

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ \* FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## Eliptik İntegraller ve Eliptik Fonksiyonlar

Zerrin Oer

Yüksek Lisans Tezi



209

78

met

2000070

T.C.  
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK İNTEGRALLER ve ELİPTİK FONKSİYONLARLA  
İNTEGRE EDİLEBİLİR NON-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

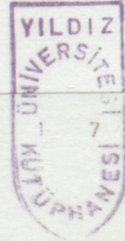
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zerrin OER

İSTANBUL-1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON  
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot R 209  
:.....78.....  
Alındığı Yer :...Fen Bilimleri Ens.....  
:.....  
Tarih :...17.03.1992.....  
Fatura :.....  
Fiyatı :...20.000.-TL.....  
Ayniyat No :...1/1.....  
Kayıt No :...48194.....  
UDC :...510.....  
Ek :.....





YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

D.B. No 46034

T.C.  
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GİRİŞ ..... 1  
SÖZLEŞİMİ ..... 11

**ELİPTİK İNTEGRALLER ve ELİPTİK FONKSİYONLARLA  
- İNTEGRE EDİLEBİLİR NON-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER**

1.1. Bernoulli Denklemi ..... 4  
1.2. Riccati Denklemi ..... 5  
1.3. Denklemler Sistemleri ..... 7  
1.4. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler ..... 8

1.5.  $\frac{d^2x}{dt^2} + (2t-1)\frac{dx}{dt} - 2x = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 9

1.6.  $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-y}{xy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 10

1.7.  $y'' + 3y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 11

1.8.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 12

1.9. Non-Linier Denklemler ..... 13

1.10.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 14

1.11.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 15

1.12.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 16

1.13.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 17

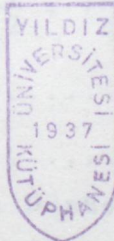
1.14.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 18

1.15.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 19

1.16.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Diferansiyel Denkleminin Çözümü ..... 20

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zerrin OER



İSTANBUL-1990



## İ Ç İ N D E K İ L E R

	<u>SAYFA</u>
ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II
<b>BÖLÜM 1</b>	
<b>İNTEGRE EDİLEBİLİR NON-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER</b>	
1.1. Giriş.....	1
1.2. Bernoulli Denklemi.....	4
1.3. Riccati Denklemi.....	5
1.4. Denklem Sistemleri.....	7
1.5. İkinci Mertebeden Denklemler.....	8
1.6. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2y-1}{y^2+1}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Diferansiyel Denkleminin Çözümü	9
1.7. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-\mu}{\mu y}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ Diferansiyel Denkleminin Çözümü.....	10
1.8. $y''+3yy'+y^3=f(x)$ Diferansiyel Denkleminin Çözümü..	11
1.9. $y''+3yy'+y^3=0$ Denkleminin Fiziksel Yorumu.....	13
1.10. Non-Linear Denkleminin Türetilmesi.....	15
1.11. $x=0$ İçin $y=y=0$ ve $x$ İçin $y=0$ Başlangıç Şartını Sağlayan $3 \varepsilon \frac{d^3y}{dx^3} + y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ Diferansiyel Denklemin Çözümü.....	16
1.12. Lane-Emden Denklemi.....	18
1.13. Lane-Emden Denkleminin Dönüşümü.....	19
1.14. Lane-Emden Denkleminin Çözümü.....	20



## BÖLÜM 2

EMİPTİK İNTEGRALLER VE ELİPTİK FONKSİYONLARLA İNTEGRE  
EDİLEBİLİR NON-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1. Giriş.....	21
2.2. Salınımın Peryodik Zamanı.....	24
2.3. 2.2 de Verilen Peryodun Nümerik Örneği.....	25
2.4. Grafikselsel Gösteriliş.....	26
2.5. (42) Denklemnin Yaklaşım Çözümü.....	27
2.6. 2.3 ve 2.4'ün Uygulamaları.....	29
2.7. Basit Sarkaç.....	30
2.8. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ Denklemnin Yaklaşık Çözümü.....	33
2.9. Sönümlü Viskos Hareket.....	33
2.10. Elastik.....	34
2.11. Maximum Sapma.....	36
2.12. Yük ve Max Sapma Arasındaki İlişki.....	36
2.13. Şekil 6A daki d Uzaklığı.....	37
2.14. Sürekli Jacobian Eliptik Fonksiyonlar.....	38
2.15. Asnu, Acnu, Adnu ile Sağlanan Denklemler.....	40
KAYNAKLAR.....	41
TEZ YAZARININ ÖZGEÇMİŞİ.....	42



## Ö Z E T

Lineer Diferansiyel Denklemler çeşitli bilim dallarında her zaman geniş bir çalışma alanı olmuştur. Fakat modern bilimde bazı doğal olaylar lineer olma özelliği ile açıklanamadığından Non-Linear Diferansiyel denklemlere başvurma zorunluluğu ortaya çıkmıştır.

Non-Linear diferansiyel denklemlerle daha çok mühendisler ilgilenmişlerdir. Bu denklemlerin çözüm yöntemlerindeki araştırmalar teorik matematikçiler tarafından ihmal edilmiştir. İlk çalışmalar Amerika Rusya ve İngiltere başlatılmıştır.

Bu denklemler genellikle bilinen fonksiyonlar cinsinden integre edilemez. Bu bakımdan problemin fiziksel niteliklerine uygun yaklaşık çözümler bulunur.

İki bölümden meydana gelen bu çalışmanın birinci bölümünde tam olarak integre edilebilir Non-Linear Diferansiyel denklemlere örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde Eliptik İntegraller ve Eliptik fonksiyonlarla integre edilebilir Non-Linear diferansiyel denklemler incelenmiştir.



## S U M M A R Y

Linear Differential Equations is always large studying subject in different science sections but in modern science, some natural events can not be explain by linear characteristics, therefore necessity to apply Non-Linear Differential equations appeared.

Most of the time the Non-Linear Differential equations are used by Engineers. The solution methods of this equations neglected by the theoretical mathematicians. The first study was started in USA, Russia and United Kingdam (England).

That Equations generally was not integrable as the kind of the known functions. Therefore, approximate solutions are found which is appropriate with physical quality of a problem.

In this study which two parts the first part of it Examples of exactly integrable non-linear differential equations were given.

In the second part, elliptic integrals and non-linear differential equations which can be integrable by eliptic functions studied.



## BÖLÜM 1

### İNTEGRE EDİLEBİLİR NON-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

#### 1.1. Giriş

Bir adi diferansiyel denklemde  $y$  bağımlı değişkeni ve  $y$  nin türevleri birinci dereceden ise ve bu denklem  $yy'$ ,  $y'y''$ ,  $y^2y^3$  gibi terimleri içermiyorsa bu diferansiyel denkleme  $y$  ye göre lineerdir denir. Eğer  $y$  nin veya türevlerinin dereceleri birbirine benzemiyorsa ya da denklem  $y$  yi ve türevlerinin çarpımlarını içeriyorsa bu diferansiyel denkleme non-lineerdir denir.

Örneğin:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^3 \frac{dy}{dx} + y = x^3$$

denklemini ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir.  $x^3$  ve  $x^5$  terimleri denklemin lineer olmasını etkilemez.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \text{ ve } \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} + y = 0$$

denklemleri ikinci mertebeden non-lineer diferansiyel denklemlerdir.

Bu bölümde eliptik integrallere başvurmadan tam olarak integre edilebilir denklemler ele alınacaktır. İlk olarak aşağıda verilen 3 basit örnekle non-lineer denklemlerle lineer denklemlerin integrasyon sabitlerinin farklılığı açıklanmıştır.



$$1^{\circ}) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$$

diferansiyel denkleminin  $x=x_0$  için  $y=y_0$  başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulalım.

A bir sabit olmak üzere diferansiyel denklem

$$xdx+dy=0$$

şeklinde yazılıp integre edilirse

$$x^2+y^2=A$$

elde edilir. Başlangıç şartından  $x_0^2+y_0^2=A=a^2$  bulunur. Denklemin çözümü

$$x^2+y^2=a^2$$

dir. Bu da aynı merkezli a yarıçaplı çember ailesini gösterir. Çözüm

$$y=\pm(a^2-x^2)^{1/2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle y iki değerli ve integrasyon sabiti  $a^2$  ninde bir fonksiyonudur.

Oysa

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$y = \frac{A_1}{x}$$

dir. Burada  $A_1 \neq 0$  başlangıç şartına bağlı bir keyfi çarpandır.

$$2^{\circ}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

diferansiyel denkleminin  $x=1$  için  $y=1$  başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulalım.

Diferansiyel denklem

$$(x+y)dx=(x-y)dy \quad (1)$$

şeklinde yazılıp



$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

dönüşümü uygulanırsa

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

olmak üzere (1) denklemi

$$(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = (\cos \theta - \sin \theta)(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)$$

şeklini alır. Buradan

$$\frac{dr}{d\theta} = r$$

$$\log r = \theta + c$$

sonucu bulunur.  $r$  ve  $\theta$  nın değerleri yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = c$$

elde edilir. Başlangıç şartından  $c = 1/2(\log 2 - 1/2\pi)$  olur. Denklemin çözümü;

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - 2 \left[ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{4} \pi \right] = 0$$

dır. Denklemin  $x = x_0$   $y = y_0$  başlangıç şartı için çözümü:

$$\log \left[ \frac{(x^2 + y^2)}{(x_0^2 + y_0^2)} \right] - \left[ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right] = 0$$

dır. Yine burada non-linear diferansiyel denklemin çözümünün, başlangıç şartının bir fonksiyonu olduğu görülmektedir.

3<sup>o</sup>

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 2$$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım. Denkleme  $y = vx$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dy}{dx} = x \left( \frac{dv}{dx} \right) + v$$

olmak üzere

$$x \frac{dv}{dx} + v + \frac{1}{v} - 2 = 0$$

$$xv \frac{dv}{dx} + (v-1)^2 = 0$$



olur. A bir sabit olmak üzere

$$\int \frac{v \, dv}{(v-1)^2} + \int \frac{dx}{x} = \log A$$

$$\log(v-1) + \log x - \log A = \frac{1}{v-1}$$

elde edilir. Buradan

$$\log \frac{x(v-1)}{A} = \frac{1}{v-1}$$

$$(y-x) = Ae^{(x/y-x)}$$

çözümü bulunur. Burada y, A'nın bir fonksiyonudur.

