u^m_{i,j+1}$ değerini $w_i=u_{i,j+1}-u_{i,j}$ dönüşümüyle $u_{i,j+1}$ noktasında lineerleştirir.

(2.15) denkleminde bu dönüşümü yazalım.

$$\frac{1}{k} w_i = \frac{1}{h^2}\left[\theta\delta_x^2(u_{i,j}^m + m u_{i,j}^{m-1} w_i) + (1-\theta)\delta_x^2 u_{i,j}^m\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[m\theta\delta_x^2 u_{i,j}^{m-1} w_i + \delta_x^2 u_{i,j}^m\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[m\theta(u_{i-1,j}^{m-1} w_{i-1} - 2u_{i,j}^{m-1} w_i + u_{i+1,j}^{m-1} w_{i+1}) + (u_{i-1,j}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i+1,j}^m)\right]$$

$x=0$ ve $x=1$ de $Nh=1$, $r=k/h^2$ iken bilinen sınır koşulları ve $m=2$ için matris şeklinde denklemleri şöyle yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} (1+4r\theta_{1,j}) & -2r\theta u_{2,j} & & & \\ -2r\theta u_{1,j} & (1+4r\theta u_{2,j}) & -2r\theta u_{3,j} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -2r\theta u_{N-3,j} & (1+4r\theta u_{N-2,j}) & -2r\theta u_{N1,j} \\ & & & -2r\theta u_{N-2,j} & (1+4r\theta u_{N-1,j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_{N-2} \\ \omega_{N-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2ru_{1,j} & ru_{2,j} & & \\ ru_{1,j} & -2ru_{2,j} & ru_{3,j} & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & ru_{N-2,j} & -2ru_{N-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} ru_{o,j}^2 + 2r\theta u_{o,j}(u_{o,j+1} - u_{o,j}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ru_{N,j}^2 + 2r\theta u_{N,j}(u_{N,j+1} - u_{N,j}) \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Denklem sistemi Gauss eliminasyon yöntemiyle çözülür.

BİR ÖRNEK PROBLEMİN EXPLICIT VE IMPLICIT YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ VE BİLGİSAYAR SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

İkinci bölümde verilen Örnek-1'i ele alıp her iki yöntemle çözmeye çalışalım.

3.1. PROBLEMİN EXPLICIT YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ

ALGORİTMASI

1. Adım : x uzunluğunu, x deki nokta sayısını, zamanı, t deki nokta sayısını; x, x1, T, T1 gir.
2. Adım : Delta x'i ve delta y'yi hesapla.
   (Delta x = x/(x1-1) Delta y = T/(T1-1))
3. Adım : Başlangıç koşulu t=0 daki u değerlerini oku.
4. Adım : Sınır koşulunu gir.
5. Adım : r yi $\{R = \text{Delta } y/(\text{Delta } x)^2\}$ hesapla.
6. Adım : u(1) = u(1) + 2 * R * (u(2) - (1 + Delta x) * u(1)) * P
   u(x1) = u(x1) + 2 * R * (u(x1 - 1) - (1 + Delta x) * u(x1)) * P
   yi hesapla.
7. Adım : Uç noktalardaki değerleri de ilave ederek u değerlerini bul ve daha sonraki adımda kullanabilmek için bir dizide topla.
   Eğer I=2 ise f(I) = u(I-1)*R yap.
   Eğer I=x1-1 ise f(I) = u(I+1)*R yap.
   Diğer hallerde f(I) = R * u(I-1) + u(I) * (1-2*r) + R * u(I+1) al ve m(I) = f(I) şeklinde topla.
8. Adım : Bulunan tüm u değerlerini istenilen satır sayısında ve düzende yaz.
9. Adım : Dur.

```
10 REM EXPLICIT yontemle cozum
20 CLS
30 LOCATE 6,5:INPUT "cubuk boyunu girin          : " ,X
40 LOCATE 7,5:INPUT "x deki nokta sayisini girin: ",X1
50 LOCATE 8,5:INPUT "zaman                      : ",T
60 LOCATE 9,5: INPUT "t deki nokta sayisi       : ",T1
70 DIM F(X1),U(X1),S(X1),ALFA(X1),M(X1)
80 DELTAX=X/(X1-1):DELTAY=T/(T1-1)
90 REM baslangic kosulu t=0 daki degeri
100 FOR I=1 TO X1
110 READ U(I):NEXT I
120  DATA 0,.2,.4,.6,.8,1,.8,.6,.4,.2,0
130 REM sinir kosulu
140 LOCATE 10,5:INPUT "p degerini girin (1/0)     : ", P
150  R=DELTAY/(DELTAX^2)
160 U(1)=U(1)+2*R*(U(2)-(1+DELTAX)*U(1))*P
170 U(X1)=U(X1)+2*R*(U(X1-1)-(1+DELTAX)*U(X1))*P
180 LPRINT TAB(10)"x uzunlugu =";X;"    x deki nokta sayisi =";X1;"     t uzunlugu =";T;"     t deki nokta sayisi =";T1:LPRIN
190 LPRINT TAB(49)"SONUC TABLO"
200 LPRINT TAB(49)"-----------":LPRINT
210 FOR Z=1 TO 28
220 GOSUB 290
230 FOR H=1 TO X1:LPRINT USING "£££.££££££";U(H);:NEXT H:LPRINT
240 LPRINT
250 GOSUB 290
260 FOR I=2 TO X1-1:U(I)=M(I):NEXT I
270 NEXT Z
280 END
290 FOR I=2 TO X1-1
300 IF I=2 THEN F(I)=U(I-1)*R
310 IF I=X1-1 THEN F(I)=U(I+1)*R
320   F(I)=R*U(I-1)+U(I)*(1-2*R)+R*U(I+1)
330 M(I)=F(I)
340 NEXT I
350 RETURN
```

