YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Genelleş. Ters Mat. ve Rankı tam Olmayan Mod. Uygı

Yüksek Lisans Tezi

Hasan Yıldız

1992

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

57

GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS MATRİSLER VE RANKI TAM OLMAYAN MODELLERE UYGULAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HASAN YILDIZ

İSTANBUL 1992

Teşekkür

Bu çalışmayı özveriyle yönetmeyi kabullenen değerli zamanını benden esirgemeyen, beni olumlu yönde eleştiren ve bilgi ile deneyimlerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Y.Doç.Dr. Adnan Mazmanoğlu'na sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca onun bir üyesi olmaktan gurur duyduğum Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi tüm öğretim üye ve yardımcılarına benim yetişmemde katkılarından dolayı da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

" Variyans analizi " yöntemi altında nitel değişkenli modellere çözüm aranırken hep klasik bir yaklaşımla, lineer modeller kurularak çalışmalar yapılmıştır.

Fakat daha çağdaş bir yöntem olarak matris analizi (cebri) kullanılmasına rağmen pek sonuç alındığı iddia edile_ mez.Matrisyel gösteriliş olarak ifade edilen bu matris cebri pek öteye gidilmeden terk edilmiştir.

Bunun tek nedeni nitel değişkenli modellerin tek çözümle sınırli kalmayışındadır.

$$Y = X\beta + \epsilon$$

Şeklinde gösterilen lineer modelden elde edilecek olan

$$(X'X)\,\hat{\beta} = X'Y$$

normal denkleminde X'X in özel yapısından dolayı rankı tam değildir.Klasik anlamda matris cebrinde parametreler vektorü β için tek çözüm olmadığından birçok yazarlar "kısıtlamalar" denen bir takım yöntemlerle çözümsüzlüğe çözüm getirmeye calışmışlardır.

Bazı yazarlar ise " kısıtlamaya " gitmeden rankı tam olmayan modellere çözüm getirmişlerdir. Bunu da " Genelleş_ tirilmiş Ters matris" lerlc yapmışlardır.

I. bölümde yararına inandığımız, kısıtlamaya gidilmeden normal denklemlere çözüm getiren nitel değişkenli modellere g-ters ile nasıl çöüm getirebileceğimizi açıklamaya çalıştık.

II. bölümde de bu modelin bir uygulamsını hem g-ters'le hemde bunu bir bilgisayar programıyla genelleştirerek bir çözüm getirdik.

Searle gibi yazarların da ifade ettiği gibi variyans analizinin tasarım modellerinde sık sık kullanılan g-ters, faktör sayısı ve konumuna göre matris boyutlarını büyütmekte ve bilgisayarla çözüm zorunlu bir durum almaktadır.

SUMMARY

While solutions were being looked for variable matters under variance analyze, lineer models studies were made by setting lineer models with a classic approach.But as a better way,although matris analyize are used, it is not said that a good result taken. This matris that defined as matrisal ostentation was abondened without being developed very rapidly.

Only reason of this is that qualitative variable models don't have only one solution.

$$Y = x\beta + \epsilon$$

from this formula, it can be obtained

$$(x'x)\hat{\beta} = x'y$$

In this formula, because of special structure of x'x it h not exact rank.In the clinic meaning reverse of matris algebra can n be taken. for unknown parameter vektor β , because of not being on one solution many researchers tried to find solutions to th unsoluble problem with known as" restrictions" and"suitable conditio

Without using restrictions some researchers found solution models which has not exact rank. They did these with generaliz reverse matris.

In the first part , we tried to explain how to provid solutions to gualitative variable models with g-reverse and norma formulas without restrictions.

In the second part, we provided a solution to this mode with either g-reverse or a computer program by generalizing.

Like Sereal some writers stated that at variation analyzin models, g-reverse enlarges matris dimensions and solution by help o computer will have to be unavoidable according to factor number an location.

0.GİRİŞ

0.1.LİNEER DENKLEMLER

Çok bilinmeyenli lineer denklemleri, matrisyel olarak

$$AX = Y$$

biçiminde yazabiliriz.Bu yazılışa göre A,X ve Y şunları gösterir:

X: Bilinmeyen değerler vektörü
Y: Bilinen değerler vektörü
A: Katsayılar matrisi

Denklem sayısı, bilinmeyen sayısına eşitse, A kare matristir. Rankı tam ise, başka değişle tekil değilse ($|A| \neq 0$), tersi alınabilir. Çözüm;

$$X = A^{-1} Y$$

biçimindedir.Ancak lineer denklemler için başka durumlar da söz konusu olabilir. Şöyle ki, A kare matristir, ama rankı tam değildir ($|A| = 0$: tekil matris).Ya da A dikdörtgen bir matristir: bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit değildir. Bu üç durumu, denklem sayısını n, bilinmeyen sayısını q ile göstererek denklemimizi

$$\underset{(n,q)}{A}\underset{(q,1)}{X} = \underset{(n,1)}{Y} \qquad (0.1.1.)$$

biçiminde yeniden yazalım.A nın rankını da,r(A)=r olarak gösterelim

1) n=q=r ise, A bir kare matristir.Rankı tam olarak tanımlanır

2) n=q, r<q ise,yine bir kare matris söz konusudur.Ama rankı tam değildir.

3) n $\neq$ q ise, A bir dikdörtgen matristir.Rankı, n ve q'den hangisi küçükse, ona eşit yada daha küçük olabilir. Küçük olma durumunda,"sütun (r<q),yada satır (r<n) rankı tam olmayan matris" deyimi kullanılır.

Gerek ikinci, gerekse üçüncü durumda, A nın klasik anlamda A^{-1} gibi bir tersi yoktur. Bizi de ilgilendiren bu tür durumlardır.

n=q,r<q olduğunda,0.1.1.de tanımlanan denklem sistemine rankı tam olmayan (yada eksik olan) lineer denklemler denir.

0.2. LİNEER MODELLER

Lineer modeller, hem bir çok durumlara uygun oldukları, hem de hesapların, çözümlemenin kolaylıkları nedeniyle kullanılır. Üstelik lineer olmayan birtakım modeller de lineere dönüştürülebilir.

Bir lineer model, genel olarak şöyle gösterilebilir:

$$Y_i = f(x) + \epsilon_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Burada Y gözlenen, ϵ gözlenemeyen raslantısal değişkenlerdir. f(x), modelin belirleyici bölümüdür. En basit bir biçimini

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

olarak gösterebiliriz. Modelin bilinmeyen parametreleri daha çok olabileceği gibi (β_0, β_1, β_2, ...) açıklayıcı denen x değişkeni de birden çok olabilir (x_1, x_2...). Bu ayrıntılara girmeyeceğiz. Yanlız önemli bir kaç noktaya değinelim. Birincisi, hata terimi denen ϵ'a ilişkin bazı özellikler belirtilmedikçe model eksik kalır: $E(\epsilon) = 0$, $Var(\epsilon) = \sigma^2$ gibi. Ayrıca, aralık tahmini, hipotez testi yapılacağı zaman ϵ'ın dağılım biçimini de belirlemeye gerek duyulur.

İkinci nokta, bağımsız, açıklayıcı gibi adlar verilen x değişkeninin (yada değişkenlerinin) raslantısal olup olmayışlarına göre modeller arasında bazı ayrımlar olmasıdır.

Üçüncü nokta ise açıklayıcı değişken ya da değişkenlerin nitel yada nicel oluşlarına göre modellerin en azından adlarının değişmesidir. Değişkenler nicelse, genellikle modellerin bilinen klasik adı "Regresyon modelleri" dir. Nitel değişkenlerin söz konusu olduğu modeller ise, klasik yaklaşımda, variyans analizi modellerinden başka bir şey değildir. Bunlar da, değişkenlerin raslantısal olup olmayışlarına göre, başlıca iki tipe ayrılabilirler: Daha klasik olan değişkenlerin raslantısal olmadığı modele, "değişmez etkili model", ikinci tipe de "değişir etkili model" adları verilir.

0.2.LİNEER MODELLER

Lineer modeller,hem bir çok durumlara uygun oldukları,hem de hesapların, çözümlemenin kolaylıkları nedeniyle kullanılır. Üstelik lineer olmayan birtakım modeller de lineere dönüştürülebilir.