## 1.2. Bernoulli Denklemi

Bernoulli diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^\mu$$

şeklinindedir. f(x) ve g(x) x'in sürekli fonksiyonlarıdır.  $\mu$  sıfırdan veya 1'den farklıdır. Bu y'nin non-linear olmasını gerektirir.

Denklemden

$$u = y^{1-\mu}$$

dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{du}{dx} + (1-\mu)y^{-\mu} \frac{dy}{dx} = (1-\mu)f(x)u \tag{2}$$

olmak üzere;

$$\frac{du}{dx} + (1-\mu)f(x)u = (1-\mu)f(x)$$

elde edilir. Bu denklem birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir.

$$\frac{du}{dx} + \xi(x)u = \chi(x)$$

şeklindeki lineer bir denklemin genel çözümü



$$u = ce^{-\int \xi(x) dx} + e^{-\int \chi(x) dx} \int \xi(x) dx \quad (3)$$

olduğuna göre (2) denkleminin genel çözümü

$$u = ce^{(\mu-1)\int f(x) dx} - (\mu-1)e^{(\mu-1)\int f(x) dx} \int g(x)e^{(1-\mu)\int f(x) dx} dx \quad (4)$$

dır. Sonuç olarak

$$y = u^{1/(1-\mu)}$$

elde edilir.

### 1.3. Riccati Denklemi

Riccati diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + yf(x) + g(x) = 0$$

şeklindedir.  $f(x)$  ve  $g(x)$   $x$ 'in sürekli fonksiyonlarıdır. Denklemde

$$u = e^{a \int y dx} \quad (5)$$

dönüşümü yapılırsa

$$u' = ayu \quad u'' = (ay' + a^2 y^2)u$$

olmak üzere

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) \frac{du}{dx} + ag(x)u = 0$$

elde edilir. Bu denklem ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir.

1724 yılında Riccatinin bulduğu denklem

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 - bx^\mu = 0 \quad (6)$$

dır. Bu denklem (5) dönüşümü ile



$$\frac{d^2 u}{dx^2} - abx^\mu u = 0 \quad (7)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklem Bessel fonksiyonu gibi çözülebilir.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \frac{du}{dx} + k_1^2 x^\mu u = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$u = x^p [AJ_v(kx^q) + BJ_{-v}(kx^q)]$$

dir. Burada  $p=1/2(\alpha+1)$ ,  $v=(\alpha+1)/(\mu+2)$ ,  $k=2k_1/(\mu+2)$ ,  $q=p/v=(1/2\mu+1)$  ve  $v$  tam değildir. (7) denkleminin çözümü  $\alpha=0$ ,  $k_1^2=-ab$  yazılarak elde edilir. Bu durumda  $p=1/2v$ ,  $v=1/(\mu+2)$ ,  $k=2i(ab)^{1/2}/(\mu+2)$ ,  $q=(1/2\mu+1)$  dir.  $I_v(z)=e^{-1/2v\pi i} J_v(z_i)$  şeklindeki Bessel fonksiyonu için çözüm

$$u = x^{1/2} [A_1 I_v(1x^q) + B_1 I_{-1}(1x^q)] = x^{1/2} \Psi \quad (8)$$

dir. Burada  $1=2(ab)^{1/2}/(\mu+2)$  ve  $A_1, B_1$  keyfi sabitlerdir.  $y=u'/au$  olduğundan  $\Psi'=d\Psi/dx$  ile (8) denkleminde

$$y = \left\{ \frac{1}{2} x^{-1/2} \Psi + \frac{1}{2} x^{1/2} \Psi' \right\} / ax^{1/2} \Psi$$

$$= \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{2x} + \frac{\Psi'}{\Psi} \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{2x} + \frac{1}{q} x^{q-1} [A_1 I'_v(1x^q) + B_1 I'_{-1}(1x^q)] / \Psi \right\} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2ax} \left\{ 1 + \frac{21}{q} x^q [I'_v + cI'_{-1}] / [I_v + cI_{-1}] \right\}$$

elde edilir. Burada  $c=B_1/A_1$  y fonksiyonunun integrasyon sabitidir. Çünkü (6) denklemini birinci mertebeden bir denklemdir ve sadece bir integrasyon sabiti vardır.



Örnek

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + yxg(x) - g(x) = 0$$

diferansiyel denklemini çözelim.

Bu denklem bir Riccati diferansiyel denklemdir. Burada  $a=1$   $f(x)=-xg(x)$  dir. Denklem

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + g(x) [yx-1] = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bunun bir özel çözümü  $y_1=1/x$  dir. Denklemde

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$$

dönüşümü yapıldığında

$$\frac{dv}{dx} - \left(\frac{2}{x} + xg\right)v = 1$$

elde edilir.  $c$  bir integrasyon sabiti olmak üzere, denklemin çözümü

$$\begin{aligned} v &= ce^{\int [(2/x)+xg] dx} + e^{\int [(2/x)+xg] dx} \int^x e^{-\int [(2/x)+xg] dx} dx \\ &= cx^2 e^{\int xg dx} + x^2 e^{\int xg dx} \int^x e^{-\int xg dx} dx / x^2 \end{aligned}$$

dir.

$v$  yerine değeri yazıldığında

$$1/x(xy-1) = ce^{\int xg dx} + e^{\int xg dx} \int^x e^{-\int xg dx} dx / x^2$$

elde edilir.

1.4. Denklem Sistemleri

$$\frac{dy}{dx} = z + y[(y^2 + z^2)^{1/2} - 2a] \tag{10}$$

$$\frac{dz}{dx} = -y + z[(y^2 + z^2)^{1/2} - 2a] \tag{11}$$

denklem sistemini çözelim. (10) denklemini  $y$ , (11) denklemini  $z$  ile çarpılıp toplanırsa



$$yy' + zz' = (y^2 + z^2) [(y^2 + z^2)^{1/2} - 2a]$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (y^2 + z^2) = (y^2 + z^2) [(y^2 + z^2)^{1/2} - 2a]$$

elde edilir.  $(y^2 + z^2)^{1/2} = u$  dönüşümü yapılarak integre edilirse denklem,

$$\int \frac{du}{u^2 - 2au} = \int dx + A_1$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{2a} \log\left(\frac{u}{2a-u}\right) = x + A_1$$

$$\frac{u}{2a-u} = Ae^{2ax}$$

elde edilir. Bir integrasyon sabiti ve  $2a > (x^2 + z^2)^{1/2}$  olmak üzere çözüm;

$$\frac{(y^2 + z^2)^{1/2}}{[2a - (y^2 + z^2)^{1/2}]} = Ae^{2ax}$$

dir.

### 1.5. İkinci Mertebeden Denklemler

İkinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki farklı çözümü vardır ve bu çözümler orantılı değildir. Örneğin  $y_1, y_2$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (12)$$

denkleminin iki farklı çözümü olsun. Bu durumda denklemin genel çözümü

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 \quad (13)$$

dir.  $A_1$  ve  $A_2$  sıfırdan farklı keyfi sabitlerdir.

Eğer bir  $by^3$  terimi (12) denklemine eklenirse

$$y'' + ay + by^3 = 0 \quad (a = \omega^2) \quad (14)$$

non-lineer diferansiyel denklemini elde edilir. (14) denkleminin genel çözümü (12) deki gibi değildir. Çünkü bir non-lineer diferansiyel denklemin çözümü lineer bağımsız olmayabilir.



Bir fizik probleminde genel çözüm, başlangıç şartları veya sınır şartları için belirlenen bu sabitlerin bir fonksiyonudur. (13) deki  $A_1, A_2$  sadece birer çarpandır ve bunların değerleri başlangıç şartlarından bulunabilir. Bu değerler (12) de verilen mekanik sistemin salınımlarının  $(2\pi/\omega)$  periyodunu etkilemez. Fakat (14)'e karşılık gelen periyot başlangıç şartlarının bir fonksiyonudur.

$$1.6. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(2y-1)}{y^2+1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Diferansiyel Denkleminin Çözümü

Denklemden  $v = \frac{dy}{dx}$  dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dy}$$

olmak üzere

$$v \frac{dv}{dy} = v^2 \left(\frac{2y-1}{y^2+1}\right)$$

elde edilir. Denklemin her iki yanını integre edilirse

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2y-1}{y^2+1} dy + c$$

$$\log v = \log(y^2+1) - \arctan y + c$$

$$\frac{v e^{\arctan y}}{1+y^2} = c$$

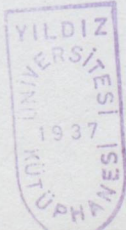
bulunur.  $v$  değeri denklemden yazıldığında,

$$\int e^{\arctan y} dy / (1+y^2) = c \int dx + D$$

$$e^{\arctan y} = cx + D$$

$$y = \tan [\log(cx + D)]$$

çözümü elde edilir. Burada  $y$ ,  $c$  ve  $D$  nin bir fonksiyonudur.





$$1.7. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1-\mu}{\mu y}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (15)$$

### Diferansiyel Denkleminin Çözümü

Denklemden  $v=dy/dx$  dönüşümü yapılırsa

$$v \frac{dv}{dy} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \frac{v^2}{y}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$\int \frac{dv}{v} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \int \frac{dy}{y} + A_1$$

$$\log v = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \log y + A_1$$

veya

$$v = Ay^{(1-1/\mu)}$$

bulunur.  $v$  nin değeri yerine yazılırsa

$$\frac{dy}{dx} = Ay^{(1-1/\mu)}$$

$$\int y^{(1/\mu-1)} dy = A \int dx + B$$

$$y^{1/\mu} = \frac{1}{\mu} (Ax+B)$$

elde edilir. Sonuç

$$y = (cx+D)^\mu$$

dir. Burada  $C=A\mu^{-1}$ ,  $D=B\mu^{-1}$  integrasyon sabitleridir ve aynı zamanda  $y$  nin bir fonksiyonudur.  $a$  bir sabit olmak üzere denklemin  $y=a$  şeklinde bir özel çözümde vardır.

(15) denklemini havacılıkta bir boundary-layer problemi oluşturur. Bu denklem aerofoil yüzeyinden akışkanın ayrılması ile ilgilidir.  $v=(1-\mu)/\mu$  yani  $\mu=1/(1+v)$  alınarak (15) denklemini



$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + v \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda çözüm

$$y = (cx + D)^{1/1+v}$$

dir.

