

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU
ELEMEN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Selmahan SELİM

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Behiç ÇAĞAL

İSTANBUL , 1995

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

ÖZET i

SUMMARY ii

GİRİŞ 1

BÖLÜM I

I.SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNE GİRİŞ

1.1. Genel Açıklamalar 3

1.2. Sonlu Eleman Yönteminin Temel Kavramı 4

1.3. Örnek Üzerine Genel Uyarılar 8

1.4. Bir Boyutlu Sonlu Elemanlar ve Enterpolasyon Fonksiyonları 10

1.5. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar ve Enterpolasyon Fonksiyonları 18

1.5.1. Üçgensel Elemanlar 18

1.5.2. Dikdörtgensel Elemanlar 25

BÖLÜM II

II.SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

2.1. Tanım 28

2.2. Sınır Değer Probleminin Varyasyonel Formülasyonu 28

2.3. Varyasyonel Yaklaşım Yöntemleri 31

2.3.1. Ritz Yöntemi 32

2.3.2. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi 36

BÖLÜM III

III.SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

3.1. Tipik Bir Problemin Sonlu Eleman Analizinde Gerekli Adımlar 40

3.2. Bir Boyutlu Problemlerin Sonlu Eleman Analizi 42

3.2.1. Bölgenin Elemanlara Bölünmesi 42

3.2.2. Eleman Denklemlerinin Türetilmesi	44
3.2.3. Eleman Denklemlerinin Birleştirilmesi	47
3.2.4. Sınır Şartlarını Yerleştirme	51
3.2.5. Denklemlerin Çözümü	52
3.2.6. Çözümünden Sonraki İşlem	55
3.3. İki Boyutlu Problemlerin Sonlu Eleman Analizi	57
3.3.1. Varyasyonel Fofmülasyon	59
3.3.2. Sonlu Eleman Formülasyonu	60
3.3.3. Eleman Matrislerin Hesaplanması	61
3.3.4. Eleman Matrislerinin Birleştirilmesi	65

BÖLÜM IV

IV.UYGULAMA

4.1. Sonlu Eleman Yötemi İle Çözüm	70
4.2. Sonlu Fark Yöntemi İle Çözüm	76
4.3. Sonuçların Sonlu Fark Yöntemi İle Karşılaştırılması	78
SONUÇ	79
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	81

TEŞEKKÜR

Tezimin belirlenmesinde, tüm çalışmalarında ve tezimin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın *Prof.Dr. Behiç ÇAĞAL* ' a sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen *sevgili aileme* , çalışmalarında bana sürekli yardımcı olan ve manevi destekte bulunan arkadaşım *Uzm.Elif TEKİN* ' e ve tezimi yazmamda yardımcı olan arkadaşlarım *Arş.Gör.İşım DEMİRİZ* , *Arş.Gör. Aydın DEMİRİZ* , *Arş.Gör. Çiđdem GENÇ* ' e teşekkür ederim.

Selmahan SELİM

Haziran, 1995

ÖZET

Sonlu eleman yöntemi, tanım bölgesinin sonlu eleman denilen alt bölgelere bölündüğünü kabul ederek bir sınır ve başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü araştırır.

Sonlu eleman yönteminde, yaklaşım fonksiyonları parçalı polinomlardır yani polinomlar sadece, eleman denilen bir alt bölgede tanımlanmıştır.

Birinci bölümde, sonlu eleman yönteminin temel kavramı, sonlu elemanlar ve enterpolasyon fonksiyonları verilmiştir. Ayrıca, sonlu eleman yönteminin asıl özelliği olan enterpolasyon fonksiyonlarının oluşturulmasının sistematik bir tekniği verilmiştir.

İkinci bölümde, sınır değer problemleri tanımlanmış ve sınır değer problemlerinin sonlu eleman formülasyonu açıklanmıştır. Varyasyonel yöntemler tartışılmıştır.

Üçüncü bölümde, bir ve iki boyutlu sınır değer problemlerin sonlu eleman analizi sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, sınır değer problemi sonlu eleman yöntemi ve sonlu fark yöntemi ile çözülmüştür, ve sonuçlar sonlu fark yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

SUMMARY

The finite element method seeks an approximation solution to a boundary and initial-value problems by assuming that the domain is divided into subdomains called finite elements

In the finite element method, the approximation functions are piecewise polynomials, that is, polynomials are defined only on subdomains called an element.

In the first section, the basic concept of the finite element method, finite elements and interpolation functions have been given. Also, it has been given systematic methods of constructing the interpolation functions, which is the main feature of the finite element method.

In the second section, the boundary value problems have been defined and finite element formulations of them have explained. Variational methods have been discussed.

In the third section, the finite element analysis of one and two dimensional boundary value problems has been presented.

In the fourth section, boundary value problems have been solved by the finite element method and the finite difference method, and the results have been compared with the results obtained by the finite difference method.

GİRİŞ

Sonlu eleman yöntemi, hesapsal yöntemlerde bu yüzyılda meydana gelen gelişmelerin en önemlilerinden birisidir. Sonlu eleman yöntemi, katı hal problemleriyle başlayan, gelişen ve belirli bir sahaya ulaşan sayısal bir yöntemdir. Katı hallerin ilk uygulaması yapılar (structures) dır. Fakat şimdi uygulamalı matematiğin bütün alanlarında ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlere ait yaklaşık çözümleri bulmak için kullanılmaktadır.

Sonlu eleman terimi katı hal mekaniğinde yüzey gerilimi (plane-stress) problemlerinin analizi için R.W.Clough tarafından 1960 da ilk olarak kullanılmıştır. 1950 lerden beri sonlu eleman yöntemi, katı hal mekaniğinde diğer bilim ve mühendisliklerden daha çok uygulama alanı bulmaktadır.

Courant (1943), bükme(torsion) problemi çalışmasında minimum potansiyel enerji özelliğini ve üçgensel elemanların yerleştirilmesini kullanmıştır. Sonlu eleman yönteminin belli özellikleri Hrenikoff (1941) ve Courant (1943) ın çalışmalarında bulunmasına rağmen, sonlu eleman yönteminin formel gösterilimi Argyris ve Kelsey (1960), Turner, Clough, Martin ve Topp (1956) a maledilmiştir.

Başlangıçta sonlu eleman yöntemine, geometrik şekillerin (elemanların) toplanması veya hesap edilmesiyle belirli büyüklüklerin (özellikle alan, hacim) hesabı için rağbet edilmiştir. Bununla birlikte, günümüzde sonlu eleman yönteminin anlamı, sınır ve başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini, problemin tanım bölgesini alt bölgelere bölündüğünü kabul ederek ve her bir sonlu eleman üzerinde yaklaşım fonksiyonlarının çıkarılmasıyla bulunur.

Tanım bölgesi çok sayıda elemanlara bölündüğünden ve belli noktalarda (düğümlerde) noktaların değerlerine göre fonksiyona yaklaşıldığından, böyle bir fonksiyon

hesabı için denklemlerin aynı zamanda çözümü gerekeceği kaçınılmazdır. Bundan dolayı sonlu eleman yöntemi, bu yüzyılın ortalarına kadar yaygın bir biçimde kullanılmadı. Bu zaman içerisinde de bilgisayar güçlü bir hesaplama aleti haline geldi. Şimdi sonlu elemanlar yöntemi uygulaması sonucu oluşan integrallerin sayısal çözümleri, denklem sistemlerinin çözümleri bilgisayarlarda yapılabilmektedir.

Katı hal mekaniği, akışkanlar mekaniği, kimyasal reaksiyonlar, nükleer reaktörler, plazma, akustik ve elektromanyetik alanlarda sonlu eleman uygulamaları yapılmaktadır.



BÖLÜM I

I. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNE GİRİŞ

1.1. Genel Açıklamalar

İster biyolojiye, ister jeolojiye isterse mekaniğe ait olsun doğadaki her olay, ilgili çeşitli büyüklükleri anlatan cebirsel ifadeler, diferansiyel yada integral denklemler fizik kanunları yardımıyla tanımlanabilir. Problemlerin ifade edilmesi çok zor olmazken problemlerin gerçek yöntemlerle çözümleri çok zor bir iştir. Bunların arasında sonlu fark yöntemleri ve varyasyonel yöntemler örneğin Ritz ve Galerkin yöntemleri literatürde en çok kullanılan yöntemlerdir.

Diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımında, denklemdeki türevler yerine tanım bölgesinin kesikli ağ noktalarında çözümü istenen noktaların fark büyüklükleri yerleştirilir. Sınır koşulları yerleştirildikten sonra, ağ noktalarındaki çözümün değerleri için kesikli denklemler çözülür. Sonlu fark yöntemi basit olmasına rağmen birçok dezavantajı vardır. En dikkate değer olanları; hesap edilen çözümün türevlerden oluşan nümerik hatası, düzgün olmayan sınırlar boyunca sınır koşullarının yerleştirilmesindeki zorluk, geometrik olarak karışık tanım bölgelerinin doğru olarak temsil edilmesindeki zorluk, düzgün olmayan ve dikdörtgensel olmayan ağları kurmadaki güçlük olarak söylenebilir.

Diferansiyel denklemin varyasyonel çözümünde diferansiyel denklem, denk bir varyasyonel formla ifade edilir ve daha sonra yaklaşık çözümün verilen ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarının bir $\sum c_j \phi_j$ kombinasyonu olduğu kabul edilir. c_j parametreleri varyasyonel formdan belirlenir. Varyasyonel yöntemlerin bir dezavantajı keyfi tanım bölgesi problemler için yaklaşım fonksiyonlarının oluşturulmasındaki zorluktur.

Sonlu eleman yönteminde bu zorlukla karşılaşılmaz. Çünkü sonlu eleman yöntemi yaklaşım fonksiyonlarının türetilmesi için bir sistematik prosedür geliştirir. Bu yöntemin iki temel özelliği diğer yöntemlerden üstün olmasını sağlar. Birincisi;

problemin geometrik olarak karışık tanım bölgesi, *sonlu elemanlar* denilen geometrik olarak basit alt bölgelerin bir toplamı ile temsil edilir. İkincisi; her bir sonlu eleman üzerinde yaklaşım fonksiyonları, herhangi sürekli fonksiyon cebirsel polinomların bir lineer kombinasyonu yardımıyla temsil edilebilir şeklindeki temel fikir kullanılarak çıkarılabilir. Yaklaşım fonksiyonları, enterpolasyon teorisinden kavramlar kullanılarak çıkarılabilir ve bu nedenle bu yaklaşım fonksiyonlarına *enterpolasyon fonksiyonları* denir. Böylece sonlu eleman yöntemi, varyasyonel yöntemlerin bir parçalı uygulaması olarak yorumlanabilir ki yaklaşım fonksiyonları cebirsel polinomlardır ve belirlenmeyen parametreler, eleman içinde ve sınır üzerinde *düğüm*ler denilen sonlu sayıda önceden seçilmiş noktalarda çözümün değerlerini temsil ederler. Enterpolasyon teorisinden enterpolasyon fonksiyonlarının mertebesinin (veya derecesinin), elemandaki düğümlerin sayısına bağlı olduğunu söyleyebiliriz (Reddy, 1989).

1.2. Sonlu Eleman Yönteminin Temel Kavramı

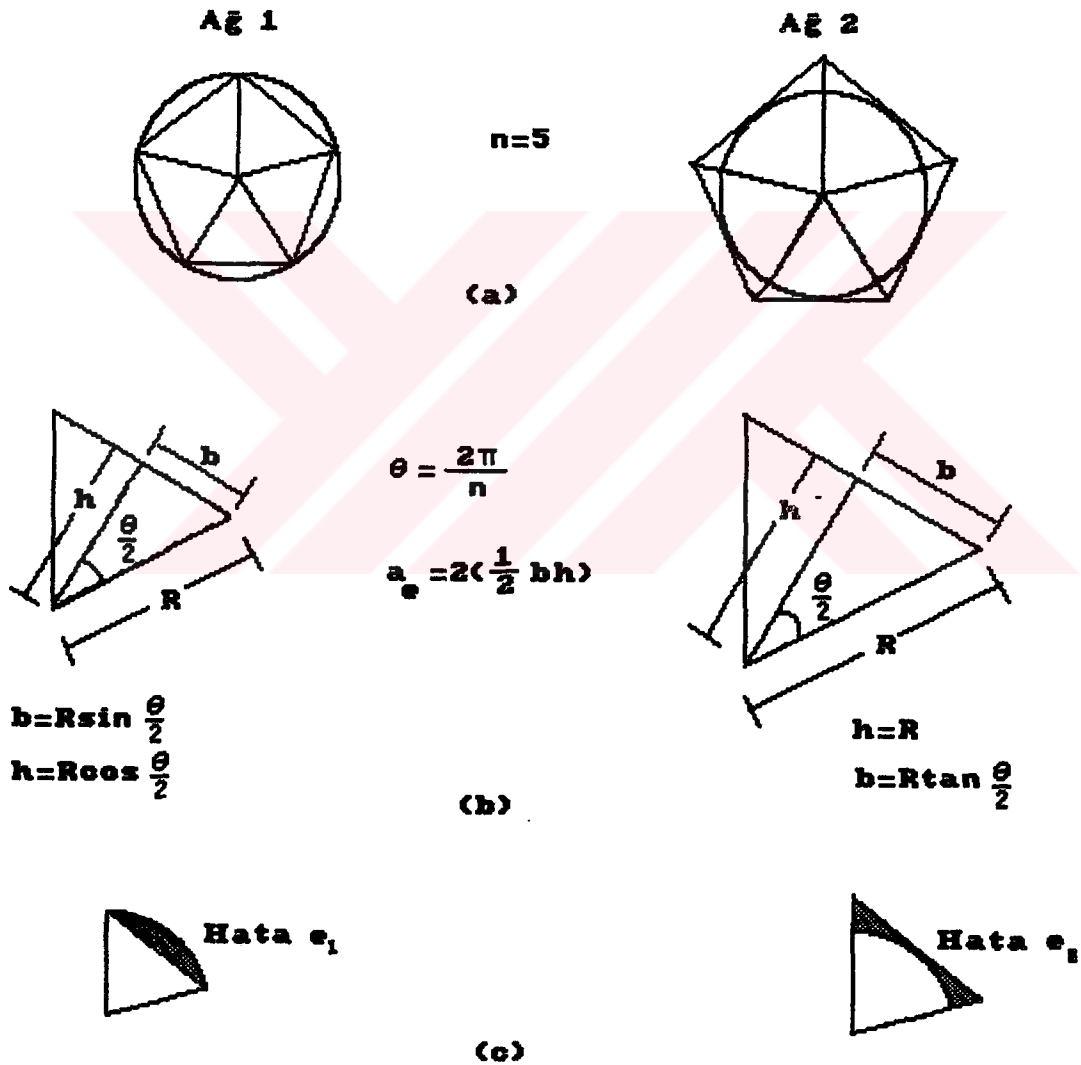
Sonlu eleman yönteminin esası aşağıdaki örnek ile belirtilebilir (Reddy, 1989).

Örnek : Üçgenin Alan Formüllerini Kullanarak Bir Dairenin Alanını Belirleme :

Üçgenlerin toplamı olarak bir dairenin temsil edilmesiyle R yarıçaplı bir dairenin alanını belirleme problemini ele alalım. Üçgenlerin alanlarının hesaplanabilir olduğu kabul edilir. Yani bir üçgenin alanı için formülü biliyoruz (Şekil 1.1). Dairenin yaklaşık alanı, dairenin temsil edilmesi için kullanılan üçgenlerin alanlarının toplamıdır. Bu basit bir örnek olmasına rağmen yine de sonlu eleman yönteminin temel özelliğini açıklar. Yaklaşık alan hesabını içeren adımları taslak halinde belirtirebiliriz. Bu bağlamda ayrıca herhangi bir problemin sonlu eleman analizinde kullanılan belli kavramlar belirtilir.

1. Sonlu Elemanlara Bölme

Sürekli bölge yani daire n sonlu sayıda üçgenler denilen alt bölgelerin toplamı olarak temsil edilebilir. Buna üçgenler yardımıyla *bölgenin bölünmesi* denilir. Her bir bölgeye bir *eleman* denilir. Elemanların toplamına da *sonlu eleman ağı* adı verilir. Mevcut durumda daire beş üçgenli bir ağa bölünür. Bu bölünme Şekil 1.1. de gösterilmiştir. Elemanların hepsi aynı büyüklükte olduğu için bu ağa *düzgün ağ* adı verilir.



Şekil 1.1. Bir Dairenin Sonlu Eleman Gösterilmesi

(a) Sonlu elemanlara bölme (b) Tipik elemanlar

(c) Sınır yaklaşım hataları

2. Eleman Denklemleri

Tipik bir eleman yani T_e üçgeni diğerlerinden ayrılır ve o elemanın özellikleri yani alan hesaplanır. Gerekli özelliği hesaplamak için elemanın düzenlenmiş denklemini (yani alan hesabı için denklem) burada çıkarırız.

Ağ 1' deki e elemanının alanı a_e ve ağ 2' deki e elemanının alanı \bar{a}_e olsun. e elemanı için ;

$$a_e = \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \quad (1.1)$$

$$\bar{a}_e = R^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

yazarız. Burada R dairenin yarıçapıdır. Yukarıdaki (1.1) denklemlerine *eleman denklemleri* denir.

3. Eleman Denklemlerinin Yerleştirilmesi Ve Çözüm

Dairenin yaklaşık alanı, eleman özelliğinin birlikte koyulması ile elde edilir; bu işleme *eleman denklemlerinin yerleştirilmesi* adı verilir. Yerleştirme , bu durumda yerleştirilen elemanların

$$A_1 = \sum_{e=1}^n a_e \quad A_2 = \sum_{e=1}^n \bar{a}_e$$

şeklindeki toplam alan, tek elemanların alanlarının toplamına eşit olduğu şekilde basit bir düşünceye dayanır. Ağ düzgün olduğu için a_e ve \bar{a}_e ' ler ağdaki her bir eleman için aynıdır ve

$$A_1^{(n)} = n \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \quad A_2^{(n)} = n R^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

yazabiliriz.

4. Yakınsaklık Ve Hata Tahmini

Bunun için gerçek çözümü bildiğimiz bir $A_0 = \pi R^2$ problemini ele alalım. Yaklaşımında hatayı tahmin edebiliriz ve yaklaşık çözümün $n \rightarrow \infty$ için limitinin gerçeğe yakınsadığını gösterebiliriz. Tipik bir e elemanı ele alalım. Yaklaşımında hata, daire diliminin alanı ile buna ait üçgenin alanı arasındaki farka eşittir (Şekil 1.1c).

$$e_1 = |S_e - a_e| \quad ; \quad e_2 = |S_e - \bar{a}_e|$$

dır. Burada $S_e = \frac{1}{2}R^2\theta$ daire diliminin alanıdır. Böylece 1 ve 2 ağılarındaki elemanlar için hata ;

$$e_1 = R^2\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) \quad ; \quad e_2 = R^2\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right)$$

şeklinde verilebilir. e_i 'lerin n ile çarpılmasıyla toplam hata (global hata) aşağıdaki şekilde verilir.

$$E_1^{(n)} = R^2\left(\pi - \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \pi R^2 - A_1^{(n)}$$

$$E_2^{(n)} = R^2\left(n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - \pi\right) = A_2^{(n)} - \pi R^2$$

Şimdi $n \rightarrow \infty$ için E_1 ve E_2 'nin sifıra gittiğini göstereceğiz; $x = \frac{2}{n}$ alarak ,

$$A_1^{(n)} = R^2\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = R^2\frac{\sin\pi x}{x}$$

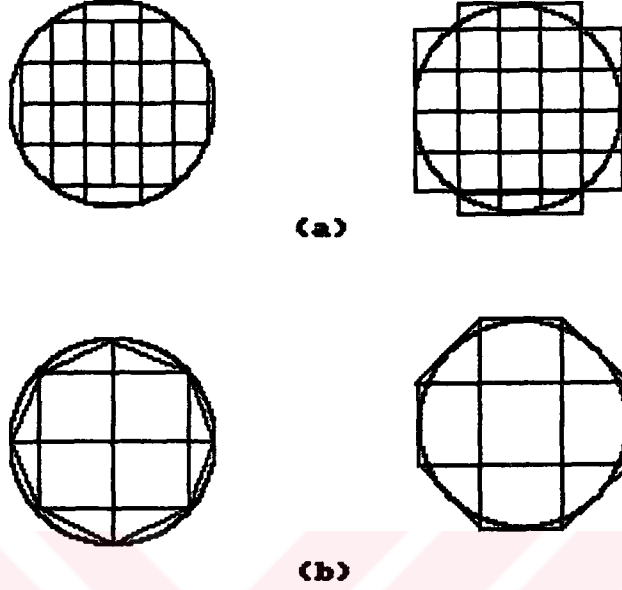
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1^{(n)} = \lim_{x \rightarrow 0} R^2\frac{\sin\pi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi R^2 \cos\frac{\pi x}{1} = \pi R^2$$

benzer şekilde $y = \frac{1}{n}$ alarak $A_2^{(n)}$ 'nin de $n \rightarrow \infty$ için limitinin πR^2 olduğunu gösterebiliriz.