Bir lineer model, genel olarak şöyle gösterilebilir:

$$Y_i = f(x) + \epsilon_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Burada Y gözlenen, ϵ gözlenemeyen raslantısal değişkenlerdir. f(x), modelin belirleyici bölümüdür. En basit bir biçimini

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

olarak gösterebiliriz. Modelin bilinmeyen parametreleri daha çok olabileceği gibi (β_0 , β_1 , β_2 ,...) açıklayıcı denen x değişkeni de birden çok olabilir (x_1, x_2...). Bu ayrıntılara girmeyeceğiz. Yanlız önemli bir kaç noktaya değinelim. Birincisi, hata terimi denen ϵ'a ilişkin bazı özellikler belirtilmedikçe model eksik kalır: $E(\epsilon) = 0$, Var $(\epsilon) = \sigma^2$ gibi. Ayrıca, aralık tahmini, hipotez testi yapılacağı zaman ϵ'ın dağılım biçimini de belirlemeye gerek duyulur.

İkinci nokta, bağımsız, açıklayıcı gibi adlar verilen x değişkeninin (yada değişkenlerinin) raslantısal olup olmayışlarına göre modeller arasında bazı ayrımlar olmasıdır.

Üçüncü nokta ise açıklayıcı değişken ya da değişkenlerin nitel yada nicel oluşlarına göre modellerin en azından adlarının değişmesidir.Değişkenler nicelse,genellikle modellerin bilinen klasik adı "Regresyon modelleri" dir. Nitel değişkenlerin söz konusu olduğu modeller ise, klasik yaklaşımda, variyans analizi modellerinden başka bir şey değildir. Bunlar da, değişkenlerin raslantısal olup olmayışlarına göre,başlıca iki tipe ayrılabilirler: Daha klasik olan değişkenlerin raslantısal olmadığı modele, "değişmez etkili model" , ikinci tipe de "değişir etkili model" adları verilir.

Tüm bu modellerin, matrisyel yazılışla,

$$Y = \beta X + \epsilon$$

gibi tek bir denklem biçiminde gösterilebilmeleridir.

Genel olarak bağımsız değişken X in nicel olduğu modellere "Rankı tam olan modeller", nitel değişkenlere ilişkin olanlara da "Rankı tam olmayan modeller" diyecegiz.

I.BÖLÜM GENELLEŞTİRİLMİŞ TERS MATRİSLER LİNEER DENKLEMLERDE ÇÖZÜM

1.1. BAZI TEOREMLER VE TANIMLAR

Teorem 1.1.1. A,(n,n)boyutlu bir kare matris olsun. Ancak ve ancak $|A| = 0$ ise, A tekildir.

Tanım 1.1.1. A,(n,q) boyutlu bir dikdörtgen matris olsun. A nın tekil olmayan alt kare matrislerinden en büyüğünün boyutu (r,r) ise :A nın rankı r'dir"denir: $r(A) = r$.

Teorem 1.1.2. A, bir (n,n) matris ise, ancak ve ancak $r<n$ ise; $|A| = 0$ olur.

Tanım 1.1.2. Determinantı sıfır olmayan kare matrise "tam ranklı matris" denir. Demek ki, tam ranklı matris tekil olmayan bir matristir. Dolayısıyle, böyle bir matrisin tersi vardır:

A,(n,n) boyutlu $|A|\neq 0$ olan bir matris ise tersi $(A)^{-1}$ dir.

öyle ki : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Dikdörtgen matrislerin de, satır yada sütun rankları tam olabilir: A,(n,q) boyutlu bir matris ise, öte yandan r=n ise A nın satır, r=q ise, sütun rankı tamdır.

Teorem 1.1.3. A ile B (n,m) ve (m,q) boyutlu iki matris ise ; $r(AB)\leq r(A)$ yada $r(AB)\leq r(B)$ dir. Demek ki, çarpım matrisinin rankı bunlardan herhangi birinin rankından büyük olamaz

Tanım 1.1.3. Vektör uzayı: (nx1) boyutlu vektör kümesi toplama ve çarpımına göre kapalıysa Vn gibi bir vektör uzayını oluşturur.

Başka deyişle, her vektörün bir skalerle çarpımı (1ı Vı gibi), iki vektörün toplamı ($V_1 + V_2$ gibi), yada $1_2 V_1 + 1_2 V_2$ gibi lineer bileşimler bu uzaydadır.

Tanım 1.1.4. Lineer bağımlılık-bağımsızlık : ($V_1, V_2, \ldots, V_k$) n bileşenli k vektör kümesi olsun ($1_1, 1_2, \ldots, 1_k$) skaler kümesi icin;

$$1_1 V_1 + 1_2 V_2 + \ldots + 1_k V_k = \Sigma 1_i V_i$$

tartılı toplamına, $V_1, V_2, \ldots, V_k$ vektörlerinin lineer bileşimi denir. Bu bileşim, hepsi birden sıfır olmayan k skaler için sıfır vektörünü gösteriyorsa ($\Sigma 1_i V_i = 0$) vektörler lineer bağımlıdır. Ancak ve ancak {0} skaler kümesi için $\Sigma 1_i V_i = 0$ gerçekleşiyorsa, vektörler bağımsızdır.

Teorem 1.1.4. Eğer k vektör (k>1) lineer bağımlıysa bunlardan en az biri, ötekilerden lineer bileşimi olarak gösterilebilir.

Teorem 1.1.5. k vektörler kümesi lineer bağımsız, k+1 vektör kümesi bağımlıysa, V_{k+1}, ($V_1, V_2, \ldots, V_k$) vektörlerinin lineer bileşimi olarak dile getirilebilir.

Teorem 1.1.6. (n,1) boyutlu { $V_1, V_2, \ldots, V_k$ } vektor kümesinin lineer bağımlı bir küme olması için gerekli ve yeterli koşul, vektörler matrisinin rankının, vektör sayısından az olmasıdır: $r<k$.

Teorem 1.1.7. (n,1) boyutlu k vektör kümesinin rankı r ise, $r \leq k$ olabilir. $r>0$ ve $r<k$ ise, k vektörden r tanesi bağımsızdır. Geri kalan k-r vektörlerden her biri, öteki r vektörün lineer bileşimi olarak gösterilebilir.

Teorem 1.1.8. (n,1) boyutlu k vektör kümesi, k>n ise, her zaman için lineer bağımlı bir kümedir.

Tanım 1.1.5. Rankın bir başka tanımı: Bir matriste lineer bağımsız sütun (yada satır) sayısı, o matrisin rankını verir. Bu arada, lineer bağımsızlık sütun sayısı, bağımsız satır sayısına eşittir.

Tanım 1.1.6. Türetici vektörler: V_n bir vektör uzayı olsun. V_n deki her vektör, $\{ V_1, V_2 ...., V_k \}$ kümesindeki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak elde edilebiliyorsa, $\{ V_1, V_2, ..., V_k \}$, V_n vektör uzayını "türetiyor" denir. $(k \geq n)$.

Tanım 1.1.7. Taban $\{ V_1, V_2, ..., V_k \}$, vektör uzayı V_n'i türeten lineer bağımsız bir vektör kümesi olsun. Böyle bir kümeye ; " V_n ' in bir tabanıdır" yada " V_n 'in bir tabanıdır" denir.

Tanım 1.1.5. e göre, vektör uzayındaki her vektör taban vektör kümesinin bir lineer bileşimi olur. Genellikle "taban" tek değildir. Ancak, taban vektörlerdeki vektör sayısı tektir.

Tanım 1.1.8. Bir "taban" daki vektör sayısına (k gibi), vektör uzayı V_n in boyutu denir. Başka değişle V_n in boyutu, bu uzaydaki en çok lineer bağımsız vektör sayısıdır.

Teorem 1.1.9. V_n vektör uzayını türeten $\{ V_1, V_2, ..., V_k \}$ vektörler matrisinin rankı r ise (r>0), kümede tam r tane bağımsız vektör vardır. Vektörler matrisi $\{ V_1, V_2, ..., V_k \}$ taban ise, k=r dir.

Teorem 1.1.10 $\{ V_1, V_2, ..., V_m \}$ $m<n$ için V_n vöktör uzayındaki bağımsız vektörler olsun. Bu küme $m \leq r$ olmak üzere V_n in bir tabanının alt kümesidir. V_n in boyutu m ise, söz konusu küme V_n için bir "taban" dır.

Teorem 1.1.11 Herhangi bir matrisin

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gibi elemanter denen işlemcilerle çarpımı, rankını değiştirmez.