Bir non-linear diferansiyel denklemde bütün terimler  $y$  nin derecesi ile aynı değilse, çözüm keyfi bir sabit ile çarpılamaz. Örneğin  $y_1$  (14) denklemini sağlar fakat  $Ay_1$  bu denklemi sağlamaz.  $Ay_1$ 'in denklemi sağlaması için  $A=1$  veya  $y_1=0$  olması gerekir. Bunların her ikisinde (16) denkleminde  $y'$ ye göre ikinci derecedendir ve  $A(Cx+D)^{1/1+v}$  bir çözümdür.

(15) denkleminin tekil noktası  $v=dy/dx$  in (16) da yerine yazılmasıyla elde edilir.

$$\frac{dv}{dy} = - \frac{vv}{y}$$

$v > 0$  ise  $y=v=0$  orjin noktası,  $v < 0$  ise düğüm noktasıdır.

$$1.8. \quad y'' + 3yy' + y^3 = f(x) \quad (17)$$

#### Diferansiyel Denkleminin Çözümü

Denkleminde  $u = e^{\int^x y dx}$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du}{dx} = uy, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = uy^2 + uy' = u(y'' + y^2)$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = u(y'' + 3yy' + y^3)$$

olmak üzere

$$\frac{d^3 u}{dx^3} - uf(x) = 0 \quad (18)$$

elde edilir. Bu denklem ikinci mertebeden bir lineer denklemdir.  $A_1, A_2, A_3$  keyfi sabitler,  $u_1, u_2, u_3$  özel çözümler olmak üzere genel çözüm,



$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3$$

dir.

$$u = e^{\int^x y dx}$$

dönüşümü yapılırsa

$$y = u' / u$$

elde edilir ve çözüm

$$\begin{aligned} y &= \frac{A_1 u_1' + A_2 u_2' + A_3 u_3'}{A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3} \\ &= \frac{(u_1' + A u_2' + B u_3')}{(u_1 + A u_2 + B u_3)} \end{aligned} \quad (19)$$

şeklini alır. Burada  $A = A_2 / A_1$ ,  $B = A_3 / A_1$  dir. (19), A ve B integrasyon sabitlerinin bir fonksiyonudur.

$f(x) = 0$  olması, (17) denklemi için özel bir haldir. Bu durumda denklem

$$y'' + 3yy' + y^3 = 0$$

şeklini alır. (18) denklemi

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = 0$$

olur. Buradan  $d^2 u / dx^2 = A_0$ ,  $du / dx = A_0 x + B_0$

$$u = \frac{1}{2} A_0 x^2 + B_0 x + c$$

bulunur. y nin değeri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} y &= \frac{u'}{u} = \frac{2(A_0 x + B_0)}{(A_0 x^2 + 2B_0 x + 2C_0)} \\ &= \frac{2(x + A)}{x^2 + 2Ax + B} \end{aligned} \quad (20)$$

elde edilir. Burada  $A = B_0 / A_0$ ,  $B = 2C_0 / A_0$  integrasyon sabitleridir ve y nin bir fonksiyonudur.



1.9.

$$y''+3yy'+y^3=0$$

### Denkleminin Fiziksel Yorumu

Şekil-1 de görüldüğü gibi sürtünmesiz yatay düzlemde, sürtünmesiz bağlarla bağlı birim kütleli bir cismin bir doğru boyunca hareketini düşünelim. Bu hareket sırasında söndürücü hiç bir etken yoktur. Denge veya sıfır durumundan bir  $y$  mesafesi, karakteristikleri  $y^3$  yenilenmiş kuvveti ile tanımlanmış kütleli bir yayın karşıtıdır. Cisme  $3y\dot{y}$  şeklinde yavaşlatıcı kuvvetin uygulandığını varsayalım. Burada  $\dot{y}=dy/dt$  dir ve hız ile yerdeğiştirmenin çarpımı üç katı olarak alınmıştır. Cisim kendi denge durumundan  $y_0$  uzunluğu kadar hareket ettirilip  $t=0$  anında serbest bırakıldıktan sonraki hareketi inceleyelim.

Birinci adım, (20) denkleminde  $x$  yerine  $t$  yazılarak  $A$  ve  $B$  nin belirlenmesidir.  $t=0$  da  $y=y_0$  için

$$A = \frac{1}{2} B y_0 \quad (21)$$

elde edilir. (20) den türev alınır

$$\dot{y} = \frac{2}{(t^2+2At+B)} \left[ 1 - \frac{2(t+A)^2}{(t^2+2At+B)} \right] \quad (22)$$

olur. Böylece cisim kaldığı yerden hareket eder.  $t=0$  da  $y=0$  olduğundan

$$B=2A^2 \quad (23)$$

elde edilir. (21) ve (23) den

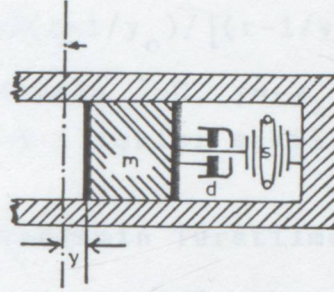
$$A=1/y_0 \quad \text{ve} \quad B=2/y_0^2$$

bulunur.  $x$  yerine  $t$  yazılarak bu değerler yerine yazıldığında

$$y=2(t+1/y_0)/[(t+1/y_0)^2+1/y_0^2] \quad (24)$$

elde edilir.

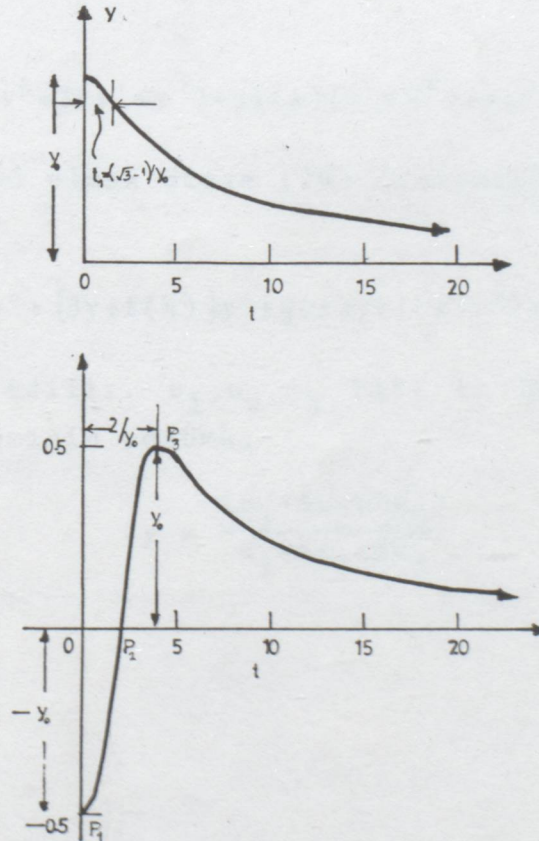




Şekil 1.

Hız ile orantılı viskoz sönümlü kütle-yay sisteminin şematik gösterilişi.

i)  $y_0 > 0$  olduğunda (24) denkleminde de görüldüğü gibi  $t \rightarrow \infty$ 'a monoton olarak yaklaşırken  $y \rightarrow +0$ 'a gider ve böylece  $t=0$  da  $\dot{y}=0$  olduğunda  $t$  ve  $y$  arasındaki ilişki Şekil-2A da çizilmiştir.  $\ddot{y}=0$  olduğunda  $t_1 = (3^{1/2} - 1)/y_0$  da büküm noktası oluşur. Bu durumda  $y_0$  büyük,  $t_1$  küçüktür çünkü  $y$  nin artması ile sönüm artar.



Şekil 2.A: 1.10'da  $y_0 > 0$  olması halinde denklemin çözüm eğrisi.  
B.  $y_0 < 0$  durumunda denklemin çözüm eğrisi.  $t \geq 4$  olduğunda (B),  $t \geq 0$  için (A) ile aynıdır.



ii)  $y_0 < 0$  olduğunda (24) de  $y_0$  yerine  $-y_0$  yazılarak

$$y = 2(t - 1/y_0) / [(t - 1/y_0)^2 + 1/y_0^2]$$

elde edilir.  $t=0$  anında  $\dot{y}=0$ ,  $y=-y_0$  dir.  $t=1/y_0$  ise  $y=0$  dir ve  $y$  pozitiftir.  $y-t$  ilişkisi şekil 2.B de çizilmiştir.

### 1.10. Non-Linear Denklemın Türetilmesi

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + g(x) \frac{du}{dx} = 0 \quad (25)$$

üçüncü mertebeden diferansiyel denklemi gözönüne alınsın. Burada  $f(x)$  ve  $g(x)$   $x$ 'in  $y$ 'den bağımsız fonksiyonlarıdır. Denklemde

$$u = e^{\int y dx}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du}{dx} = uy, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - u(y' + y^2) = \frac{d^3 u}{dx^3} = u(y'' + 3yy' + y^3)$$

olmak üzere

$$u(y'' + 3yy' + y^3) + uf(x)(y' + y^2) + ug(x)y = 0 \quad (26)$$

elde edilir.  $u \neq 0$  olmak üzere (26) denkleminden ikinci mertebeden non-linear

$$y'' + [3y + f(x)]y' + g(x)y + f(x)y^2 + y^3 = 0$$

denklemini elde edilir.  $u_1, u_2, u_3$  (25) in bağımsız çözümleri ise (26) denkleminin çözümü;

$$y = \frac{(u_1' + Au_2' + Bu_3')}{u_1 + Au_2 + Bu_3}$$

dir.