x uzunlugu = 1   x deki nokta sayisi = 11   t uzunlugu = 5   t deki nokta sayisi = 1001

SONUC TABLO

0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.800000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.700000	0.800000	0.700000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.550000	0.700000	0.700000	0.700000	0.550000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.375000	0.550000	0.625000	0.700000	0.625000	0.550000	0.375000	0.200000	0.000000
0.000000	0.187500	0.375000	0.500000	0.625000	0.625000	0.625000	0.500000	0.375000	0.187500	0.000000
0.000000	0.187500	0.343750	0.500000	0.562500	0.625000	0.562500	0.500000	0.343750	0.187500	0.000000
0.000000	0.171875	0.343750	0.453125	0.562500	0.562500	0.562500	0.453125	0.343750	0.171875	0.000000
0.000000	0.171875	0.312500	0.453125	0.507813	0.562500	0.507813	0.453125	0.312500	0.171875	0.000000
0.000000	0.156250	0.312500	0.410156	0.507813	0.507813	0.507813	0.410156	0.312500	0.156250	0.000000
0.000000	0.156250	0.283203	0.410156	0.458984	0.507813	0.458984	0.410156	0.283203	0.156250	0.000000
0.000000	0.141602	0.283203	0.371094	0.458984	0.458984	0.458984	0.371094	0.283203	0.141602	0.000000
0.000000	0.141602	0.256348	0.371094	0.415039	0.458984	0.415039	0.371094	0.256348	0.141602	0.000000
0.000000	0.128174	0.256348	0.335693	0.415039	0.415039	0.415039	0.335693	0.256348	0.128174	0.000000
0.000000	0.128174	0.231934	0.335693	0.375366	0.415039	0.375366	0.335693	0.231934	0.128174	0.000000
0.000000	0.115967	0.231934	0.303650	0.375366	0.375366	0.375366	0.303650	0.231934	0.115967	0.000000
0.000000	0.115967	0.209808	0.303650	0.339508	0.375366	0.339508	0.303650	0.209808	0.115967	0.000000
0.000000	0.104904	0.209808	0.274658	0.339508	0.339508	0.339508	0.274658	0.209808	0.104904	0.000000
0.000000	0.104904	0.189781	0.274658	0.307083	0.339508	0.307083	0.274658	0.189781	0.104904	0.000000
0.000000	0.094891	0.189781	0.248432	0.307083	0.307083	0.307083	0.248432	0.189781	0.094891	0.000000
0.000000	0.094891	0.171661	0.248432	0.277758	0.307083	0.277758	0.248432	0.171661	0.094891	0.000000
0.000000	0.085831	0.171661	0.224710	0.277758	0.277758	0.277758	0.224710	0.171661	0.085831	0.000000
0.000000	0.085831	0.155270	0.224710	0.251234	0.277758	0.251234	0.224710	0.155270	0.085831	0.000000
0.000000	0.077635	0.155270	0.203252	0.251234	0.251234	0.251234	0.203252	0.155270	0.077635	0.000000
0.000000	0.077635	0.140443	0.203252	0.227243	0.251234	0.227243	0.203252	0.140443	0.077635	0.000000
0.000000	0.070222	0.140443	0.183843	0.227243	0.227243	0.227243	0.183843	0.140443	0.070222	0.000000
0.000000	0.070222	0.127032	0.183843	0.205543	0.227243	0.205543	0.183843	0.127032	0.070222	0.000000
0.000000	0.063516	0.127032	0.166288	0.205543	0.205543	0.205543	0.166288	0.127032	0.063516	0.000000

x uzunlugu = 1   x deki nokta sayisi = 11   t uzunlugu = 1   t deki nokta sayisi = 1001