Bu teoremin bir sonucu olarak, bir matrisin rankı şöyle bulunur: elemanter işlemlerle asal köşegen altındaki elemanlar sıfırlanır. Köşegen üzerindeki sıfır olmayan eleman sayısı, matrisin rankını verir. (Tekil olmayan en büyük minörün boyutu)

Tanım 1.1.9. Denklik: Bir dizi elemanter işlemlerle, A dan bir B matrisi elde ediliyorsa, "B,A'ya denktir" denir. A~B .Daha açık olarak denklik şöyle gösterilir: $P_s \ldots P_2 . P_1 . A . Q_1 . Q_2 \ldots Q_t \sim B$

$P_1, P_2, \ldots, P_s$ satırlarına, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ sütunlara uygulanan herhangi elemanter işlemciler olduğunden,yukarıdaki denkliği kısaca

$$PAQ \sim B$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 1.1.10 Denk köşegen ve denk kanonik biçim : Rankı r olan herhangi bir (n,q) A matrisi,

$$\Delta = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

köşegen biçimine ve de

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

konik biçimine çevrilebilir. $PAQ = \Delta$ yada $PAQ = C$. Kuşkusuz, P ve Q değişebilir,ama C değişmez.A nın denk kanonik biçimini bulma yöntemi_ne, "denklik altında kanonik biçime indirgeme" denir.

Öte yandan, denk köşegen biçime (Δ) indirgemenin,genelleştiril_miş tersleri bulmadaki önemli rolüne şimdiden değinebiliriz.

Teorem 1.1.12. A, rankı r olan (n,q)boyutlu herhangi bir matrisse P ve Q gibi tekil olmayan öyle matrisler vardır ki,

$n=q=r$ için , $PAQ = C = I_r$

$r=q<n$ için , $C = I_r$

$r=n<q$ için , $C = (I_r \ \ 0)$

$$r<q, r<n \quad \text{için}, \quad C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

1.2. TUTARLILIK

Rankı tam olmayan lineer denklem sisteminin çözüm koşulu "tutarlılık" dır.

0.1.1. deki lineer denklem sistemini ele alalım: A nın katsayılar matrisini, X in bilinmeyenler vektörünü, Y nin bilinenler vektörünü gösterdiği böyle bir sistemde ya hiç çözüm yoktur;ya tek yada çok çözüm vardır. Burada bizi ilgilendiren sonuncu durumdur. AX=Y sisteminin en az bir çözümü olması için,sistemin tutarlı olması gerekir.

1.2.1.Tutarlılığın tanımı:AX=Y denklem sisteminde,A nın satırları arasında herhangi bir lineer bağlantı bulunduğunda,Y nin karşı gelen elemanları arasında da aynı tür bağlantı varsa , "denklemler tutarlıdır" denir.Bu tanım, çözüm olabilmesi için , A nın satırları arasında lineer bağlantı olması koşulunu içermez. Başka deyişle A, kare ve ranklı tam bir matris ise (n=q=r),AX=Y her zaman tutarlıdır. Çözümü tektir.Ancak n=q=r olduğuna göre,teorem 1.1.6.ve tanım 1.1.5. ten kolaylıkla anlaşılacağı gibi, satırlar arasında lineer bağlantı yoktur. Dolayısıyle, yalnızca A rankı tam olmayan kare matris yada dikdörtgen matrisse, sistemde tutarlılık - yukaıdaki tanıma göre - aranır.

örnek: 1.2.1.1.

$$a + 3b = 4$$

$$2a + 5b = 3$$

gibi bir lineer denklem sistemini ele alalım;

Matrisyel yazılış ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\ X = Y$$

Biçimindedir. A, (2,2) boyutlu bir matristir. Determinantı ;

$|A| = -1 \neq 0$ olduğundan , sistemin X için tek çözümü vardır:

$X' = (a\ ,\ b)$

1.2.2. Tutarlı Denklem Sisteminde Çözüm Olması

$$AX = Y \qquad (1.2.2.1)$$

Denklem sisteminde , (n,q) boyutlu A matrisinin rankı r(A)=r olsun. Tanım 1.1.7. ve teorem 1.1.7.ve teorem 1.1.9'dan çıkarılabileceği gibi A'nın n satırındanr tanesi bağımsız, geri kalan n-r satır ise,öteki r satırın lineer bileşimi olur.Dolayısıyle, şöyle bir düzenleme yapılabilir: Denklemler, lineer bağımsız satırlar A'nın ilk r satırını oluşturacak biçimde düzenlenir.Bu ilk r satırı A_0 ile gösterelim. A'nın geriye kalan n-r satırını da KA_0 olarak gösterebiliriz (K:lineer bileşimlerin katsayılar matrisi). Demek ki A matrisini şöyle parçalayabiliriz:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ KA_0 \end{bmatrix}$$

Denklem sistemini tutarlı varsayarsak, tanım gereğince , A nın satırları arasındaki bağlantı, Y nin satırları arasında da bulunacaktır. Dolayısıyle, Y vektörünü de benzer biçimde parçalayabiliriz:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ KY_0 \end{bmatrix}$$

(Y_0:(r,1) boyutlu bir alt vektör.KY_0 ise (n-r,1) boyutlu bir alt vektör)

Bu durumda, 1.2.2.1 denklem sistemi, aşağıdaki biçime girer

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ KA_0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ KY_0 \end{bmatrix} \qquad (1.2.2.2)$$

Buradan ,

$$A_0 X = Y_0 \qquad (1.2.2.3)$$

$$KA_0 X = KY_0 \qquad (1.2.2.4)$$

elde edilir.

Demek ki (1.2.2.3.)' ün her çözümü ,(1.2.2.4.)'ü de gerçekleşti_ rir. öyleyse, (1.2.2.3.)'e çözüm bulmak gerekir. Bunun için de şöyle yapılır: r lineer bağımsız satırdan oluşan A_0 ın sütunları ile, karşılık gelen X in öğeleri arasında öyle bir yer değiştirme yapılır ki, A_0 ın ilk r sütunu lineer bağımsız olsun.Dolayısıyle Ao ve X de aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$A_0 = (A_1 \quad A_2) \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda A_1 , (r,r) boyutlu tekil olmayan kare bir alt matris A_2 , (r,q-r) boyutlu bir başka alt matris olur.öte yandan X_1 r öğeden X_2 ise (q-r) öğeden oluşur. öyleyse, (1.2.2.3.) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$(A_1 \quad A_2) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = Y_0 \qquad (1.2.2.5)$$

Dolayısı ile:

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = Y_0 \qquad (1.2.2.6)$$

$|A_1| \neq 0$ olacağına göre, bu sonuncunun her iki yanını A_1^{-1} ile çarpıp X_1 e göre çözebiliriz:

$$X_1 = A_1^{-1} Y_0 - A_1^{-1} A_2 X_2 \qquad (1.2.2.7)$$

Böylece X_1, X_2 göre elde edilmiş oluyor. Herhangi bir X_2 vek_ törü için (1.2.2.7.)'den X_1 hesaplanırsa,

$$X_0 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} Y_0 - A_1^{-1} A_2 X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad (1.2.2.8)$$

(1.2.2.8.) vektörü (1.2.2.1.)'in bir çözümüdür.

(1.2.2.8.)'den anlaşılacağı gibi tutarlı denklemlerin çözümü vardır. Ayrıca sayısız X_2 vektörü için sonsuz çözüme varılacağı da görülmektedir.

Öte yandan, (1.2.2.8.) hem tutarlı denklem sistemi için bir çözüm yöntemi vermekte, hem de bu yoldan genel çözümü sağlamaktadır. Şöyle ki:

1) r<q ise, X_2 vardır; (1.2.2.8.)'den sonsuz çözüme varılır.

Özel durumlar, X_2'nin yokluğu ile ortaya çıkar:

2a) r=q ise, X_2 yoktur. $A_0 = A_1$ dir. (1.2.2.8.)'den

$$X_1 = A_1^{-1} Y_1 \qquad (1.2.2.9)$$

tek çözüm elde edilir.

2b) Üstelik, r=n=q olursa A=Ao=A1 den klasik

$$X = A^{-1} Y \qquad (1.2.2.10)$$

çözüme ulaşılır.

özetleyecek olursak :

1) A kare matris, r=n=q ise, (1.2.2.1.)'e "rankı tam denklem sistemi " denir ve sistemin tek çözümü olur : 1.2.2.10.

2) A kare matris, fakat r<n=q ise,denklem sistemi de tutarlıysa " rankı eksik ya da tam olmayan denklem sistemi " söz konusu olur. Sistemin sonsuz çözümü vardır.

3) A dikdörtgen bir matris, sistemde tutarlıysa

a) r=q için,(1.2.2.9.) daki tek çözüm elde edilir.Bu durumda "sütun rankı tam olan denklem sistemi"nden sözedebilir.

b) r<q ise, (1.2.2.9.) daki gibi sonsuz çözümü olan denklem sistemine "sütun rankı tam olmayan denklem sistemi" denir.

