YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Hadamard Matrisleri

Nilgün Aygör

Yüksek Lisans Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HADAMARD MATRİSLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİLGÜN AYGÖR

İSTANBUL 1987

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

-9-

HADAMARD MATRİSLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİLGÜN AYGÖR

İSTANBUL 1987

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde Hadamard matrisi tanımı, (v,k,λ)-parametreli simetrik blok dizaynlar ve özelikleri ile Hadamard dizaynı verilmiştir.

Ayrıca birinci bölümde, satır ve sütun toplamları sabit olan Hadamard matrisleri ve bunlarla ilgili simetrik dizanlar incelenmiştir.

İkinci bölümde, Jacobsthal matrisi tanımı ve Hadamard matrislerinin Jacobsthal matrisler yardımı ile elde edilişi gösterilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, bazı özel Hadamard matris tipleri ve özelikleri incelenmiştir.

SUMMARY

This study consists of four chapters.

Chapter I contains an introduction to the basic notion about Hadamard matrices and symmetrical block designs.

In the chapter II we study the Jacobsthal matrices and the derivation of Hadamard matrices by the use of Jacobsthal matrices.

In the third and fourth chapters some special Hadamard matrice Types and their characteristics have been examined.

BÖLÜM I

I.1 HADAMARD MATRİSLERİ

Tanım I.1.1:

Elemanları ∓ 1 lerden oluşan,

$$HH^T = hI_h$$

koşulunu sağlayan, hxh boyutlu H matrisine bir Hadamard matrisidir denir.[1]

H, bir Hadamard matrisi olmak üzere, satırların aralarında yer değiştirmesi, sütunların aralarında yer değiştirmesi, bir satırın -1 ile çarpılması veya sütunların -1 ile çarpılması ile elde edilen matris H' ise bu matris de bir Hadamard matrisidir ve H ye denktir.

Tanım I.1.2:

Birinci satır ve birinci sütun elemanlarının hepsi +1 olan bir Hadamard matrisine Normalleştirilmiş Hadamard matrisi denir.

Her Hadamard matrisi, normalleştirilmiş bir Hadamard matrisine denktir. Yani yukarıdaki yolla bir Hadamard matrisi normalleştirilebilir. Normalleştirilmiş bir kaç Hadamard matrisi aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

(1) GRAVER, J.E. , WATKINS , M.E. , Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs , 1977 , S:246.

Hadamard matrisi tanımından, farklı iki satır vektörünün iç çarpımının daima 0 olacağı açıktır.Böylece normalleştirilmiş bir Hadamard matrisinin 1. satırından başka her satırında eşit sayıda +1 ve -1 vardır. Buradan $h>1$ iken h çifttir sonucu elde edilir.Bu, Hadamard matrisleri için önemli bir sonuçtur.

Teorem I.1.1:

hxh boyutlu bir Hadamard matrisi H ise, h=1 , h=2 veya $h\equiv 0 \pmod 4$ dür.

İspat:

Her Hadamard matrisi normalleştirilmiş bir Hadamard matrisine denktir.Bu nedenle ispat normalleştirilmiş Hadamard matrisleri için yapılabilir. Yukarıda h=1 ve h=2 için birer örnek verilmişti.Şu halde $h\geqslant 4$ için ispat yapılmalıdır.$h\geqslant 4$ için H, Hadamard matrisinin ilk üç satırı seçilerek oluşturulan 3xh alt matrisinde dört farklı tipte sütun bulunabilir.Bunlar,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Bu dört sütun H matrisinde,

birinci sütun c_1 kez,

ikinci sütun c_2 kez,

üçüncü sütun c_3 kez,

dördüncü sütun c_4 kez,

tekrarlanmış olsun.O zaman,

$c_1+c_2+c_3+c_4=h$ olur.