O halde $E_1^{(n)}$ ve $E_2^{(n)}$ $n \rightarrow \infty$ için sıfırdır. Bu, yakınsaklık ispatını tamamlar.

Şekil 1.2 'de gösterildiği gibi, bölgelere bölmede sadece hem dikdörtgenleri hem de üçgenlerin ve dikdörtgenlerin bir kombinasyonunun kullanılabilir olduğuna dikkat

edilmelidir.



Şekil 1.2. Üçgensel Ve Dikdörtgensel Elemanlar Yardımıyla
Sonlu Elemanlara Bölme

(a) Dikdörtgensel elemanlar ağı

(b) Üçgensel ve dikdörtgensel elemanlar ağı

1.3. Örnek Üzerine Genel Uyarılar

1. Tanım bölgesinin şekline bağlı olarak tanım bölgesi birden fazla eleman tipinin bir ağına bölünebilir. Örneğin bir daire yaklaşımında Şekil 1.2' de gösterildiği gibi ya sadece dikdörtgenler kullanırız ya da üçgenlerin ve dikdörtgenlerin bir kombinasyonunu kullanırız. Bir üçgensel ağ veya üçgenlerin ve dikdörtgenlerin kombinasyonundan oluşan ağ, bir dikdörtgensel elemanların toplamına karşılık gelen ağdan daha yakın (daha iyi) temsil eder. Elbette ki daire dilimi şeklindeki elemanlar bir daireyi tam olarak temsil eder.

2. Tanım bölgesini temsil etmede eğer birden fazla eleman tipi kullanılıyorsa herbir türün biri alınmalıdır ve onun özellikleri geliştirilmelidir.

3. Tanzim edilen denklemler yukarıdaki örnekte alınan denklemlerden genellikle daha karışıktır. Bunlar genellikle diferansiyel denklemlerdir. Birçok durumlarda bu denklemler iki sebepten dolayı çözülemezler. Birincisi; bu denklemler çözüme olanak vermezler. İşte varyasyonel yöntemlerin faaliyete girdiği yer burasıdır. İkincisi ; varyasyonel yöntemlerle elde edilen kesikli denklemler geriye kalan elemanlardan bağımsız çözülemezler çünkü elemanları yerleştirme kesin sınır ve/veya başlangıç koşullarına bağlıdır.

4. Sonlu elemanda kullanılan ve klasik varyasyonel yöntemlerde (yani tüm tanım bölgesine uygulanan varyasyonel yöntem) kullanılan yaklaşık çözüm formunda iki esas farklılık vardır. Birincisi; varyasyonel yöntemlerde c_j keyfi parametrelerine göre bir $u = \sum c_j \phi_j$ lineer kombinasyonu olarak u çözümünün temsil edilmesi yerine sonlu eleman yönteminde çözüm, düğüm noktalarında u 'nun u_j değerlerine göre (ve muhtemelen onun türevleri de) bir $u = \sum u_j \psi_j$ lineer kombinasyonu olarak temsil edilir. İkincisi ; sonlu eleman yöntemlerinde yaklaşım fonksiyonları enterpolasyon teorisi kullanılarak çıkarılan polinomlardır.

5. Bir elemandaki düğümlerin konumu ve sayısı,

a) Elemanın geometrisine

b) Yaklaşım derecesine

c) Denklemin varyasyonel formuna bağlıdır.

İstenen çözümün düğümlerdeki değerlerine göre temsil edilmesiyle, düğümlerde yaklaşık çözüm direkt olarak elde edilir.

6. Elemanların yerleştirilmesi, genel bir durumda çözümün (ve muhtemelen onun türevleri) eleman arası sınırlarda sürekli olduğu fikrine dayanır. Yukarıdaki örnekte süreklilik koşulu mevcut değildir. Çünkü kullanılan denklemler cebirsel denklemlerdir.

7. Genelde, sonlu elemanları yerleştirme sınır ve/veya başlangıç koşullarına bağlıdır. Sonlu eleman ağı ile ilgili kesikli denklemler sadece sınır ve/veya başlangıç koşullarının yerleştirilmesinden sonra çözülebilir.

8. Bir sonlu eleman çözümünde üç hata kaynağı vardır.

a) Tanım bölgesine yaklaşımdan oluşan hatalar

b) Çözüme yaklaşımdan oluşan hatalar

c) Nümeriksel hesaplamalardan oluşan hatalar (örneğin bir nümeriksel integrasyon ve bir nümeriksel hesapta yuvarlatma hataları)

Bu hataların tahmini genelde basit bir konu değildir. Bununla birlikte belli koşullar altında hatalar verilen bir eleman ve problem için hesap edilebilir.

9. Sonlu eleman çözümünün doğruluğu ve yakınsaklığı çözülen diferansiyel denkleme (veya kullanılan varyasyonel forma) ve kullanılan elemana bağlıdır.

" Doğruluk " kelimesi gerçek çözüm ve sonlu eleman çözümü arasındaki farklılıkla ilgilidir. "Yakınsaklık " kelimesi ağdaki elemanların sayısı artırıldığından doğrulukla ilgilidir. Yakınsaklığın tabiatı (örneğin monoton olarak azalan hata veya üstten gerçek çözüme yakınsaklık) tanzim edilen denklemlerin formülasyonuna bağlıdır. Yukarıdaki örnekte A_0 gerçek çözüme , A_1 alanı alttan yakınsar ve A_2 alanı üstten yakınsar.

1.4. Bir Boyutlu Sonlu Elemanlar Ve Enterpolasyon Fonksiyonları

Bir boyutlu lineer eleman, herbiri bir ucunda olmak üzere iki düğümlü ve h uzunluğunda olan bir doğru parçasıdır (Seegerlind, 1984). h_e uzunluklu e elemanını ele alalım. Bu e elemanın tanım bölgesi $\Omega^e = (x_e, x_{e+1})$ olsun. Bu lineer elemana bir örnektir.

Bir lineer elemana yaklaşım fonksiyonu,

$$u(x) = c_1 + c_2 x \quad (1.2)$$

şeklinde. c_1 ve c_2 katsayıları düğüm koşulları (esas sınır koşulları) kullanılarak belirlenebilir;

$$\begin{aligned} u(x_e) &\equiv u_1^{(e)} = c_1 + c_2 x_e \\ u(x_{e+1}) &\equiv u_2^{(e)} = c_1 + c_2 x_{e+1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

dır.

Matris formda,

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_e \\ 1 & x_{e+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

şeklinde yazarız. c_1 ve c_2 için çözümlerse,

$$c_1 = \frac{u_1^{(e)} x_{e+1} - u_2^{(e)} x_e}{x_{e+1} - x_e} \quad ; \quad c_2 = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{x_{e+1} - x_e} \quad (1.4)$$

elde edilir. (1.4) ifadesi (1.2) ifadesine yerleştirilir ve $u_i^{(e)}$ katsayılarına göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{u_1^{(e)} x_{e+1} - u_2^{(e)} x_e}{x_{e+1} - x_e} + \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{x_{e+1} - x_e} x \\ &= \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} u_1^{(e)} + \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} u_2^{(e)} \\ &= \sum u_i^{(e)} \psi_i^{(e)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

dır. Burada

$$\psi_1^{(e)} = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \quad ; \quad \psi_2^{(e)} = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \quad x_e \leq x \leq x_{e+1} \quad (1.6)$$

dır. (1.5) ifadesi elemanın esas eleman koşullarını sağlar ve eleman üzerinde $\{\psi_i^{(e)}\}$ süreklidir, lineer olarak bağımsızdır ve tamdır. $\psi_1^{(e)}$ ve $\psi_2^{(e)}$ lere *şekil fonksiyonları* veya *enterpolasyon fonksiyonları* denir.

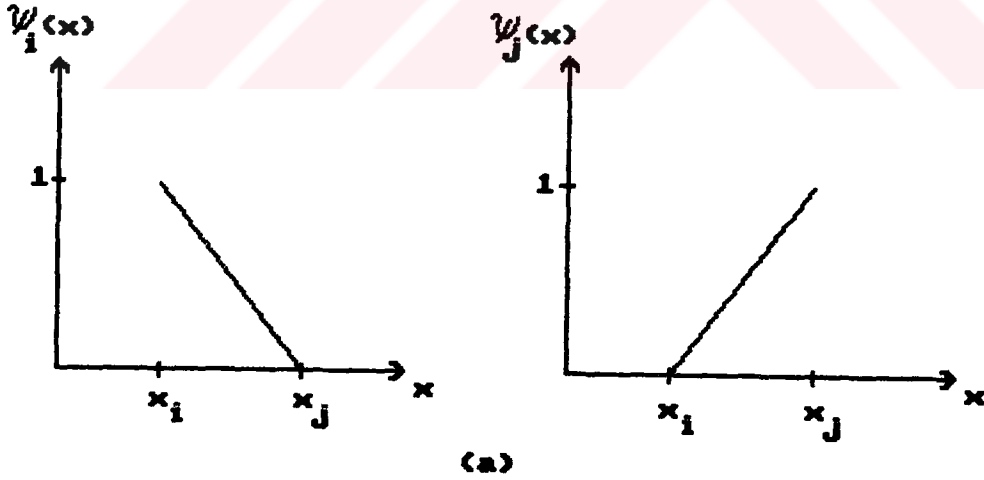
Enterpolasyon fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$\begin{aligned} 1. \quad \psi_i^{(e)}(x_j) &= \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ ise} \\ 1 & i = j \text{ ise} \end{cases} \quad x_1 = x_e \quad , \quad x_2 = x_{e+1} \\ 2. \quad \sum_{i=1}^2 \psi_i^{(e)}(x) &= 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

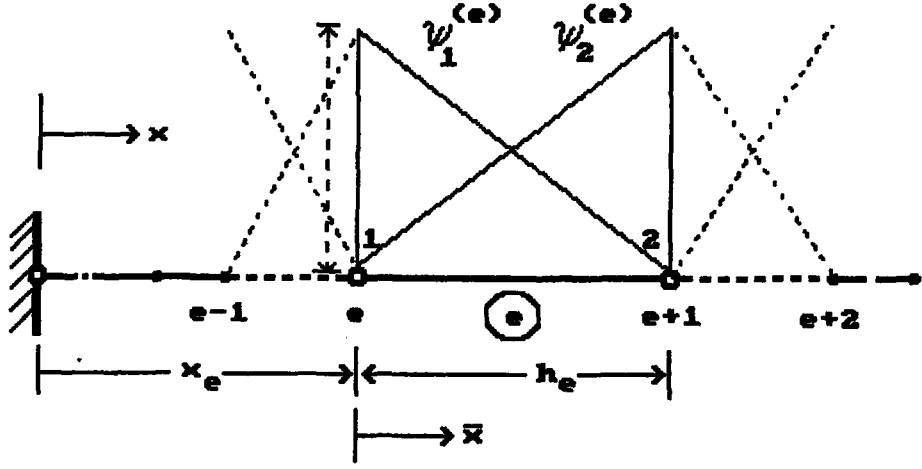
dır. Yani herbir enterpolasyon fonksiyonu kendi düğümünde 1 değerini alır ve diğer düğümde 0 değerini alır. Herbir enterpolasyon fonksiyonlarının toplamı 1 dir. Yukarıdaki özelliklere ek olarak enterpolasyon fonksiyonlarının x 'e göre türevlerinin toplamı sıfırdır. Ω^e elemanının dışında $\psi_i^{(e)} = 0$ dir. (şekil 1.3b)

İlk özellik enterpolasyonun sonucudur ve 2. özellik (1.2) yaklaşımının bir sabit terim içermesinin sonucudur. Özellik 1, (1.5)'in (1.3) deki koşulları sağladığı ve ψ_i nin lineer bağımsız olduğu anlamındadır (Reddy, 1989).

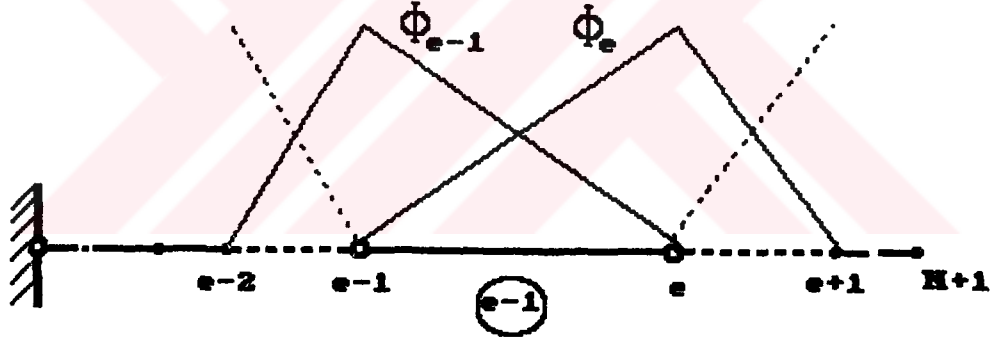
Dikkat edilirse (1.2) ifadesi lineer denklemdir ve enterpolasyon fonksiyonları lineer denklemlerdir. Eğer yaklaşım fonksiyonu (enterpolasyon denklemi) üç düğüm ile tanımlanmış bir kuadratik model olsaydı oluşturulan enterpolasyon fonksiyonları (şekil fonksiyonları) kuadratik denklemler olacaklardı (Segerlind, 1984). Şekil fonksiyonları şekil 1.3a 'da gösterilmiştir.



Şekil 1.3a. ψ_i ve ψ_j Lineer enterpolasyon fonksiyonları



(b)



$$\Phi_e = \begin{cases} \psi_2^{(e-1)} & x_{e-1} \leq x \leq x_e \\ \psi_1^{(e-1)} & x_{e-1} \leq x \leq x_e \end{cases}$$

(c)

Şekil 1.3 (b) Bir lineer eleman için lokal enterpolasyon fonksiyonları

(c) İki düğümlü eleman ağı için global enterpolasyon fonksiyonları

Enterpolasyon fonksiyonların türetilmesi probleme bağlı değildir. Enterpolasyon fonksiyonları, elemanın tipine (geometri, düğümlerin sayısı, düğümde primary bilinmeyenlerin sayısı) bağlıdır. Örneğin bir boyutlu sonlu elemanda düğümlerin sayısı üç ise (kuadratik eleman) o zaman yaklaşım

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

şeklinde olacaktır. Enterpolasyon fonksiyonları

$$\psi_i = \frac{2}{L^2}(x - x_j)(x - x_k)$$

$$\psi_j = -\frac{4}{L^2}(x - x_i)(x - x_k)$$

$$\psi_k = \frac{2}{L^2}(x - x_i)(x - x_j)$$

dir. Burada L elemanın uzunluğudur ve $x_k - x_i = L$ dir.

Böylece bağımlı u değişkeni için kullanılan yaklaşımın mertebesi ile elemanlardaki düğümlerin sayısı arasında bir ilişki vardır.

Bir lokal koordinat sistemi (yani elemandaki bir koordinat sistemi) enterpolasyon fonksiyonlarının türetilmesinde uygundur.

x global koordinat sisteminden

$$\bar{x} = x - x_e$$

lineer dönüşümüyle ξ lokal koordinat sistemine geçilebilir. Burada orjin, düğüm 1 (elemanın sol düğümü) dir. Lokal koordinat sisteminde (1.2) ve (1.3) ifadeleri

$$u(\bar{x}) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2\bar{x}$$

$$u_1^{(e)} = u(0) = \hat{c}_1 \quad ; \quad u_2^{(e)} = u(h_e) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2h_e$$

olur. Enterpolasyon fonksiyonları

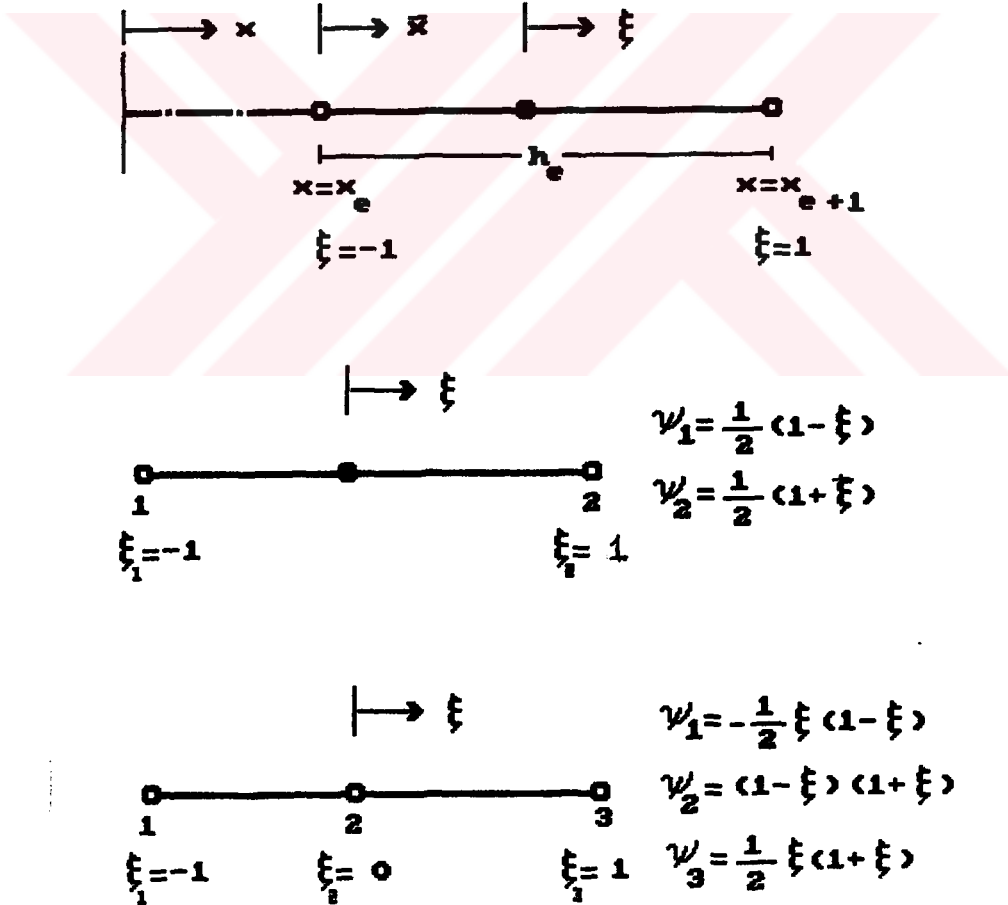
$$\psi_1^{(e)}(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \quad , \quad \psi_2^{(e)}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e} \quad 0 \leq \bar{x} \leq h_e \quad (1.8)$$

haline gelir.

Eğer \bar{x} lokal koordinat sisteminin orjini elemanın merkezinde ise ve elemanın en soldaki düğümde $\xi = -1$, en sağdaki düğümde $\xi = 1$ değeri ölçülmüşse koordinat sistemi ξ normal koordinat (veya doğal koordinat) sistemi adını alır. Bu dönüşüm,

$$\xi = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{h_e} \quad (1.9)$$

şeklindedir. Burada x_e ve x_{e+1} sırasıyla e elemanın sol ve sağ düğümlerinin global koordinatlarını gösterir. h_e , elemanın uzunluğudur (Şekil.1.4). (1.9) dönüşümü x ($x_e \leq x \leq x_{e+1}$) noktalarını ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$) noktalarına dönüştürür. Normal koordinat sistemi, interpolasyon fonksiyonlarını oluşturma ve Gauss- Legendre formülleri ile (bu formüller -1 ile 1 aralığında geçerlidir) integrali hesaplama için uygundur.