1.2.3. Tutarlılık Testleri

I.Yol: 1.2.2.1 denklem sistemine ilişkin bir B=(A Y) matrisine "artırılmış matris" denir. Demek ki B, q sütunlu A matrisine, Y nin q+1. sütun olarak eklenmesiyle bulunur.Tutarlılık testi için başvu_ rulan yollardan biri, A ile B nin ranklarını karşılaştırarak elde edilir:

$$r(A) = r(B) = r$$

ise,denklem sistemi tutarlıdır.r(A)≠r(B) ise;denklem sistemi tutar_ lı olmayacağından çözülemez.

Bu testin geçerliliği şöyle gösterilebilir: (1.2.2.1.) tutarlıysa, B = (A Y) (1.2.2.2.) ye dayanarak şöyle yazılır:

$$B = \begin{bmatrix} A & Y \\ 0 & 0 \\ KA & KY \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin lineer bağımsız satır sayısı A ile aynı olacağından, rankı da r olur: r(B) = r(A) = r

Yada şöyle diyebiliriz:

$$r(B) = r(A) \quad \text{ise,} \quad \begin{bmatrix} A & Y \\ 0 & 0 \\ KA & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ile} \quad \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ KA \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrislerinin rankı eşit olur. Bu da ancak $Y_1 = KY_0$ ise, başka değişle AX = Y tutarlı ise doğrudur.

II.YOL A,n satırlı,rankı r(A) = r olan bir matris PAQ de A nın tanım 1.1.9 daki gibi birköşegen biçimiyse,ancak ve ancak PY nin son n-r öğesi sıfırsa, AX=Y tutarlıdır

Gerçekten de PAQ, A'nın köşe biçimi olduğuna göre PA,PA= $\begin{bmatrix} A_r \\ O \end{bmatrix}$ biçiminde yazılabilir. (P: elemanter işlemcilerin çarpımı $A_r = r$ lineer bağımsız satırlı bir matris) Dolayısıyle, AX=Y tutarlıysa PAX=PY de tutarlıdır.

$$\begin{bmatrix} A_r \\ O \end{bmatrix} X = PY \text{ yada } \begin{bmatrix} A_r X \\ O \end{bmatrix} = PY$$

Buradan da sistemin tutarlılığı için,PY nin son n-r öğesinin sıfır olması gerektiği sonucuna varılır.

Demek ki, PAQ = ^ köşegen biçiminde sıfır olmayan öğe sayısı A'nın rankı r'yi verecektir. Satır sayısı n de bilindiğine göre PY nin son n-r öğesine bakılır. Bunlar sıfır ise denklem sistemi tutarlıdır; bir tanesi bile sıfır değilse sistem tutarsızdır.

1.3. Genelleştirilmiş Ters Matrisin Tanımı,özellikleri

1.2. de, AX=Y denklem sisteminin çözümü için , ne A nın rankını aramaya, ne tekil olmayan bir alt matris bulmaya, vb.. yollara gerek vardır. Üstelik aşağıda verilecek yöntemde, çözüm yapılırken, tutarlılık da bir yandan kolaylıkla test edilebilir.

1.3.1. g-tersin tanımı

1955'e dek bu konuda önemli sayılabilecek araştırmalar görülmez. Bu tarihte, Penrose'un bir yapıtı yayınlanır. Sözkonusu yapıtta ister kare (tekil yada değil) ister dikdörtgen olsun bir A matrisinin şu 4 koşulu yerine getiren A^- ile göstereceğimiz tek bir genişletilmiş ters matrisi bulunduğu kanıtlanmıştır:

1) $AA^{-}A = A$

2) $A^{-}AA^{-} = A^{-}$

3) $(AA^{-})' = AA^{-}$

4) $(A^{-}A)' = A^{-}A$

Böyle bir matris, lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Ancak A'nın boyutu büyük oldugunda bu 4 koşulu sağlayan bir matrisin hesabı oldukça güçtür. Oysa,Penrose'un da kabul ettiği gibi, yanlızca 1. koşulu sağlayan bir genelleştirilmiş ters matris de AX=Y denklem sistemine çözüm getirmektedir.

$$AGA = A \qquad (1.3.1.1.)$$

koşulunu (Penrose'un 1. koşulu) sağlayan her hangi bir G matrisine "A nın bir genelleştirilmiş ters matrisi" diyeceğiz.Görüldüğü gibi de, böyle bir matrisi

A^{-}, A^{c}, K gibi simgeler yerine türkçeye de uyduğu için, G harfi ile göstereceğiz.Öte yandan zaman zaman, bir bölüm yazarların yaptığı gibi, genelleştirilmiş ters matris yerine, kısaca g-ters deyimini kullanacağız.

1.3.1.2. g-TERSİN ÖZELLİKLERİ

$H = GA$ diyelim ($G = A^{-1}$ için H=I olacağı bellidir)

1) $r(H) = r(A) = r$

Gerçekten de teorem 1.1.3.'e göre

$r(H) = r(GA) \leq r(A)$ ve $r(A) = r(AGA) = r(AH) \leq r(H)$ Dolayısıyle;

$r(H) = r(A) = r$

2) $r(G) \geq r(A)$

Gerçekten, yine teorem 1.1.3. den:

$r(A) = r(AGA) < r(G)$

3) $H^2 = H$

Gerçekten, H^2 " $(GAGA) = GA = H$

Demek ki H, kuvveti kendine eşit olan bir matristir.

4) G,A nın herhangi bir g-tersi ise, G',A'nün herhangi bir g-tersidir: A'G'A' = A'

Gerçekten, AGA = A nın devriği (transpozesi) alınırsa, (AGA)' = A' den, A'G'A' = A' elde edilir ki, bu da, G' gibi bir g-tersin, (1.3.1.1.) deki koşulu gerçekleştirdiğini,başka değişle A' nün genelleştirmiş ters matrisi olduğunu gösterir.

1.3.1.2. G nin hesabı

1.3.2.1. Genel yöntem-Herhangi bir matrisi, PAQ = Δ gibi köşegen biçimine indirgeyebileceğimizi biliyoruz (Tanım 1.1.10) :

$$PAQ = \Delta = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada, PAQ nün mertebesi A ile aynı, r(A) = r, Dr, r öğesi sıfır olmayan bir köşegen matris, 0'lar ise uygun mertebeden sıfır matrisleri, P ile Q, satır ve sütunlara ilişkin elemanter işlemcilerin çarpımlarıdır.

Yani bir Δ^- matrisini şöyle tanımlayalım :

$$\Delta^- = \begin{bmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = Q\Delta^- P \qquad (1.3.2.1.1.)$$

biçiminde tanımlanan bir matris, A nın bir genelleştirilmiş tersidir Başka deyişle G, AGA = A koşulunu gerçekleştirir.

Gerçekten de

$$\Delta\Delta^- = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Delta^- \qquad (1.3.2.1.2.)$$

yazabiliriz.

Dolayısı ile;

$$\Delta\Delta^{-}\Delta = \Delta \;, \qquad \Delta^{-}\Delta\Delta^{-} = \Delta^{-} \qquad (1.3.2.1.3.)$$

olur. Başka deyişle Δ^{-}, Δ nın ve de Δ, Δ^{-} nin bir genelleştirilmiş ters matrisleridir.öte yandan P ile Q elemanter işlemcilerin çarpımları olduklarından, tekil değillerdir.Klasik anlamda tersleri olacağından, PAQ = Δ eşitliğine dayanarak

$$A = P^{-1}\,\Delta\,Q^{-1} \qquad (1.3.2.1.4.)$$

yazabiliriz.A nın bu değeri ile G nin 1.3.2.1.1.degerine AGA da yer verirsek,

$$AGA = (P^{-1}\,\Delta\,Q^{-1})\,(Q\,\Delta^{-}P)\,(P^{-1}\,\Delta\,Q^{-1})$$

olur. (1.3.2.1.3.) ile (1.3.2.1.4.)'den de,.

$$AGA = P^{-1}\,\Delta\Delta^{-}\Delta Q^{-1} = P^{-1}\,\Delta\,Q^{-1} = A$$

sonucuna varırız.

Böylece, A nın bir g-tersinin nasıl elde edildiğini görmüş olduk. Kuşkusuz, P ile Q tek olmayacaklarından sonsuz g-tersler bulabiliriz.

PAQ = (PI)A(IQ) olduğu göz önünde tutularak, P ile Q bulunur.

Yukarıdaki yöntemle çözümün iki ilginç özelliğini belirtelim:

1) GAG = G

Gerçekten ;

$$GAG = (Q\Delta^{-}P)(P^{-1}\,\Delta\,Q^{-1})(Q\Delta^{-}P) = Q\Delta^{-}\Delta\Delta^{-}P$$

ve (1.3.2.1.3.)'den

$$GAG = Q\Delta^{-}P = G$$

Demek ki; yukarıdaki yöntemle bulunan G,Penrose'nun 2.koşulunu da gerçekliyor.Bu önemli olmakla birlikte sistemi çözmek için buna gerek olmadığını, 1. koşulun yeterli olduğunu yeniden vurgulayalım.