1.11.  $x=0$  İçin  $y=y=0$  ve  $x \rightarrow \infty$  İçin  $y=0$  Başlangıç Şartını Sağlayan

$$3 \epsilon \frac{d^3 y}{dx^3} + y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Diferansiyel Denklemin Çözümü

Bu denklem hidrodinamikte jet uçakları teorisinde kullanılır. Birinci adımda  $\epsilon$  sabitini kullanmadan işlem yapalım  $\omega$ ,  $\mu'$ 'nin 3 defa türetilen bir fonksiyonu olmak üzere  $x=3u$ ,  $y(x)=2\epsilon\omega(u)$  alınır (27) denklemi;

$$\frac{2}{9} \epsilon^2 \frac{d^3 \omega}{du^3} + \frac{4}{9} \epsilon^2 \omega \frac{d^2 \omega}{du^2} + \frac{4}{9} \epsilon^2 \left(\frac{d\omega}{du}\right)^2 = 0$$

veya

$$\omega''' + 2(\omega\omega'' + \omega'^2) = 0 \quad (28)$$

elde edilir. Bu denklem

$$\frac{d}{du} (\omega'' + 2\omega\omega') = 0$$

şeklinde yazılabilir. A bir sabit sayı olmak üzere

$$\omega'' = -2\omega\omega', A \quad (29)$$

elde edilir. Yukarıda verilen şartlardan  $\epsilon > 0$ ,  $u=0$  olduğunda  $\omega = \omega' = 0$  ve  $u \rightarrow \infty$  olduğunda  $\omega' = 0$  dır. Bundan dolayı  $A=0$  dır. (28) den

$$\omega'' + 2\omega\omega' = 0$$

veya

$$\frac{d}{du} (\omega' + \omega^2) = 0$$

yazılabilir.  $B=a^2$  integrasyon sabiti olmak üzere

$$\omega' = a^2 - \omega^2$$

elde edilir. c bir sabit olduğunda çözüm;

$$\int \frac{d\omega}{a^2 - \omega^2} = u + c$$

$$\frac{1}{a} \operatorname{argth}\left(\frac{\omega}{a}\right) = u + c$$



dir.  $u=0$  olduğunda  $\omega=0$  dır ve dolayısıyla  $c=0$  olur. Bu durumda denklem

$$\omega = a \operatorname{th}(au)$$

şeklini alır. ve  $u$  nun değerleri yerine yazıldığında

$$y = 2\varepsilon a \operatorname{th}(ax/3)$$

çözümü elde edilir. Burada  $A=c=0$  ve  $B$  integrasyon sabitleridir.

$A, B, c \neq 0$  olduğunda denklemin çözümünü bulalım.

(29) denklemden

$$\frac{d}{du} (\omega' + \omega^2) = A$$

$$\omega' + \omega^2 = Au + B$$

elde edilir.  $z = Au + B$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{d\omega}{dz} \cdot \frac{dz}{du} = A \frac{d\omega}{dz}$$

olmak üzere

$$\frac{d\omega}{dz} + \frac{\omega^2}{A} - \frac{z}{A} = 0$$

elde edilir.  $a=b=1/A$ ,  $\mu=1$  olmak üzere bu bir Riccati denklemdir.  $\alpha=0$ ,  $p=1/2$ ,  $\nu=1/3$ ,  $q=3/2$ ,  $l=2/3$   $A$  ve  $c$  bir integrasyon sabiti olmak üzere denklemin Bessel fonksiyonu yardımıyla çözümü;

$$(z) = (A/2z) \left\{ 1 + (2z^{1/2}/A) \left[ \frac{I'_{1/8}(2z^{3/2}/3A) + cI'_{-1/3}(2z^{3/2}/3A)}{I_{1/8}(2z^{3/2}/3A) + cI_{-1/3}(2z^{3/2}/3A)} \right] \right\}$$

dır.  $z = [A(x/3) + B]$  ile (30) denklemden

$$y = 2\varepsilon \omega [A(x/3) + B]$$

elde edilir. Bu fonksiyon  $A, B$  ve  $c$  integrasyon sabitlerini içerir.



### 1.12. Lane-Emden Denklemi

Bu denklem, gezegen yapısında bir gaz görüntüsünün yer çekimi ile ilgili denge bağlantısı ile meydana gelir. Burada toplam gaz basıncı olağan gaz basıncında ve radyasyon tazyiki toplamında vardır. Bu

$$p = \frac{1}{3} a T^4 + \frac{RT}{v}$$

formülü ile verilir. Burada  $p$  basınç,  $T$  mutlak sıcaklık,  $a$  radyasyon sabiti,  $v$  birim kütle için hacmi,  $R$  gaz sabitidir.  $p$  basıncı ve  $p=1/v$  yoğunluğunun her ikisinde  $r$  yarıçapı ile değişir.  $k$  ve  $\mu$  sabit olmak üzere ikisi arasındaki ilişki

$$p = Kq^{1+1/\mu} \quad (31)$$

ile gösterilir. Eğer  $r$  yarıçaplı bir küre cismin, kütlesi  $m$  ve yerçekimine ait sabit  $G$  ise genel denklemler

$$\frac{dm}{dr} - 4\pi r^2 q = 0 \quad (32)$$

$$\frac{r^2}{q} \frac{dp}{dr} + Gm = 0 \quad (33)$$

dır. (32) denklemi

$$\frac{r^2}{q} \frac{dp}{dr} + Gm = 0 \quad (34)$$

şeklinde yazılıp (33) denklemi kullanılırsa;

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{q} \frac{dp}{dr} \right) + 4\pi G q = 0$$

elde edilir.  $\lambda$  keyfi bir sabit olmak üzere (31) de  $q = \lambda \theta^\mu$  dönüşümü yapılırsa,

$$p = K\lambda^{(1+1/\mu)} \theta^{\mu+1} \quad (35)$$

elde edilir. (34), (33) de yerine konursa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\theta^\mu} \frac{d}{dr} \theta^{\mu+1} \right) + \frac{4\pi G}{K} \lambda^{(1-1/\mu)} \theta^\mu = 0$$

veya



$$k^2 = 4\pi G \lambda^{(1-1/\mu)} / (\mu+1)K$$

yazılarak

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + k^2 \theta^\mu = 0 \quad (36)$$

elde edilir. (36) da  $\xi = kr$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^\mu = 0$$

veya

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^\mu = 0$$

elde edilir. Bu denkleme **LANE-EMDEN** denklemi denir.  $\mu=0$  ve  $\mu=1$  değerleri dışında non-lineerdir.

### 1.13. Lane-Emden Denkleminin Dönüşümü

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^\mu = 0$$

denkleminde  $\xi = \frac{1}{x}$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d}{d\xi} = -x^2 \frac{d}{dx}$$

olmak üzere;

$$x^4 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \theta^\mu = 0 \quad (37)$$

elde edilir.  $\mu=5$  olması halinde (37) denkleminde  $\theta = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} x^{1/2} y$  dönüşümü yapılırsa

$$x^2 y'' + xy' - 1/4 y(1-y^4) = 0 \quad (38)$$

elde edilir.  $x=e^u$  dönüşümü ile (38) denklemi  $1/4 y^5$  teriminden dolayı non-lineer

$$\frac{d^2 y}{du^2} - \frac{1}{4} y(1-y^4) = 0 \quad (39)$$

denkleme dönüşür.



#### 1.14. Lane-Emden Denkleminin Çözümü

(39) denkleminde  $v=dy/du$ ,  $du=dy/v$  yazılırsa

$$v \frac{dv}{dy} = \frac{1}{4} y(1-y^4)$$

elde edilir. Buradan

$$\int v dv = \frac{1}{4} \int (y-y^5) dy + A$$

veya

$$v^2 = \frac{1}{4} y^2 \left(1 - \frac{1}{3} y^4\right) + 2A$$

elde edilir.

$r=0$ ,  $\xi=d\theta/d\xi=0$  olduğu zaman  $y=v=0$  olduğu gösterilebilirse  $A=0$  olur. Böylece çözüm

$$v = \frac{dy}{du} = \mp \frac{1}{2} y \left(1 - \frac{1}{3} y^4\right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

şeklini alır.  $u \rightarrow \infty$   $r \rightarrow 0$  olduğundan (40) denklemi

$$u = -2 \int (dy/y) / \left(1 - \frac{1}{3} y^4\right)^{1/2} + B_1$$

olur.  $\sin^2 \omega = 1/3 y^4$  yazılırsa

$$u = - \int d\omega / \sin \omega + B_1$$

$$= - \log(\tan \omega / 2) + B_1$$

$$\tan \frac{1}{2} \omega = B e^{-u} = B \xi$$

elde edilir.  $\sin^2 \omega$  yerine  $4 \tan^2 1/2 \omega / (1 + \tan^2 1/2 \omega)^2 = 1/3 y^4$  yazılırsa

$$y = [12 B^2 \xi^2 / (1 + B^2 \xi^2)^2]^{1/2} \quad (41)$$

olur. Fakat  $\theta = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} x^{1/2} y$  ve  $x = \xi^{-1}$  dir. (41) de  $\theta = (1/4)^{1/2} y \xi^{-1/2}$  dönüşümü yapılırsa

$$\theta = [3 B^2 / (1 + B^2 \xi^2)^2]^{1/4}$$

elde edilir.  $\xi=0$  da  $\theta=1$ ,  $d\theta/d\xi=0$  alınırsa  $B^2=1/3$  olacağından  $\mu=5$  indisli Lane-Emden fonksiyonu

$$\theta_5 = \left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

dir.



## BÖLÜM 2

### ELİPTİK İNTEGRALLER VE ELİPTİK FONKSİYONLARLA İNTEGRE EDİLEBİLİR NON-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

#### 2.1. Giriş

$a > 0$ ,  $b \geq 0$  olmak üzere  $t=0$  için  $y=0$  başlangıç şartını sağlayan

$$y'' + ay + by^3 = 0 \quad (42)$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklem şekil-1 de gösterilen kütle-yay sistemini gösterir. Yayın karakteristiği  $s_1 y + s_3 y^3$  dür ve sönüm yoktur. Sistemin diferansiyel denklemi

$$m y'' + s_1 y + s_3 y^3 = 0$$

dır. Burada  $m$  kütle olmak üzere,  $a = s_1/m$ ,  $b = s_3/m$  dir.  $s_1 y + s_3 y^3$  şeklinin bir yay kontrolü şekil-3A da gösterildiği gibi bir düz kiriş ve uygun şekilli bloklar kullanılarak elde edilir. Yayın gerçek uzunluğu titreşimin genliğinin artması ile azalır. Sertlik yenilenmiş kuvvetin türevi olarak belirlenmiştir. Bundan dolayı

$$s = s_1 + 3s_3 y^2$$

dir. Bu durumda sertlik  $s_3 > 0$  veya  $s_3 < 0$ 'a göre yer değiştirmedeki artımla azalır veya artar.

Non-linear yenilenmiş kuvvetin başka bir örneği şekil-3B de gösterildiği gibi bir  $m$  kütlelerinin gergin bir telin merkezinde yaptığı harekettir.  $y/l \leq 1$  ise  $m$ , yatay olarak hareket eder. Hareketin diferansiyel denklemi

$$y'' + ay + by^3 = 0$$

dir.  $A$  alan kesidi,  $E$  elastikiyet modülü,  $y=0$  da  $T$  gerilim olmak üzere  $a = 2T/ml$ ,  $b = EA/ml^3$  dür.