SONUC TABLO

0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.960000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.796000	0.928000	0.796000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.599600	0.789600	0.901600	0.789600	0.599600	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.399960	0.598640	0.781800	0.879200	0.781800	0.598640	0.399960	0.200000	0.000000
0.000000	0.199996	0.399832	0.597088	0.773224	0.859720	0.773224	0.597088	0.399832	0.199996	0.000000
0.000000	0.199980	0.399574	0.594976	0.764260	0.842420	0.764260	0.594976	0.399574	0.199980	0.000000
0.000000	0.199941	0.399155	0.592364	0.755147	0.826788	0.755147	0.592364	0.399155	0.199941	0.000000
0.000000	0.199869	0.398554	0.589321	0.746033	0.812460	0.746033	0.589322	0.398554	0.199869	0.000000
0.000000	0.199750	0.397762	0.585916	0.737005	0.799175	0.737005	0.585916	0.397763	0.199750	0.000000
0.000000	0.199576	0.396777	0.582209	0.728113	0.786741	0.728113	0.582209	0.396777	0.199576	0.000000
0.000000	0.199339	0.395600	0.578257	0.719385	0.775015	0.719385	0.578257	0.395600	0.199339	0.000000
0.000000	0.199031	0.394239	0.574104	0.710835	0.763889	0.710835	0.574104	0.394239	0.199031	0.000000
0.000000	0.198649	0.392705	0.569790	0.702467	0.753278	0.702468	0.569790	0.392705	0.198649	0.000000
0.000000	0.198189	0.391008	0.565350	0.694281	0.743116	0.694281	0.565350	0.391008	0.198190	0.000000
0.000000	0.197652	0.389160	0.560809	0.686271	0.733349	0.686271	0.560809	0.389160	0.197652	0.000000
0.000000	0.197038	0.387174	0.556190	0.678433	0.723933	0.678433	0.556190	0.387174	0.197038	0.000000
0.000000	0.196348	0.385062	0.551513	0.670759	0.714833	0.670758	0.551513	0.385062	0.196348	0.000000
0.000000	0.195584	0.382836	0.546792	0.663241	0.706018	0.663241	0.546792	0.382836	0.195584	0.000000
0.000000	0.194751	0.380506	0.542041	0.655874	0.697463	0.655874	0.542041	0.380506	0.194751	0.000000
0.000000	0.193851	0.378084	0.537271	0.648650	0.689145	0.648650	0.537271	0.378084	0.193851	0.000000
0.000000	0.192890	0.375580	0.532490	0.641561	0.681046	0.641561	0.532490	0.375580	0.192890	0.000000
0.000000	0.191870	0.373002	0.527706	0.634603	0.673149	0.634603	0.527706	0.373002	0.191870	0.000000
0.000000	0.190796	0.370359	0.522925	0.627768	0.665440	0.627768	0.522925	0.370359	0.190796	0.000000
0.000000	0.189673	0.367659	0.518153	0.621051	0.657905	0.621051	0.518153	0.367659	0.189673	0.000000
0.000000	0.188504	0.364910	0.513393	0.614446	0.650534	0.614446	0.513393	0.364910	0.188504	0.000000
0.000000	0.187294	0.362118	0.508650	0.607950	0.643317	0.607950	0.508650	0.362118	0.187294	0.000000
0.000000	0.186047	0.359289	0.503927	0.601556	0.636243	0.601557	0.503927	0.359289	0.186047	0.000000

x uzunlugu = 1   x deki nokta sayisi = 11   t uzunlugu = 1   t deki nokta sayisi = 101

SONUC TABLO

0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.600000	0.800000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.600000	0.400000	1.000000	0.400000	0.600000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.400000	0.200000	1.200000	-0.200000	1.200000	0.200000	0.400000	0.200000	0.000000
0.000000	0.200000	0.000000	1.400000	-1.200000	2.600000	-1.200000	1.400000	0.000000	0.200000	0.000000
0.000000	-0.200000	1.600000	-2.600000	5.200000	-5.000000	5.200000	-2.600001	1.600000	-0.200000	0.000000
0.000000	1.800001	-4.400001	9.400001	-12.800000	15.400000	-12.800000	9.400001	-4.400001	1.800001	0.000000
0.000000	-6.200001	15.600000	-26.600000	37.600000	-41.000000	37.600000	-26.600000	15.600000	-6.200002	0.000000

3.2. PROBLEMİN IMPLICIT YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ

ALGORİTMASI

1. Adım : x uzunluğunu, x deki nokta sayısını, zamanı, t deki nokta sayısını; x, xl, T, Tl gir.

2. Adım : Delta x ve delta y'yi hesapla.
   (Delta x = x/(xl - 1) Delta y = T/(Tl - 1))

3. Adım : Başlangıç koşulu t=0 daki u değerlerini oku.

4. Adım : Sınır koşulunu gir.

5. Adım : r = delta y/(delta x)^2 ni hesapla.

6. Adım : c = R al. B = 2 * (1+R) yi bul.

7. Adım : u(1) = u(1) + 2 * R * (u(2) - (1 + Delta x) * u(1)) * P
   u(xl) = u(xl) + 2 * R * (u(xl-1) - (1 + Delta x) * u(xl)) * P
   yi hesapla.