2) A, (n,p) boyutlu bir matris, H = GA olduğuna göre, (H-I) ın rankı q-r'dir: r(H-I) = q-r

Gerçekten,H=GA da,G nin (1.3.2.1.1.) deki A'nında (1.3.2.1.4) deki değerlerine yer verirsek,

$$H = (Q\bar{\Delta}P)(P^{-1}\Delta Q^{-1}) = Q\bar{\Delta}\Delta Q^{-1}$$

ve (1.3.2.1.2.) den

$$H = Q \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

elde ederiz. Buradan da,

$$H - I_q = Q \left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I_q \right\} Q^{-1}$$

yazabiliriz. Teorem 1.1.10'a göre , Q ve Q^{-1} ile çarpım, $(H-I_q)$'nun rankını değiştirmez. Dolayısı ile

$$r(H-I_q) = r \left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I_q \right\} = q - r$$

sonucuna varılır.

1.3.2.2. Bir başka yöntem

g-tersler , başka yollardan da bulunabilir. örneğin, 1.2.2.'de, tutarlı denklemlerin çözümü olduğu gösterilirken bulunan çözümdeki A_1^{-1} bir g-tersden başka birşey değildir. Daha düzgün olarak, bu buluşa ilişkinyöntemi şöyle açıklayabiliriz:

Bir A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

biçiminde öyle kısımlara ayrılır ki, A_{11} ,(r,r) boyutlu A içinde tekil olmayan en geniş alt matris olur. r'nin maksimum olması için, A'nın satır ve sütunlarında değişiklik de yapılabilir. Öte yandan A_{11} in tek olması gerekmez.

$$G = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.3.2.2.1.).$$

A matrisinin bir g-tersidir. AG ile GA hesaplandığında ,

AGA = A, GAG = G olduğu görülür.

yöntemi belirleyelim:

a) Rankı r ve simetrik olan bir A matrisinde, r. mertebeden tekil olmayan bir minör bulunur. Buna M diyelim.

b) M^{-1} oluşturulur.

c) M^{-1} in devriği $(M^{-1})'$ bulunur.

d) A matrisi içinde, M yi oluşturan her öğenin bulunduğu yerde, $(M^{-1})'$ de karşılık gelen öğeye yer verilir. Öteki öğelerin yerine sıfır konur

e) Bulunan matris, A nın bir genelleştirilmiş tersi G dir.

1.1.3. örnek:

1.3. de ele alınan konuları -g tersin bulunuşu, özellikleri vb. bir örnek üzerinde uygulayalım.

Aşağıdaki 3x3 boyutlu A matrisi, rankı tam olmayan bir matris_ tir :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{matrix} = 1(-1)1 + 2(-2)1 + 1\cdot 1\cdot 2 - (1(-1)1 + 2(-2)1 + 1\cdot 1\cdot 2)$$

$|A| = -1 + -4 + 2 - (-1 -4 +2) = -5 +2 +5 -2 = 0$ olup ;

$|A| = 0$ olduğu görülür.

1) Bu matrisin genelleştirilmiş tersini bulalım.

$PAQ = \Delta$ koşegen matrisini bulmak için A nın satır ve sütunlarında yapacağımız birtakım işlemlerle doğrudan Δ ' yı bulabileceğimizi be_ lirmiştik.Ancak matrislerin çarpımları P ve Q'ya da gerek duyacağımız_ dan,bunları arayalım.Bu arayış için de ,

$PAQ = (PI)A(IQ)$

eşitliğinden yararlanırız.

A nın yanına birim matrisi I_3 'ü yazarak , A nın satırlarında yapa_ cağımız işlemleri, aynen I_3 'e de uygulayalım :

(Bakınız :Merih İpek Sayfa 27)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Birinci satırı (-1) ile çarpalım ve 3. satıra ekleyelim,

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Birinci satırı (-2) ile çarpalım ve 2. satıra ekleyelim;

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2.Satırı (-1) ile çarpalım ve 3.satıra ekleyelim.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Satır işlemleri sonucu oluşan , Alt üçgen matrisi P olarak belirleyeli

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Q bulmak için işleme devem edelim ;

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Birinci sütunu (-1) ile çarpalım ve ikinci sütuna ekleyelim,

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Birinci sütunu (-1) ile çarpalım ve üçüncü sütuna ekleyelim,

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sütun işlemleri sonucu bulunan alt üçge matris Q olarak belirlenir.

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sütun işlemleri sonucu oluşan matris Q matrisi olarak belirlenir

$$PAQ = (PA)\,Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Delta$$

$$\Delta^{-} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \Delta^{-} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δ nın tersi Δ^{-} olarak ifade edildi.

$$G = Q\,\Delta^{-}\,P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) H = G A yı bulalım ;

$$H = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 + 2/3 & 1/3 - 1/3 & 1/3 + 2/3 \\ 2/3 - 2/3 & 2/3 + 1/3 & 2/3 - 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) AGA yı arayarak , G nin AGA = A koşulunu gerceklestirip gerçekleştirmediğini gösterelim ;

$$A\,G\,A = A\,H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A$$

G nin bir g-ters olduğunu gördükten sonra, bazı özellikleri ele alalım ;

4) 1.3.1.2. den $r(H) = r(A)$ olmalıdır ;

$r(H) = 2$, $r(A) = 2$ ve $r(H)=r(A)$ olduğu görülüyor.

5) $H^2 = H$ olmalıdır ;

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = H$$

6) G' de A' nün bir g-tersidir. A'G'A' =A' dür.

$$A'G'A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 + 1/3 & 2/3 - 2/3 & 0 \\ 1/3 - 1/3 & 2/3 + 1/3 & 0 \\ 1/3 + 2/3 & 2/3 - 2/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A'$$

7) $G\,A\,G = H\,G = G$ dir. A nın da G nin bir g-ters olduğunu belirten bu özeliğini görelim;

$$A\,G\,A = H\,G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = G$$

8) $r(H-I) = n-r$ bunu bulmak için önce H-I yı bulalım;

$$H-I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Bu ise; r(H-I) =1 olduğunu gösterir. Dikkat edilir ise; n=3, r=2 olduğundan; r(H-I) = n-r = 3-2 =1 olduğuda görülür.

9) Genelleştirilmiş ters matrisi ; bir de matrisin parçalanması yöntemi ile bulalım;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$ Tekil olmayan (2,2) boyutlu matris,

$$A_{11}^{-1} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right]$$ olur.

Buradan G ise ;

$$G = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ şeklinde belirlenir.

10) örneğin A, aşağıdaki gibi olsun;

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix} = 6 +0 +0 -(+2 +0 +4) =6 -6$$

Bu A matrisinin , simetrik ve rankı r =2 olan bir matris olduğu gözükmektedir.

a) önce , tekil olmayan r. mertebeden bir minör bulalım;

sözgelimi , a_{12} = 2'nin minörü olsun .Buna M diyelim;

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) M^{-1} i oluşturalım ;

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

c) M^{-1} in transpozesi ise;

$$\begin{bmatrix} M^{-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde kendisine eşit olduğu görülür.

d) A matrisinde, M yi oluşturan her öge yerine $(M^{-1})'$ de karşılık gelen ögelere yer vererek, öteki ögeleri sıfır yapalım;

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu bulduğumuz matris A nın bir genelleştirilmiş tersidir.

Bu işlemin sağlamasını yaparsak;

$A\ G\ A = A$ Olmalıdır. Buna göre;

$$A\ G\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1/2 & 0 & 2\cdot(-1/2)+1 \\ 2\cdot 1/2 & 0 & 2\cdot(-1/2)+0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3-1 & 2 & 1-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

1.4. LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Genelleştirilmiş ters matrisleri tanımladığımıza göre, bu başlık altında önce g-terslerle genel çözümün nasıl elde edildiğini,sonra bu sonsuz çözümler arasında lineer bağımsızların sayısının ne olduğunu göstereceğiz.Son olarak ta özellikle lineer modellerde büyük rolü olan "değişmezlik" kavramını ele alıp inceleyeceğiz.

1.4.1. GENEL ÇÖZÜM

Çözüme geçmeden önce, 1.2.3. de sözünü edip de açıklamadığımız bir üçüncü test yöntemini açıklayalım. Bu testi g-terslere dayandığı için vermemiştik.G yi bildiğimize göre söz konusu testi bir teoremle dile getirelim:

Teorem 1.4.1.1.:

AX=Y denklem sisteminin bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul, herhangi bir G için AGY = Y olmasıdır.