(42) denkleminin çözümü için  $v=dy/dt$  dönüşümü yapılırsa

$$v \frac{dy}{dy} = -(ay+by^3)$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^v v dv = - \int_{y_0}^y (ay+by^3) dy$$

$$v^2 = a(y_0^2 - y^2) + \frac{1}{2} b(y_0^4 - y^4) \quad (43)$$

bulur. Negatif kökler seçilirse

$$v = dy/dt = -a^{1/2} (y_0^2 - y^2)^{1/2} [1 + (b/2a)(y_0^2 + y^2)]^{1/2}$$

elde edilir. ve buradan

$$t = -a^{-1/2} \int_{y_0}^y \frac{dy}{(y_0^2 - y^2)^{1/2} [1 + (b/2a)(y_0^2 + y^2)]^{1/2}}$$

bulunur. Denklemde  $\omega = y_0 \cos \Psi$  dönüşümü yapılırsa

$$t = a^{-1/2} \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{[1 + (b/2a)y_0^2(1 + \cos^2 \Psi)]^{1/2}}$$

elde edilir. Eğer  $\lambda^2 = by_0^2 / 2(a + by_0^2)$  ise denklem

$$t = \frac{1}{(1 + by_0^2)^{1/2}} \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \Psi)^{1/2}} \quad (44)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \Psi)^{1/2}}$$

integrali  $\lambda$  modüllü birinci cinsten bir eliptik integraldir.

(44) denklemi

$$u = F(\lambda, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\Psi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \Psi)^{1/2}} \quad (45)$$

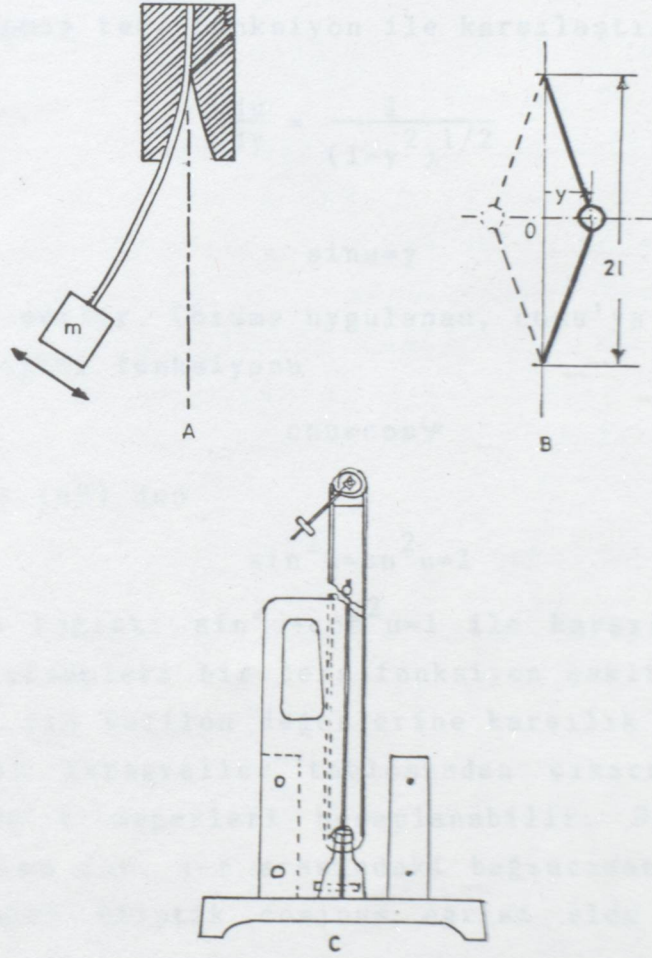
olmak üzere



$$t = \frac{1}{(a+by_0^2)^{1/2}} F(\lambda, \varphi) \quad (46)$$

şeklinde yazılabilir. (45) de  $x=\sin\psi$  dönüşümü yapılırsa,

$$u = \int_0^{\sin\psi} \frac{dx}{[(1-x^2)^{1/2}(1-\lambda^2x^2)^{1/2}]}$$



Şekil 3.

ABC Bir non-lineer yay kontrolünün bulunuşu

olur. Tanımdan



$$u = \sin^{-1} \sin \varphi = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{[(1-x^2)^{1/2} (1-\lambda^2 x^2)^{1/2}]}$$

yazılabilir. Böylece

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi \quad (47)$$

olur. Burada  $\operatorname{sn} u$  jacobian eliptik fonksiyonun sinüs tipidir. Bu tanım

$$u = \operatorname{sn}^{-1} y = \int_0^y \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} \quad |y| \leq 1$$

ile tanımlanmış ters fonksiyon ile karşılaştırılırsa

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}}$$

veya

$$\sin u = y$$

sonucu elde edilir. Çözüme uygulanan,  $\operatorname{cos} u$ 'ya karşılık gelen jacobian eliptik fonksiyonu

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi \quad (48)$$

dir. (47) ve (48) den

$$\sin^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$$

bulunur. Bu bağıntı  $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$  ile karşılaştırılabilir. (44), (46) çözümleri bir ters fonksiyon şeklinde ifade edilebilir.  $\varphi^0$  rın verilen değerlerine karşılık gelen  $F$  değerleri eliptik integraller tablosundan çıkartılabilecektir. Tablo-1 den  $t$  değerleri hesaplanabilir. Diğer koordinat  $y = y_0 \cos \varphi = y_0 \operatorname{cn} u$  dur.  $y-t$  arasındaki bağıntıdan grafik noktaları çizilerek eliptik cosinüs eğrisi elde edilmiş olur.

## 2.2. Salınımın Peryodik Zamanı

(42) denklemi ile verilen dinamik sistem sönümsüzdür ve yay kontrolü ters simetrik veya tek fonksiyondur. Eğer kütle  $\mp y_0$  kadar yer değiştirmişse, salınımdan sonra  $y=0$  merkezi durum esnasında bir periyodik salınıma uygulanmış olur.



Hareketin periyodu 2.1 de elde edilmiş  $y=y_0 \cos \varphi$  den çıkar. Çünkü  $\cos \varphi$ ,  $2\pi$  periyodludur. Çeyrek periyot, kütlenin  $y=y_0$  başlangıç durumundan merkeze veya  $y=0$  denge durumuna hareketi için alınmış periyottur. Bu periyot  $\varphi=(0,1/2\pi)$  aralığına karşılık gelir. (44) ve (46) dan hareketin tam periyodu

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \left[ \frac{4}{(a+by_0^2)^{1/2}} \right] \int_0^{1/2} \frac{d\psi}{(1-\lambda^2 \sin^2 \psi)^{1/2}} \quad (49) \\ &= [(a+by_0^2)^{1/2}] F(\lambda, 1/2\pi) \end{aligned}$$

dir. Burada  $F(\lambda, 1/2\pi)$ ,  $\lambda$  modüllü birinci cinsten bir tam eliptik integraldir.  $(a+by_0^2)^{1/2}$  çarpanından dolayı periyodik zaman,  $a, b, y_0$ 'nın ya ayrı ayrı ya da birlikte artması ile azalır. Eğer  $y_0$  sabit ise,  $a$  veya  $b$  ya da bunların her ikisindeki bir artım, daha sert bir yay ve bu nedenle daha küçük bir  $\tau_0$  periyodu ve  $\omega/2\pi = \tau_0^{-1}$  yüksek temel frekansı gerektirir. Eğer  $a, b$  sabit olursa,  $(a+by_0^2)$  ye karşılık gelen,  $(s_1+s_3y_0^2)$  ortalama sertliğinin arttırılması ile başlangıç hızı daha büyük olacağından ya da büyüyecektir. Yaklaşık olarak periyod

$$\begin{aligned} \tau_0 (a+by_0^2)^{-1/2} &= [m/(s_1+s_3y_0^2)]^{1/2} = (\text{kütle/ortalama sertlik})^{1/2} \\ \tau_0 &= (\text{kütle/ortalama sertlik})^{1/2} \times \text{bir çarpan} \quad (50) \end{aligned}$$

dir. Burada çarpan  $4F(\lambda, 1/2\pi)$  dir.

### 2.3. 2.2 de Verilen Periyodun Nümerik Örneği

$y_0=1$   $a=10$ ,  $b=100$  alınırsa modül

$$\begin{aligned} \lambda &= [by_0^2/2(a+by_0^2)]^{1/2} = (100/2 \times 110)^{1/2} \\ &= 0.674 \end{aligned}$$

dür. (49) denklemini ve Eliptik integral tablosundan,

$$\begin{aligned} \tau_0 &= (4/110)^{1/2} F(0.674, 1/2\pi) \\ &= 4 \times 1.82/10.48 = 0.695 \end{aligned}$$



elde edilir. (50) ile verilen çarpan  $4 \times 1.82 = 7.28$  dir. Bir lineer yay-kontrol sisteminde  $2\pi \approx 6.28$  alınabilir. Salınımın frekansı

$$\frac{\omega}{2\pi} = \tau_0^{-1} \approx 1.44$$

dür.  $b=0$  ise

$$y = y_0 \cos a^{1/2} t$$

dir ve frekans

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{a^{1/2}}{2\pi} = \frac{10^{1/2}}{2\pi} \approx 0.5$$

dir.  $y=1$  olduğunda yay kontrolüne  $by^3$  teriminin eklenmesiyle salınımın frekansı 3 katına çıkar. Frekans oranı  $y_0 > 1$  ve  $y_0 < 1$ 'e uygun olarak artar veya azalır.

#### 2.4. Grafiksel Gösteriliş

$y$  ile  $t$  arasındaki ilişkiyi göstermek için

$$t = F(0.674, \varphi) / 110^{1/2}$$

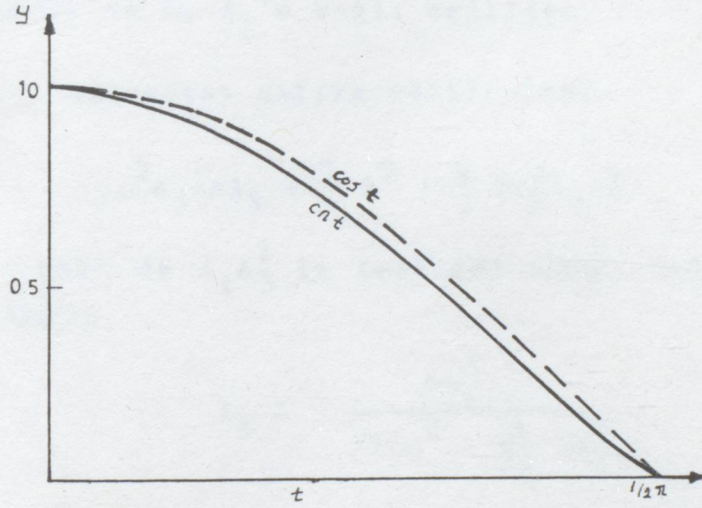
formülü kullanılır.  $\lambda = 0.674 = \sin \alpha$  ve buradan  $\alpha = 42.5^\circ$  dir. Aynı zamanda  $y = y_0 \cos \varphi = \cos \varphi$  dir. Datalar tablodan elde edilmiştir.