Birinci satır ile ikinci satırın iç çarpımı

$c_1+c_2-c_3-c_4=0$

Birinci satır ile üçüncü satırın iç çarpımı

$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = 0$

İkinci satır ile üçüncü satırın iç çarpımı

$c_1 - c_2 - c_3 + c_4 = 0$

olduğundan,

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = h$$
$$c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0$$
$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = 0$$
$$c_1 - c_2 - c_3 + c_4 = 0$$

denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminde bilinmeyen olan c_1, c_2, c_3, c_4 ler birer pozitif tamsayıdırlar. Bu sistem çözülürse,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & h \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -h \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -h \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 & 0 & h/2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -h \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & h/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & h/2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -h \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & h/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & h/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & h/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & h/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & h/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -h/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & h/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & h/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & h/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h/4 \end{bmatrix}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{h}{4}$ bulunur.

c_i $(i=1,2,3,4)$ ler birer tamsayı olacağına göre h, 4 veya 4' ün katı olmalıdır. Bu ise $h\equiv 0 \pmod 4$ demektir. İspatlanması gereken de budur.

$h\geqslant 4$ için $h\equiv 0 \pmod 4$ dür, fakat $h\equiv 0 \pmod 4$ koşuluna uyan bir h için hxh boyutlu bir Hadamard matrisinin var olup olmadığı sorusu hala çözülememiştir.

Tanım I.1.3 İki Matrisin Kronecker Çarpımı:

Eğer, $M=\left[m_{ij}\right]$ ve N herhangi iki matris ise, M nin N ile kronecker çarpımı, MXN ile gösterilir ve

$$MXN=\begin{bmatrix} m_{11}N & m_{12}N & \cdots & m_{1q}N \\ m_{21}N & m_{22}N & \cdots & m_{2q}N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p1}N & m_{p2}N & \cdots & m_{pq}N \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

I.1.4 Kronecker Çarpımının Özelikleri:

a) $(MXN)^T= M^T X N^T$

b) M_1, M_2, N_1, N_2 uygun boyutlu matrisler olmak üzere

$$(M_1 X N_1)(M_2 X N_2)= (M_1 M_2 X N_1 N_2)$$ dir.[1]

Teorem I.1.2:

İki Hadamard matrisinin kronecker çarpımı bir Hadamard matrisidir.

İspat:

H_1 ve H_2 sırasıyla $h_1 x h_1$ ve $h_2 x h_2$ boyutlu iki Hadamard matrisi olsun. Kronecker çarpımının özeliklerinden,

(1) GRAVER, J.E. , WATKINS , M.E. , Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs , 1977 , S:248.

$$(H_1 X H_2)(H_1 X H_2)^T = (H_1 X H_2)(H_1^T X H_2^T) \quad \text{Özelik I.1.4.a dan}$$

$$= (H_1 H_1^T) X (H_2 H_2^T) \quad \text{Özelik I.1.4.b den}$$

$$= h_1 I_{h_1} X h_2 I_{h_2}$$

$$= h_1 h_2 I_{h_1 h_2 x h_1 h_2}$$

Sonuç I.1.1:

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $2^n x 2^n$ boyutlu bir Hadamard matrisi vardır.

İspat:

H, 2x2 boyutlu bir Hadamard matrisi olsun. Kronecker çarpımının özeliğinden HXH matrisi $2^2 x 2^2$ boyutlu bir Hadamard matrisidir.

$HXH = H_2$ ($2^2 x 2^2$ boyutludur.)

$H_2 X H = H_3$ matrisi $2^3 x 2^3$ boyutlu bir Hadamard matrisidir.

Bu işleme devam edilirse, her pozitif tamsayı için $2^n x 2^n$ boyutlu bir Hadamard matrisinin var olduğu görülür.

Not: h=1 için $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ şeklinde bir Hadamard matrisi vardır.

I.2 (v,k,λ)-PARAMETRELİ SİMETRİK BLOK DİZAYNLAR

(v,k,λ)-parametreli simetrik blok dizayn, aşağıdaki altı aksiyomu sağlayan bir çakışım yapısıdır.[1]

i) v sayıda nokta vardır.

ii) v sayıda blok vardır.

iii) Her bir nokta k tane blok ile çakışım durumundadır.

iv) Her bir blok k tane nokta ile çakışım durumundadır.

v) Herhangi iki bloğun ortaklaşa çakışım durumunda oldukları nokta sayısı λ dır.

---

(1) BALKANAY , E. , Simetrik Dizaynlar ve Değişmeli Bir G Grubundaki Fark Kümeleri Üzerine Bir Çalışma, Doktora Tezi, 1986,S:1.

vi)Herhangi iki noktanın ortaklaşa çakışım durumunda oldukları blok sayısı λ dır.

Dejenere durumları yok etmek amacıyla, $k > \lambda$ kabul edilmektedir.