Gerçekten de, $AX^* = Y$ nin X^* ile göstereceğimiz bir çözümü olduğunu kabul edelim: $AX^* = Y$ olacaktır. G, herhangi bir g-ters olduğuna göre (AGA = A), $AX^* = Y$ nin her iki yanını AG ile çarparsak,

$$AGA X^* = AGY$$

$$AX^* = AGY = Y$$

elde ederiz. Demek ki, X^* bir çözümse, AGY = Y dir.

İkinci aşamada AGY=Y varsayalım. $GY=X^*$ diyelim. Bu durum da,

$$AX^* = AGY = Y$$

olur. Demek ki bir çözüm vardır.Böylece,teorem 1.4.1.1.de kanıtlanmış olur.

Şimdi,bir çözümün nasıl bulunabileceğini görelim: Gerçekte teorem 1.4.1.1. den de çıkarılabileceği gibi,

$$AGY = Y$$

ise; 1.2.2.1. sisteminin bir çözümü olacağına göre, X^* gibi bir çözüm

$$X^* = GY$$

olacaktır. Bununla birlikte, G ile söz konusu sistem arasındaki ilişki Rao'nun bir teoremiyle dile getirirsek,G nin öneminide daha iyi kavrar

Teorem 1.4.1.2. :

Ancak ve ancak AGA=A ise tutarlı AX=Y fonksiyonunun çözümü,

$X^* = GY$ dir. (1.4.1.1.)

Gerçekten de, GY bir çözümse,

$AGY = Y$

$AGAX = Y$

$AX = Y$ olmalı. AGA = A olur. Demek ki GY bir çözümdür. öte yandan,

$AGA = A$ ise,

$AGAX^* = AX^*$ yazabiliriz.

Ancak $AX^* = Y$ 'den

$AGY = Y$ elde ederiz.

$A(GY) = Y$

olduğuna göre, GY bir çözümdür.

Böylece, sistemin GY gibi bir çözümü varsa,G nin AGA=A özelli_ ğini taşıdığını anlarız.Başka deyişle, 1.4.1.2.teoremi lineer denklem sistemine çözüm bulunabilmesi için,genelleştirilmiş bir ters matrisin Penrose'un 1.koşulunu gerçekleştirilmesinin yeterli olduğunu gösterir.

Bu da, 1.3. de tanımladığımız G nin önemini ortaya çıkarır.

Teorem 1.4.1.2. : Ancak ve ancak AGA=A ise, tutarlı AX=Y fonk_ siyonunun çözümü,

$$X^{*} = GY \text{ dir.} \qquad (1.4.1.1.)$$

Gerçekten de, GY bir çözümse,

$AGY = Y$

$AGA = Y$

$AX = Y$

olur.Demek ki,GY bir çözümdür.öte yandan,

$AGA = A$ ise,

$AGAX^{*} = AX^{*}$ yazabiliriz.

Ancak $AX^{*} = Y$ 'den

$AGY = Y$ elde ederiz.

$A(GY) = Y$

olduğuna göre, GY bir çözümdür.

Böylece, sistemin GY gibi bir çözümü varsa, G nin AGA = A özel_ liğini taşıdığını anlarız. Başka deyişle, 1.4.1.2. teoremi ,lineer denklem sistemine çözüm bulunabilmesi için, genelleştirilmiş bir ters matrisin Penrose'un 1.koşulunu gerçekleştirmesinin yeterli olduğunu gösterir.Bu da, 1.3. de tanımladığımız G nin önemini ortaya çıkarır.

Teorem 1.4.1.2.,sistem için bir çözüm vermekle birlikte tutarlı denklem sisteminde tüm çözümlerin nasıl türetilebileceğini göstermiyor. Aşağıdaki teorem bunu verecektir:

Teorem 1.4.1.3. :

AGA=A, H=GA ise, 1.2.2.1. denklem sisteminin bir çözümü

$$X_0 = GY + (H-I)Z \text{ dir.} \qquad (1.4.1.2.)$$

Burada z, q. mertebeden herhangi bir vektördür.

Gerçekten, 1.4.1.2. nin her iki yanını A ile çarparsak

$$AX_0 = AGY + A(H-I)Z \, ,$$

ve $AH = AGA = A$ olduğundan,

$$AX_0 = AGY$$

elde ederiz. Ancak, teorem 1.4.1.2. den, GY bir çözüm olduğuna göre,

$$AX^* = AX_0$$

özdeşliğine varırız.

Demek ki, her (q,1) boyutlu z vektörü için, X_0 vektörü bir çözüm_dür. Bir başka deyişle, sistemin bir çözümü, herhengi bir Z(q,1) vektörü için(1.4.1.2.) biçiminde yazılabilir. G tek olmayacağı gibi Z de iste_nildiği gibi seçilebileceği için, sonsuz çözüm olacağı ortadadır. Ancak;

$$G = A^{-1} \quad \text{ise, } GA = H = I \text{ olur.}$$

Dolayısıyla;

$$X_0 = GY = A^{-1}Y$$

(1.4.1.2.)'nin tek çözümü olacaktır.

$\boxed{\text{Uygulama 1.4.1.1.}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ Şeklindeki matris ;

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2a - b + 2c &= 2 \\ a - 2b + c &= -1 \end{aligned}$$ olsun. Buna göre ; r(A)=2 matrisyel yazılışı;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$X' = (a\ b\ c)$, $Y' = (3\ 2\ -1)$ olur.

Tutarlılığı ve genel çözümü arayalım;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.Yol :

$r(A) = r(B)$ olmalı.

1. satırı (-1) ile çarpalım ve 3.satıra ekleyelim. Daha sonra 1. satırı (-2) ile çarpalım ve 2.satıra ekleyelim. Buna göre;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 2.Satır 3. satıra eklendi.

$\longrightarrow r(B) = 2$ ve $r(A) = r(B) = r$ olduğu görülür.

2.Yol :

PY vektörünün son n-r öğesi sıfırsa sistem tutarlıdır.

(Daha önce yapılan işlemlerde P bulunmuş idi.)

$$P\,Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6+2 \\ 3-2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Son ögenin sıfır olduğu görülmektedir.O halde sistem tutarlıdır.

3.Yol :

$A\,G\,Y = Y$ ise; sistem tutarlıdır.

A nın genelleştirilmiş ters matrisi ;

$$G = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ idi.

$$A\,G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3+2/3 & 1/3-1/3 & 0 \\ 2/3-2/3 & 2/3+1/3 & 0 \\ 1/3-4/3 & 1/3+2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\,G\,Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = Y$$

Böylece, son bir kez daha sistemin tutarlı olduğu görülür.

Sistemin genel çözümü ; $X_0 = G\,Y + (H - I)\,Z$ olmalıdır.

A nın g-tersinin tek olmadığı bizce bilinmektedir.Dolayısı ile; daha önce bulduğumuz G yi kullanalım ;

$$G\,Y = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/3+2/3 \\ 6/3-2/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X_o = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 + Z_3 \\ 4/3 \\ -Z_3 \end{bmatrix}$$

Şeklinde genel çözüm bulunur.Burada Z_3 'e vereceğimiz sonsuz değerle sonsuz çözüm elde edebiliriz.

$Z_3 = 0$ için : $X_{01} = (5/2 \quad 4/3 \quad 0)$

$Z_3 = 1$ için : $X_{02} = (8/3 \quad 4/3 \quad -1)$

$Z_3 = 3$ için : $X_{03} = (14/3 \quad 4/3 \quad -3)$ gibi..

Bu çözümleri ,

$$A\,X = Y$$

denklem sisteminde kullandığımızda, herbirinin eşitliği sağladığını görürüz.örneğin , X_{02} yi kullanalım :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

kuşkusuz , daha önce gördüğümüz

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} Y - A_1^{-1} A_2 X_2 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

(1.2.2.8.) formülüyle de çözüme ulaşabiliriz.Ancak, G nin bulu_ nuşunda sözkonusu ettiğimiz sakıncaların benzerlerini burada da öne sürebiliriz:Denklem sayısı çok olduğunda A alt matrisini bulmadaki güçlük, A nın rankını önceden bulma zorunluğu, bilgisayarla çözümde programlama güçlüğü, vb..

Oysa G yi,A nın köşegen biçimi PAQ = ^ ya dayanarak bulurken, yukarıdaki sakıncalar giderildiği gibi, A nın rankı ^ da kendili_ ğinden ortaya çıkar ve sistemin tutarlılığı da,önceden test etmeye gerek kalmadan, çözüm sırasında kolaylıkla aranabilir.