Tablo 1.

$\varphi^\circ$	$F(42.5^\circ, \varphi^\circ)$	$t = F/10.48$	$t(\text{radians})$	$y = \cos \varphi$
0	0.000	0.0000	0.000	1.000
10	0.175	0.0167	0.151	0.985
20	0.352	0.0336	0.304	0.940
30	0.535	0.0510	0.461	0.866
40	0.724	0.0691	0.625	0.766
50	0.923	0.0881	0.797	0.643
60	1.132	0.1080	0.976	0.500
70	1.353	0.1292	1.168	0.342
80	1.58:	0.1510	1.365	0.174
90	1.82:	0.1738	1.571	0.000



Tablodaki son iki sütündeki noktalar birleştirilerek  $\text{cnt}=\cos$  Jacobian Eliptik Fonksiyonunun ilk çeyrek periyodu elde edilir. Eğrinin bu kısmı şekil 4 de çizilmiştir. Burada eliptik cosine eğrisi, eşit periyotlu ve genlikli adi veya dairesel cosinüs eğrisi ile karşılaştırılması için kesik çizgi ile çizilmiştir. İki eğrinin ordinatları arasındaki fark önemli değildir.



Şekil-4. cnt ve cost eğrileri.

#### 2.5. (42) Denkleminin Yaklaşık Çözümü

$y=\cos\psi=\text{cnt}$  eğrisi bir Fourier serisi ile çözülebilir. Birinci yaklaşımda

$$y=A_1\cos\omega t+A_3\cos 3\omega t$$

alalım. Burada  $|A_1| \gg |A_3|$  dür. Bu denklem (42) de yazılıp  $\Psi=\omega t$  dönüşümü yapılırsa

$$y = -\omega^2(A_1\cos\Psi+gA_3\cos 3\Psi)$$

$$ay = a(A_1\cos\Psi+A_3\cos 3\Psi)$$

$$by^3 = 1/4bA_1^3(3\cos\Psi+\cos 3\Psi)+3/4A_1^2A_3\cos\Psi+3/2bA_1^2A_3\cos 3\Psi$$



elde edilir. Son satırda  $A_3$  ü içeren terimler (ikisi dışın-  
da) ihmal edilebilir olduğundan kaldırılmıştır.

$\cos\psi$  nin katsayısı sıfıra eşitlenirse,  $A_1 \neq 0$  olmak üzere

$$\omega^2 = a + \frac{3}{4} bA_1^2 + \frac{3}{4} bA_1A_3 \quad (51)$$

elde edilir. (51) den, non-lineer dinamik sistemin veya di-  
ğer bir fizik sisteminin karakteristiği olan frekansın hare-  
ketin genliğine bağlı olduğu görülür.  $b=0$ ,  $A_3=0$  olduğunda,  
sistem lineerdir ve  $\omega$ ,  $A_1$ 'e bağlı değildir.

$\cos 3\psi$  nin katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$-g\omega^2 A_3 + aA_3 + \frac{1}{4} A^3 + \frac{3}{2} bA_1^2 A_3 = 0$$

elde edilir. (51) de  $A_1 A_3^2$  li terimler ihmal edilip,  $a$  için  
dönüşüm yapılarak

$$A_3 \approx \frac{bA_1^3}{32(\omega^2 - \frac{3}{32} bA_1^2)} \quad (52)$$

elde edilir.  $A_3$  lü terimler kullanılmadan (51) bağıntısı  
(52) de yazılarak

$$\begin{aligned} \frac{A_3}{A_1} &\approx \frac{bA_1^2}{32a + 21bA_1^2} \\ &= \frac{1}{[21 + (\frac{32a}{bA_1^2})]} \end{aligned} \quad (53)$$

elde edilir. Burada  $b > 0$  olmak koşuluyla denklem daima 1 den  
küçük veya 1'e eşittir.

$t=0$  da  $y=y_0$  olduğundan  $|A_1| \geq |A_3|$  ile

$$y_0 = A_1 + A_3 \quad (54)$$

elde edilir. (51) denklemini (54) de kullanılırsa



$$\omega^2 = a + \frac{3}{4} by_0^2 - \frac{3}{4} by_0 A_3 \quad (55)$$

bulunur.  $a=10$ ,  $b=100$ ,  $y_0=1$  alınıp  $A_3$  lü terimler ihmal edilirse ilk yaklaşım

$$\omega^2 \approx 10 + 75 = 85$$

olur.  $A_1 \approx 1$  alınarak bu sonuç (52) de kullanılırsa

$$A_3 \approx 0.04 \quad (56)$$

elde edilir. Böylece  $A_1 \approx 25A_3$  olur. Değişik değerler yerine (55) konulursa

$$\omega^2 \approx 85 - 75 \times 0.04 = 82$$

elde edilir. Böylece periyodik zaman

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 0.698$$

olur. (54) ve (56) dan  $A_1 = (y_0 - A_3) = 1 - 0.04 = 0.96$  bulunur. Bulunan  $A_1$  ve  $A_3$  değerleri için ilk yaklaşım

$$y = 0.96 \cos \omega t + 0.04 \cos 3\omega t \quad (57)$$

şeklinde elde edilir.

## 2.6. 2.3 ve 2.4'ün Uygulamaları

2.3 ve 2.4 de elde edilen sonuçlar aşağıdaki problem için kullanılabilir: Büyük bir  $m$  kütlesi,  $h$  yüksekliğinden çelik bir yüzey üzerine bırakılmıştır. Sıkıştırma esnasında birbirine kenetlenen iki cismin yer değiştirme ile kuvvet arasındaki bağıntı  $f = s_1 y + s_2 y^3$  dür. (a) yüzey kütlesini, (b) sıkıştırmadan sonra  $my$  den oluşan yer değiştirmeyi (c) sönümü ihmal ederek, sistemin hareketi belirlenir.

Diferansiyel denklem,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + s_1 y + s_2 y^3 = 0$$

veya

$$\ddot{y} + ay + by^2 = 0$$



dır. Burada  $a=s_1/m$   $b=s_3/m$  dir. Max  $y_0$  yer değiştirmesi enerji bağıntısından hesaplanabilir. Strain enerji, m in potansiyel enerjideki kaybına eşitlenirse,

$$s_1 \int_0^{y_0} y dy + s_3 \int_0^{y_0} y^3 dy = \frac{1}{2} s_1 y_0^2 + \frac{1}{4} s_3 y_0^4 = mg(h+y_0)$$

elde edilir.  $h \geq y_0$  ise

$$y_0 = \left( \frac{s_1}{s_3} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + 4mgh \frac{s_3}{s_1} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}$$

olur.  $y=y_0$  için hareket 2.3 ve 2.4 teki hareket ile özdeştir. Böylece  $y-t$  eğrisi eliptik cosinüs cnt dir. Çünkü sönüm yoktur.  $y=0$  dan  $y_0$ 'a kadar olan eğrinin başlangıç kısmı cnt nin birinci dördte-bir daireye karşılık gelmesiyle elde edilmiştir. 2.4 te ilk yaklaşım

$$y = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t$$

şeklinde verilmiştir. İşleme  $t=0$  da yani sıkıştırmanın meydana geldiği zaman başlanırsa  $\omega t$  yerine  $(\omega t - 1/2\pi)$  yazılmalıdır. Bu da

$$y = A_1 \sin \omega t - A_3 \sin 3\omega t$$

yaklaşık çözümlerini verir.  $A_1$  ve  $A_3$  2.4 teki gibi hesaplanır.

## 2.7. Basit Sarkaç

şekil 5A da verilen hareketin denklemleri

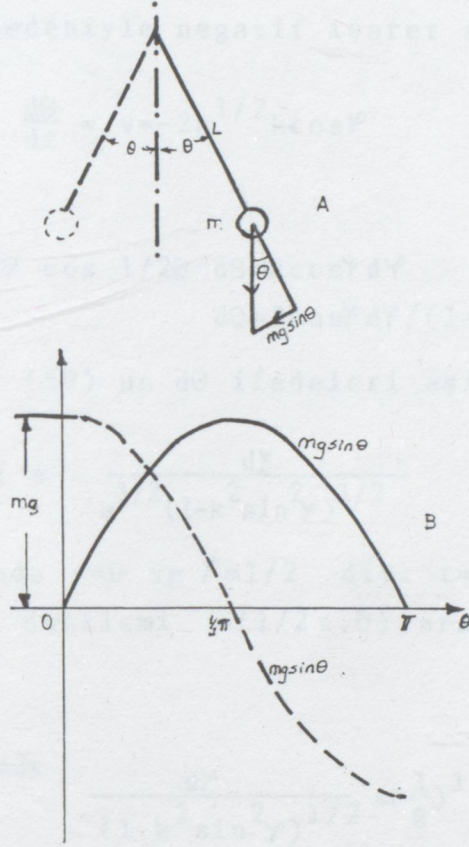
$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0$$

veya

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (58)$$

dır.  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$  olduğundan denklemin derecesi birden farklı olur ve bu nedenle denklem non-lineerdir. Sinüs eğrisinin şeklinden dolayı sertlik kontrolü  $\theta$  nin artması ile azalır (şekil 5B).





Şekil 5A. Basit sarkaç. B. Basit sarkaç için yenilenmiş kuvvet ve sertlik eğrileri.