(v,k,λ)-parametreli simetrik blok dizaynın çakışım matrisi ve (v,k,λ)-parametreleri arasında,

$$MM^T = (k-\lambda)I + \lambda J$$

bağıntısı vardır.

Özelik I.2.1:

(v,k,λ)-parametreli bir simetrik blok dizaynın parametreleri arasında

$k^2 - v\lambda = k - \lambda$ bağıntısı vardır.

$n=k-\lambda$ dır.n, simetrik dizaynın mertebesi adını alır.

Özelik I.2.2:

Bir (v,k,λ)-parametreli simetrik dizaynın çakışım matrisi M ise,

$$\left|\det M\right| = kn^{\frac{1}{2}(v-1)} \text{ dir.} \quad (n=k-\lambda)$$

Özelik I.2.3: (Shutzenberger Teoremi):

Bir (v,k,λ) simetrik dizaynda, v çift ise n bir kare olmak zorundadır.

İspat:

$\left|\det M\right| = k.n^{\frac{1}{2}(v-1)}$ idi.

v çift ise, v-1 tek olur.

v-1=2q-1 olsun.

$\left|\det M\right| = k.n^{\frac{1}{2}(2q-1)}$

$\left|\det M\right|$ bir tamsayıya eşit olmalıdır.Buradan $n^{\frac{1}{2}(2q-1)}$ bir tamsayı olmalıdır.Bu ancak $n=l^2$ $(l \in Z)$ olması ile mümkündür.Çünkü,

$n^{\frac{1}{2}(2q-1)} = l^{2\frac{1}{2}(2q-1)} = l^{2q-1}$ ve

$\left|\det M\right| = k.l^{2q-1}$ olur.

Örnek I.2.1:

Noktalar kümesi $P=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ olmak üzere, Bloklar, $B_1=\{1,2,4\}$

$B_2=\{2,3,5\}$

$B_3=\{3,4,6\}$

$B_4=\{4,5,7\}$

$B_5=\{5,6,1\}$

$B_6=\{6,7,2\}$

$B_7=\{7,1,3\}$

olsun.Bu durumda bloklar kümesi:

$\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7\}$ dir.

Burada v=7 tane nokta, v=7 tane blok vardır.Her bir nokta 3 blok ile ve her bir blok 3 nokta ile çakışım durumundadır.Herhangi iki bloğun veya herhangi iki noktanın ortaklaşa çakışım durumunda oldukları nokta veya blok sayısı 1 olduğundan, simetrik blok dizayn tanımına göre (7,3,1)-parametreli simetrik blok dizayn elde edilir.

Yukarıdaki (7,3,1)-parametreli simetrik blok dizaynın çakışım matrisi,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

$$MM^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (3-1)I+J \quad \text{olup,}$$

$MM^T = 2I+J$ dir. ($k-\lambda = 3-1=2$, $\lambda=1$ dir.)

Teorem I.2.1:

Her $q \geqslant 2$ tamsayısı için $4q \times 4q$ boyutlu Hadamard matrislerinin denklik sınıfları kümesi ile $v=4q-1$, $k=2q-1$, $\lambda=q-1$ parametreli simetrik blok dizaynlar arasında bire-bir bir eşleme vardır.

İspat:

$v=4q-1$, $k=2q-1$, $\lambda=q-1$ parametreli simetrik blok dizaynın çakışım matrisi M olsun. Elemanlarının hepsi +1 olan $v \times v$ boyutlu bir kare matris J olmak üzere,

$$MM^T = (k-\lambda)I+\lambda J \text{ dir.}$$

Burada $v=4q-1$, $k=2q-1$, $\lambda=q-1$ yazılırsa,

$$MM^T = qI+(q-1)J$$

$$4\,MM^T = 4qI+4(q-1)J$$

$$4\,MM^T - 4(q-1)J = 4qI$$

$$4\,MM^T - 2(2q-1)J - 2(2q-1)J + (4q-1)J = 4qI - J$$

$$4\,MM^T - 2MJ - 2M^TJ + J^2 = 4qI - J$$

$H_1 = 2M - J$ olsun. Buradan,

$M = \frac{1}{2}(H_1 + J)$ elde edilir. Bu yukarıdaki eşitlikte yerleştirilirse,

$$(H_1+J)(H_1^T+J) - J(H_1+J) - J(H_1^T+J) + J^2 = 4qI - J \quad \text{bulunur.}$$

Buradan,

$$H_1H_1^T = 4qI - J \quad \text{elde edilir.}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \cdot & & H_1 & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

H_1 matrisi $(4q-1)\times(4q-1)$ boyutlu olduğundan H nin boyutu $4q \times 4q$ dur.