1.4.2. Lineer Olarak Bağımsız Çözüm Sayısı

Teorem 1.4.2.1.:

A, Rankı r olan q sütunlu bir matrisse, Y de bir sıfır vektörü değilse,

$$AX = Y$$

tutarlı denklem sisteminin lineer olarak bağımsız çözüm sayısı

$$q - r + 1 \text{ 'dir.}$$

Bu teorem şöyle kanıtlanabilir :

PAQ = Δ, G = Q Δ P, H = GA olmak üzere,

AX = Y nin bir çözümünün

$$X_0 = GY + (H-I)Z$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca, 1.3.2.1. de gördüğümüz bir özelliğe göre

$$r(H-I) = q-r \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyle, q. mertebeden herhengi bir Z vektörü için, (H-I)Z'd yalnızca q-r bağımsız öğe bulunur. Geri kalan r öğe sözkonusu q-r öğeni lineer bileşimleridir. Bu nedenle lineer bağımsız (H-I)Z vektör sayıs yalnızca q-r tanedir. Bunları Xo da kullanınca (q-r) bağımsız çözüm eld edilir. q-r bağımsız çözüm

$$X_{0i} = GY + (H-I)Z \qquad (i=1,2,\ldots,q-r)$$

olsun. Ancak, $X^* = GY$ nin de sisteminin bir çözümü olduğunu biliyoruz. Bu çözümü X_{0i} 'ye lineer olarak bağımlı olduğunu varsayalım.Hepsi bir_ den sıfır olmayan λ_i (i=1,2,....,q-r) skalerleri için, teorem 1.1.5. gereğince,

$$GY = \Sigma\lambda_i X_{0i} = \Sigma\lambda_i (GY + (H-I)Z_i) \qquad (1.4.2.1.1.)$$

$$GY = GY\Sigma\lambda_i + (H-I)\Sigma\lambda_i Z_i \qquad (1.4.2.1.2.)$$

yazabiliriz. Son denklemin sol yanında Z_i olmadığına göre, sağ yanındaki ikinci terimin sıfır olması gerekir : Başka deyişle , $\Sigma\lambda_i Z_i =0$ olmalıdır. Oysa, Z_i 'ler bağımsız olduğuna göre ancak her $\lambda_i = 0$ ise $\Sigma \lambda_i Z_i = 0$ eşitliği gerçekleşebilir. (Tanım : 1.1.4.). Bu da hepsi birden sıfır olmayan λ_i skaleri için (1.4.2.1.1.) eşit_ liği doğru değildir.Dolayısıyle,$X^* = GY$ çözümü X_{0i} 'lerden bağımsızdır. Sonuç olarak GY ile X_{0i} 'lerin (i=1,2,...,q-r) q-r+1 bağımsız çözüm oluşturduğu kanıtlanmış olur. Bu arada q-r olunca, tek çözüm olacağı da görülür.

Demek ki, teorem 1.4.2.1.'e göre X^*_0 = GY ile q-r bağımsız Z vektörü için X_0 = GY + (H-I)Z, AX= Y nin lineer bağımsız çözümleri_ dir.Başka deyişle q-r tane lineer bağımsız Z vektörü ve Z=0 ile (1.4.1.2.) denkleminden q-r+1 tane lineer olarak bağımsız çözüm sağlanır. Dolayısıyle, öteki çözümler, bağımsız çözüm kümesinin lineer bilesimleri olur. (Teorem 1.1.5.) Bu çözümleri bulmanın bir yolu aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 1.4.2.2.:

$$X_{01}, X_{02}, \ldots\ldots, X_{0S}$$

$$AX = Y \qquad (Y \neq 0 \text{ olmak üzere})$$

tutarlı denklem sisteminin herhangi s sayıda çözümleriyse, ancak ve ancak;

$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$ ise, bu çözümlerin,

$$X_0 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i X_{0i} \qquad (1.4.2.1.3.)$$

gibi lineer bileşimleri de birer çözümdür.

Bu teorem de şoyle kanıtlanabilir:

$$X_0 = \Sigma \lambda_i X_{0i}$$

eşitliğinin her iki yanını A ile çarpalım:

$$AX_0 = A\,\Sigma \lambda_i X_{0i} = \Sigma \lambda_i A X_{0i}$$

Ancak, X_{0i} bir çözüm olduğuna göre, her i için

$$AX_{0i} = Y,$$

dolayısıyle,

$$AX_0 = \Sigma \lambda_i Y$$

$$= Y\Sigma \lambda_i \qquad (1.4.2.1.4)$$

olur. Bu duruma göre, eğer X_0, AX=Y nin bir çözümü ise, $AX_0 = Y$ olacağından, (1.4.2.1.4.)'le karşılaştırdığımızda $\Sigma \lambda_i = 1$ olmalıdır. ($Y \neq 0$ olmak üzere)

Tersine, $\Sigma \lambda_i = 1$ ise (1.4.2.1.4.) eşitliği

$AX_o = Y$ yi gerektirir.

Demek ki, (1.4.2.1.3.) bir çözümdür.

Şunuda belirtelim ki, teorem 1.4.2.2.'de herhangi s çözümden sözediliyor. Bu çözümler lineer olarak bağımlı olsun olmasın, bunların lineer bileşimleri de, $\Sigma \lambda_i = 1$ olması koşuluyla, bir çözümdür.

1.4.3. Değişmezlik

Teorem 1.4.3.1. : $AGA=A$, $H=GA$ olmak üzere, $AX=Y$ gibi tutarlı bir denklem sisteminin bir X_0 çözümünün öğelerinin $k'X_0$ gibi lineer bileşim ancak ve ancak $k'H=k'$ ise, hangi çözüm kullanılırsa kullanılsın değişme

Gerçekten, teorem 1.4.1.3.'e göre bir çözümün lineer bileşimi

$$k'X_0 = k'GY + k'(H-I)Z$$

biçiminde olacaktır. $k'H=k'$ ise,

$$k'X_0 = k'GY$$

sonucuna varılır. Demek ki, hangi Z vektörü seçilirse seçilsin, $k'X_0$ Z den bağımsızdır. Tersine, $k'X_0$ ın herhangi bir X_0 için $k'GY$ ye eşit olması, $k'H=k'$ esitliğini gerektirir.

Öte yandan, $k'H=k'$ ise, A nın birçok g-terslerinden hangisi kullanılırsa kullanılsın, $k'GY$ tektir.

Bunu göstermek için, önce teorem 1.4.2.1.'den yararlanılır:

$$X_0 = GY + (H-I)Z$$

biçiminde lineer bağımsız çözüm sayısı q-r+1'dir. Bunları X_{0i} ile gösterelim (i=1,2,....,q-r+1). Teorem 1.4.5.'e göre bunların dışındaki

$$X_1 = G_1Y + (H_1-I)Z$$

gibi bir çözüm, X_{0i} çözümünün lineer bileşimi olur:

$$X_1 = \sum_{i=1}^{q-r+1} \lambda_i X_{0i}$$

(λ_i 'lerin hepsi birden sıfır olmamak üzere)

Ayrıca $k'H=k'$ ise, her i için

$$k'X_{0i} = k'GY$$

olacağını biliyoruz. Buna göre,

$$k'X_1 = k'\Sigma \lambda_i X_{0i} = \Sigma\lambda_i k'X_{0i} = \Sigma\lambda_i k'GY = k'GY\Sigma\lambda_i$$

yazabiliriz. Ancak, teorem 1.4.2.2.'ye göre $\Sigma\lambda_i = 1$ olacağından,

$$k'X_1 = k'GY$$

sonucuna varırız. Demek ki, $k'H=k'$ ise, $k'X_1$, herhangi bir X_1 için $k'GY$ ye eşit olacaktır. öyleyse, A nın herhangi bir genelleştirilmiş ters matrisi için $k'GY$ tektir, değişmez.

öte yandan, $H^2=H$ özelliğine göre, herhangi bir v' vektörü için

$$k' = v'H$$

$k'H=k'$ nün bir çözümüdür: $v'HH=v'H=k'$. Böylece v' nün öğeleri ne olursa olsun, $k'=v'H$ biçimindeki k', her Xo çözümü için, $k'X_0$ ı değişmez yapan değeri verecektir. Şöyle ki;

$$k'X_0 = v'HX_0 = v'HGY + v'H(H-I)Z$$

$$= v'HGY = v'GAGY$$

Ancak teorem 1.4.1.2.'ye göre $AX=Y$ nin bir çözümü GY, dolayısıyle $AGY=Y$ olacağından,

$$k'X_0 = v'GY$$

olur. Bu sonuca şöyle de varabiliriz: G nin 1.3.2. de benimsediğimiz çozüm yönteminde, $GAG=G$ olduğunu penrose'un 2.koşulunda gerçekleştiğini görmüştük. öyleyse,

$$k'X_0 = v'GAGY$$

eşitliğinden

$$k'X_0 = v'GY$$

elde ederiz.