8. Adım : İkiden xl-1'e kadar u değerlerini hesapla.
   Eğer I=2 ise f(I) = u(I-1) * R
   Eğer I=xl-1 ise f(I) = u(I+1) * R al.
   Eğer I ara değerse f(I) = ((u(I-1) + u(I+1)) * R + (2-2*R) * u(I) al.

9. Adım : Alfa(2) = B al.

10.Adım : Üçten xl-1'e kadar alfa değerlerini hesapla. Eğer I=7 ise Alfa(I)=B al, çevrimden çık.
   Eğer I=6 ise A=2 al, aksi halde A=1 al.
   Ve Alfa(I) = B - (C*A)/Alfa(I-1) i hesapla.

11. Adım: S(2) = f(2) al.

12. Adım: Üçten xl-1'e kadar S(I) ları hesapla. Eğer I=6 ise A=2 al, aksi halde A=1 al. Ve S(I)=f(I) + A * (S(I-1)/Alfa(I-1)) ri hesapla.

13. Adım : İkiden xl-l'e kadar;

k = xl - I + l al.

Eğer k = xl-l ise u(xl-l) = s(xl-l)/Alfa(xl-l) al ve çevrimden çık.

Eğer k=6 ise c=0 al.

Diğer hallerde u(k) = (s(k) + c * u(k+l))/Alfa(k) yı hesapla ve c=l al.

14. Adım : İstenilen düzende u'ları yaz.

15. Adım : Dur.

```
10 REM IMPLICIT yontemle cozum
20 CLS
30 LOCATE 6,5:INPUT "cubuk boyunu girin            : ",X
40 LOCATE 7,5:INPUT "x deki nokta sayisini girin: ",X1
50 LOCATE 8,5:INPUT "zaman                         : ",T
60 LOCATE 9,5: INPUT "t deki nokta sayisi          : ",T1
70 DIM F(X1),U(X1),S(X1),ALFA(X1)
80 DELTAX=X/(X1-1):DELTAY=T/(T1-1)
90 REM baslangic kosulu t=0 daki degeri
100 FOR I=1 TO X1
110 READ U(I):NEXT I
120  DATA 0,.2,.4,.6,.8,1,.8,.6,.4,.2,0
130 DATA 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
140 REM sinir kosulu
150 LOCATE 10,5:INPUT "p degerini girin (1/0)      : ", P
160 REM b,c degerlerinin bulunmasi
170 R=DELTAY/(DELTAX^2)
180 C=R:B=2*(1+R)
190 U(1)=U(1)+2*R*(U(2)-(1+DELTAX)*U(1))*P
200 U(X1)=U(X1)+2*R*(U(X1-1)-(1+DELTAX)*U(X1))*P
210 LPRINT TAB(10)"x uzunlugu =";X;"    x deki nokta sayisi =";X1;"    t uzunlugu =";T;"    t deki nokta sayisi =";T1
220 LPRINT
230 LPRINT TAB(49)"SONUC TABLO"
240 LPRINT TAB(49)"-----------":LPRINT
250 FOR Z=1 TO 28
260 GOSUB 480
270 ALFA(2)=B
280 FOR I=3 TO X1-1
290 IF I=7 THEN ALFA(I)=B:GOTO 320
300 IF I=6 THEN A=2 ELSE A=1
310 ALFA(I)=B-(C*A)/ALFA(I-1)
320  NEXT I
330 S(2)=F(2)
340 FOR I=3 TO X1-1
350 IF I=6  THEN A=2 ELSE A=1
360 S(I)=F(I)+A*(S(I-1)/ALFA(I-1))
370 NEXT I
380 FOR I=2 TO X1-1
390 K=X1-I+1
400 IF K=X1-1 THEN U(X1-1)=S(X1-1)/ALFA(X1-1):GOTO 430
410 IF K=6 THEN C=0
420 U(K)=(S(K)+C*U(K+1))/ALFA(K):C=1
430 NEXT I
440 FOR H=1 TO X1: LPRINT   USING "£££.££££££";U(H);:NEXT H:LPRINT
450 LPRINT
460 NEXT Z
470 END
480 FOR I=2 TO X1-1
490 IF I=2 THEN F(I)=U(I-1)*R
500 IF I=X1-1 THEN F(I)=U(I+1)*R
510 F(I)=((U(I-1)+U(I+1))*R+(2-2*R)*U(I))
520  NEXT I
530 RETURN
```

x uzunlugu = 1   x deki nokta sayisi = 11   t uzunlugu = 1   t deki nokta sayisi = 101