(58) de  $v = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $\frac{g}{l} = a$  yazılırsa,

$$v \frac{dv}{d\theta} + a \sin \theta = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\int v dv = -a \int \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} A$$

$$v^2 = 2a \cos \theta + A$$

bulunur. Eğer maximum genlik  $\theta = \Psi$  ise  $v=0$  ve  $A = -2a \cos \Psi$  olur. Böylece



$$v = \mp(2a)^{1/2}(\cos\theta - \cos\psi)^{1/2} = \mp 2a^{1/2}(\sin^2 1/2\psi - \sin^2 1/2\theta)^{1/2}$$

elde edilir.  $1/2\psi = k$ ,  $\sin 1/2\theta = k \sin\varphi$  alınıp,  $t$  nin artması ile  $\theta$  nin azalması nedeniyle negatif işaret seçilirse,

$$\frac{d\theta}{dt} = v = -2a^{1/2} k \cos\varphi \quad (59)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 1/2 \cos 1/2\theta \, d\theta &= k \cos\varphi \, d\varphi \\ d\theta &= 2 \cos\varphi \, d\varphi / (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2} \end{aligned}$$

dır. Bu denklemin ve (59) un  $d\theta$  ifadeleri eşitlenirse

$$dt = - \frac{d\varphi}{a^{1/2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \quad (60)$$

bulunur.  $t=0$  olduğunda  $v=0$  ve  $\varphi=1/2$  dir.  $t=1/4\tau_0$  olduğunda  $\theta=0$ ,  $\varphi=0$  olur. (60) denklemi  $(1/2\pi, 0)$  aralığında integre edilirse,

$$1/4\tau_0 = a^{-1/2} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} = \left(\frac{1}{g}\right)^{1/2} F(k, 1/2\pi)$$

çeyrek periyot elde edilir. Burada  $F(k, 1/2\pi)$  ifadesi birinci cinsten  $k = \sin 1/2\varphi$  modüllü bir tam eliptik integraldir. Böylece bir tam periyot için zaman

$$\tau_0 = 4 \left(\frac{1}{g}\right)^{1/2} m F(k, 1/2\pi)$$

olur. Eliptik integral tablosundan,  $k$  daki artım ile  $F$  in de arttığı görülür. Dolayısıyla genliğin büyümesi, periyodik zamanın uzamasını gerektirir, yani swing zamanı genliğin bir fonksiyonudur.



2.8. 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

Denkleminin Yaklaşık Çözümü

$|\theta| < 1/6$  ise  $\sin\theta \approx \theta - 1/60\theta^3$  alınabilir. Bu durumda denklem

$$\theta'' + a\theta + b\theta^3 = 0$$

olur. Burada  $a = \frac{g}{l}$ ,  $b = -\frac{g}{6l}$  dir. Sertlik  $g$  nin artması ile azalır. Bu durumda ilk yaklaşım (51) bağıntıları ile elde edilir. Bir  $\Psi$  genliği için

$$\omega^2 \approx a + \frac{3}{4} b\Psi^2 = \left(\frac{g}{l}\right) \left[1 - \frac{1}{8} \Psi^2\right]$$

dir. Böylece  $\Psi$  genliğinin fonksiyonu olmak üzere yaklaşık periyodik zaman

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{16} \Psi^2\right)$$

dir.

## 2.9. Sönümlü Viskos Hareket

(42) denklemine  $2k\dot{y}$  terimi ilave edilirse,

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + (ay + by^3) = 0 \quad (61)$$

elde edilir.  $k=0$  olduğunda (53) den

$$\frac{A_3}{A_1} \leq 1 \quad (62)$$

bulunur. Hareket yaklaşık olarak açısal frekanslı cosinüsoidal bir hareket olur.

$$\omega \approx \left(a + \frac{3b}{4} A_1^2\right)^{1/2}$$

Buradan yaklaşık çözüm

$$y = y_0 \cos \omega t$$

dir.  $k > 0$  olduğunda ve (62) şartı sağlandığında, yaklaşık olarak denklem



$$y+2ky+\omega^2 y=0$$

olur. Başlangıç şartları  $t=0$  için  $y=0$   $y=0$  dır. (61) denkleminin yaklaşık çözümü

$$y=y_0 e^{-kt} \cos \omega t$$

olur.  $A_1 \approx y_0 e^{-kt}$ ,  $t \rightarrow \infty$  için  $\omega \rightarrow \beta^{1/2}$  olduğunda

$$\omega \approx (a + \frac{3}{4} b y_0^2 e^{-2kt})^{1/2}$$

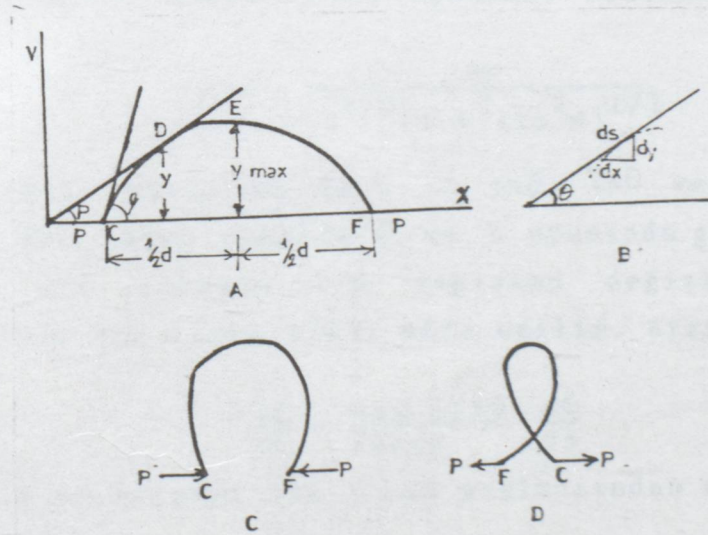
elde edilir.

## 2.10. Elastik

Lineer Elastik teorisinde aşağıdaki kurallar kabul edilmiştir.

1<sup>o</sup>) Zorlama basınç ile orantılıdır. Yani Hook kanunu geçerlidir.

2<sup>o</sup>) Sapma, basınç formüllerinde çok büyük olduğundan bunun kareleri, çarpımları ve türevleri ihmal edilebilir.



Şekil 6A. CEF Elastikinin Şeması. CD. Bent şekli.



- l = sabit kabul edilen strutun eksen uzunluğu  
p = şekil 6A daki gibi ox doğrusu boyunca uygulanan  
s = c den itibaren ölçülmüş yay uzunluğu  
 $\Psi, \theta$  = c ve D'de sırasıyla gerilmeye teğet açısı  
y = D deki ordinat  
D=E<sub>1</sub> = bükülme rijitliği  
I = bending düzlemine dik kesitin eylemsizlik momenti  
E = Elastikiyet modülü olmak üzere

Diferansiyel denklem  $a=p/B$  ile

$$\frac{Bd\theta}{ds} + py=0 \quad (63)$$

veya

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + a \frac{dy}{ds} = 0 \quad (64)$$

dır. Şekil 6B den  $dy/ds=\sin\theta$  dır ve böylece (64) denklemi

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + a\sin\theta=0 \quad (64)$$

olur. Bu denklemde s yerine t yazılırsa, (58) denklemi ile özdeş olur. Sonuç olarak (60) denklemi kullanılırsa denklem;

$$ds = - \frac{d\varphi}{a^{1/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \quad (68)$$

şeklini alır. Şekil 6A da C de  $y=0$ ,  $\Psi=\theta$  ve bundan dolayı  $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$  dir. Aynı zamanda C ve E arasında gerilme üzerinde herhangi bir noktada 2.6 değişken değişimi yardımıyla  $\varphi_1 = \sin^{-1}(\sin 1/2 \theta / \sin 1/2 \Psi)$  elde edilir. Ayrıca

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos 1/2\theta}{2k\cos} \frac{d\theta}{ds}$$

denklemi s in artması ile  $\theta$  nın azalmasından dolayı negatiftir. Bu durumda



$$\begin{aligned} s &= -a^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \\ &= a^{-\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\varphi_1} \right] \\ &= a^{-\frac{1}{2}} [F(k, \frac{1}{2}\pi) - F(k, \varphi_1)] \end{aligned} \quad (67)$$

elde edilir. E de  $\varphi_1=0$  olduğunda (67) bağıntısından

$$1 = 2a^{-\frac{1}{2}} F(k, \frac{1}{2}\pi) \quad (68)$$

sonucu bulunur.

### 2.11. Maximum Sapma

(63) ve (68) den

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{a} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a} 2a^{1/2} k \cos \varphi \\ &= 2ka^{-1/2} \cos \varphi \end{aligned}$$

elde edilir.  $\varphi=0$  olduğunda

$$y_{\max} = 2ka^{-1/2} = \frac{k1}{F(k, 1/2\pi)} \quad (69)$$

dir.

### 2.12. Yük ve Max Sapma Arasındaki İlişki

Gerilme, bükülme durumunda olduğu zaman  $\Psi=0$ ,  $k=0$ ,  $y_{\max}=0$  dır. (68) denkleminde  $F=1/2\pi$  olduğundan  $a=p_c/B$  alınarak Euler critical yükünün formülü

$$p_c = \frac{\pi^2 B}{l^2} \approx \frac{10B}{l^2}$$

şeklinde yazılır. (68) bağıntısı



$$p = \frac{4BF^2}{l^2}$$

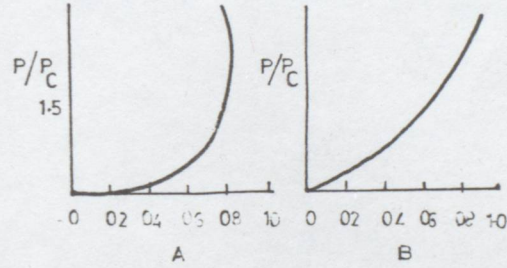
şeklinde yazılırsa

$$\frac{p}{p_c} = \frac{4F^2}{\pi^2}$$

elde edilir. (65) denkleminde

$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{k}{F}$$

bulunur. F tablosu kullanılarak  $k = \sin l/2\psi$  nin değişik değerleri için  $y_{\max}/l$  ye karşılık gelen  $p/p_c$  değerleri için grafik şekil 7A daki gibi çizilir.



Şekil 7A. Elastikte  $p/p_c$  ile  $y_{\max}/l$  nin grafiği  
B.  $p/p_c$  ile  $(1-d)l$  nin grafiği

### 2.13. Şekil 6A daki d Uzaklığı

Bu uzaklık

$$d = \int dx = 2 \int_0^{1/2 l} \cos \theta ds$$

ile verilmiştir.  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 l/2\theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \psi$  olduğundan (63) ve (66) dan



$$\begin{aligned}d &= 2a^{-1/2} \int_0^{1/2} \frac{(1-2k^2 \sin^2 \varphi)}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} d\varphi \\ &= 2a^{1/2} \int_0^{1/2\pi} \frac{2(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} d\varphi \\ &= 2a^{-1/2} [2E(k, 1/2) - F(k, 1/2\pi)] \quad |k| < 1\end{aligned}$$

elde edilir. Burada F ve E sırasıyla birinci ve ikinci cinsten bir tam eliptik integraldir.  $(1-d)/1$  oranı k'nın değişik değerleri için hesaplanabilir. Bu takdirde şekil 7B'deki gibi  $p/p_c$  ve  $(1-d)/1$  arasındaki ilişkiyi gösteren grafik çizilir.