Şekil 1.4. Normal (doğal) Koordinat Dönüşümü Ve

Enterpolasyon Fonksiyonlarının Lagrange Ailesi

$$\psi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

özelliğini dikkate alarak n düğümlü bir eleman için ψ_i fonksiyonu $(\xi - \xi_j)$ lineer fonksiyonun $(j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n, \quad j \neq i \text{ için})$ $(n-1)$ kere çarpımıdır.

$$\psi_i = c_i(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\dots(\xi - \xi_n)$$

ψ_i i düğümü hariç bütün düğümlerde sıfırdır. Sonra $\psi_i = 1$ ve $\xi = \xi_i$ olacak şekilde c_i sabitini belirleriz.

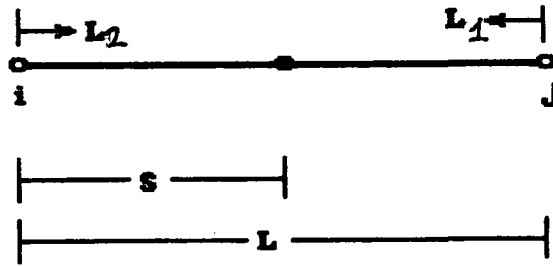
$$c_i = [(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\dots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\dots(\xi_i - \xi_n)]^{-1}$$

Böylece i düğümüyle ilgili enterpolasyon fonksiyonu,

$$\psi_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\dots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\dots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\dots(\xi_i - \xi_n)}$$

şeklindedir.

Bir başka ilginç doğal koordinat sistemi şekil 1.5' da görüldüğü gibi uzunluğun bir çift oranlarından oluşur (Seegerlind, 1984).



Şekil 1.5. Bir Boyutlu Eleman İçin Doğal Koordinat Sistemi

Eğer s , i ' den uzaklığı gösterirse o zaman L_1 ve L_2

$$L_1 = \frac{L - s}{L} \quad \text{ve} \quad L_2 = \frac{s}{L} \quad (1.10)$$

şeklinde oranlar olarak tanımlanır. Bu koordinat çiftleri bağımsız değildir. Çünkü

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (1.11)$$

(1.10) ve (1.11)' in en büyük özelliği (1.8) şekil fonksiyonlarına benzerliğidir. Bu doğal koordinat sistemi

$$\int_0^L \psi_i^m(s) \psi_j^n(s) ds$$

integralinin hesabında kolaylık sağlar.

$$\psi_i(s) = L_1 \quad , \quad \psi_j(s) = L_2 \quad \text{ve} \quad s = LL_2 \quad ds = LdL_2$$

ilişkisinden

$$\int_0^L \psi_i^m \psi_j^n ds = \int_0^1 L_1^m L_2^n L dL_2$$

olur. $L_1 + L_2 = 1$ özelliğini kullanırsak,

$$L \int_0^1 L_1^m L_2^n dL_2 = L \int_0^1 (1 - L_2)^m L_2^n dL_2 \quad (1.12)$$

olur.

$$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

dir. Buna göre (1.12) integrali

$$L \int_0^1 L_2^n (1 - L_2)^m dL_2 = L \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+1+1)} = L \frac{n!m!}{(m+n+2)!}$$

haline gelir. Dolayısıyla

$$L \int_0^1 L_1^m L_2^n dL_2 = L \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

şeklinde hesaplanabilecektir. Yada

$$\int_a^b L_1^m L_2^n ds = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)$$

şeklinde hesaplanabilecektir. Burada (b-a) doğru elemanın uzunluğudur.

1.5. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Ve Enterpolasyon Fonksiyonları

1.5.1. Üçgensel Elemanlar

İki boyutlu lineer üçgensel elemanlar, düğümler köşelerde olmak üzere üç düğümlü bir üçgendir (Segerlind, 1984). Üç düğümlü lineer üçgensel eleman için lineer yaklaşım fonksiyonu,

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (1.13)$$

dir. $\{1, x, y\}$ kümesi lineer bağımsızdır ve tamdır. c_1 , c_2 ve c_3 katsayılarını belirlemek için,

$$u(x_i, y_i) = u_i \quad i = 1, 2, 3$$

koşullarını kullanırız.

$$u_1 \equiv u(x_1, y_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1$$

$$u_2 \equiv u(x_2, y_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2 \quad (1.14)$$

$$u_3 \equiv u(x_3, y_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3$$

dir. Matris formunda

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

yazabiliriz. (1.15) denklemini c_i ($i=1,2,3$) için çözümlürse,

$$c_1 = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

$$c_2 = \frac{1}{2A_e} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \quad (1.16)$$

$$c_3 = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]$$

elde ederiz. Burada A_e , üçgenin alanıdır ve

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

dir. Düğümmler, saatin tersi yönünde hareket edilerek numaralanmıştır. Eğer düğümmler saat yönünde hareket edilerek numaralandırılmış olsaydı determinant ters işaretli olacaktı.

(1.16) ifadesindeki c_i ' ler (1.13) denkleminde yerleştirilir ve u_i ' ye göre düzenlenirse,

$$u(x, y) = u_1\psi_1(x, y) + u_2\psi_2(x, y) + u_3\psi_3(x, y)$$

$$= \sum u_i\psi_i^{(e)}(x, y)$$

elde ederiz. Burada $\psi_i^{(e)}(x, y)$ üçgensel eleman için lineer enterpolasyon fonksiyonudur ve

$$\psi_i^{(e)} = \frac{1}{2A_e}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.16a)$$

dir. α_i , β_i ve γ_i ' ler sabitlerdir;

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_j - y_k \quad i \neq j \neq k \quad (1.16b)$$

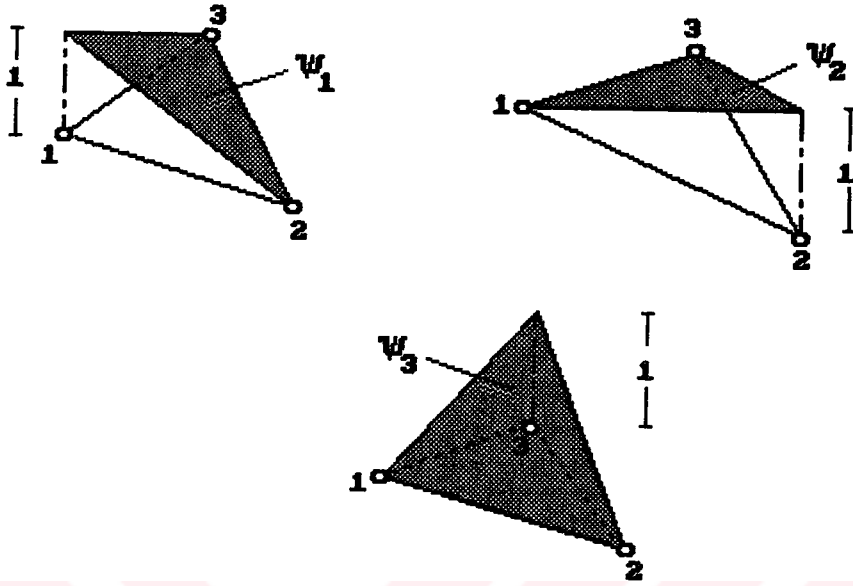
$$\gamma_i = x_k - x_j$$

dır. $\psi_i^{(e)}$ lineer enterpolasyon fonksiyonları şekil 1.6' da gösterilmiştir. ψ_i ' nin özellikleri (1.7) özellikleriyle aynıdır. Yani,

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i = 1$$

özelliklerine sahiptir.



Şekil 1.6. Üç Düğümlü Üçgensel Eleman İçin Lineer Enterpolasyon Fonksiyonları

Daha yüksek mertebeden üçgensel elemanlar yani daha yüksek dereceli enterpolasyon fonksiyonlu üçgensel eleman geliştirmek için x ve y 'ye göre değişik derecelerin polinomlarını içeren paskal üçgeninden yararlanılır (Şekil.1.7).

	Polinomun derecesi	Polinomun terimlerinin sayısı	
	1	0	1
	x	y	1
	x^2	xy	y^2
	x^3	x^2y	xy^2
	y^3		
	\vdots	\vdots

Şekil 1.7 Üçgensel Elemanların Lagrange Ailelerinin Üretilmesi İçin Paskal Üçgeni

p. mertebeden bir üçgensel elaman

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

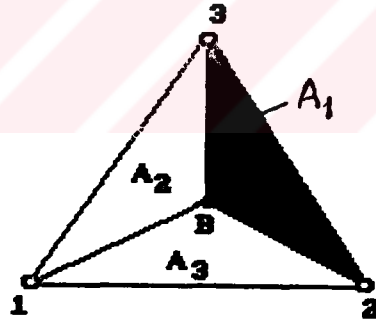
düğüm sayısına sahiptir ve p. dereceden bir polinom,

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i x^r y^s \quad r + s \leq p$$

$$= \sum_{j=1}^n u_j \psi_j$$

şeklindedir.

n, bir fonksiyonu temsil etmek için kullanılan polinomlardaki terimlerin sayısı olmak üzere, enterpolasyon fonksiyonlarının oluşturulmasında $n \times n$ boyutlu matrisin bir inversini içerir. $n > 3$ olduğu zaman bu işlem cebirsel olarak oldukça güçtür. Bunun için enterpolasyon fonksiyonlarının alternatif türetilmesi için L_i alan koordinatları kullanılır (Reddy, 1989).



Şekil 1.8. Bir Üçgenin Alan Koordinatlara Karşılık Gelen Alanlara Bölünmesi

$$L_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^3 A_j} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.17)$$

$$x = \sum_{i=1}^3 L_i x_i ; \quad y = \sum_{i=1}^3 L_i y_i$$

dir. Burada x_i ve y_i , (x,y) koordinat sistemindeki i düğümünün koordinatlarıdır. Kenar başına k düğümlü (eşit olarak aralıklanmış) yüksek mertebeden bir eleman alalım (Şekil 1.9a). O zaman elemandaki düğümlerin toplam sayısı

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} (k - i) = k + (k - 1) + \dots + 1$$

şeklinde verilir ve enterpolasyon fonksiyonlarının derecesi $(k - 1)$ ' e eşittir. Köşe düğümleri I, J, K ile gösterilsin. J ve K düğümlerini bağlayan kenardan I düğümüne dik uzaklık h_I olsun. O zaman J-K kenarından p . satır paraleline ait s_p uzaklığı,

$$s_p = \frac{p}{k-1} \quad , \quad s_0 = 0 \quad , \quad s_I = s_{k-1} = 1$$

şeklinde verilir. ψ_I enterpolasyon fonksiyonu, $L_I = 0, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{p}{k-1}$ ($p=0,1,\dots, k-2$) doğruları üzerindeki düğümlerde sıfır olmalıdır ve $L_I = s_I$ de 1' e eşit olmalıdır. Böylece ψ_I enterpolasyon fonksiyonunun oluşturulması için gerekli bilgiye sahibiz.

$$\begin{aligned} \psi_I &= \frac{(L_I - s_0)(L_I - s_1)(L_I - s_2)\dots(L_I - s_{k-2})}{(s_I - s_0)(s_I - s_1)(s_I - s_2)\dots(s_I - s_{k-2})} \\ &= \prod_{p=0}^{k-2} \frac{L_I - s_p}{s_{k-1} - s_p} \end{aligned}$$

Benzer ifadeler, köşelerden başka yerleştirilmiş düğümler için de çıkarılabilir. i düğümü için ψ_i ,

$$\psi_i = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{f_j}{f_j^i}$$

şeklinde verilir. Burada f_j , L_1, L_2 ve L_3 ' ün fonksiyonlarıdır ve f_j^i i düğümünde f_j ' nin değeridir. Bu f_j fonksiyonları, i düğümü hariç bütün düğümlerden geçen $(k - 1)$ doğrularının denklemlerinden çıkarılır.

Üç düğümlü ($n = 3$) lineer üçgensel bir eleman için (Şekil 1.9b) enterpolasyon fonksiyonları L_i alan koordinatlarına eşittir. Şöyle ki,

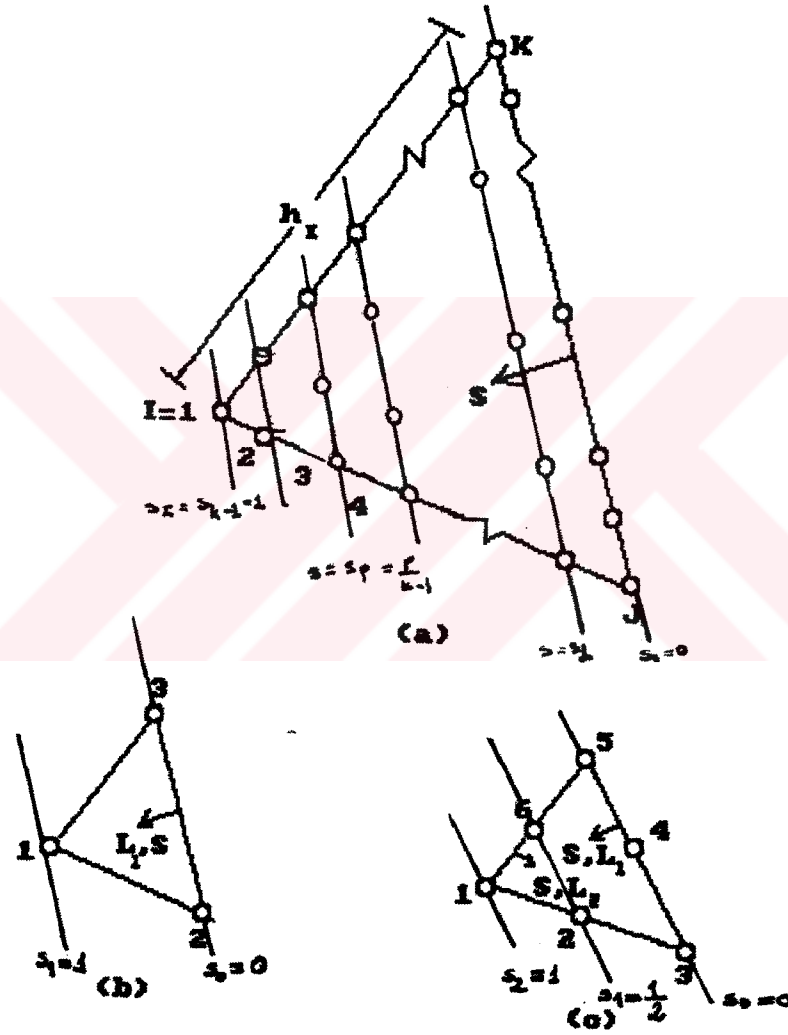
$$s_0 = 0 \quad , \quad s_1 = 1$$

$$\psi_1 = \frac{L_1 - s_0}{s_1 - s_0} = L_1$$

Benzer şekilde ψ_2 ve ψ_3

$$\psi_2 = \frac{L_2 - 0}{1 - 0} = L_2 \quad , \quad \psi_3 = \frac{L_3 - 0}{1 - 0} = L_3$$

olarak bulunur.



Şekil 1.9. Lagrange Üçgensel Elemanlarının Eleman Enterpolasyon Fonksiyonlarının Oluşturulması

- (a) Keyfi (k-1). mertebeden eleman
- (b) Lineer eleman
- (c) Kuadratik eleman

Şekil 1.9c' deki kuadratik eleman için enterpolasyon fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

DÜĞÜM 1 İÇİN ;

Düğüm 1 hariç diğer düğümlerden geçen doğrular şekil 1.9c de görüldüğü gibi

$L_1 = 0$ ve $L_1 = \frac{1}{2}$ doğrularıdır. Yani

$$s_0 = 0 \quad , \quad s_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad s_2 = 1$$

dır.

$$\psi_1 = \frac{(L_1 - s_0)(L_1 - s_2)}{(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)} = L_1(2L_1 - 1)$$

Düğüm 1' de $L_1 = 1$ dir dolayısıyla $s_2 = 1$ dir.

DÜĞÜM 2 İÇİN ;

Düğüm 2 hariç diğer düğümlerden geçen iki doğru, 1-5 düğümlerini birleştiren

$L_2 = 0$ ve 3-5 düğümlerini birleştiren $L_1 = 0$ doğrularıdır. Düğüm 2' de

$L_1 = L_2 = \frac{1}{2}$ dir.

$$\psi_2 = \frac{(L_2 - 0)(L_1 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 0)} = 4L_1L_2$$

Benzer şekilde,

$$\psi_3 = L_2(2L_2 - 1) \quad , \quad \psi_4 = 4L_2L_3 \quad , \quad \psi_5 = L_3(2L_3 - 1) \quad , \quad \psi_6 = 4L_1L_3$$

olarak bulunur.

L_i alan koordinatları sadece yüksek mertebeden elemanlar için enterpolasyon fonksiyonlarının oluşturulmasını değil ayrıca alanlar üzerinde fonksiyonların (L_i ' nin) integrasyonunu da kolaylaştırır.

$$\int \int_{Alan} L_1^m L_2^n L_3^p dA = \frac{m!m!p!}{(m+n+p+2)!} 2A \quad (1.18)$$

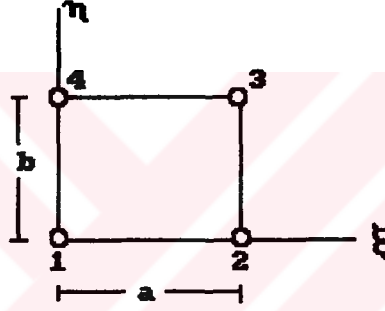
olur. Burada m, n, p keyfi pozitif sabitlerdir. A, integrasyonun tanım bölgesinin alanıdır. (1.18) ifadesini kullanabilmek için (1.17) dönüşümünü kullanarak integraller x ve y koordinatlarından L_i koordinatlarına dönüştürülmelidir.

1.5.2. Dikdörtgensel Elemanlar

Bilineer dikdörtgensel elemanlar, düğümleri köşelerinde olmak üzere a, b kenarlı bir dikdörtgendir. Kolaylık nedeniyle enterpolasyon fonksiyonlarını çıkarmak için (ξ, η) lokal koordinat sistemini seçeriz. Yaklaşım fonksiyonunun,

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta \quad (1.19)$$

olduğunu kabul edelim. Çünkü $\xi\eta$ terimi yerine ξ^2 veya η^2 olarak da yaklaşım fonksiyonları seçilebilirdi. Ama en çok kullanılan (1.19) denklemdir.



Şekil 1.10. Bilineer Dikdörtgensel Eleman

i düğümü en aşağıda ve en sol tarafda kalacak şekilde olmalıdır. Şekil 1.10 da bilinear dikdörtgensel eleman ve orjini i düğümünde olan ξ, η koordinat sistemi gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0, 0) = c_1 \\ u_2 &= u(a, 0) = c_1 + c_2a \\ u_3 &= u(a, b) = c_1 + c_2a + c_3b + c_4ab \\ u_4 &= u(0, b) = c_1 + c_3b \end{aligned} \quad (1.20)$$

dir. $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ için çözümlerse;

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

elde ederiz. (1.21) denklemini (1.19) denkleminde yerine yazarsak;

$$u(\xi, \eta) = (1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^4 u_i \psi_i(\xi, \eta)$$

elde ederiz. Burada $\psi_i(\xi, \eta)$ entropolasyon fonksiyonları,

$$\psi_1(\xi, \eta) = (1 - \frac{\xi}{a})(1 - \frac{\eta}{b})$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{\xi}{a}(1 - \frac{\eta}{b})$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{\xi}{a} \frac{\eta}{b}$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = (1 - \frac{\xi}{a})(\frac{\eta}{b})$$

(1.22)

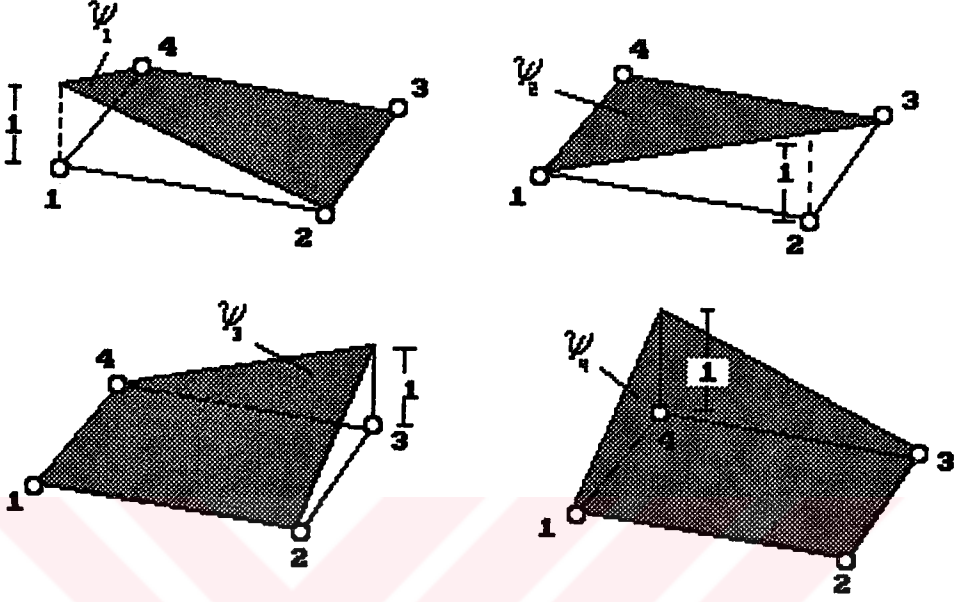
dir. Enterpolasyon fonksiyonları şekil 1.11' de gösterilmiştir.

$$\psi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\sum_{i=1}^4 \psi_i = 1$$

dir. Herbir enterpolasyon fonksiyonu kendi düğüm ve iki bitişik düğümler arasındaki kenar boyunca lineer olarak değişir. Örneğin; ψ_1 , ij ve im kenarları boyunca lineer olarak değişir. Ayrıca herbir enterpolasyon fonksiyonları, düğümüne dokun-

mayan kenarlar boyunca sıfırdır. Yani ψ_1 , jk ve km kenarları boyunca sıfırdır.