$H_1 = 2M - J$ idi. M matrisinin elemanları +1 ve 0 lardan, J matrisinin tüm elemanları +1 lerden oluştuğu için $H_1 = 2M - J$ matrisinin elemanları ∓ 1 lerden oluşur. Ayrıca M, simetrik blok dizaynın çakışım matrisi olduğu için H_1 in her bir satırının ve sütununun elemanları toplamı -1 dir.

$H_1 H_1^T = 4qI - J$ olduğundan

$$HH^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & & & \\ \cdot & & H_1 & \\ \cdot & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & & & \\ \cdot & & H_1^T & \\ \cdot & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = hI_h \quad \text{dir.}$$

Şu halde H matrisi bir Hadamard matrisidir:

$v=4q-1$, $k=2q-1$, $\lambda=q-1$ parametreli simetrik blok dizaynlar için bir H Hadamard matrisi elde edilmiştir. Bu kez H, birinci satır ve birinci sütun elemanlarının hepsi +1 olan 4qx4q boyutlu bir matris olsun. Bu durumda birinci satır ve birinci sütun atılarak elde edilen matris H_1 olur. Yalnız ve ancak, H_1 matrisi elemanları ∓ 1 lerden oluşan her bir satır ve sütun elemanlarının toplamı -1 olan (4q-1)x(4q-1) boyutlu bir matris ise, H matrisi, $HH^T = hI_h$ koşuluna uyan ve elemanlarının hepsi ∓ 1 olan bir matristir, yani Hadamard matrisidir. Son olarak M nin satırlarının aralarında yer değiştirmesi, sütunlarının aralarında yer değiştirmesi H üzerinde benzer bir etki yapar. M nin herhangi bir satır veya sütununun -1 ile çarpılması, satır toplamları sabit olmayan (çarpımdan önce -1 idi) bir matris verir.

H üzerinde aynı işlem H ye denk bir Hadamard matrisi oluşturur.

I.3 HADAMARD DİZAYNI

$h \geq 4$ olmak üzere, hxh boyutlu normalleştirilmiş bir Hadamard matrisinde, birinci satır ve birinci sütun çıkartılarak elde edilen matrisin -1 elemanları yerine 0 yazılırsa, yeni bir matris elde edilir. Elde edilen bu matris,

$(h-1, \frac{1}{2}h-1, \frac{1}{4}h-1)$ parametreli bir simetrik dizaynın çakışım matrisidir. Böyle bir dizayna Hadamard dizaynı adı verilir.(1)

Örnek I.3.1:

8x8 boyutlu normalleştirilmiş Hadamard matrisi,

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

Birinci satır ve birinci sütun kaldırılarak elde edilen matrisin -1 elemanları yerine 0 yazılırsa,

$$H'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

H' matrisi $(8-1, \frac{1}{2}8-1, \frac{1}{4}8-1)=(7,3,1)$ parametreli simetrik blok dizaynın çakışım matrisidir. H' bir Hadamard dizaynıdır.

$(h-1, \frac{1}{2}h-1, \frac{1}{4}h-1)$ parametreli herhangi bir simetrik dizaynda yukarıdaki işlemler tersine yapılarak normalleştirilmiş bir Hadamard matrisi elde edilir.

(1) LANDER , E.S. , Symmetric Designs An Algebraic Approach, 1983 , Cambridge University Press, S:5

Sonuç I.3.1:

Teorem I.2.1 gereğince $2^n \times 2^n$ boyutlu bir Hadamard matrisi için $(2^n-1\ ,\ 2^{n-1}-1\ ,\ 2^{n-2}-1\ )$- parametreli bir Hadamard dizaynı vardır.Çünkü 4qx4q boyutlu Hadamard matrisine (4q-1,2q-1,q-1)- parametreli simetrik blok dizayn karşı geliyordu.

$$4q = 2^n \qquad q = 2^{n-2}$$

$$4q-1 = 4(2^{n-2})-1 = 2^n-1$$

$$2q-1 = 2(2^{n-2})-1 = 2^{n-1}-1$$

$$q-1 = 2^{n-2}-1$$

olduğu kolayca görülür.