SONUC TABLO

0.000000	0.198895	0.395580	0.583425	0.738122	0.769061	0.738122	0.583425	0.395580	0.198895	0.000000
0.000000	0.193620	0.378902	0.539666	0.646061	0.692091	0.646061	0.539666	0.378902	0.193620	0.000000
0.000000	0.182606	0.351521	0.490191	0.584280	0.615170	0.584280	0.490191	0.351521	0.182606	0.000000
0.000000	0.168331	0.321803	0.446086	0.526739	0.555509	0.526739	0.446086	0.321803	0.168331	0.000000
0.000000	0.153755	0.293219	0.404702	0.477048	0.501893	0.477048	0.404702	0.293219	0.153755	0.000000
0.000000	0.139901	0.266386	0.367185	0.432087	0.454567	0.432087	0.367185	0.266386	0.139901	0.000000
0.000000	0.127040	0.241775	0.332974	0.391648	0.411868	0.391648	0.332974	0.241775	0.127040	0.000000
0.000000	0.115270	0.219306	0.301940	0.355030	0.373339	0.355030	0.301940	0.219306	0.115270	0.000000
0.000000	0.104547	0.198883	0.273774	0.321877	0.338453	0.321877	0.273774	0.198883	0.104547	0.000000
0.000000	0.094806	0.180340	0.248232	0.291828	0.306852	0.291828	0.248232	0.180340	0.094806	0.000000
0.000000	0.085964	0.163518	0.225069	0.264591	0.278209	0.264591	0.225069	0.163518	0.085964	0.000000
0.000000	0.077945	0.148261	0.204067	0.239897	0.252244	0.239897	0.204067	0.148261	0.077945	0.000000
0.000000	0.070672	0.134427	0.185024	0.217509	0.228703	0.217509	0.185024	0.134427	0.070672	0.000000
0.000000	0.064077	0.121883	0.167757	0.197211	0.207360	0.197211	0.167757	0.121883	0.064077	0.000000
0.000000	0.058098	0.110509	0.152102	0.178807	0.188009	0.178807	0.152102	0.110509	0.058098	0.000000
0.000000	0.052676	0.100196	0.137908	0.162121	0.170464	0.162121	0.137908	0.100196	0.052676	0.000000
0.000000	0.047761	0.090846	0.125039	0.146992	0.154556	0.146992	0.125039	0.090846	0.047761	0.000000
0.000000	0.043304	0.082368	0.113370	0.133275	0.140133	0.133275	0.113370	0.082368	0.043304	0.000000
0.000000	0.039262	0.074682	0.102791	0.120838	0.127056	0.120838	0.102791	0.074682	0.039262	0.000000
0.000000	0.035599	0.067712	0.093198	0.109561	0.115199	0.109561	0.093198	0.067712	0.035599	0.000000
0.000000	0.032276	0.061394	0.084501	0.099337	0.104449	0.099337	0.084501	0.061394	0.032276	0.000000
0.000000	0.029264	0.055664	0.076615	0.090067	0.094702	0.090067	0.076615	0.055664	0.029264	0.000000
0.000000	0.026534	0.050470	0.069466	0.081662	0.085864	0.081662	0.069466	0.050470	0.026534	0.000000
0.000000	0.024057	0.045760	0.062983	0.074041	0.077851	0.074041	0.062983	0.045760	0.024057	0.000000
0.000000	0.021812	0.041490	0.057106	0.067132	0.070586	0.067132	0.057106	0.041490	0.021812	0.000000
0.000000	0.019777	0.037618	0.051776	0.060867	0.063999	0.060867	0.051777	0.037618	0.019777	0.000000
0.000000	0.017931	0.034107	0.046945	0.055187	0.058027	0.055187	0.046945	0.034107	0.017931	0.000000
0.000000	0.016258	0.030924	0.042564	0.050037	0.052612	0.050037	0.042564	0.030924	0.016258	0.000000

x uzunlugu = 1   x deki nokta sayisi = 11   t uzunlugu = 5   t deki nokta sayisi = 1001

SONUC TABLO

0.000000	0.356981	0.670943	0.967671	1.202835	1.253836	1.276368	0.975267	0.611978	0.337326	0.000000
0.000000	0.644798	1.241943	1.747762	2.096784	2.229001	2.124036	1.752188	1.213088	0.618801	0.000000
0.000000	1.169870	2.243840	3.123426	3.709312	3.919345	3.718192	3.120601	2.222862	1.149402	0.000000
0.000000	2.103805	4.019627	5.564588	6.574136	6.927123	6.573354	5.554775	3.999843	2.086892	0.000000
0.000000	3.761789	7.171748	9.899631	11.665680	12.277410	11.658290	9.883148	7.149786	3.745534	0.000000
0.000000	6.705811	12.769770	17.601040	20.715010	21.789810	20.701930	17.577410	12.743130	6.687853	0.000000
0.000000	11.935070	22.714520	31.285290	36.797930	38.698040	36.778940	31.253230	22.680800	11.913410	0.000000
0.000000	21.225450	40.384010	55.601890	65.380130	68.748910	65.354260	55.559280	40.340500	21.198100	0.000000
0.000000	37.732920	71.781290	98.813290	116.174700	122.155100	116.140200	98.757190	71.724690	37.697680	0.000000
0.000000	67.065970	127.574300	175.602700	206.442500	217.065800	206.397100	175.529000	127.500400	67.020160	0.000000
0.000000	119.191400	226.721200	312.063400	366.858000	385.733900	366.798400	311.966900	226.624600	119.131600	0.000000
0.000000	211.821300	402.912000	554.566000	651.932800	685.475900	651.854800	554.439500	402.785500	211.743100	0.000000

x uzunlugu = 1   x deki nokta sayisi = 11   t uzunlugu = 1   t deki nokta sayisi = 1001