Şekil 1.11. Dört Düğümlü Dikdörtgensel Eleman İçin
Enterpolasyon Fonksiyonları

BÖLÜM II

II. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

2.1. Tanım

Fizik yasalarının ya da fiziksel problemlerinin pekçoğu diferansiyel denklemlerle ifade edildiğinden diferansiyel denklemler temel bilimlerde ve mühendislik uygulamalarında önemli bir yer tutar. Birçok hallerde diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözümü bulunmakta bunlar da pratikte yararlı olmamaktadır. Bu gibi hallerde ya da $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin türev denklemlerinin sürekli bir fonksiyon halinde değil de ayırık noktalardaki değerler olarak verilmesi halinde problemi nümerik yöntemlerle çözmek daha uygun olmaktadır.

Genel olarak,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

şeklinde ifade edilebilen n . mertebeden bir diferansiyel denklemin özel çözümü için n tane sınır koşulu gereklidir. Koşulların hepsi sadece bir noktada verilmişse, böyle bir probleme *başlangıç değer problemi* denir. Eğer sınır koşullarının bir kısmı bir noktada ve diğerleri başka noktada ya da noktalarda verilmişse böyle bir probleme de *sınır değer problemi* denir (Çağlar, 1993).

Sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünü bulmak için genel olarak kullanılan yöntemler ; serilerle çözüm, sınır değer problemini bir başlangıç değer problemine dönüştürerek çözme, sonlu fark formüllerini kullanarak çözme ve varyasyonel yaklaşım yöntemleri ile çözme olarak söylenebilir. Burada sadece varyasyonel yaklaşım yöntemlerini açıklanacaktır. Çünkü sonlu elemanlar yöntemi varyasyonel yöntemin bir paçalı uygulamasıdır.

2.2 Sınır Değer Problemlerinin Varyasyonel Formülasyonları

Verilen bir problemin sonlu eleman formülasyonunu geliştirmeden önce bilinmesi gereken iki şey vardır. Birincisi; problemin bir varyasyonel problem gibi na-

sıl formüle edileceği bilinmelidir ve ikincisi; varyasyonel problemlerle ilgili cebirsel denklem sisteminin nasıl çıkarılacağı bilinmelidir. Bu adımların her ikisi verilen herhangi problemin bir sonlu eleman modelini geliştirmede çok önemlidir.

Sınır değer problemlerinin varyasyonel formülasyonlarının ele alınmasındaki neden, varyasyonel yaklaşım yöntemlerinin, fiziksel problemlerinin varyasyonel ifadelerine dayandığı gerçektir.

Sonlu eleman yöntemi, herhangi bir varyasyonel yöntemin bir parçalı uygulamasında gerekli yaklaşım fonksiyonları oluşturma tekniği olduğundan diferansiyel denklemlerin varyasyonel formülasyonuna çalışmayı gerektirir. Ayrıca varyasyonel formülasyonlar, yaklaşım fonksiyonlarının türetilmesinde önemli rol oynayan sınır koşullarının *doğal (natural)* ve *esas (essential)* sınır koşullara sınıflandırılmasını da kolaylaştırır.

Varyasyonel formülasyonda üç temel adım vardır:

Birinci adım; diferansiyel denkleminin bir v test fonksiyonu ile çarpılıp problemin tanım bölgesi üzerinde sonucun integre edilmesini içerir. v test fonksiyonu keyfi sürekli fonksiyondur. Ayrıca v test fonksiyonu u bağımlı değişkeninin bir varyasyonu (u 'nun αv kadar değişimine u 'nun varyasyonu denir ve δu ile gösterilir, yani $\delta u = \alpha v$, $\alpha = \text{sabit}$) olarak düşünülebilir ve sınır koşulunun homojen formunu sağlar. İkinci adım; u bağımlı değişkeninden v test fonksiyonuna diferansiyelleştirme dönüşümünü gerektirir ve varyasyonel formun kabul ettiği sınır koşullarının tipinin belirlenmesini içerir. u 'dan v üzerine diferansiyelleştirme dönüşümünün amacı, u ve v üzerinde süreklilik koşullarını eşit hale getirmektir. Varyasyonel formülasyon sonucunda elde ettiğimiz sınır integrallerinde açıkça belirtilen v 'nin ve türevlerinin katsayıları *doğal sınır koşulunu* oluşturur. Sınır integralinde keyfi v fonksiyonunun aynı formundaki bağımlı değişkenine atanan özel değer *esas sınır koşulunu* oluşturur.

Sınır koşullarının sınıflandırılmasını gözönüne alarak test fonksiyonu üzerinden koşulları yeniden yazabiliriz. Test fonksiyonu istenildiği kadar diferansiyellenebilir olmalıdır ve açıkça belirtilmiş esas sınır koşullarının homojen formunu sağlamalıdır.

ve doğal sınır koşullarını içeren değişkenler de *yedek (secondary) değişkenler* olarak belirtilecektir. Asıl değişkenler sürekli fakat yedek değişkenler bir problemde sürekli olmayabilirler.

Üçüncü adım; açıkça belirtilmiş sınır koşullarının yardımıyla sınır terimlerinin basitleştirilmesinden ibarettir.

Sadece v test fonksiyonu içeren terimler $I(v)$ şeklinde, geriye kalan terimler ise u bağımlı değişken olmak üzere $B(u,v)$ şeklinde ifade edilirler.

$B(.,.)$ fonksiyoneli biliner ve simetrik ise $B(u,v)=B(v,u)$ dır. $I(v)$ lineer ise varyasyonel formla ilgili kuadratik fonksiyonel,

$$I(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - I(u) \quad (2.1)$$

ifadesinden elde edilebilir. Bu ifadeye katı mekanik problemlerinde toplam potansiyel enerji adı verilir.

Örnek:

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad \text{icin}$$

$$u(0) = 0 \quad a \frac{du}{dx}(1) = 1$$

şeklinde sınır değer problemi verilmiş olsun.

Denklem, 2. mertebeden türev içerdiğinden u bağımlı değişken ile v test fonksiyonu arasında eşit olarak dağıtmak için bir kere kısmi integrasyon uygularız.

$$0 = \int_0^1 v \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - cvu + vx^2 \right) dx - \left(va \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1$$

Sınır teriminden v' nin katsayısı yani $a \frac{dv}{dx}$ e atanan belirli özel değer bir doğal sınır koşuludur. u' ya atanan özel değer ise bir esas sınır koşuludur. $x = 0$ da $v = 0$ ve $x = 1$ de , $a \frac{dv}{dx} = 1$ olduğundan

$$0 = \int_0^1 \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - cvu \right) dx + \int_0^1 vx^2 dx - v(1)$$

$$0 = B(u, v) - I(v)$$

dır.

Burada

$$B(u, v) = \int_0^1 \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - cvu \right) dx$$

$$I(v) = - \int_0^1 vx^2 dx + v(1)$$

dır. $B(.,.)$ bilinear ve $I(.)$ linear olduğundan (2.1) den

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - cu^2 + 2ux^2 \right] dx - u(1)$$

kuadratik fonksiyoneli hesaplayabiliriz.

2.3. Varyasyonel Yaklaşım Yöntemleri

Diferansiyel denklemlerinin varyasyonel çözümlerinde iki temel adım vardır;

1. Verilen diferansiyel denklemi varyasyonel forma dökmek
2. Bir varyasyonel yöntemi kullanarak yaklaşık çözümleri belirlemek

Varyasyonel yaklaşım yöntemlerinin hepsi, uygun yaklaşım fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu formunda ($u = \sum c_j \phi_j$) bir yaklaşık çözümü araştırır. Lineer kombinasyonda parametreler belirlenir öyle ki yaklaşık çözüm varyasyonel formu sağlar veya denklemin kuadratik formunu minimize eder. Varyasyonel yöntemler, yaklaşım fonksiyonlarının seçiminden dolayı birbirinden farklıdır.

Sonlu eleman yöntemi, eleman denilen bir alt bölge için tek tek denklemleri formüle etmek için varyasyonel yöntemlerinin kullanımını sağlar. Sonlu eleman yönteminde yaklaşım fonksiyonlarının seçimi klasik varyasyonel yöntemlerinkinden farklıdır.

2.3.1. Ritz Yöntemi

u üzerinden esas sınır koşullarının homojen formunu sağlayan yeteri kadar diferansiyellenebilir bütün v ' ler için

$$B(u, v) = I(v) \quad (2.2)$$

olacak şekilde u çözümünü bulma varyasyonel problemini ele alalım. B lineer, simetrik ve I lineer olduğu zaman (2.2) problemi

$$I(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - I(u) \quad (2.3)$$

kuadratik fonksiyonelin minimize edilmesine eşdeğerdir. Ritz yöntemi (2.2) denkleminin

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.4)$$

bir sonlu seriler formundaki bir yaklaşık çözümünü araştırır. Burada *Ritz katsayıları* denilen c_j sabitleri, (2.2) de $v = \phi_i$ ($i=1,2,\dots,N$) alınarak ve u yerine (2.4) ifadesi yazılarak

$$B \left(\phi_i, \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \right) = I(\phi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.5)$$

olacak şekilde c_j sabitleri belirlenir. Eğer B bilineer ise

$$\sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) c_j = I(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0) \quad (2.6)$$

yazabiliriz ki bu N tane c_j sabitli bir N tane lineer cebirsel denklem sistemini gösterir.

Simetrik bilineer formlar için Ritz yöntemi, simetrik bilineer forma göre kuadratik fonksiyonelin minimize edilmesiyle parametrelerin belirlendiği ve (2.4) formundaki çözümün araştırılması olarak görülebilir. (2.3) denkleminde u için (2.4) deki

u_N yerleştirildikten ve integre edildikten sonra $I(u)$ fonksiyoneli c_1, c_2, \dots, c_N parametrelerinin bir fonksiyonu haline gelir. $I(c_1, c_2, \dots, c_N)$ ' nin minimumu için gerekli koşullar, I ' nin herbir parametresine göre kısmi türevlerinin sıfır olmasıdır;

$$\frac{\partial I(c_j)}{\partial c_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I(c_j)}{\partial c_2} = 0 \quad , \dots , \quad \frac{\partial I(c_j)}{\partial c_N} = 0 \quad (2.7)$$

Böylece N bilinmeyenli; c_j ($j = 1, 2, \dots, N$) ; N tane lineer cebirsel denklemler oluşur. Bu denklemler (2.6) denkleminle tamamen aynıdır. $B(.,.)$ simetrik olmadığı zaman bir kuadratik fonksiyonel yazamayız. Diğer bir deyişle (2.6) denkleminin (2.7) denkleminde daha geneldir ve $B(.,.)$ bilinear ve simetrik olduğu zaman bu denklemler aynıdır.

Burada ϕ_0 ve ϕ_i ($i=1,2,\dots,N$) yaklaşım fonksiyonlarının gerekli özellikleri şunlardır: ϕ_0 fonksiyonu problemin açıkça belirtilmiş esas sınır koşullarını sağlar. Eğer açıkça belirtilmiş esas sınır koşullarının hepsi homojen ise o zaman $\phi_0=0$ dır. ϕ_0 açıkça belirtilmiş esas sınır koşullarını sağladığından esas sınır koşullarının açıkça belirtildiği noktalarda $u_N = \phi_0$ olması için esas sınır koşullarının homojen formunu sağlayan ϕ_i ($i=1,2,\dots$) ' lere ihtiyaç duyarız. ϕ_i homojen sınır koşullarını sağladığından $v = \phi_i$ seçimi bir test fonksiyonlarının seçimleriyle uygundur (Reddy, 1989).

Yukarıdakilere ek olarak ϕ_i ' ler aşağıdaki (2.8) koşullarına sahip olmalıdır:

1. i) $B(\phi_i, \phi_j)$ iyi tanımlanmış (yani yeterince diferansiyellenebilir) ve sıfırdan farklı olacak şekilde ϕ_i ' ler olmalıdır.
- ii) ϕ_i , en azından problemin esas sınır koşullarının homojen formunu sağlamalıdır.
2. Herhangi N için ϕ_i ($i=1,2,\dots,N$) kümesi, $B(\phi_i, \phi_j)$ ' nin sütunları (ve satırları) boyunca lineer bağımsız olmalıdır.
3. ϕ_i tamdır.

N değeri artırıldıkça Ritz çözümü gerçek çözüme yakınsar ve yakınsaklık,

$$I(u_N) \leq I(u_M) \quad N \leq M \quad \text{icin}$$

Örnek:

$$-u'' - u + x^2 = 0$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

Diferansiyel denkleminin varyasyonel formunu oluşturmak için, diferansiyel denklemin v test fonksiyonu ile çarpıp $[0, 1]$ aralığında integre ederiz;

$$\int_0^1 v[-u'' - u + x^2]dx = \int_0^1 v \left[\frac{-d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) - u + x^2 \right] dx$$

Kısmi integrasyon ile,

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vu + vx^2 \right) dx - \left(v \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1$$

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vu \right) dx + \int_0^1 vx^2 dx$$

$$0 = B(u, v) - I(v)$$

Burada

$$B(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vu \right) dx$$

$$I(v) = - \int_0^1 vx^2 dx$$

dir.

$u(0) = u(1) = 0$ sınır koşulları esas sınır koşulları olduğundan $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ sınır koşullarını sağlayacak, Ritz yaklaşımının N parametresine göre ϕ_i seçilmelidir.

$$\phi_0 = 0 \quad \phi_1 = x(1-x) \quad \phi_2 = x^2(1-x), \dots, \phi_N = x^N(1-x)$$

seçeriz.

Problemin N parametrelili Ritz yaklaşımı,

$$u_N = c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x) + \dots + c_N x^N(1-x)$$

şeklinde verilir.

Bu ifade, $B(u, v) = I(v)$ varyasyonel probleminde yerine konulursa

$$\int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_i}{dx} \right) - \phi_i \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) \right] dx = - \int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

veya

$$\sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) c_j = I(\phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir.

$b_{ij} \equiv B(\phi_i, \phi_j)$ ve $l_i \equiv I(\phi_i)$ katsayıları;

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_0^1 \left\{ \left[i x^{i-1} - (i+1)x^i \right] \left[j x^{j-1} - (j+1)x^j \right] \right. \\ &\quad \left. - (x^i + x^{i+1})(x^j + x^{j+1}) \right\} dx \\ &= \frac{2ij}{(i+j)[(i+j)^2 - 1]} - \frac{2}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)} \\ l_i &= - \int_0^1 x^2 (x^i - x^{i+1}) dx \\ &= - \frac{1}{(3+i)(4+i)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Diferansiyel denklemin gerçek çözümü,

$$u(x) = \frac{\sin x + 2\sin(1-x)}{\sin 1} + x^2 - 2$$

şeklinindedir. Tablo 1.1. de gerçek çözümün sonuçları ile Ritz çözümünün sonuçları karşılaştırılmıştır.

Tablo 1.1. Denklemin Gerçek Çözümü İle Ritz Çözümünün
Karşılaştırılması

Ritz Katsayıları	x	Ritz Çözümü (-10u)		Gerçek Çözüm
		N=3	N=4	
N = 3	0.0	0.000000	0.000000	0.000000
$c_1 = -0.0952362$	0.1	0.095389	0.095551	0.095547
$c_2 = -0.1004980$	0.2	0.189032	0.188959	0.188974
$c_3 = -0.0702341$	0.3	0.276584	0.276339	0.276349
N = 4	0.4	0.352015	0.351812	0.351804
$c_1 = -0.0958474$	0.5	0.407609	0.407609	0.407591
$c_2 = -0.0949787$	0.6	0.433966	0.434167	0.434159
$c_3 = -0.0831231$	0.7	0.419999	0.420242	0.420253
	0.8	0.352935	0.353008	0.353022
	0.9	0.218317	0.218191	0.218150
	1.0	0.000000	0.000000	0.000000

2.3.2. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi

Lineer veya lineer olmayan bir diferansiyel denklemin integral formunu daima yazabiliriz. Bununla birlikte diferansiyel denklem lineer olmadığı zaman diferansiyel denklemlerle ilgili fonksiyoneli ve simetrik bir varyasyonel formu oluşturmak daima mümkün olmaz. Ritz yöntemi lineer olmayan problemlere uygulandığı zaman test fonksiyonunun seçimini kısıtlar. Test fonksiyonları, fonksiyonların bir bağımsız kümesinden seçilebilen ağırlıklı kalanlar yöntemi Ritz yönteminin bir genellemesidir. Ayrıca, varyasyonel formu oluşturmak mümkün olmadığı zaman ağırlıklı kalanlar yöntemi, denklemin integral formuna yaklaşmak için kullanılabilir. İntegral form, problemin doğal sınır koşullarını içermediğinden hesap edilen çözüm problemin sınır koşullarını sağlayacak şekilde yaklaşım fonksiyonları seçilmelidir. Diğer taraftan test fonksiyonları, yaklaşım fonksiyonlarından bağımsız seçilebilir.

Bu lineer olmayan problemde bir avantajdır.

$$Au = f \quad \Omega \quad de \quad (2.9)$$

operatör denklemini ele alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir.

u fonksiyonunun (yani çözüm) (2.9) operatörünü sağlaması yeterli değildir ayrıca ilgili operatörün sınır koşullarını da sağlaması gerekir.

Ağırlıklı kalanlar yönteminde u çözümüne Ritz yönteminde olduğu gibi

$$u_N = \phi_0 + \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \quad (2.10)$$

şeklinde bir yaklaşım fonksiyonu ile yaklaşılır. Burada ϕ_0 problemin açıkça belirtilmiş bütün sınır koşullarını sağlamak zorundadır. Açıkça belirtilmiş bütün sınır koşulları homojen ise $\phi_0 = 0$ dir. ϕ_j (2.8) deki koşulları sağlamalıdır. Ayrıca sınır koşullarının homojen formunu ve süreklilik kısıtlamalarını sağlar. Eğer operatör varyasyonel formülasyonuna (Ritz yönteminde olduğu gibi) olanak veriyorsa süreklilik koşulu yumuşatılabilir (Reddy, 1989).

(2.10) yaklaşımı (2.9) operatör denklemine yerleştirilirse

$$E \equiv A(u_N) - f \neq 0 \quad (2.11)$$

şeklinde bir kalan (yani denklemdaki hata) ile sonuçlanır. ϕ_0 ve ϕ_i seçildiğinde E sadece c_j parametrelerinin ve bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olur. Ağırlıklı kalanlar yönteminde parametreler, yaklaşımın bir ağırlıklı kalanının integrali sıfıra eşitlenmesiyle belirlenir;

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) E(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

Burada ψ_i ' ler ağırlık fonksiyonlarıdır (ki genelde ϕ_i yaklaşım fonksiyonları ile aynı değillerdir). ϕ_i lineer bağımsız bir küme olmalıdır. Aksi takdirde (2.12) denkleminle geliştirilen denklemler lineer bağımsız olmayacaktır ve bu nedenle çözülemeyecektir.

A operatörü lineer olduğu zaman (2.12) denklemi,

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \right) c_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = f_i \quad (2.13)$$

formunda basitleştirilebilir. A katsayı matrisi,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji}$$

simetrik değildir.