Örnek I.3.2:

Kronecker çarpımını kullanarak $2^2 \times 2^2$, $2^3 \times 2^3$, $2^4 \times 2^4$ boyutlu Hadamard matrisleri oluşturalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{2^2 \times 2^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2^3 \times 2^3}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1
\end{bmatrix}_{2^4 \times 2^4}
$$

I.4 SATIR VE SÜTUN TOPLAMLARI SABİT OLAN HADAMARD MATRİSLERİ VE BUNLARLA İLGİLİ SİMETRİK DİZAYNLAR

Satır ve sütun toplamları sabit olan vxv boyutlu bir Hadamard matrisi H olsun. H nin +1 elemanlarının konumları bir simetrik dizayn oluşturur. Her bir satırdaki veya sütundaki +1 sayısı k, herhangi iki satır veya sütundaki ortak +1 lerin sayısı λ olsun.

$HH^T = H^T H = vI$ olduğundan

$v = 4(k-\lambda) = 4n$ bulunur.

Burada λ seçilen satır (sütun) ikilisine bağlı değildir. Böylece $v = 4n$ olan bir simetrik (v,k,λ) dizayn elde edilir.

Bunun tersine $v=4n$ olan simetrik (v,k,λ) dizayndan da satır ve sütun toplamları sabit olan bir Hadamard matrisi elde edilir.

v çift olduğundan, Schutzenberger teoremine göre, n bir kare olmalıdır; $n=N^2$ olsun. Buna göre,

$$(v,k,\lambda)=(4N^2 \ , \ 2N^2 \pm N \ , \ N^2 \pm N\ ) \text{ olur.}$$

$v=4n$ olan dizaynlara H-dizaynlar denir.(1)

Örneğin,

$$T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

satır ve sütun toplamları sabit olan bir Hadamard matrisidir. Kronecker çarpımı bu özeliği korur. Böylece $t \geqslant 1$ için

$$4N^2 = 2^{2t} \ ,$$
$$N = 2^{t-1} \ ,$$
$$2N^2 \pm N = 2.2^{2t-2} \pm 2^{t-1} = 2^{2t-1} \pm 2^{t-1}$$
$$N^2 \pm N = 2^{2t-2} \pm 2^{t-1}$$

olduğundan,

$$(2^{2t} \ , \ 2^{2t-1} \pm 2^{t-1} \ , \ 2^{2t-2} \pm 2^{t-1})$$

şeklinde simetrik dizaynlar dizisi elde edilir.

---

(1) LANDER , E.S. , Symmetric Designs An Algebraic Approach , 1983 , Cambridge University Press , S: 11

BÖLÜM II

II.1 JACOBSTHAL MATRİSLERİ

p bir tek asal ve $t \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $q=p^{t}$ alalım. F_q ise (mod q) ya göre kalan sınıflarının cismi olsun.

$a \in F_q$ ve (a/q) Legendre sembolü (1) olmak üzere,

$$f: F_q \longrightarrow \{0,1,-1\}$$

fonksiyonu, $f(a)=(a/q)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $R=\left[r_{ij}\right]_{q\times q}$ Jacobsthal matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım II.1.1:

Bir $R=\left[r_{ij}\right]_{q\times q}$ Jacobsthal matrisi satır ve sütunları F_q nun elemanları ile indekslenmiş $(i,j \in F_q)$, r_{ij} elemanları $r_{ij}=f(j-i)$ olan bir qxq matristir.

Örnek II.1.1:

7x7 boyutlu Jacobsthal matrisi,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Elemanlar aşağıdaki gibi belirtilir:

Örneğin, $r_{23}=f(3-2)=f(1)=1$ dir. Çünkü 1, F_7 de bir kuadratik rezidüdür.
$r_{61}=f(1-6)=f(-5)=f(2)=1$, çünkü 2 veya -5 F_7, de bir kuadratik rezidüdür.

---

(1) IRELAND , K. and ROJEN , M. , A classical Introduction to Modern Number Theory, Springer-Verlag , 1982.