#### 2.14. Sürekli Jacobian Eliptik Fonksiyonlar

2.1 den

$$\operatorname{snu} = \sin \varphi \quad (70)$$

ve

$$\operatorname{cnu} = \cos \varphi \quad (71)$$

dir.  $|k| < 1$  ile, üçüncü fonksiyon

$$\begin{aligned}\operatorname{dnu} &= (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} = \{(1-k^2) + k^2 \cos^2 \varphi\}^{1/2} \\ &= (1-k^2 \sin^2 u)^{1/2} = \{(1-k^2) + k^2 \operatorname{cn}^2 u\}^{1/2}\end{aligned} \quad (72)$$

ile tanımlanmıştır. Bu durumda (70), (71) ve (72) den

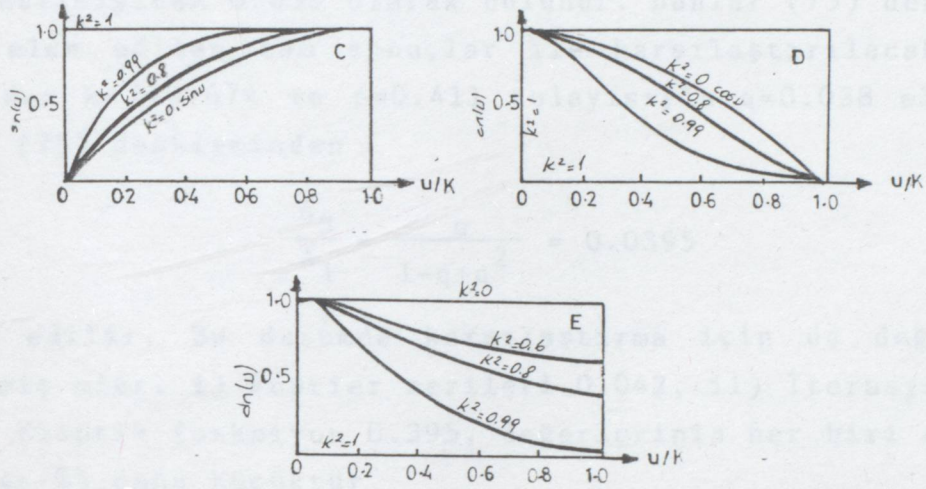
$$\sin^2 u + \operatorname{cn}^2 u = k^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1$$

olur. Peryodik fonksiyonların grafikleri şekil 7CDE'de verilmiştir.

Türevler: k ile  $\lambda$  için (46) dan

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \operatorname{snu} &= \sin' u = \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi \frac{d\varphi}{du} \\ &= (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \cos \varphi\end{aligned}$$





Şekil 7. CDE Jacobian eliptik fonksiyonu csnu, Dcnu.

elde edilir. Böylece

$$sn'u = cnudnu \quad (73)$$

benzer şekilde

$$cn'u = -snudnu \quad (74)$$

ve

$$dn'u = -k^2 snucnu \quad (75)$$

bulunur.

Fourier Serileri  $K=F(k, 1/2\pi)$  ile

$$q^{1/2} = p(1+2p^4+15p^8+150p^{12}+1707p^{16}+\dots), p=k^{1/2}/2 \quad |k|<1$$

$$snu = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{q^{r+1/2}}{1-q} \right) \sin(2r+1) \frac{\pi u}{2K} \quad (74)$$

$$cnu = \frac{2\pi}{kK} \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{q^{r+1/2}}{1+q} \right) \cos(2r+1) \frac{\pi u}{2K} \quad (75)$$

$$dnu = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{q^r}{1+q} \right) \cos \frac{r\pi u}{K}$$

dir.



(75) in Uygulaması:  $\ddot{y} = 10y + 100y^3 = 0$  diferansiyel denkleminin ikinci yaklaşık çözümünde üçüncü harmoniğin esas harmoniğe genlik oranı 0.042 dir. Bu değer iterasyon metodu kullanıldığında 0.038 olarak bulunur. Bunlar (75) denkleminde elde edilen tam sonuçlar ile karşılaştırılacaklardır. 2.3 den  $k = \lambda = 0.674$  ve  $p = 0.411$  dolayısıyla  $q = 0.038$  elde edilir. (75) denkleminde

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{q}{1 - q + q^2} = 0.0395 \quad (76)$$

elde edilir. Bu durumda karşılaştırma için üç değer elde edilmiş olur. i) Fourier serileri 0.042, ii) İterasyon 0.038 iii) Eliptik fonksiyon 0.395, değerlerinin her biri esas değerden %5 daha küçüktür.

## 2.15. Asnu, Acnu, Adnu ile Sağlanan Denklemler

1<sup>o</sup>) Asnu için diferansiyel denklem

(73) u'ya göre türetilirse

$$\begin{aligned} sn'' &= dncn' + cnda'n' \\ &= -sn(dn^2 + k^2cn^2) \end{aligned} \quad (77)$$

elde edilir. Fakat  $dn^2 + k^2sn^2 = 1$ ,  $sn^2 + cn^2 = 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} dn^2 + k^2cn^2 &= 1 - k^2sn^2 + k^2(1 - sn^2) \\ &= (1 + k^2) - 2k^2sn^2 \end{aligned} \quad (78)$$

dir. (77) ve (78) den

$$sn'' = A(1 + k^2) - 2k^2sn^2$$

elde edilir. Eğer  $y = snu$  ise denklem

$$y'' + (1 + k^2)y - 2k^2y^3 = 0 \quad (79)$$

dir.  $y = Asnu$  olsun. Burada A sıfırdan farklı gerçel bir sabittir.  $y = Asnu$  (79) denkleminde yazılıp A ile bölünürse denklemin sol tarafındaki sonucu terim  $-2k^2A^2sn^3$  olur. Buradan  $y = Asnu$



(75) in Uygulaması:  $y''=10y+100y^3=0$  diferansiyel denkleminin ikinci yaklaşık çözümünde üçüncü harmoniğin esas harmoniğe genlik oranı 0.042 dir. Bu değer iterasyon metodu kullanıldığında 0.038 olarak bulunur. Bunlar (75) denkleminde elde edilen tam sonuçlar ile karşılaştırılacaklardır. 2.3 den  $k=\lambda=0.674$  ve  $p=0.411$  dolayısıyla  $q=0.038$  elde edilir. (75) denkleminde

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{q}{1-q+q^2} = 0.0395 \quad (76)$$

elde edilir. Bu durumda karşılaştırma için üç değer elde edilmiş olur. i) Fourier serileri 0.042, ii) İterasyon 0.038 iii) Eliptik fonksiyon 0.395, değerlerinin her biri esas değerden %5 daha küçüktür.

#### 2.15. Asnu, Acnu, Adnu ile Sağlanan Denklemler

1<sup>o</sup>) Asnu için diferansiyel denklem

(73) u'ya göre türetilirse

$$\begin{aligned} sn'' &= dncn' + cndn' \\ &= -sn(dn^2 + k^2 cn^2) \end{aligned} \quad (77)$$

elde edilir. Fakat  $dn^2 + k^2 sn^2 = 1$ ,  $sn^2 + cn^2 = 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} dn^2 + k^2 cn^2 &= 1 - k^2 sn^2 + k^2(1 - sn^2) \\ &= (1 + k^2) - 2k^2 sn^2 \end{aligned} \quad (78)$$

dir. (77) ve (78) den

$$sn'' = -(1 + k^2)sn + 2k^2 sn^3$$

elde edilir. Eğer  $y = snu$  ise denklem

$$y'' + (1 + k^2)y - 2k^2 y^3 = 0 \quad (79)$$

dır.  $y = Asnu$  olsun. Burada A sıfırdan farklı gerçel bir sabittir.  $y = Asnu$  (79) denkleminde yazılıp A ile bölünürse denklemin sol tarafındaki sonucu terim  $-2k^2 A^2 sn^3$  olur. Buradan  $y = Asnu$



$$y''+(1+k^2)y-2k^2A^{-2}y^3=0 \quad (80)$$

denklemini sağladığı görülür.

(80) denkleminde  $u=\alpha t$  yazılırsa

$$y''+(1+k^2)\alpha^2y-2k^2\alpha^2A^{-2}y^3=0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü  $y=Asn\alpha t$  dir.

2°)  $Acn$  için diferansiyel denklem

1° de olduğu gibi işlem yapılırsa

$$\ddot{y}+ay+by^3=0 \quad (a,b>0)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$y=Acn\{t(a+bA^2)^{1/2}\}$$

şeklindedir. Burada  $k^2=bA^2/2(a+bA^2)$

$$\tau = \frac{4F(k, 1/2\pi)}{(a+bA^2)^{1/2}}$$

dir.  $a,b>0$  olduğundan  $A$  gerçel sayısı için  $|k|<1$  dir. Bundan dolayı çözüm daima periyodik ve karardır.

3°)  $Adn$  için diferansiyel denklem

$$y''-ay+by^3=0 \quad (a,b>0)$$

diferansiyel denkleminin,  $k^2=2(1-a/bA^2)$ ,  $|k|<1$  ve

$$\tau = \frac{2F(k, 1/2\pi)}{A(b/2)^{1/2}}$$

ile çözümü

$$y=Adn\{At(b/2)^{1/2}\}$$

dir.  $y=(a/b)^{1/2}$  civarında bir periyodik çözüm için,  $k$  gerçel olmalıdır. Buradan

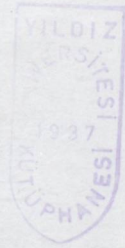
$$(2a/b)^{1/2} > |A| > (a/b)^{1/2}$$

elde edilir.



## K A Y N A K L A R

1. McLACHLAN, N.W. Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences.
2. SANSONE, G. and CONTI, R. Non-Linear Differential Equations.
3. DAVIES, T.V. and JAMES, E.M. Non-Linear Differential Equations.
4. INCE, E.L. Ordinary Differential Equations.





## TEZ YAZARININ ÖZGEÇMİŞİ

Zerrin OER 1967 de Üsküdar'da doğdu. İlköğrenimini Üsküdar Hattat İsmail Hakkı İlkokulu, orta öğrenimi Üsküdar Kız lisesinde yaptı. 1984 yılında yüksek öğrenime başladığı, Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Lisans' dan 1988'de mezun oldu.

1988-89 öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında araştırma görevlisi oldu. Aynı yıl yüksek lisans sınavını kazanarak Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı.

Halen Yıldız Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.