$\psi_i \neq \phi_i$ olduğu zaman ağırlıklı kalan yöntemi Petrov - Galerkin yöntemiyle ilişkilidir.

Galerkin Yöntemi

$\psi_i = \phi_i$ için ağırlıklı kalanlar yöntemi Galerkin yöntemi olarak bilinir. Operatör, çift mertebeden lineer bir diferansiyel operatörü olduğu zaman Galerkin yöntemi Ritz yöntemine indirgenir. Çünkü diferansiyelleştirmenin yarısı ağırlık fonksiyonlarına transfer edilebilir ve sonuçta katsayı matrisi simetrik olacaktır.

En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi (2.10) formundaki bir çözümü araştırır ve c_j katsayıları (2.11) ifadesindeki kalanın karesinin integralinin minimize edilmesiyle belirlenir:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} E^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

veya

$$\int_{\Omega} \frac{\partial E}{\partial c_i} E dx dy = 0 \quad (2.14)$$

dır. Burada amaç hatayı minimum yapmaktır. (2.14) ile (2.12) karşılaştırıldığında

$\psi_i = \frac{\partial E}{\partial c_i}$ olduğu görülür. Eğer A lineer bir operatör ise (2.14) denklemi

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy \right) c_j = \int_{\Omega} A(\phi_i) [f - A(\phi_0)] dx dy$$

haline gelir.

Yerleştirme (Collaction) Yöntemi

Yerleştirme yöntemi, (2.9) denkleminin (2.10) formunda u_N yaklaşık çözümünü Ω tanım bölgesinde seçilen N tane $x^i \equiv (x^i, y^i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) noktalarında hatanın sıfıra eşit olması koşuluyla araştırır. Yani,

$$E(x^i, y^i, c_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

hali araştırılır. İyi koşullu denklemler sistemi elde etmek için ve son olarak doğru çözüm elde etmek için x^i noktalarının seçimi çok önemlidir (Çağal, 1989).

BÖLÜM III

III. SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Klasik varyasyonel yöntemlerinde fonksiyonların seçiminde zorluk çıkmaktadır. Yaklaşım fonksiyonları süreklilik, lineer bağımsızlık, tamlık ve esas sınır koşullarını sağlamasından başka keyfidirler. Verilmiş tanım bölgesi geometrik olarak karışık olduğu zaman yaklaşım fonksiyonların seçimi daha da güç hale gelir. Ayrıca yaklaşım fonksiyonlarını oluşturmak için sistematik bir prosedür mevcut değildir. Bu eksiklikten dolayı, yaklaşık çözümleri elde etmedeki kolaylık (yaklaşım fonksiyonları seçildikten sonra) olmasına rağmen sonlu farklarla karşılaştırıldığı zaman varyasyonel yaklaşım yöntemleri bilgisayar hesaplamalarında asla yarış bile edemez (Reddy, 1989).

Sonlu eleman yöntemi, klasik varyasyonel yöntemlerinin bu eksikliklerini gidermekle kalmaz ayrıca etkili bir hesaplama yöntemi sağlar. Sonlu eleman yöntemi verilen bir tanım bölgesinin, yaklaşım fonksiyonlarının sistematik olarak çıkarılabildiği geometrik olarak basit şekillerle temsil edilmesinden oluşur. Sonra her bir eleman üzerinde tanzim edilen denklemlerinin Ritz-Galerkin tipi yaklaşımları yapılır. Sonunda toplam bütün eleman üzerindeki denklemler asıl değişkenlerin sürekliliği yardımıyla birleştirilir, problemin sınır koşulları yerleştirilir ve sonra denklemlerinin birleştirilmiş kümesi çözülür.

3.1 Tipik Bir Probleminin Sonlu Eleman Analizinde Gerekli Adımlar

1. Verilmiş tanım bölgesinin önceden seçilmiş sonlu elemanlara ayrılması
 - a) Önceden seçilmiş elemanların sonlu eleman ağı oluşturulur.
 - b) Elemanlar ve düğümler numaralanır.
 - c) Problem için gerekli olan özellikler (örneğin, koordinatlar, alanlar) oluşturulur.
2. Ağdaki tipik bütün elemanların eleman denklemlerinin türetilmesi

a) Tipik bir eleman üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formülasyonu oluşturulur.

b) Tipik bir u bağımlı değişkeninin

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

formunda olduğu kabul edilerek ve bu ifade (2.a)'ya yerleştirilerek

$$[K^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}$$

şeklinde eleman denklemleri elde edilir.

c) ψ_i eleman enterpolasyon fonksiyonları eğer literatürde mevcutsa seçilir aksi takdirde çıkarılır ve eleman matrisleri ($K^{(e)}$, $F^{(e)}$) hesap edilir.

3. Tüm problemin denklemlerini elde etmek için eleman denklemlerinin yerleştirilmesi

a) Global düğümleriyle eleman düğümleri arasındaki ilişkiden yararlanarak asıl değişkenler arasında elemanlar arası süreklilik koşulu sağlanır (lokal serbestlik derecesi ile global serbestlik derecesi arasındaki ilişki-elemanların irtibatı)

b) Yedek değişkenler arasında "denge" koşulları belirlenir.

c) Süperpozisyon özelliği, 3.a ve 3.b adımlar kullanılarak eleman denklemleri birleştirilir.

4. Problemin sınır koşullarının konulması

a) Asıl değişkenlerden belli olanlar yerine konulur.

b) Yedek değişkenlerden 3.b de yerleştirilmemiş olanlar yerleştirilir.

5. Birleştirilmiş denklemler çözülür

6. Sonuçları bulduktan sonra yapılan işlemler

a) Çözümün gradyeni veya diğer istenen kavramlar hesaplanır.

b) Tablolar veya grafik formda sonuçlar gösterilir.

3.2 Bir Boyutlu Problemlerinin Sonlu Eleman Analizi

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) - f = 0 \quad 0 < x < L \quad (3.1)$$

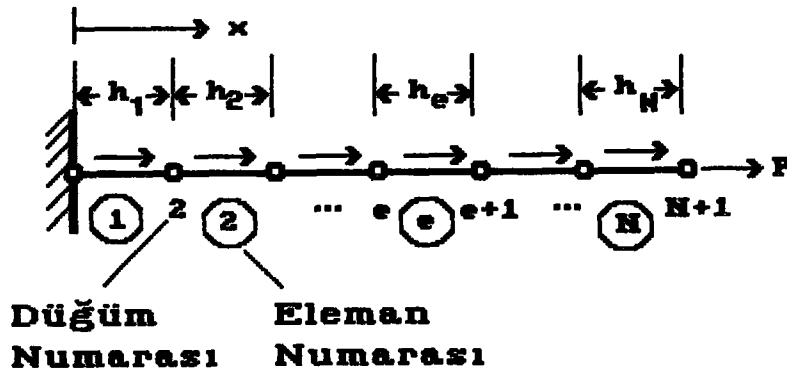
diferansiyel denklemini ve

$$u(0) = 0, \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} = P \quad (3.2)$$

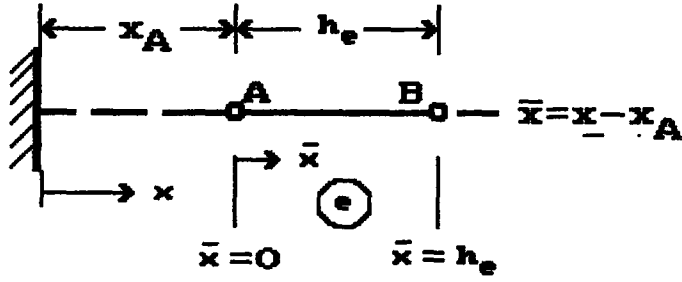
sınır koşullarını sağlayan $u(x)$ 'i bulma problemini ele alalım. Burada $a = a(x)$, $f = f(x)$ ve P problemin datalarıdır.

3.2.1. Bölgenin Elemanlara Bölünmesi

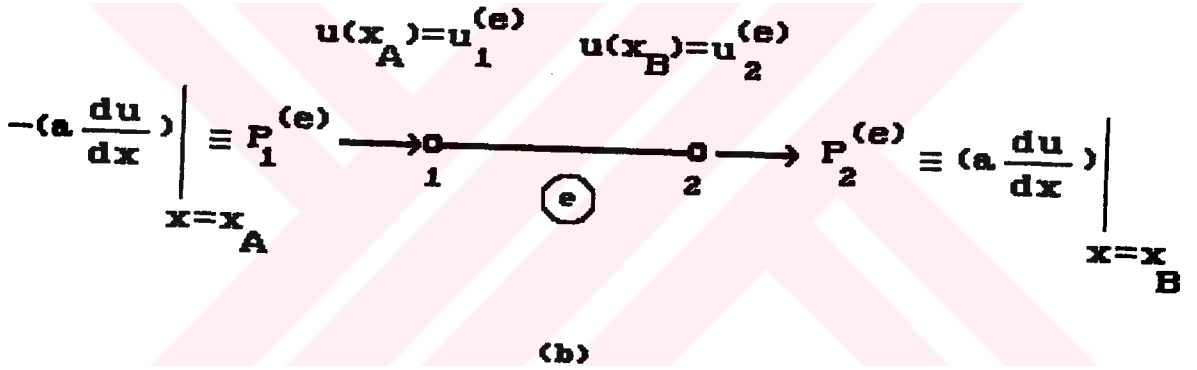
Problemin $\Omega \equiv (0, L)$ tanım bölgesi sonlu eleman ağı denilen bir doğru elemanlar kümesine bölünür. Şekil(3.1)' de gösterilen ağ düzgün olmayan ağıdır. Çünkü elemanlar eşit uzunlukta değildir. Herhangi iki elemanın arakesimi *elemanlar arası sınır* (*interelement boundary*) olarak adlandırılır. Arakesim ve mümkün bazı noktalara *global düğümler* adı verilir. e global düğümün koordinatı x_e 'dir.



Şekil 3.1. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Diferansiyel Denkleminin Sonlu Elemanlara Bölünmesi



(a.)



(b.)

Şekil 3.2. (3.1) Denkleminin Bir Boyutlu Tanım Bölgesinin

Sonlu Elemana Bölünmesi

(a) Şekil 3.1 de gösterilen sonlu eleman ağından tipik bir eleman

 x =global koordinat \bar{x} =local(eleman) koordinat= $x - x_A$ (b) Düğümelerde u primary değişkenin ve $a \frac{du}{dx}$

secondary değişkenin tanımlandığı tipik bir eleman.

3.2.2. Eleman Denklemlerinin Türetilmesi

Tipik bir $\Omega^e = (x_A, x_B)$ elemanı ağdan alınır. Bir boyutlu problemlerde eleman, bir doğru parçasıdır. Tipik elemanın e. eleman olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki üç adım tipik bir eleman üzerinde denklemin sonlu eleman formülasyonunu tanımlar:

Bir Eleman Üzerinden Denklemin Varyasyonel Formülasyonu

(3.1) denkleminin $(0, L)$ tanım bölgesi üzerinde geçerli olduğundan $\Omega^e = (x_A, x_B)$ elemanı üzerinde de geçerlidir.

Bölüm (2.2)' de tanımlanan aşağıdaki işlem, eleman üzerinde (3.1) denkleminin varyasyonel formülasyonunu oluşturabiliriz.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} v \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - f \right] dx$$

Kısmi integrasyonla

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - v f \right) dx + \left[v \left(-a \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B} \quad (3.3)$$

Burada v , keyfi sürekli fonksiyonu (test fonksiyonu veya ağırlık fonksiyonu) gösterir. (3.3) ifadesinde sınır teriminden eleman için $x = x_A$ ve $x = x_B$ de u 'ya atanan değer esas sınır koşullarını ve, $x = x_A$ ve $x = x_B$ de $\left(a \frac{du}{dx} \right)$ ' e atanan değer doğal sınır koşullarını oluşturduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla eleman düğümlerinde temel (basic) bilinmeyenler u asıl değişkeni ve $\left(a \frac{du}{dx} \right)$ yedek değişkenidir.

$$u(x_A) \equiv u_1^{(e)} \quad u(x_B) \equiv u_2^{(e)} \quad (3.4a)$$

$$\left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_A} \equiv P_1^{(e)} \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_B} \equiv P_2^{(e)} \quad (3.4b)$$

olsun. Bu sınır koşulları tipik bir eleman üzerinde gösterilmiştir. (3.4) notasyonları ile birlikte (3.3) varyasyonel formu,

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - v f \right) dx - P_1^{(e)} v(x_A) - P_2^{(e)} v(x_B) \quad (3.5a)$$

veya

$$0 = B(v, u) - I(v) \quad (3.5b)$$

haline gelir. Burada bilineer ve lineer formlar,

$$B(v, u) = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx \quad (3.5c)$$

$$I(v) = \int_{x_A}^{x_B} v f dx + v(x_A) P_1^{(e)} + v(x_B) P_2^{(e)}$$

şeklindedir. Varyasyonel formun (3.4b) doğal sınır koşullarını içerdiğine dikkat edilmelidir. Eleman için ilgili kuadratik form,

$$I_e(u) = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{a}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - u f \right] dx - P_1^{(e)} u(x_A) - P_2^{(e)} u(x_B) \quad (3.6)$$

şeklinde olur.

Bir Eleman Üzerinde Denklemin Varyasyonel Yaklaşımı

Şimdi Ritz yöntemini kullanarak (3.4a) sınır koşullarıyla varyasyonel problemin yaklaşık çözümünü bulmak isteyelim. Elemanın u Ritz yaklaşımı,

$$u_e(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(e)} \psi_j^{(e)}(x) \quad (3.7)$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada α_j belirlenecek parametrelerdir ve $\psi_j(x)$ oluşturulan yaklaşım fonksiyonlarıdır. u için (3.7) ifadesi, v için de $v = \psi_i$ (3.5a) denkleminde yerleştirilerek,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \right) \alpha_j - \int_{x_A}^{x_B} \psi_i f dx - P_1^{(e)} \psi_i(x_A) - P_2^{(e)} \psi_i(x_B) \\
&= \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} \alpha_j - F_i^{(e)} \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

veya

$$[K^{(e)}] \{ \alpha^{(e)} \} = \{ F^{(e)} \} \quad (3.8)$$

elde ederiz. Burada *sıkılık (stifness) matrisi* denilen $K_{ij}^{(e)}$ katsayı matrisi ve *kuvvet (force) vektörü* $F_i^{(e)}$ sütun vektörü

$$K_{ij} = B(\psi_i, \psi_j) \quad F_i = I(\psi_i)$$

veya daha açık olarak,

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{(e)} &= \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \\
F_i^{(e)} &= \int_{x_A}^{x_B} \psi_i f dx + P_1^{(e)} \psi_i(x_A) + P_2^{(e)} \psi_i(x_B)
\end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde dir.

Bir Eleman İçin Yaklaşım Fonksiyonlarının Türetilmesi

Bu kısım daha önce bölüm (1.4)' de anlatıldı. (3.8) ifadesine geri dönerek bir eleman için (1.5) ve (1.7) denklemlerinden

$$[K^{(e)}] \{ u^{(e)} \} = \{ F^{(e)} \} \quad (3.10)$$

ifadesini yazabiliriz. Burada lineer eleman için ($x_A = x_e$ ve $x_B = x_{(e+1)}$)

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \\
F_i^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i f dx + P_i^{(e)}
\end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) deki $F_i^{(e)}$ ifadesi, (1.7) deki 1. özellik kullanılarak (3.9) ifadesindeki $F_i^{(e)}$ 'nin basitleştirilmesi sonucu ortaya çıkmıştır. (3.10) ve (3.11) denklemleri, bir eleman üzerinde (3.5) denklemlerinin sonlu eleman modelini gösterirler (eşdeğer olarak (3.1) denkleminin).

Şimdiki problemin bağımlı değişkenine yaklaşımında lineer enterpolasyon fonksiyonları kullanıldığı zaman

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \{F^{(e)}\} &= \frac{f_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^{(e)} \\ p_2^{(e)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.3. Eleman Denklemlerinin Birleştirilmesi

(3.10) ifadesi keyfi tipik bir eleman için çıkarıldığından, sonlu eleman ağından herhangi bir eleman için bu ifade tutar.

Problemin $\Omega = (0, L)$ tanım bölgesi uzunlukları eşit olmayan üç elemana bölündüğünü kabul edelim. Bu elemanlar düğüm 2 ve düğüm 3 ile birleştirildiğinden ve u sürekli olduğundan $e=1,2$ için $\Omega^{(e)}$ elemanının u_2 'si ile $\Omega^{(e+1)}$ elemanının u_1 'i aynı olmalıdır. Matematik olarak bu uygunluğu ifade etmek için, global değerlerde u 'nun değerlerini U_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ile etiketleriz. Burada N global düğümlerin toplam sayısıdır. Böylece lokal düğüm değerleri ile global düğüm değerleri arasında aşağıdaki eşlemeyi yazabiliriz; (Şekil 3.3.)

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= U_1 \quad ; \quad u_2^{(1)} = U_2 = u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} &= U_3 = u_1^{(3)} \quad ; \quad u_2^{(3)} = U_4 \end{aligned} \quad (3.13)$$

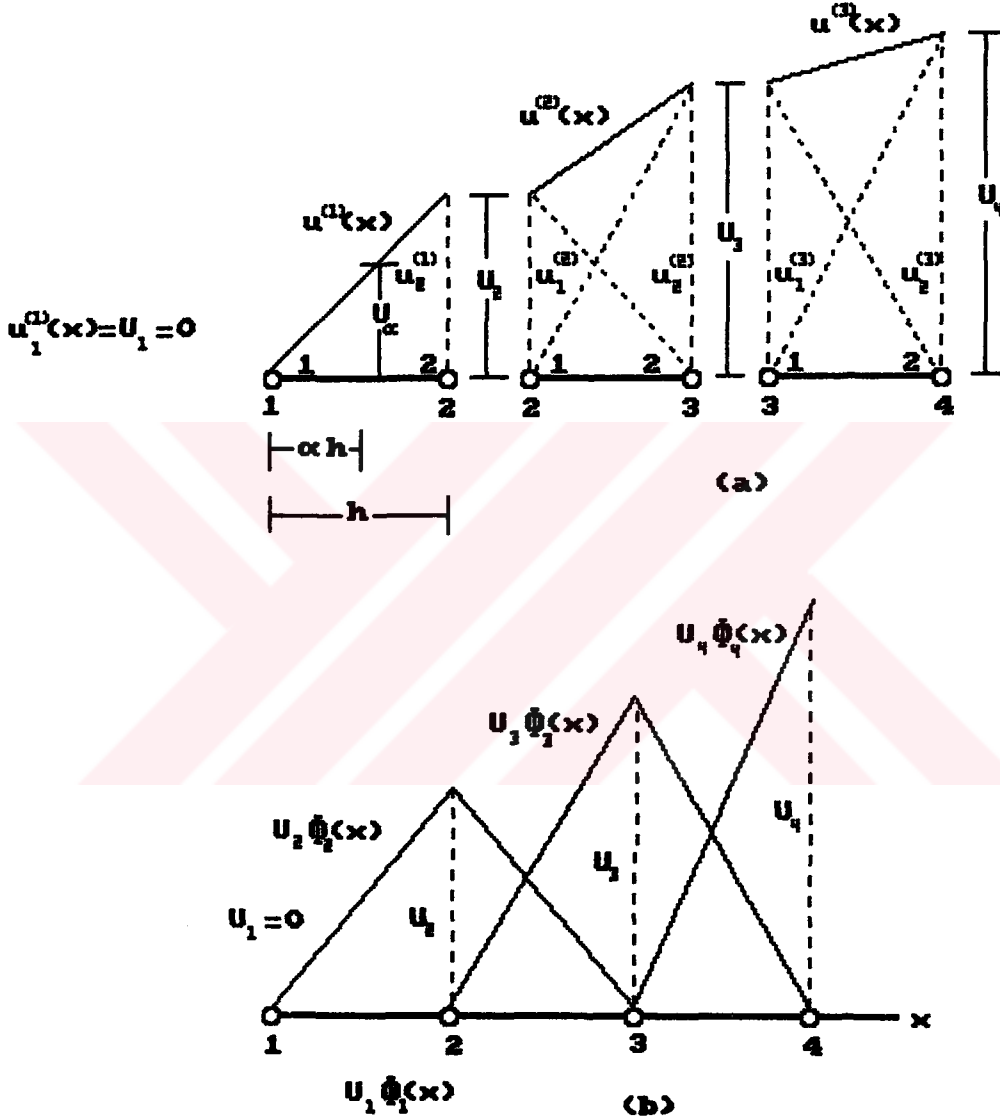
Bu ilişkilere *elemanlar arası süreklilik koşulları* diyoruz.