Özelik II.1.1:

R bir Jacobsthal matrisi, J uygun boyutlu ve tüm elemanları +1 olan bir matris olmak üzere,

$R^T R = RR^T = qI - J$

$RJ = JR = 0$ dır.(1)

II.1.1 Hadamard Matrislerinin Jacobsthal Matrisler Yardımı ile Elde Edilişi:

Bu bölümde sadece $q \equiv 3 \pmod 4$ hali ele alınacaktır. $q \equiv 1 \pmod 4$ için de Hadamard matrisleri elde edilmektedir.(1) Fakat çalışmamızda bu hal incelenmemiştir.

$q \equiv 3 \pmod 4$ hali için bir Jacobsthal matrisinden bir Hadamard matrisi aşağıdaki yolla elde edilir.

Eğer $q \equiv 3 \pmod 4$ ise R Jacobsthal matrisi anti-simetrik bir matristir, yani $R^T = -R$ dir. Bu durumda i-j bir kuadratik rezidü ise, j-i bir kuadratik rezidü değildir.

$q = p^t$ ve p tek asal, $t \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & (R-I) & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

matrisi $(q+1) \times (q+1)$ boyutlu bir Hadamard matrisidir. Çünkü R anti-simetrik olduğundan

$$(R-I)^T = R^T - I = -R - I = -(R+I) \quad \text{dır.}$$

---

(1) LANDER , E.S. , Symmetric Designs An Algebraic Approach , 1983 , Cambridge University Press, S:7.

$$HH^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & \\ \cdot & (R-I) \\ \vdots & \\ 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & \\ \cdot & -(R+I) \\ \vdots & \\ 1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q+1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \cdot & J+(R-I)(R^T-I) \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J+(R-I)(R^T-I) &= J+RR^T-RI-IR^T+I \\ &= J+qI-J-RI-IR^T+I \\ &= (q+1)I \end{aligned}$$

$$HH^T=\begin{bmatrix} q+1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \cdot & (q+1)I_q \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}=(q+1)I_{q+1}$$

elde edilir. Yani H matrisi (q+1) boyutlu bir Hadamard matrisidir. Bu tipteki Hadamard matrislerine Paley tipi Hadamard matrisleri denmektedir.

BÖLÜM III

III.1 SKEW (ÇARPIK) HADAMARD MATRİSLERİ

Tanım III.1.1:

$h\equiv 0 \pmod 4$ olmak üzere hxh boyutlu bir H skew (çarpık) Hadamard matrisi, S anti-simetrik bir matris olmak üzere, elemanlarının hepsi +1, -1 olan $H=S+I$ şeklinde bir matrisdir.[1] ($S=-S^T$)

Teorem III.1.1:

Eğer $H=S+I$, hxh boyutlu bir skew (çarpık) Hadamard matrisi ise, o zaman

$$SS^T=(h-1)I \text{ dır.}$$

İspat:

$H=S+I$, $S=H-I$, $S^T=H^T-I$ olup

$$SS^T = HH^T - H - H^T + I$$

Burada $-H=-S-I$, $-H^T=-S^T-I$ ve $HH^T=hI_h$

yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$SS^T=(h-1)I$$

elde edilir.

Tanım III.1.2:

hxh boyutlu bir H skew (çarpık) Hadamard matrisinin çekirdeği (core), H den aşağıdaki yolla elde edilen (h-1)x(h-1) boyutlu W matrisidir:

i) H nin birinci satır elemanlarının her biri +1 yapılacak şekilde sütunlar uygun birer sayıyla (+1 veya -1 ile) çarpılır.

---

(1) WALLIS, J.S., Hadamard Matrices, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972, S:292.

ii) H nin birinci sütun elemanlarının her biri -1 yapılacak şekilde satırlar uygun birer sayıyla çarpılır (Sol üst köşedeki +1 elemanı hariç). Böylece $e=[1,1,\ldots,1]$, bir $1\times(h-1)$ matris olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 0 & e \\ -e^T & W \end{bmatrix} + I$$

matrisi elde edilir. Bu matristeki W alt matrisi H nin çekirdeği (core) adını alır.

Örnek III.1.1:

$h=4\equiv 0 \pmod 4$ boyutlu bir skew (çarpık) Hadamard matrisi,

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H=S+I$, $S=-S^T$ dir.