SONUC TABLO

0.000000	0.748705	1.247152	1.705228	2.016659	1.974199	2.433629	1.779785	1.009991	0.640905	0.000000
0.000000	4.458707	8.336771	11.391920	13.329670	13.935420	13.749240	11.556990	8.128155	4.264901	0.000000
0.000000	29.198280	55.376860	76.039570	89.238080	93.758090	89.726870	76.343140	55.237720	28.966980	0.000000
0.000000	194.233900	369.220100	507.848100	596.713000	627.312300	597.415100	508.482400	369.332100	194.089300	0.000000

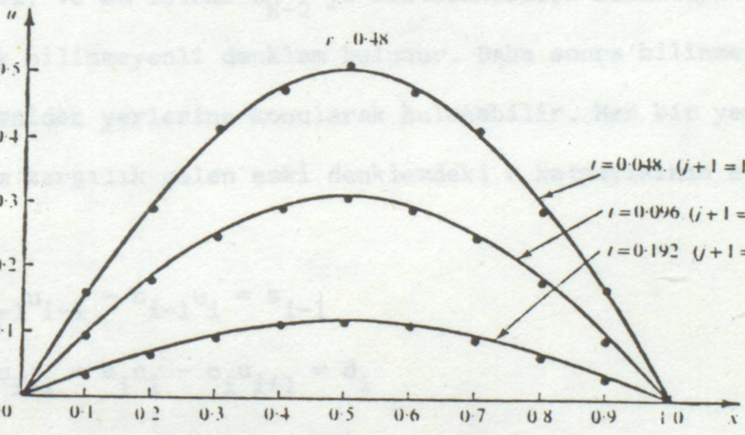
3.3. ALINAN BİLGİSAYAR SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Ele alınan problem, explicit ve implicit yöntemle çözüldüğünde aynı değerler kullanıldığı halde aynı sonuçlar elde edilemedi.

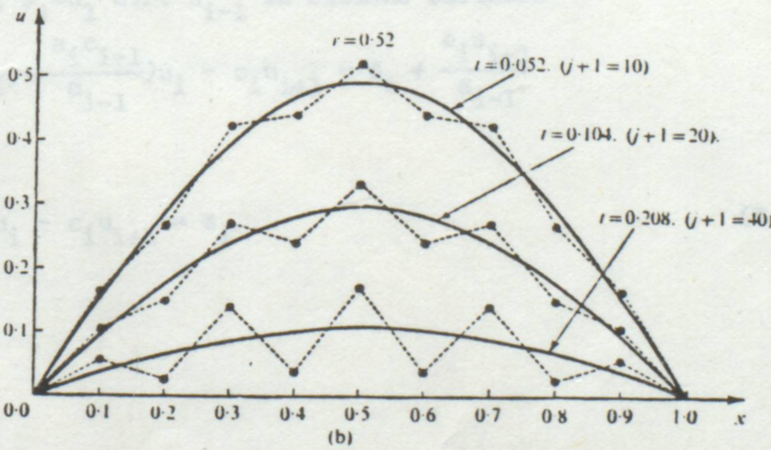
Örneğin; x uzunluğu 1,x deki nokta sayısı 11, zaman 1, t uzunluğu 101 olduğu durumda, problem explicit yöntemle çözülünce t=0.04 anında x=0.4 deki değeri -1.2 olduğu halde; implicit yöntemde çözüldüğü zaman t=0.04 anında x=0.4 deki değeri 0.477048 dir.

Bu sonuçlar bize her iki yöntemde de geçerli unsurun δt olduğunu kanıtlar. δt sıfır olurken mutlak hatalar sıfıra yakınsar. Sıfıra yakınsaması ise bulunan değerlerin gerçek çözüme en yakın olması demektir.

Bu sonucu aşağıdaki şekillerde daha açıkça görebiliriz.