Lokal düğümler ile global düğümleri arasındaki uygunluk *boolean irtibat matrisi* denilen bir sıra formunda uygun olarak ifade edilebilir. Bu matrisin b_{ij} elemanları, $b_{ij} = i$.elemanın j . düğümüne karşılık gelen global düğüm numarası

şeklinde ifade edilir. Eldeki ağ için $[B] = [b_{ij}]$ matrisi,

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $[B]$ matrisindeki bir sayının tekrarı; $[K^{(e)}]$ nin katsayıları, ilgili sayının toplamı şeklinde olduğunu gösterir. Örneğin, birleştirilmiş matrisin (2,2) elemanı hem $K_{22}^{(1)}$ hem de $K_{11}^{(2)}$ 'ye sahiptir.



Şekil 3.3. Model Problem İçin Global Enterpolasyon

Yardımla Sonlu Eleman Çözümünün Temsili,

Lokal ve Global Düğüm Değerlerinin Uygunluğu

(a) Global düğüm değerleri ve eleman uygunluğu

(b) Global enterpolasyon fonksiyonları yardımıyla

çözümün gösterilmesi

Elimizdeki probleme geri dönerek (3.10) eleman denklemleri (3.12) şeklinde verilmiş $[K]$ ve $\{F\}$ ler ile herbir eleman için U_i global düğüm değerlerine göre ifade ederiz:

Eleman 1:

$$\frac{a_1}{h_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{f_1 h_1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13a)$$

Eleman 2:

$$\frac{a_2}{h_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{f_2 h_2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13b)$$

Eleman 3:

$$\frac{a_3}{h_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{f_3 h_3}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.13c)$$

(3.13) denklemleri problemin baştan başa herbir elemanın katkısını gösterir. Eleman denklemlerinin hiçbiri çözülebilir değildir. Çünkü eleman matrisleri singülerdir ve sağ taraf kısımları bilinmiyor. (3.13) denklemleri toplanarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{h_1} & -\frac{a_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{h_1} & \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2} + \frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \frac{a_3}{h_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f_1 h_1 \\ f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ f_2 h_2 + f_3 h_3 \\ f_3 h_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

(3.14) denklemini, (3.1) denkleminin global sonlu eleman modelini gösterir. Bu prosedür, problemle ilgili varyasyonel formülasyon (veya kuadratik fonksiyonel) bütün elemanlarının (3.15c) de belirtilen I_e kuadratik fonksiyonellerinin toplamına eşit olduğu fikrine dayanarak tanımlanmış olan bir işlemdir (Reddy, 1989):

$$I(U_i) = \sum_{e=1}^N I_e(u_i^{(e)}) \quad (3.15a)$$

veya matris formda,

$$0 = [\delta I(U_i)]\{\delta U_i\} = \sum_{e=1}^N [\delta I_e(u_i^{(e)})]\{\delta u_i^{(e)}\} \quad (3.15b)$$

dir. Burada $\delta u_i^{(e)}$, test fonksiyonun $v_i^{(e)}$ değerleri olarak görülebilir.

$$I_e(u_i^{(e)}) = \frac{1}{2} \{u^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{u^{(e)}\} - \{u^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\} \quad (3.15c)$$

N ağıdaki elemanlarının sayısını gösterir ve δ varyasyonel operatördür. (3.15b), (3.15a) dan daha genel olduğundan (3.15b) formuyla çalışılacaktır. (3.15b) denklemini cebirsel ifade yazarsak,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] \delta u_i^{(e)} \\ &= (K_{11}^{(1)} u_1^{(1)} + K_{12}^{(1)} u_2^{(1)} - F_1^{(1)}) \delta u_1^{(1)} + (K_{21}^{(1)} u_1^{(1)} + K_{22}^{(1)} u_2^{(1)} - F_2^{(1)}) \delta u_2^{(1)} \\ &+ (K_{11}^{(2)} u_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} u_2^{(2)} - F_1^{(2)}) \delta u_1^{(2)} + (K_{21}^{(2)} u_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} u_2^{(2)} - F_2^{(2)}) \delta u_2^{(2)} \\ &+ (K_{11}^{(3)} u_1^{(3)} + K_{12}^{(3)} u_2^{(3)} - F_1^{(3)}) \delta u_1^{(3)} + (K_{21}^{(3)} u_1^{(3)} + K_{22}^{(3)} u_2^{(3)} - F_2^{(3)}) \delta u_2^{(3)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde ederiz. (3.16) denkleminde (3.13) deki ifadeler kullanılarak ve δU_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) katsayılarına göre toplanarak,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta U_1 [K_{11}^{(1)} U_1 + K_{12}^{(1)} U_2 - F_1^{(1)}] \\ &+ \delta U_2 [K_{21}^{(1)} U_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}) U_2 + K_{12}^{(2)} U_3 - (F_2^{(1)} + F_1^{(2)})] \\ &+ \delta U_3 [K_{21}^{(2)} U_2 + (K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)}) U_3 + K_{12}^{(3)} U_4 - (F_2^{(2)} + F_1^{(3)})] \\ &+ \delta U_4 [K_{21}^{(3)} U_3 + K_{22}^{(3)} U_4 - F_2^{(3)}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.14) denklemi (3.1) denkleminin global sonlu eleman modelini gösterir. Bu prosedür, problemle ilgili varyasyonel formülasyon (veya kuadratik fonksiyonel) bütün elemanlarının (3.15c) de belirtilen I_e kuadratik fonksiyonellerinin toplamına eşit olduğu fikrine dayanarak tanımlanmış olan bir işlemdir:

$$I(U_i) = \sum_{e=1}^N I_e(u_i^{(e)}) \quad (3.15a)$$

veya matris formda,

$$0 = [\delta I(U_i)]\{\delta U_i\} = \sum_{e=1}^N [\delta I_e(u_i^{(e)})]\{\delta u_i^{(e)}\} \quad (3.15b)$$

dir. Burada $\delta u_i^{(e)}$, test fonksiyonun $v_i^{(e)}$ değerleri olarak görülebilir.

$$I_e(u_i^{(e)}) = \frac{1}{2} \{u^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{u^{(e)}\} - \{u^{(e)}\}^T \{F^{(e)}\} \quad (3.15c)$$

N ağdaki elemanlarının sayısını gösterir ve δ varyasyonel operatördür. (3.15b) , (3.15a) dan daha genel olduğundan (3.15b) formuyla çalışılacaktır. (3.15b) denklemini cebirsel ifade yazarsak,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] \delta u_i^{(e)} \\ &= (K_{11}^{(1)} u_1^{(1)} + K_{12}^{(1)} u_2^{(1)} - F_1^{(1)}) \delta u_1^{(1)} + (K_{21}^{(1)} u_1^{(1)} + K_{22}^{(1)} u_2^{(1)} - F_2^{(1)}) \delta u_2^{(1)} \\ &+ (K_{11}^{(2)} u_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} u_2^{(2)} - F_1^{(2)}) \delta u_1^{(2)} + (K_{21}^{(2)} u_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} u_2^{(2)} - F_2^{(2)}) \delta u_2^{(2)} \\ &+ (K_{11}^{(3)} u_1^{(3)} + K_{12}^{(3)} u_2^{(3)} - F_1^{(3)}) \delta u_1^{(3)} + (K_{21}^{(3)} u_1^{(3)} + K_{22}^{(3)} u_2^{(3)} - F_2^{(3)}) \delta u_2^{(3)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde ederiz. (3.16) denkleminde (3.13) deki ifadeler kullanılarak ve δU_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) katsayılarına göre toplanarak,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta U_1 [K_{11}^{(1)} U_1 + K_{12}^{(1)} U_2 - F_1^{(1)}] \\ &+ \delta U_2 [K_{21}^{(1)} U_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}) U_2 + K_{12}^{(2)} U_3 - (F_2^{(1)} + F_1^{(2)})] \\ &+ \delta U_3 [K_{21}^{(2)} U_2 + (K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)}) U_3 + K_{12}^{(3)} U_4 - (F_2^{(2)} + F_1^{(3)})] \\ &+ \delta U_4 [K_{21}^{(3)} U_3 + K_{22}^{(3)} U_4 - F_2^{(3)}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde ederiz. U_i varyasyonları keyfi olduğundan yukarıdaki denklemde herbir δU_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$; $N+1$, toplam global düğüm sayısıdır) katsayılar ayrı ayrı sifira eşit olmalıdır. Matris formda ifade edilen

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

sonucu (3.14) denklemiyle aynıdır.

3.2.4. Sınır Şartlarını Yerleştirme

(3.14) ve (3.18) denklemleri sınır koşullarına bakmaksızın (3.1) diferansiyel denklemi ile tanımlanmış herhangi bir problem için geçerlidir. (3.14) deki katsayı matrisi esas sınır koşullarını yerleştirmeden önce (asıl değişkenler üzerinde) tekildir. Problemin uygun sınır koşullarının yerleştirilmesi üzerine tersi alınabilir bir tekil olmayan matris elde ederiz. Bunun sonucunda, $P_j^{(e)}$ den dolayı $\{F^{(e)}\}$ sütun vektörü doğal sınır koşullarını içerir. Sınır düğümleri arasındaki bütün global düğümlerde , e. elemanın düğüm 2' sinde ve (e+1). elemanın düğüm 1' de doğal sınır koşulunun katkıları toplamı, açıkça belirtilmiş $(a \frac{du}{dx})$ yedek değişkenine eşit olmalıdır:

$$P_2^{(e)} + P_1^{(e+1)} = \text{belirtilmis } \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_{e+1}} \text{ degeri}$$

Elimizdeki problem için, $x = h_1$ ve $x = h_1 + h_2$ de $(a \frac{du}{dx})$ in sıfır olduğu açıkça belirtilmiştir. (Global 2 ve 3 düğümlerinde u belirtilmediğinden $(a \frac{du}{dx})$ yedek değişkeninin bu düğümlerde sıfır olduğu belirtildiği anlaşılır.)

$$P_2^{(1)} + P_1^{(2)} = 0 \quad , \quad P_2^{(2)} + P_1^{(3)} = 0$$

yazarız.

Bir çubuğun uzunlamasına deforme edilmesi için, bu denklemler iç etkiler (internal forces) için denge koşulları olarak yorumlanabilir. Matematik olarak bu, $e+1$ global düğümünde, (e) ve $(e+1)$ elemanlarından ötürü $(a \frac{du}{dx})$ in farklı değerlerinin, $e+1$ düğümünde $(a \frac{du}{dx})$ in açıkça belirtilmiş değerine eşit olduğu kabulü anlamına gelir (şimdiki problemde sıfır olan) :

$$\left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_{e+1}}^{(e)} - \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_{e+1}}^{(e+1)} \equiv P_2^{(e)} + P_1^{(e+1)} = 0$$

$x = x_{e+1}$ de uygulanan herhangi kaynak nokta (point source) için fark hesaplanır. Eğer uygulanan kaynak nokta yoksa farkın sıfır olduğu kabul edilir. $(a \frac{du}{dx})$ in $x=0$ da bilinmediğine ve $x=L$ de P ' ye eşit olduğuna dikkat edilmelidir. Esas sınır koşulunun

$$U_1 = u_1^{(1)} = 0$$

olduğu biliniyor.

Asıl değişkenlerin bilindiği yerde yedek değişkenler bilinmemektedir. Bu ifadenin tersi de geçerlidir. Bilinmeyenlerle ve $P_i^{(e)}$ 'lerin yer değiştiği sütunlar

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} (-a \frac{du}{dx}) \Big|_{x=0} \equiv P_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

şekindedir.

3.2.5. Denklemlerin Çözümü

(3.18) global sonlu eleman denklemleri aşağıdaki formda olduğu gibi uygun şekilde kısımlara ayrılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta^1\} \\ \{\Delta^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Burada $\{\Delta^1\}$, bilinen (U_1) ' nin yerine geçtiği sütundur. $\{\Delta^2\}$, (U_2, U_3, U_4) bilinmeyenlerinin yerine geçtiği sütundur. F^2 , bilinen $(0, 0, P)$ kuvvetlerinin sütunudur. (3.19) denklemini iki matris denklemi olarak yazarsak,

$$[K^{11}]\{\Delta^1\} + [K^{12}]\{\Delta^2\} = \{F^1\} \quad (3.20)$$

$$[K^{21}]\{\Delta^1\} + [K^{22}]\{\Delta^2\} = \{F^2\} \quad (3.21)$$

elde ederiz. (3.21) denkleminde,

$$\{\Delta^2\} = [K^{22}]^{-1} \left(\{F^2\} - [K^{21}]\{\Delta^1\} \right)$$

yazarız. $\{\Delta^2\}$ bilirse $\{F^1\}$ (2.31) denkleminde hesaplanabilir. Şu andaki durumda,

$$[K^{11}] = K_{11}^{(1)} \quad [K^{12}] = \begin{Bmatrix} K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K^{21}] = \begin{Bmatrix} K_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K^{22}] = \begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\{F^1\} = F_1^{(1)} \quad \{F^2\} = \begin{Bmatrix} F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$a = \text{sabit}$, $h_1 = h_2 = h_3 = \frac{L}{3}$ ve $f = \text{sabit}$ için

$$[K^{22}]^{-1} = \frac{L}{3a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3.22)

$$\{\Delta^2\} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{fL^2}{18a} \begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix} + \frac{PL}{3a} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

ve $x = 0$ da bilinmeyen doğal sınır koşulu

$$P_1^{(1)} \equiv \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = -(fL + P)$$

buluruz.

$\psi_i^{(e)}$ ($e = 1, 2, 3$) $e \neq f$ için herhangi Ω^f elemanında sıfır olduğundan (Şekil 3.3) sonlu eleman çözümü tüm bölge için

$$u(x) = \sum_{e=1}^3 \left(\sum_{i=1}^2 u_i^{(e)} \psi_i^{(e)} \right) \equiv \sum_{I=1}^4 U_I \Phi_I(x) \quad (3.23)$$

şeklindedir. Burada

$$\Phi_I(x), \quad (I = 1, 2, \dots, N + 1)$$

$$\Phi_I(x) = \begin{cases} \psi_2^{(I-1)}(x) & x_{I-1} \leq x \leq x_I \\ \psi_1^{(I)}(x) & x_I \leq x \leq x_{I+1} \end{cases}$$

parçalı sürekli *global enterpolasyon fonksiyonlarıdır*.

Hesaplama amacıyla (3.23) denklemini

$$u(x) = \begin{cases} U_1 \psi_1^{(1)}(x) + U_2 \psi_2^{(1)}(x) & 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ U_2 \psi_1^{(2)}(x) + U_3 \psi_2^{(2)}(x) & \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \\ U_3 \psi_1^{(3)}(x) + U_4 \psi_2^{(3)}(x) & \frac{2L}{3} \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.24)$$

formunda yeniden yazılabilir.

Örneğin, $x = x_0$ da, $\frac{L}{3} \leq x_0 \leq \frac{2L}{3}$, u 'yu hesaplamak için (3.24) denkleminin 2. satırını kullanılır.

3.2.6. Çözümünden Sonraki İşlem

Sonlu eleman denklemlerinin çözümü, u asıl bilinmeyen veya bilinmeyenlerin düğüm noktalarındaki değerlerini verir (Örneğin; yerdeğiştirme, ısı, hız, vs.). Sonuçlardan sonraki işlemler aşağıdakilerden birini veya daha fazlasını içerir.

1. Herhangi yedek değişkenlerin hesaplanması (Örneğin; çözümün gradyeni).
2. Çözümün bir anlamı olup olmadığını kontrol etmek amacıyla sonuçların yorumlanması.
3. Tablolar (çizelge, liste) ve / veya sonuçların grafik gösterimi.

Yedek değişkenlerinin hesabı, çözümün türevini içerdiğinden $e \neq f$ için Ω^f elemanında $\psi_i^{(e)} = 0$ olduğu dikkate alınarak lineer eleman için çözümün türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \sum_{e=1}^3 \sum_{i=1}^2 u_i^{(e)} \frac{d\psi_i^{(e)}}{dx} \\ &= \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h_e} \quad e = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Her bir elemanda $\frac{du}{dx}$ sabittir. u , her bir elemanda lineer olduğu kabulünden bu beklenilir. Ayrıca bu sabit her bir elemanda farklıdır. Böylece çözümün türevi parçalı sabittir.

Elimizdeki problemin gerçek çözümü,

$$u = \frac{f}{2a}(2xL - x^2) + \frac{P}{a}x$$

dır.

Sonlu eleman çözümü ile gerçek çözümü karşılaştırdığımızda, $x = h$, $x = 2h$ ve $x = 3h$ de gerçek çözümün sonuçları (3.22) denklemindeki sonuçlarıyla aynıdır. Buradan, sonlu eleman çözümü düğümlerde gerçektir. Eğer herhangi ara noktada $u(x)$ 'i hesaplamak istersek (3.24) ifadesini kullanabiliriz. Örneğin, $x = \alpha h$ $0 < \alpha < 1$ de (Şekil 3.3a)

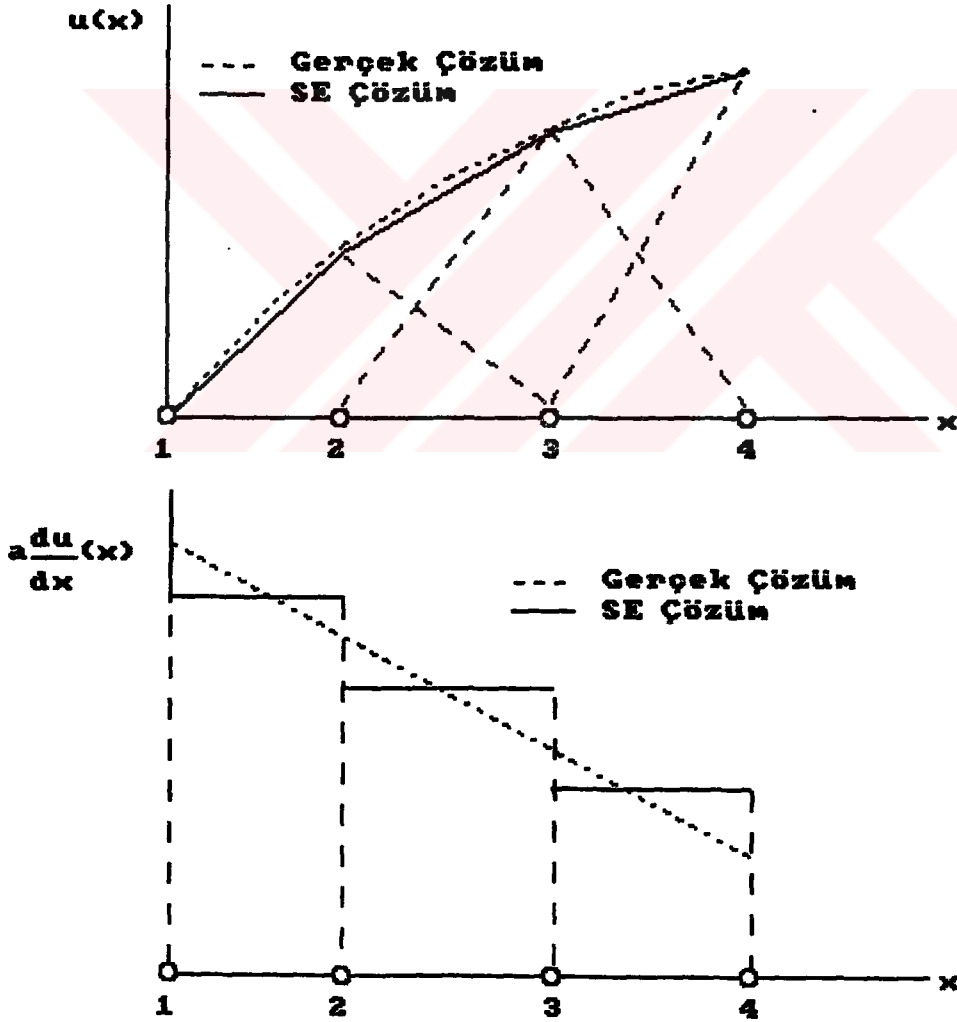
$$u(\alpha h) = \frac{h - \alpha h}{h} u_1^{(1)} + \frac{\alpha h - 0}{h} u_2^{(1)} = (1 - \alpha)u_1^{(1)} + \alpha u_2^{(1)} \equiv U_\alpha$$

Yani $x = \alpha h$ ' da u , $x = \alpha h$ noktasının her iki tarafındaki düğümlerde u 'nun değerlerinin bir ağırlıklandırılmış ortalamasıdır. Benzer şekilde, $x_0 = h + \alpha h$ için

$$u(x_0) = (1 - \alpha)u_1^{(2)} + \alpha u_2^{(2)}$$

değeri (3.24) ifadesinin ikinci satırından elde edilir. Şekil (3.4)' de gerçek çözüm ve onun türevi, sonlu eleman çözümüyle karşılaştırılmıştır. Eleman arası sınırlarda $\frac{du}{dx}$ süreksizdir (bir elemandan gelen değer bir sonraki elemanın değerinden farklıdır). Bununla birlikte, e ve $e+1$ düğümlerinde $\frac{du}{dx}$ 'in ortalaması, $x = x_e + \frac{h}{2}$ ' deki $\frac{du}{dx}$ 'in gerçek değeri ile çakışır.