H nin çekirdeğini bulalım.

i) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup , burada

$$e=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad -e^T=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$W=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dır.}$$

Örnek III.1.2:

$h=8\equiv 0 \pmod 4$ boyutlu bir H skew (çarpık) Hadamard matrisi,

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

H nin çekirdeğini bulalım.

$$H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H=S+I$, $S=-S^T$ ve

$SS^T=(h-1)I$ dır.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$-e^T=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$

$H=\begin{bmatrix} 0 & e \\ -e^T & W \end{bmatrix}$ olup,

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dır.}$$

<u>Teorem III.1.2:</u>

Eğer $(h-1)$ boyutlu bir W matrisi, bir skew (çarpık) Hadamard matrisinin çekirdeği ise, o zaman W,

$$WW^T=(h-1)I-J\ , \quad WJ=0\ , \quad W^T=-W$$

koşullarını sağlar.

<u>İspat:</u>

H, W çekirdekli, h boyutlu bir skew (çarpık) Hadamard matrisi olsun.

O zaman, $HH^T=hI_h$ ve $(h-1)$ boyutlu bir J matrisi var olduğu için,

$$HH^T=\left(\begin{bmatrix} 0 & e \\ -e^T & W \end{bmatrix}+I_h\right)\left(\begin{bmatrix} 0 & -e \\ e^T & W^T \end{bmatrix}+I_h\right)$$

$$=\begin{bmatrix} ee^T & eW^T \\ We^T & e^Te+WW^T \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & e \\ -e^T & W \end{bmatrix}I_h+\begin{bmatrix} 0 & -e \\ e^T & W^T \end{bmatrix}I_h+I_h$$

$ee^T=h-1$

$e^Te=J$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$HH^T=\begin{bmatrix} h-1 & eW^T \\ We^T & J+WW^T \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W+W^T \end{bmatrix}+I_h=hI_h$$

$h-1+1=h$

$We^T+0+0=0$ $\qquad\qquad$ $eW^T+0=0$

$We^T=0$ $\qquad\qquad$ $eW^T=0$

$J+WW^T+W+W^T+I_{h-1}=hI_{h-1}$

$W^T=-W$ olduğundan

$J + WW^T + I_{h-1} = hI_{h-1}$

$WW^T = (h-1)I_{h-1} - J$ elde edilir.

$We^T = 0$ olduğundan $WJ = 0$ sonucu kolayca çıkar.

BÖLÜM IV

IV.1 SİMETRİK CONFERENCE MATRİSLERİ

Tanım IV.1.1:

$n \equiv 2 \pmod 4$ boyutlu bir N simetrik conference matrisi, R ,

$$RR^T = (n-1)I \quad \text{ve} \quad RJ = 0$$

koşullarına uyan bir simetrik matris olmak üzere, elemanlarının hepsi +1, -1 olan bir N=R+I matrisidir.[1]

(Bazı kaynaklar, N matrisinin, ayrıca sıfır köşegenli olması koşulunu koymaktadır.)

Tanım IV.1.2:

n-boyutlu bir N simetrik conference matrisinin çekirdeği (core), N nin birinci satır ve birinci sütun elemanlarının her biri +1 yapılacak şekilde önce satırların, sonra sütunların uygun birer sayıyla çarpılması ile N den elde edilen (n-1) boyutlu W matrisidir.Böylece N ,

$$\begin{bmatrix} 0 & e \\ e^T & W \end{bmatrix} + I$$

şeklinde olur.Burada $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ bir $1 \times (n-1)$ matristir

IV.2 KOMPLEKS HADAMARD MATRİSLERİ

Tanım IV.2.1:

h-boyutlu bir kompleks Hadamard matrisi,

$$CC^* = hI_h$$

koşulunu sağlayan ve bütün elemanları +1, -1, i veya -i lerden oluşan bir matristir.[1]

---

(1) WALLIS, J.S., Hadamard Matrices, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972, S:293-295.

Burada C^* ile C nin kompleks eşleniği gösterilmiştir.

Her çift h tamsayısı için bir hxh boyutlu kompleks Hadamard matrisinin var olduğu tahmin edilmektedir.

Tanım IV.2.2:

Bir kompleks-skew Hadamard matrisi, $U^* = -U$ olmak üzere, C=I+U şeklinde bir matristir.(1)

I+iN matrisleri,(I+N bir simetrik conference matrisidir.) kompleks-skew Hadamard matrisleridirler.