(a)



(b)

EK - I

GAUSS ELİMİNASYON YÖNTEMİYLE DENKLEM ÇÖZÜMÜ

(ASAL DEĞERLERİ ALMADAN)

Her bir zaman aralığı boyunca N-1 nokta alalım. Crank-Nicolson denklemlerini şöyle yazabiliriz:

$$\begin{array}{l} b_1u_1 - c_1u_2 = d_1 \\ -a_2u_1 + b_2u_2 - c_2u_3 = d_2 \\ \quad \ddots \\ \quad -a_iu_{i-1} + b_iu_i - c_iu_{i+1} = d_i \\ \quad\quad \vdots \\ \quad -a_{N-1}u_{N-2} + b_{N-1}u_{N-1} = d_{N-1} \end{array} \qquad (E.1.1)$$

Burada a'lar, b'ler, c'ler ve d'ler bilinmektedir. Birinci denklemden u_1'i çeker ikinci denklemde yerine koyar, ikinci denklemi düzenleyip, u_2'yi çeker üçüncü denklemde yerine koyarız. Ve bu işlemi u_{N-2}'yi son denklemden buluncaya kadar sürdürürüz. Sonuçta tek bilinmeyenli denklem bulunur. Daha sonra bilinmeyenler $u_{N-2}, u_{N-3}, \ldots, u_2, u_1$ yeniden yerlerine konularak bulunabilir. Her bir yeni denklemdeki c katsayısı ona karşılık gelen eski denklemdeki c katsayısının aynısıdır. Ve sonuçta

$$\alpha_{i-1}u_{i-1} - c_{i-1}u_i = s_{i-1}$$

$$-a_iu_{i-1} + b_iu_i - c_iu_{i+1} = d_i$$

bulunur. Burada $\alpha_1=b_1$, $s_1=d_1$ dir. u_{i-1} in elimine edilmesi

$$(b_i - \frac{a_ic_{i-1}}{\alpha_{i-1}})u_i - c_iu_{i+1} = d_i + \frac{a_is_{i-1}}{\alpha_{i-1}}$$

sonucunu verir. Yani;

$$\alpha_iu_i - c_iu_{i+1} = s_i \qquad (E.1.2)$$

dir. Burada

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad \text{ve} \quad s_i = d_i + \frac{a_i s_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \qquad (i=2,3,\ldots)$$

dür. Eşzamanlı son denklem çifti şöyledir:

$$\alpha_{N-2} u_{N-2} - c_{N-2} u_{N-1} = s_{N-2}$$

ve

$$-a_{N-1} u_{N-2} + b_{N-1} u_{N-1} = d_{N-1}$$

dir. u_{N-2} nin elimine edilmesi

$$\left(b_{N-1} - \frac{a_{N-1} c_{N-2}}{\alpha_{N-2}}\right) u_{N-1} = d_{N-1} + \frac{a_{N-1} s_{N-2}}{\alpha_{N-2}}$$

$$\alpha_{N-1} u_{N-1} = s_{N-1} \qquad (E.1.3)$$

sonucunu verir. (E.1.2) ve (E.1.3) no.lu denklemler çözümün

$$u_{N-1} = \frac{s_{N-1}}{\alpha_{N-1}}$$

$$u_i = \frac{1}{\alpha_i}(s_i + c_i u_{i+1}) \qquad (i=N-2,N-3,\ldots,2,1)$$

şeklinde hesaplanabileceğini gösterir. Burada α'lar ve s'ler şöyle hesaplanabilir:

$$\alpha_1 = b_1$$

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i}{\alpha_{i-1}} c_{i-1}$$

$$s_1 = d_1$$

$$s_i = d_i + \frac{a_i}{\alpha_{i-1}} s_{i-1} \qquad (i=2,3,\ldots,N-1)$$

Çoğu problemde α_i ve a_i/α_{i-1} zamandan bağımsızdır.

EK - 2
SONLU FARKLAR

Deney sonuçları ile kesikli değerler tablolanmış biçimde verildiğinde her mühendislik probleminin sonlu farklar kullanılarak bir yaklaşık çözümü belirlenebilir.

u, x'e bağlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun x noktasındaki Taylor açılımı;

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \tfrac{1}{2} h^2 u''(x) + \frac{1}{6} h^3 u'''(x) + \ldots \qquad (E.2.1)$$

ve

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \tfrac{1}{2} h^2 u''(x) - \frac{1}{6} h^3 u'''(x) + \ldots \qquad (E.2.2)$$

(E.2.1) ile (E.2.2) nin toplamlarını alırsak,

$$u(x-h) + u(x+h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + 0(h^4) \qquad (E.2.3)$$

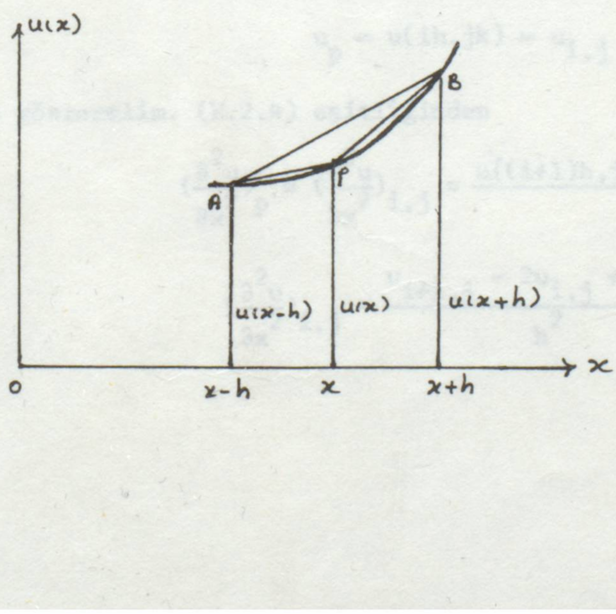
elde ederiz.

$$u''(x) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x} \simeq \frac{1}{h^2}\{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\} \qquad (E.2.4)$$

(E.2.2) den (E.2.1) i çıkartırsak,

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} \simeq \frac{1}{2h}\{u(x+h) - u(x-h)\} \qquad (E.2.5)$$

buluruz.