Bu, (3.1) probleminin sonlu eleman yaklaşımını tamamlar.



Şekil 3.4. (3.1) Diferansiyel Denkleminin Gerçek Çözümü İle Sonlu Eleman Çözümünün Karşılaştırılması

3.3. İki Boyutlu Problemlerin Sonlu Eleman Analizi

İki boyutlu problemlerin sonlu eleman analizi bir boyutlu problemler için tanımlanan aynı temel adımları içerir. İki boyutlu problemler kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlandığından bu tür problemlerin analizi biraz karışıktır. İki boyutlu Ω tanım bölgesinin Γ sınır genellikle bir eğridir. Bu nedenle iki boyutlu tanım bölgesine yaklaşmak için kullanılabilen sonlu elemanlar, basit iki boyutlu geometrik şekillerdir. Diğer bir deyişle iki boyutlu problemlerde verilmiş kısmi diferansiyel denklemin sadece yaklaşık çözümünü araştırmayız ayrıca uygun sonlu eleman ağı ile verilmiş tanım bölgesine de yaklaşırız.

İki boyutlu problemlerde, tanım bölgesini elemanlara bölmeden dolayı oluşan bölme hataları (bölgeye yaklaşımdan dolayı) olduğu gibi çözüme yaklaşımdan dolayı oluşan yaklaşım hataları da olacaktır.

Sonlu eleman ağı basit iki boyutlu elemanlardan oluşur. Örneğin üçgenler, dörtgenler ve/veya dört kenarlılar. Bu elemanlar, sınırları üzerindeki düğüm noktalarında birbirleriyle bağlanmışlardır.

İki boyutlu problemler için sonlu eleman analizinin daha iyi anlaşılabilmesi için;

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} u - f = 0 \quad (3.25)$$

şeklinde bir model denklem alalım (Reddy, 1989).

a_{ij} ($i, j = 1, 2$), a_{00} ve f verilmiş datalardır ve sınır koşulları açıkça belirtilmiştir. Sınır koşullarının formu varyasyonel formülasyonda görülebilecektir.

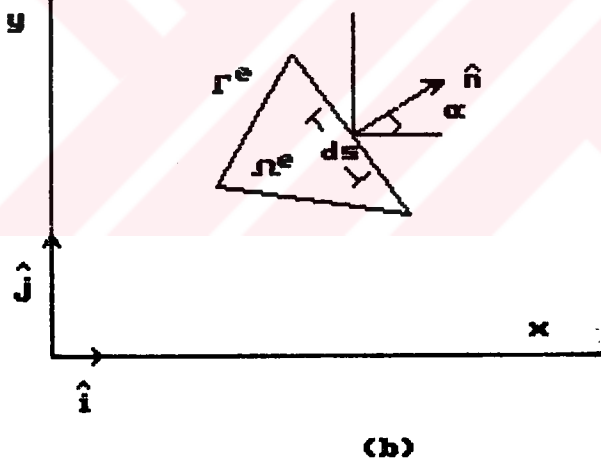
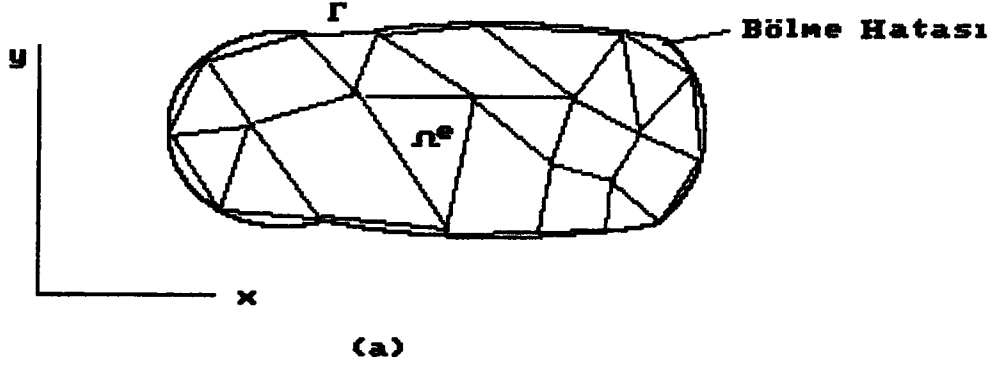
Özel bir durum için ; $a_{11} = a_{22} = a$ ve $a_{12} = a_{21} = a_{00} = 0$ alınmasıyla (3.25) denkleminde,

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad (\Omega \text{ bölgesinde})$$

poisson denklemini elde ederiz. Burada ∇ gradyen operatördür. Gradyen operatörü ,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.5. Düzgün Olmayan Bir Bölgenin Sonlu Eleman Bölümü

- (a) Üçgensel ve dörtkenarlı elemanlar yardımıyla bölümü
 (b) Tipik üçgensel eleman (Γ^e sınırı, eleman sınırı üzerinde \vec{n} birim normal vektörü)

3.3.1. Varyasyonel Formülasyon

İster üçgensel ister dörtkenarlı olsun sonlu eleman ağının tipik bir elemanının Ω^e olduğunu kabul edelim ve sonlu eleman modelini geliştirelim. (3.25) denklemini bir v test fonksiyonu ile çarpalım (v 'nin x ve y 'ye göre bir kez diferansiyellenebilir olduğu kabul edilir) ve elemanın Ω^e tanım bölgesi üzerinde integre ederiz:

$$0 = \int_{\Omega^e} v \left[-\frac{\partial}{\partial x}(F_1) - \frac{\partial}{\partial y}(F_2) + a_{00}u - f \right] dx dy \quad (3.26)$$

Burada,

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \quad F_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}$$

dir.

u ve v arasında diferansiyeli eşit olarak dağıtmak için (3.26) denklemindeki ilk iki terimi, terim terim integre ederiz. Önce,

$$-v \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(vF_1) + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 \quad (3.27)$$

$$-v \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(vF_2) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2$$

eşitliklerini dikkate alırız. Gradyen veya diverjans teoreminden yararlanarak;

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x}(vF_1) dx dy = \oint_{\Gamma^e} vF_1 n_x ds \quad (3.28a)$$

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y}(vF_2) dx dy = \oint_{\Gamma^e} vF_2 n_y ds \quad (3.28b)$$

yazabiliriz. Burada, n_x ve n_y , Γ^e sınırı üzerinde

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

normal birim vektörün bileşenleridir ve ds , sınır boyunca elemanın sonsuz küçük yay uzunluğudur (Şekil 3.5b). (3.26) denkleminde (3.27) ve (3.28) denklemleri kullanılarak,

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} v u - v f \right] dx dy$$

$$- \oint_{\Gamma^e} v \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] ds \quad (3.29)$$

denklemini elde ederiz. (3.29) denkleminin sınır koşullarını gözden geçirdiğimizde u' ya atanan özel değerın esas sınır koşulunu oluşturduğunu görürüz. Bu nedenle u asıl değişkendir.

$$q_n \equiv n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.30)$$

ye atanan özel değer formülasyonun doğal sınır koşulunu oluşturur. Bu nedenle q_n yedek değişkendir. $q_n = q_n(s)$ fonksiyonu, \vec{n} normal birim boyunca $F = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$ vektörünün izdüşümünü gösterir. q_n yedek değişkeni birçok fiziksel problemlerle ilgilidir. (3.25) denkleminin varyasyonel formu,

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} v u - v f \right] dx dy$$

$$- \oint_{\Gamma^e} v q_n ds \quad (3.27)$$

şekindedir. Bu (3.27) varyasyonel denklem (3.25) denkleminin sonlu eleman modelinin esas kısmını oluşturur.

3.3.2.Sonlu Eleman Formülasyonu

(3.27) varyasyonel form, (3.27) denklemindeki ilk iki terim ve (3.30) daki q_n sıfırdan farklı olması için u için seçilen yaklaşımın en azından x ve y ' ye göre bilineer olması gerektiğini gösterir.

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (3.28)$$

ifadesiyle u ' ya yaklaşıldığını kabul edelim. Burada u_j , (x_j, y_j) noktalarında u ' nun değerleridir ve ψ_j

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (3.29)$$

özellikli lineer enterpolasyonudur. ψ_i ' nin açık ifadesi bölüm (1.5) de lineer üçgensel ve dikdörtgensel elemanlar için çıkarıldı.

(3.27) varyasyonel forma, u için (3.28) ifadesi ve v için ψ_i yerleştirilerek ,

$$0 = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy \right\} u_j$$

$$- \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy - \oint_{\Gamma^e} \psi_i q_n ds \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad (3.30)$$

elde ederiz. Burada

$$K_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy \quad (3.30a)$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy + \oint_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds$$

dır. $a_{12} = a_{21}$ olduğu zaman $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$ olur. (3.30a) denkleminin, (3.25) denkleminin sonlu eleman modelini gösterir.

3.3.3. Eleman Matrislerin Hesaplanması

(3.30a)' deki $[K^{(e)}]$ ve $\{F^{(e)}\}$ eleman matrisleri gerçek integrasyon ile hesaplanması genellikle kolay değildir. Bununla birlikte a_{ij} , a_{00} ve f sabit olduğu zaman

üçgensel ve dörtgensel elemanlar üzerinde integralleri gerçek olarak hesaplamak mümkündür. (3.30a) denkleminin $\{F^{(e)}\}$ 'deki sınır integrali, ne zaman q_n biliniirse hesap edilebilir. Bir iç eleman için yani problemin sınırı üzerinde kenarlarının hiçbiri olmayan bir eleman için sınır integralinden gelen katkı, ağdaki yanyana elemanlardan (bir boyutlu problemlerde $P_i^{(e)}$ ' ye benzer) gelen benzer katkıları iptal eder.

Kısalık nedeniyle (3.30a)'daki $[K^{(e)}]$ matrisini $[S^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) ve $[S]$ 4 temel matrislerin toplamı olarak yeniden yazabiliriz.

$$[K^{(e)}] = a_{11}[S^{11}] + a_{12}[S^{12}] + a_{21}[S^{12}]^T + a_{22}[S^{22}] + a_{00}[S] \quad (3.31a)$$

Burada,

$$S_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy \quad S_{ij}^{12} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy \quad (3.31b)$$

$$S_{ij}^{22} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy \quad S_{ij} = \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dy$$

dır. Ayrıca,

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy \quad Q_i^{(e)} = \oint_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds \quad (3.32)$$

Daha önce çıkarılan interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak (3.31) ve (3.32) denklemlerindeki matrisleri hesaplarız.

Bir Lineer Üçgensel Elemanlar İçin Eleman Matrisleri

Bir üçgen için, aşağıdaki gerçek integral formülleri integral hesabı için geçerlidir (Reddy, 1989).

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (3.33)$$

olsun. O zaman

$$I_{00} = A \quad (\text{ucgenin alanı})$$

$$I_{10} = A\bar{x} \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i$$

$$I_{01} = A\bar{y} \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$I_{11} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9\bar{x}\bar{y} \right)$$

$$I_{20} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9\bar{x}^2 \right) \quad (3.34)$$

$$I_{02} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9\bar{y}^2 \right)$$

(3.31b) ve (3.32) denklemlerinde (1.16a) ve (1.16b) lineer enterpolasyon fonksiyonlarını kullanarak ve

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A} \quad (3.35)$$

ifadesini dikkate alınarak,

$$S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j \quad S_{ij}^{12} = \frac{1}{4A} \beta_i \gamma_j \quad S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j$$

$$S_{ij} = \frac{1}{4A} \left\{ \left[\alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \bar{y} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{A} \left[I_{20} \beta_i \beta_j + I_{11} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) + I_{02} \gamma_i \gamma_j \right] \right\} \quad (3.36a)$$

elde ederiz. $\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y} = \frac{2A}{3}$ özdeşliğinden dolayı (denklem (1.16a) ve (3.34) 'nin sonucu olan)

$$f_i^{(e)} = \frac{f}{2} (\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = f \frac{A}{3} \quad (3.36b)$$

yazarız. Eleman düğümlerin koordinatları bilinirse (1.16b) denkleminden α_i , β_i ve γ_i hesaplanabilir ve eleman matrislerini elde etmek için (3.36) denklemlerine yerleştirilir.

Lineer Dikdörtgensel Eleman İçin Eleman Matrisleri

a_{00} , a_{ij} ve f sabitler olduğundan x ve y yerine sırasıyla ξ ve η yerleştirilmesiyle (1.22) deki enterpolasyon fonksiyonlarını kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
 [S^{11}] &= \frac{b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
 [S^{12}] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 [S^{22}] &= \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 [S] &= \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 \{f\} &= \frac{fab}{4} \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

buluruz.

Sınır İntegrallerinin Hesaplanması

q_n , Γ^e sınır boyunca s uzaklığının bir bilinen fonksiyonu olduğu zaman

$$Q_i^{(e)} = \oint_{\Gamma^e} q_n^{(e)} \psi_i^{(e)}(s) ds \tag{3.38}$$

tipindeki sınır integrallerinin hesaplanmasını ele alacağız. Γ^e 'nin bir kısmı Ω tanım bölgesinin Γ sınırı ile çakışmadığı zaman bu şekildeki integralleri hesaplamak gerekli değildir. Tanım bölgesinin içinde olan Γ^e 'nin kısımları üstünde e elemanının (i,j) kenarları ve f elemanının (p,q) kenarları aynı olduğu zaman (yani e ve f elemanlarının iç yüzeyi) e elemanının (i,j) kenarı üzerinde $q_n^{(e)}$, f elemanının (p, q) kenarı üzerindeki $q_n^{(f)}$ ile yok olur. Bu integral *kuvvetler (forces)* dengesi olarak görülebilir.

Γ^e tanım bölgesinin sınırı üzerine düştüğü zaman $q_n^{(e)}$ belirlenir (genellikle s nin bir fonksiyonu olarak) ya da sonraki hesaplamalarda belirlenebilecektir. Sonraki durumda asıl değişken açıkça belirtilecektir (q_n 'in açıkça belirtilmediği sınır kısmi üzerinde).

İki boyutlu lineer elemanların Γ^e sınırı, bir boyutlu lineer elemanların bir kümesidir. Bu nedenle sınır integralin hesabı doğru integrallerin hesap edilmesine varır. İki boyutlu interpolasyon fonksiyonları sınırlarla kısıtlandığı (yani sınır üzerinde hesap edildiği) zaman bir boyutlu interpolasyon fonksiyonlarına karşılık gelir. Bu fikirleri saptamak için, sınırlarının bir kısmı tanım bölgesinin sınır üzerinde olan bir sonlu eleman alalım. ve q_n ' nin orada bilindiğini kabul edelim. O zaman,

$$\int_0^h q_n(s)\psi_i(s)ds \equiv Q_i \quad (3.39)$$

i düğümüne q_n katkısını verir. Burada h , q_n kuvvetine maruz bırakılan kenar uzunluğunu gösterir ve $\psi_i(s)$ bir boyutlu interpolasyon fonksiyonlarıdır (Reddy, 1989).

$\psi_i(x, y)$ lineer (o zaman $\psi_i(s)$ lineerdir) olduğu zaman i , 1 ve 2 değerlerini alır. $\psi_i(x, y)$ kuadratik (o zaman $\psi_i(s)$ kuadrattir) olduğu zaman i , 1,2 ve 3 değerlerini alır. Örneğin ψ_i lineer olduğu zaman ($\psi_1 = 1 - \frac{s}{h}$, $\psi_2 = \frac{s}{h}$)

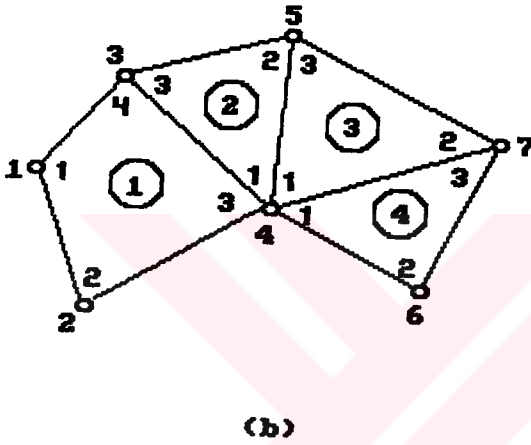
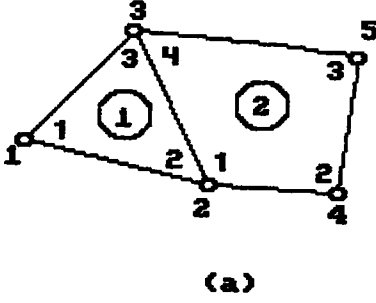
$$Q_i = \begin{cases} \int_0^h q_n \psi_i ds & \text{herhangi } q_n \text{ için} \\ \frac{q_n h}{2} & q_n \text{ sabit için} \end{cases} \quad (3.40)$$

elde ederiz.

3.3.4. Eleman Matrislerin Birleştirilmesi

Sonlu eleman denklemlerinin birleştirilmesi bir boyutlu problemlerde kullanılan aynı kurala dayanır. Bir üçgensel eleman ve bir dörtgensel elemandan oluşan bir sonlu eleman ağını ele alarak bu prosedürü örneklerle açıklayalım. (şekil 3.6a)

	<u>Global</u>	<u>Lokal</u>
	K_{11}	$K_{11}^{(1)}$
	K_{12}	$K_{12}^{(1)}$
	K_{22}	$K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}$
	K_{14}	0
	K_{15}	0
	K_{23}	$K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)}$
	⋮	
	K_{14}	$K_{13}^{(1)}$
	K_{34}	$K_{43}^{(1)} + K_{31}^{(2)}$
	K_{17}	0
	K_{44}	$K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(3)} + K_{11}^{(4)}$
	K_{45}	$K_{12}^{(2)} + K_{13}^{(3)}$
	K_{56}	0
	K_{47}	$K_{12}^{(3)} + K_{13}^{(4)}$



Şekil 3.6. Global Ve Eleman Düğümleri Arasındaki Eşlemeden Yararlanarak Sonlu Eleman Katsayı Matrislerinin Birleştirilmesi (Düğüm başına bir bilinmeyen var.)

(a) İki Elemanlarının Birleştirilmesi

(b) Birçok Elemanlarının Birleştirilmesi

$K_{ij}^{(1)}$ ($i=1,2,3$), üçgensel elemana karşılık gelen katsayı matrisini gösterir ve $K_{ij}^{(2)}$ ($i,j=1,2,3,4$), dörtgensel elemana karşılık geldiğini gösterir. Şekil (3.6a)' da gösterilen sonlu eleman ağında global ve eleman nodal değerleri arasındaki aşağıdaki eşlemeyi dikkate alırız.

$$U_1 = u_1^{(1)} \quad U_2 = u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \quad U_3 = u_3^{(1)} = u_4^{(2)}$$

(3.41)

$$U_4 = u_2^{(2)} \quad U_5 = u_3^{(2)}$$

Elemanlar arası düğümlerde nodal değerlerin sürekliliği, tüm elemanlar arası sınır boyunca asıl değişkeninin sürekliliğini garanti eder. Bunu görmek için, lineer üçgenel ve dörtgenel elemanların sınırları boyunca sonlu eleman yaklaşımının lineer olduğunu hatırlarız. Bir lineer polinom iki sabit ile (yani sınırda nodal değerleri) tek olarak tanımladığından ve sınırı paylaşan her iki elemanda sabitler aynı olduğundan, elemanlar arası sınır boyunca asıl değişkenin tek olarak tanımlandığı sonucu çıkar.