Teorem IV.2.1:

Her kompleks Hadamard matrisinin boyutu ya 1 dir, yada 2 ile tam bölünebilir.

İspat:

Boyutu 1 olan matris $[1]$ veya $[i]$ dir. Boyutu 2 olan iki tane,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ veya $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ şeklinde, denk olmayan kompleks Hadamard matrisi vardır.

Bu kez matrisin boyutu $h > 2$ kabul edilsin:

Bu durumda ilk iki satır,

$$\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ i & i & \ldots & i \end{matrix}}_{x} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ -i & \ldots & -i \end{matrix}}_{y} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{z} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ldots & -1 \end{matrix}}_{w} \end{matrix}$$

gibi seçilebilir.

Bu işlem sütunların uygun birer sayı ile çarpılması ve x,y,z,w sütunlarının tekrar düzenlenmesiyle gerçekleştirilebilir.

Burada x,y,z,w ile benzer (aynı) sütunların sayısı gösterilmektedir.

---

(1) WALLIS, J.S., Hadamard Matrices, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972, S:295.

Kompleks Hadamard matrisinin tanımından,

$x=y$, $z=w$ ve $x+y+z+w=n$ olur.Buradan $2 \mid n$ bulunur.

Teorem IV.2.2:

$AB^{*}=BA^{*}$ olmak üzere $C=iA$ ise $CB^{*}=-BC^{*}$ dır.Özel olarak A ve B reel ve $AB^{T}=BA^{T}$ olduğundan $C=iA$ ise $CB^{*}=-BC^{*}$ dır.

İspat:

$CB^{*}=(iA)B^{*}=B(iA^{*})=-BC^{*}$

Tanım IV.2.3:

Eğer W, n boyutlu, sıfır köşegenli ve köşegende bulunmayan elemanlırı 1,-1,i veya -i olmak üzere,

$WW^{T}=nI-J$, $WJ^{*}=0$, $W^{*}=\pm W$

koşulunu sağlayan n-boyutlu bir matris ise, W ya bir kompleks Hadamard matrisinin çekirdeğidir denir.

(Her kompleks Hadamard matrisinin çekirdeğe sahip olması gerekmez.)

IV.3 AMİCABLE HADAMARD MATRİSLERİ

Tanım IV.3.1:

Eğer $M=I+U$ matrisi bir (kompleks) skew-Hadamard matrisi, N ise bir (kompleks) Hadamard matrisi olmak üzere,

$N^{T}=N$, $MN^{T}=NM^{T}$ (eğer M ve N reel ise)

$N^{*}=N$, $MN^{*}=NM^{*}$ (eğer M ve N kompleks ise)

koşulları sağlanıyorsa $M=I+U$ ve N matrislerine (kompleks) amicable Hadamard matrisleri denir.[1]

---

(1) WALLIS, J. S. , Hadamard Matrices , Springer-Verlag ,Berlin - Heidelberg - New York , 1972, S:296.

Örnek IV.3.1:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ bir skew-Hadamard matrisi ,

$$N=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ bir Hadamard matrisidir.

Burada $N^T = N$ dir.

$$MN^T=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad NM^T=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ dır.

Yani, $MN^T = NM^T$ dir.

Buradan M ve N matrisleri amicable Hadamard matrisleridirler.

K A Y N A K L A R

BALKANAY, E., Simetrik Dizaynlar ve Değişmeli Bir G Grubundaki Fark Kümeleri Üzerine Bir Çalışma, Doktora Tezi, 1986.

GRAVER, J.E., WATKINS, M.E., Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs, 1977.

IRELAND,K. and ROJEN, M., A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer-Verlag, 1982.

LANDER, E.S., Symmetric Designs An Algebraic Approach, 1983, Cambridge University Press.

WALLIS,J.S., Hadamard Matrices, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

ÖZGEÇMİŞ

Doğduğu yer ve yıl	: Kırklareli, 3.9.1961
İlk öğrenim	: Edirne, Kurtuluş İlkokulu
Orta Öğrenim	: Edirne, Atatürk Ortaokulu, İstanbul Şah Rıza Pehlevi Lisesi
Yüksek Öğrenim	: İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Görevi	: Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi
Medeni Hali	: Evli