(E.2.5) ifadesi merkezi fark ifadesidir. Ve burada hata h mertebesindedir.

$$u'(x) \simeq \frac{1}{h}\{u(x+h) - u(x)\} \qquad (E.2.6)$$

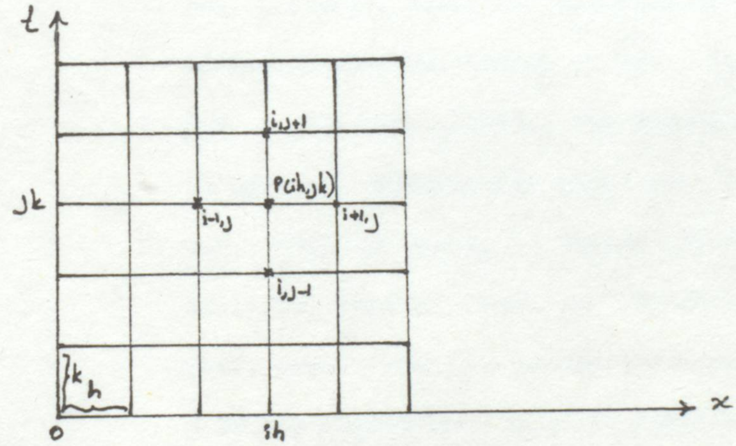
ifadesi ileri doğru fark formülüdür.

$$u'(x) \simeq \frac{1}{h}\{u(x) - u(x-h)\} \qquad (E.2.7)$$

ifadesi geriye doğru fark formülüdür.

Hangi mertebeden olursa olsun seriye açılımda ilk terim kullanılıyorsa ileri fark ve geri fark hesaplamasında hata daima h mertebesindedir. h ne kadar küçük seçilirse hata o kadar az olur.

u fonksiyonu x ve t ye bağlı olsun. $\delta x=h$, $\delta y=k$ olarak alalım.



P noktasının koordinatları $x=ih$, $t=jk$ olsun. P noktasındaki u nun değerini

$$u_P = u(ih,jk) = u_{i,j}$$

ile gösterelim. (E.2.4) eşitliğinden

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{u\{(i+1)h,jk\} - 2u\{ih,jk\} + u\{(i-1)h,jk\}}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \qquad (E.2.8)$$

Hata h^2 mertebesindedir. Benzer şekilde

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \qquad (E.2.9)$$

Hata k^2 mertebesindedir. P noktasında $\frac{\partial u}{\partial t}$ için ileri farklar notasyonu

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

şeklindedir. Hata k ıncı mertebedendir.

KAYNAKÇA

1. Carrier, F. George, Pearson, E.Carl. (1976), Partial Differential Equations, Academic Press, New York.
2. Cash, J.R. (1984), Two New Finite Difference Schemes For Parabolic Equations, Siam Jour., pp. 433-446.
3. E.Forsythe Wolfgang, George., Wasow, R.(1960), Finite-Difference Methods For Partial Differential Equations, John Wiley, New York.
4. Fox, L.(1962), Numerical Solution of Ordinary And Partial Differential Equations, Addison-Wesley Publishing Co.Inc., London.
5. Fox, L. M.A.D.S.C.(1957), The Numerical Solution of Two-Point Boundary Problems in Ordinary Differential Equations, Oxford.
6. G.M., Phillips and P.J., Taylor (1973), Theory And Applications of Numerical Analysis, Academic Press Inc (London) Ltd., London.
7. Hoff, David (1985), A Scheme For Computing Solutions And Interface Curves For a Doubly-Degenerate Parabolic Equations, Siam Jour., pp.687-712.
8. Milne, Edmund William (1953), Numerical Solution of Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc. New York, Chapman and Hall, London.
9. Özdemir, Yaşar(1973), Kısmi Türevli Diferansiel Denklemler, Yıldız Üniversitesi, İstanbul.
10. Smith, G.D.(1978), Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford University Press, Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

1955 yılında İstanbul'da dünyaya geldi. Selim Sırrı Tarcan İlkokulu, Nilüfer Hatun Ortaokulunu bitirdikten sonra Nişantaşı Kız Lisesine girdi. Liseden ilk mezun olduğu yıl Hacettepe Üniversitesine devam etti. Daha sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Lisanstan mezun oldu. Halen Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.