Sonra eleman denklemlerini birleştirmek için (3.41) elemanlar arası koşullarını ve (3.15) denklemlerini kullanırız.

$$0 = \sum_{e=1}^2 \{ \delta u^{(e)} \}^T ([K^{(e)}] \{ u^{(e)} \} - \{ F^{(e)} \})$$

$$= \sum_{e=1}^2 \sum_{i=1}^{n_e} \delta u_i^{(e)} [\sum_{j=1}^{n_e} K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} - F_i^{(e)}]$$

$n_1 = 3 \quad n_2 = 4$

veya

$$0 = \delta U_1 \left[K_{11}^{(1)} U_1 + K_{12}^{(1)} U_2 + K_{13}^{(1)} U_3 - F_1^{(1)} \right]$$

$$+ \delta U_2 \left[K_{21}^{(1)} U_1 + K_{22}^{(1)} U_2 + K_{23}^{(1)} U_3 - F_2^{(1)} \right]$$

$$+ \delta U_3 \left[K_{31}^{(1)} U_1 + K_{32}^{(1)} U_2 + K_{33}^{(1)} U_3 - F_3^{(1)} \right]$$

$$+ \delta U_2 \left[K_{11}^{(2)} U_2 + K_{12}^{(2)} U_4 + K_{13}^{(2)} U_5 + K_{14}^{(2)} U_3 - F_1^{(2)} \right]$$

$$+ \delta U_4 \left[K_{21}^{(2)} U_2 + K_{22}^{(2)} U_4 + K_{23}^{(2)} U_5 + K_{24}^{(2)} U_3 - F_2^{(2)} \right]$$

$$+ \delta U_5 \left[K_{31}^{(2)} U_2 + K_{32}^{(2)} U_4 + K_{33}^{(2)} U_5 + K_{34}^{(2)} U_3 - F_3^{(2)} \right]$$

$$+ \delta U_3 \left[K_{41}^{(2)} U_2 + K_{42}^{(2)} U_4 + K_{43}^{(2)} U_5 + K_{44}^{(2)} U_3 - F_4^{(2)} \right]$$

(3.42)

δU_i ($i=1,2,3,4,5$) katsayıları ayrı ayrı toplanarak ve onları ayrı ayrı sıfıra eşitleye-

rek;

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{44}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_3^{(1)} + F_4^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

elde ederiz. İki eleman tarafından paylaşılan global 2 ve 3 düğümlerine karşılık gelen konumlarda eleman matrislerin üst üste geldiğine dikkat edilmelidir.

Yukarıda tanımlanmış birleştirme prosedürü (3.42) deki çok uzun cebirsel işlem- den kaçınılabılır olduğu şeklinde yorumlanabilir. Şekil (3.6a) 'daki sonlu eleman ağının kapalı bir açıklaması, global düğümleri çiftleri ile eleman düğümleri çiftleri arasındaki aşağıdaki eşlemeyi gösterir:

Global Dügümler	Eleman Dügümler
(1,1)	Eleman 1'in (1,1)'i
(1,2)	Eleman 1'in (1,2)'si
(1,3)	Eleman 1'in (1,3)'ü
(1,4)	Eşleme yok
(1,5)	Eşleme yok
(2,2)	Eleman 1'in (2,2)'si ile eleman 2'nin (1,1)'i
(2,3)	Eleman 2'nin (2,3)' si ile eleman 2'nin (1,4)'ü
(2,4)	Eleman 2'in (1,2)' si
(2,5)	Eleman 2'in (1,3)' ü
(3,3)	Eleman 1'in (3,3)' ü ile eleman 2'nin (4,4)' ü
(3,4)	Eleman 2'nin (4,2)' si
(3,5)	Eleman 2'nin (4,3)' ü
(4,4)	Eleman 2'nin (2,2)' si
(4,5)	Eleman 2'nin (2,3)' ü
(5,5)	Eleman 2'nin (3,3)' ü

Eleman matrislerinden uygun elemanlarla global katsayı matrisini elde etmek için yukarıdaki eşleme bize eleman matrislerinin birleştirilmesinin kolay bir yolunu sağlar. Örneğin şekil 3.6b 'de gösterilen sonlu eleman ağını ele alalım. Global katsayı matrisinin (3,4) elemanı $K_{43}^{(1)} + K_{31}^{(2)}$ ifadesini içerir. (4,4) elemanı $K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(3)} + K_{11}^{(4)}$ ifadesini içerir. Birleştirilmiş sütun vektöründe 4. eleman $F_3^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + F_1^{(4)}$ içerir. Global matrisin (1,5) , (1,6) , (1,7) , (2,5) , (2,6) , (2,7) , (3,6) , (3,7) ve (5,6) elemanları sıfırdır. Çünkü (i,j) aynı elemanda olmadığı zaman $K_{ij}=0$ dır.

BÖLÜM IV

IV.UYGULAMA

4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Çözüm

$$-u'' - u + x^2 = 0 \quad (4.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Sınır değer problemini ele alalım.

Problemin varyasyonel formu daha önce oluşturuldu. Şimdi diferansiyel denklemin bir elemana ait varyasyonel formunu oluşturalım.

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - vu \right] dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} vx^2 dx - v \frac{du}{dx} \Big|_{x_e}^{x_{e+1}}$$

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - vu \right] dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} vx^2 dx - (v(x_{e+1}) \frac{du}{dx}(x_{e+1}) - v(x_e) \frac{du}{dx}(x_e))$$

$$-\frac{du}{dx}(x_e) \equiv P_1^{(e)} \quad \frac{du}{dx}(x_{e+1}) \equiv P_2^{(e)}$$

olsun. O zaman varyasyonel form,

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - vu \right] dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} vx^2 dx - v(x_e)P_1^{(e)} - v(x_{e+1})P_2^{(e)}$$

haline gelir. Burada

$$B(u, v) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - vu \right] dx$$

$$I(v) = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} vx^2 dx + v(x_e)P_1^{(e)} + v(x_{e+1})P_2^{(e)}$$

dir. Eleman matrisleri,

$$K_{ij} = B(\psi_i, \psi_j) \quad F_i = I(\psi_i)$$

şeklinde hesaplanabilir. Daha açık olarak,

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} - \psi_i \psi_j dx \quad (4.2)$$

$$F_i^{(e)} = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i x^2 dx + P_1^{(e)} \psi_i(x_e) + P_2^{(e)} \psi_i(x_{e+1})$$

dir.

Eleman sayısını 4 alalım. Burada elemanlar lineer doğru elemanlardır. Bu elemanlar için yaklaşım fonksiyonları Bölüm 1.4 de çıkarıldı. Buna göre yaklaşım fonksiyonları,

$$\psi_1^{(e)} = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \quad \psi_2^{(e)} = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e}$$

şeklindedir. Türevleri

$$\frac{d\psi_1}{dx} = -\frac{1}{h_e} \quad \frac{d\psi_2}{dx} = \frac{1}{h_e}$$

dir. Buna göre (4.2) deki $F_i^{(e)}$ ifadesi,

$$F_i^{(e)} = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i x^2 dx + P_i^{(e)}$$

şeklinde basitleştirilebilir. Şimdi her bir eleman için eleman matrisler,

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(-\frac{1}{h_e}\right)^2 dx - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{(x_{e+1} - x)^2}{h_e^2} dx \\
&= \frac{1}{h_e} - \frac{1}{h_e^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (x_{e+1} - x)^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{12}^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} -\frac{1}{h_e^2} dx - \frac{1}{h_e^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (x_{e+1} - x)(x - x_e) dx \\
&= -\frac{1}{h_e^2} dx - \frac{1}{h_e^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (x_{e+1} - x)(x - x_e) dx = K_{21}^{(e)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22}^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{1}{h_e} - \frac{1}{h_e^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (x - x_e)^2 dx \\
&= \frac{1}{h_e} - \frac{1}{h_e^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (x - x_e)^2 dx
\end{aligned}$$

$$F_1^{(e)} = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{x_{e+1} - x}{h_e} x^2 dx + P_1^{(e)}$$

$$F_2^{(e)} = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{x_{e+1} - x}{h_e} x^2 dx + P_2^{(e)}$$

şeklinde olacaktır. Burada,

Eleman 1 için: $e = 1, \quad x_e = 0, \quad x_{e+1} = 0.25, \quad h_e = 0.25$

Eleman 2 için: $e = 2, \quad x_e = 0.25, \quad x_{e+1} = 0.50, \quad h_e = 0.25$

Eleman 3 için: $e = 3, \quad x_e = 0, \quad x_{e+1} = 0.25, \quad h_e = 0.25$

Eleman 4 için: $e = 4, \quad x_e = 0.25, \quad x_{e+1} = 0.50, \quad h_e = 0.25$

olup, eleman matrisleri hesaplandığında

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} 3.91667 & -4.04167 \\ -4.04167 & 3.91667 \end{bmatrix} = [K^{(2)}] = [K^{(3)}] = [K^{(4)}]$$

olur.

Eleman 1 için: $e = 1, \quad x_e = 0, \quad x_{e+1} = 0.25$

$$\{F^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -0.00130208 \\ -0.00390625 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Eleman 2 için: $e = 2$, $x_e = 0.25$, $x_{e+1} = 0.50$

$$\{F^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.0143229 \\ -0.0221354 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Eleman 3 için: $e = 3$, $x_e = 0.50$, $x_{e+1} = 0.75$

$$\{F^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -0.0429687 \\ -0.0559896 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Eleman 4 için: $e = 4$, $x_e = 0.75$, $x_{e+1} = 1$

$$\{F^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} -0.0872396 \\ -0.105469 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(4)} \\ P_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ilişki matrisinden yararlanılarak, eleman denklemler birleştirilir.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} + F_1^{(4)} \\ F_2^{(5)} \end{Bmatrix}$$

$U_1 = U_5 = 0$ verilmiştir. Buna göre;

$$\begin{bmatrix} 3.91667 & -4.04167 & 0 & 0 & 0 \\ -4.04167 & 7.83334 & -4.04167 & 0 & 0 \\ 0 & -4.04167 & 7.83334 & -4.04167 & 0 \\ 0 & 0 & -4.04167 & 7.83334 & -4.04167 \\ 0 & 0 & 0 & -4.04167 & 3.91667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.00130208 + P_1^{(1)} \\ -0.0182292 + P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ -0.0651041 + P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \\ -0.143229 + P_2^{(3)} + P_1^{(4)} \\ -0.105469 + P_2^{(5)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4.04167 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.83334 & -4.04167 & 0 & 0 \\ 0 & -4.04167 & 7.83334 & -4.04167 & 0 \\ 0 & 0 & -4.04167 & 7.83334 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.04167 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ P_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00130208 \\ -0.0182292 \\ -0.0651041 \\ -0.143229 \\ -0.105469 \end{Bmatrix}$$

Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

$$P_1^{(1)} = 0.095032 \quad U_2 = -0.0232334 \quad U_3 = -0.0405194$$

$$U_4 = -0.0391908 \quad P_2^{(4)} = 0.263865$$

bulunur. Tüm bölge için sonlu eleman çözümü,

$$u(x) = \begin{cases} U_1 \psi_1^{(1)}(x) + U_2 \psi_2^{(1)}(x) & 0 \leq x \leq 0.25 \\ U_2 \psi_1^{(2)}(x) + U_3 \psi_2^{(2)}(x) & 0.25 \leq x \leq 0.50 \\ U_3 \psi_1^{(3)}(x) + U_4 \psi_2^{(3)}(x) & 0.50 \leq x \leq 0.75 \\ U_4 \psi_1^{(4)}(x) + U_5 \psi_2^{(4)}(x) & 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi_1^{(1)}(x) = 1 - 4x \quad \psi_1^{(2)}(x) = 2 - 4x$$

$$\psi_2^{(1)}(x) = 4x \quad \psi_2^{(2)}(x) = 4x - 1$$

$$\psi_1^{(3)}(x) = 3 - 4x \quad \psi_1^{(4)}(x) = 4 - x$$

$$\psi_2^{(3)}(x) = 4x - 2 \quad \psi_2^{(4)}(x) = 4x - 3$$

şeklinde olup,

$$u(x) = \begin{cases} -0.0232334(4x) & 0 \leq x \leq 0.25 \\ -0.0232334(2 - 4x) - 0.0405194(4x - 1) & 0.25 \leq x \leq 0.50 \\ -0.0405194(3 - 4x) - 0.0391908(4x - 2) & 0.50 \leq x \leq 0.75 \\ -0.0391908(4 - 4x) & 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dır.

Benzer şekilde $n=5$ için de sonlu eleman çözümü hesaplanabilir. $n=4$ ve $n=5$ için sonlu eleman çözümü sırasıyla Tablo 4.1 de ve Tablo 4.2 de gösterilmiştir.

Tablo 4.1. $n=4$ İçin Sonlu Eleman ve Sonlu Fark Çözümü

x	Sonlu Eleman Çözümü (-10u)	Sonlu Fark Çözümü (-10u)	Gerçek Çözüm (-10u)
0.00	0.000000	0.000000	0.000000
0.25	0.232334	0.224199	0.233740
0.50	0.405194	0.395323	0.394165
0.75	0.391908	0.385489	0.407591
1.00	0.000000	0.000000	0.000000

Tablo 4.2. $n=5$ İçin Sonlu Eleman ve Sonlu Fark Çözümü

x	Sonlu Eleman Çözümü (-10u)	Sonlu Fark Çözümü(-10u)	Gerçek Çözüm (-10u)
0.2	0.188248	0.183756	0.188974
0.4	0.350474	0.344161	0.351804
0.6	0.432547	0.426801	0.434159
0.8	0.351738	0.348368	0.353022

4.2. Sonlu Fark Yöntemiyle Çözüm

Aynı denklemi sonlu fark yöntemi ile çözelim. Sonlu fark ifadelerinden, daha az sayıda ve birbirine yakın noktaları kullanmamıza olanak sağlayan merkezi farkların kullanılması uygundur. Merkezi fark ifadeleri;

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \quad i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

⋮

şeklindedir.

Bu ifadeler (4.1) denkleminde yerleştirilirse,

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + u(x_i) - x_i^2 = 0$$

$$u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) + h^2 u(x_i) = h^2 x_i^2 \quad (4.2)$$

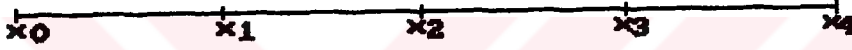
$$u(x_{i-1}) + (h^2 - 2)u(x_i) + u(x_{i+1}) = h^2 x_i^2$$

elde edilir.

Verilen tanım bölgesini $n = 4$ aralığa bölelim. Bu durumda,

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} \quad x_i = x_0 + ih \quad i = 1, 2, 3$$

olur.



$$i = 1 \text{ için} \quad u_0 - \frac{31}{16}u_1 + u_2 = \frac{1}{16}$$

$$i = 2 \text{ için} \quad u_1 - \frac{31}{16}u_2 + u_3 = \frac{4}{16}$$

$$i = 3 \text{ için} \quad u_2 - \frac{31}{16}u_3 + u_4 = \frac{9}{16}$$

$u_0 = u_4 = 0$ olarak verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \frac{-31}{16} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-31}{16} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-31}{16} \end{bmatrix}$$

denklem sistemine varılır. Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

$$u_1 = -0.0224199 \quad u_2 = -0.0395323 \quad u_3 = -0.0385489$$

olarak bulunur. $n = 4$, $n = 5$ ve $n = 10$ için de bulduğumuz sonuçlar sırasıyla tablo 4.1. tablo 4.2. tablo 4.3. de gösterilmiştir.

Tablo 4.3. $n=10$ İçin Sonlu Fark Çözümü

x	Sonlu Fark Çözümü (-10u)
0.1	0.0948116
0.2	0.1876750
0.3	0.2746620
0.4	0.3499020
0.5	0.4056430
0.6	0.4323280
0.7	0.4186890
0.8	0.3518630
0.9	0.2175190

4.3. Sonuçların Sonlu Fark Yöntemi İle Karşılaştırılması

Uygulama bölümünde ele aldığımız sınır değer probleminin tanım bölgesini, 4 elemana ve 5 elemana bölerek sonlu eleman yöntemi ile çözdüğümüzde elde ettiğimiz sonuçlar çok yakın değerler vermektedir.

Sonlu fark yöntemi ile çözümde aralık sayısı artırdıkça gerçek çözüme yakınsamaktadır. Halbuki sonlu eleman yönteminde çok fazla eleman kullanmaya gerek yoktur. Örneğin ele aldığımız problem için $n=5$ elemana bölmek yeterli olmuştur. Sonlu fark yönteminde sadece bir denklem sisteminin çözümü gerekmektedir. Halbuki sonlu eleman yönteminde hem denklem sistemi çözümü hem de integral hesabı gerekmektedir. Günümüzde integral hesaplar ve denklem sistemi çözümleri kolaylıkla yapılabilmektedir. Ele aldığımız bu örnekte, sonlu fark yöntemi sonucunda oluşan denklem sistemi ile sonlu eleman yönteminin uygulanması sonucu oluşan integraller ve eleman denklemlerinin birleştirilmesi sonucunda oluşan denklem sistemi Mathematica ' da çözülmüştür.

SONUÇ

Sonlu eleman yöntemi, geometrik olarak karışık bir bölgenin basit alt bölgelerle temsil edilmesine olanak verir ve her bir eleman için yaklaşım fonksiyonlarının çıkarılmasında sistematik bir teknik geliştirir. Bu iki özellik, sonlu eleman yöntemini diğer yöntemlerden üstün kılar. Bu yaklaşım fonksiyonlarının oluşturulması diferansiyel denkleme bağlı değildir. Bu prosedürün oluşturulması sadece geometriye, düğümlerin konumuna, eleman düğümlerinde belirtilmiş asıl (primary) bağımlı bilinmeyenlerinin sayısına bağlıdır.

Sonlu eleman yönteminde, tanım bölgesinin aynı materyal özelliklere sahip olması gerekli değildir. Sonlu elemanlar farklı büyüklükte ve şekilde olabilirler. Gerekğinde sonlu eleman ağı yenilenebilir yani eleman sayısı artırılabilir.

Sonlu eleman yöntemi, tanım bölgesi düzgün olmayan problemler için kolaylıkla uygulanabilmektedir. Sonlu fark yönteminde sınırın düzensiz şekle sahip olması ağ noktalarının yerleştirilmesini zorlaştırır. Varyasyonel yaklaşım yöntemlerinde ise tüm bölge için sınır şartlarını sağlayan yaklaşım fonksiyonlarını seçmek oldukça güçtür.

Sonlu eleman yönteminin uygulanması sonucu oluşan integrallerin sayısal çözümleri ve denklem sistemlerinin çözümleri bilgisayarda yapılabilir olması hem işlem zamanı yönünden bir kazanç hem de elle yapılan hesaplamalarda bir kazanç sağlar.

KAYNAKLAR

- 1- Burden,R.L., and Faires,J.D., 1993. Numerical Analysis, PWS Publishing Company, Fifth Edition, Boston.
- 2- Çağal,B., 1989. Sayısal Analiz, Seç Kitap Dağıtım, İstanbul.
- 3- Çağlar,N., 1993. Çok Noktalı Lineer Sınır Değer Problemlerinde Spline Fonksiyon, Doktora Tezi(Y.Ü.Fen Bilimleri).
- 4- Gallagher,R.H., Oden,J.T., Taylor,C., and Zienkiewicz,O.C., 1975. Finite Elements in Fluids, John Wiley, Vol.2, New York.
- 5- Kardestuncer,H., 1988. Finite Element Handbook, McGraw-Hill International Editions Engineering Series.
- 6- Reddy,J.N., 1989. An Introduction To The Finite Element Method, John Wiley, Third Edition, New York.
- 7- Segerlind,L.J., 1984. Applied Finite Element Analysis, John Wiley, second edition, New York.
- 8- Yönet,I.C., 1979. Adi Diferansiyel Denklemlerdeki Sınır Değer Problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemi İle Sayısal Çözümleri, Doçentlik Tezi, E.M.M.A Matbası.

Ö Z G E Ç M İ Ő

- Adı Soyadı** : Selmahan SELİM
- Doğum Tarihi** : 30 Haziran 1971
- Doğum Yeri** : Trabzon
- İlk Öğrenimi** : 1982 yılında MuratpaŐa İlkokulundan mezun oldu.
- Orta Öğrenimi** : 1988 yılında Çamlıca Kız Lisesinden mezun oldu.
- Yüksek Öğrenimi** : 1988 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1992 yılında tamamladı.
- Görevi** : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.