Demek ki, her v' vektörü ve k'=v'H ve de her X_0 için

$$k'X_0 = v'GY$$

olur. Kuşkusuz, k'H=k' yü gerçekleştiren bir çok k' vektörü bulunabilir. Önemli olan, hangi Xo kullanılırsa kullanılsın k'lerin herbiri için $k'X_0$ ın değişmemesidir. Başka deyişle, k'_1 ve k'_2 gibi iki vektör olsa, $k'_1X_0 \neq k'_2X_0$ dır. Ama, sözgelimi X_{01}, X_{02} gibi iki çözüm için,

$$k'_1X_{01} = k'_1X_{02}$$

$$k'_2X_{01} = k'_2X_{02} \quad \text{dir.}$$

Son olarak şunu belirtelim: $k'X_{01}$, X_0 a göre değişmez yapan k' vektörlerinden, lineer bağımsız olanların sayısı r dir. Başka deyişle r(H)=r olduğundan, k'=v'H, bu özelliği veren r tane lineer bağımsız k' vektör kümesini sağlar. Ayrıca, k', q. mertebeden ve r(H)=r olduğundan k' vektöründe r bağımsız öge bulunacak, r öğenin lineer bileşimi olan öğe sayısı da q-r olacaktır. Dolayısıyle, gelişigüzel seçilen v'vektörü için, yalnız r tane k'=v'H lineer bağımsız vektör söz konusu olacaktır

II.Bölüm -RANKI TAM OLMAYAN LİNEER MODELLERE UYGULAMA

2.1. NORMAL DENKLEMLER

Bir modelin tanımının, raslantısal değişken Є'a ilişkin bazı yan koşullarla (yada varsayımlarla) tamamlanacağını belirtmiştik.

Y: (n,1) boyutlu gözlemler vektörü

X: (n,q) boyutlu katsayılar matrisi

β: (q,1) boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü

Є: (n,1) boyutlu gözlenemeyen hatalar vektörü olmak üzere, rankı tam olmayan modelimiz aşağıdaki gibidir.

$$Y = X\beta + \epsilon \qquad (2.1.1.).$$

Yan koşullar:

1) $E(\epsilon)=0$, dolayısıyle $Var(\epsilon)=E(\epsilon\epsilon')$

2) ϵij'ler bağımsız, dolayısıyle $Var(\epsilon)=\delta^2 I_n$

3) $D(\epsilon) = N(0,\delta^2 I_n)$

Görüldüğü gibi, yan koşullarıyla birlikte tüm model, tam ranklı regresyon modeli gibidir. Tek ayırım, X matrisinin özel yapısından doğar Bu nedenle, Graybill gibi bazı yazarlar, ele aldığımız modeli, regresyon modelinin özel biçimi olarak tanımlarlar. Oysa bunun tersinin de savunu_labileceği, çözümlememizi bitirirken göreceğiz.

Yukarıda belirttiğimiz hata teriminin normal dağıldığını varsayan üçüncü koşula, genellikle, güven sınırları yada anlamlılık testleri söz konusu_olduğunda gerek duyulur. Bu koşul olduğunda, denklemdeki bilinme_yen β parametre vektörünün kestirimi (tahmini) için," en çok olabilir_lik" yöntemine, üçüncü koşul yoksa, "En küçük kareler " yöntemine baş_vurulur. Ancak her iki yöntem de,

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y \qquad (2.1.2.)$$

normal denklemlerini verir. Bilindiği gibi, tam ranklı regresyon modellerinde (2.1.2.)'nin tek bir çözümü vardır (1):

$$\beta = (X'X)^{-1} X'Y$$

β, kestirilebilen bir paremetredir. Başka deyişle,

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad \text{dır.}$$

Oysa, 2.1.1.modelimizdeki X matrisinin tam ranklı olmadığını, ge_rek örnek 2.1.1., gerekse örnek 2.1.2.'de gördük. Gerçekten de, tek faktör üzerinde durduğumuza göre, örnek 2.1.1. deki X matrisini daha derinden inceleyecek olursak özel bir kalıp oluşturduğunu görürüz: Yapay değişken adı verilen 0 ve 1'lerin özel bir anlamı vardır. X, bir "Tasarım matrisi" yada daha uygun bir deyimle bir "gösterge matris"tir. Şöyle ki, 1.sütun dışındaki sütunlar, bir faktörün belli bir düzeyinin etkisinin yada değişik niteliklerin- varlığını (1), yada yokluğunu (0) gösterir. Demek ki 0 ve 1'lerin dağılışı, modelin terimlerinin gözlemler arasında ne biçimde yer aldığını, başka deyişle gözlemlerin ne biçimde sınıflandığını ortaya çıkarır.Her Yij'ye bakıldığında,αj'nin bir denklemde bulunup bulunmadığı,kolaylıkla görülür. Söz gelimi, Y_{21} gözleminde j=1 olduğuna göre,1.yöntemin (faktörün 1.düzeyinin) Y_{32}'de 2. yöntemin etkisi sözkonusudur.

Öte yandan, her hangi bir etki sözkonusu olmadığında, genel ortalama μ hepsinde varolacağından,1.sütun tümüyle "1"lerden oluşur. Bu duruma göre 1. sütunun, öteki sütunların toplamına eşit olacağı bellidir. Örnek 2.1.2.'yi de göz önünde tutacak olursak,daha genel olarak, 1. sütunun, her faktöre ilişkin sütunların toplamına eşit olacağını söyleyebiliriz. Demek ki , X in rankının tam olmayacağını bir kez daha vurgulayabiliriz. Ayrıca,X matrisini tam ranklı olmayınca, r(X) = r(X'X) olduğundan, X'X simetrik matrisi de tam ranklı olmaz. Dolayısıyle, klasik anlamda tersi alınamaz.Burada iki durum söz konusu olabilir: Ya (2.1.2.)' yi gerçekleştiren β vektörleri yoktur; yada, sonsuz β vektörleri vardır. Başka deyişle, 1.2. nin başında belirttiğimiz gibi, ya denklemler tutarlıdır, yada değildir. Öyleyse, önce (2.1.2.) nin tutarlı olup olmadığına bakmamız gerekir.

2.2. NORMAL DENKLEMLERİN TUTARLILIGI

X'X matrisini oluşturacak olursak,bu matrisin de,X'den dolayı özel bir yapısı olduğunu görürüz: Tek faktörlü modelde,1.satır (vede 1.sütun),öteki satırların (vede sütunların) toplamına eşittir. Daha genel olarak,1.satırın (vede sütunun),her faktöre ilişkin satırların (vede sütunların) toplamına eşit olduğu söylenebilir.Ayrıca,1. satır (ya da sütun) gözlem sayılarından oluşan bir satırdır.

Öte yandan,yine X'in ,dolayısıyle X'nün özel yapıları nedeniyle X'Y nin de özel bir niteliği olduğu, Yij değerlerinin toplamına veren ilk öğenin, öteki üyelerin toplamına,daha genel olarak de, her faktöre ilişkin öğelerin toplamına eşit olduğu görülür.

örnek 2.1.1.

Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü III ve IV. sınıf öğrencileri arasında yapılan rasgele seçimde öğrencilerin BASIC , COBOL ve PASCAL programlama dillerinden aldıkları başarı notları, 20 üzerinden değerlendirilerek veril_ miştir. Rasgele seçilen 15 öğrenciden dördünün BASIC , 6 sının COBOL ve 5 nin ise;PASCAL notları alındı. Buna göre; bu üç ayrı_ dersin öğrencilerin başarısında değişik etkileri olup olmadığı araştırmaya tabi tutuldu.Buna göre;elde edilen veriler aşağıdaki gibidir.

Dersler			
Basic	Cobol	Pascal	
10	10	12	—> Notlar
12	10	16	
12	12	10	
14	10	10	
	10	12	
	14		

Bu gözlem için model;

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \in_i \qquad (2.1.1.1.)$$

biçiminde yazılabilir.Bu bir lineer modeldir.Her y_{ij} , 3 bileşenin toplamı olarak dile getirilmektedir.Bir başka deyişle model; $\mu + \alpha_j$ gibi bir belirleyici bölümle, denetlenemeyen $\in_{ij}$ bölümü_ nün toplamından oluşmaktadır ;

μ : ana kütle ortalaması

α_j : Bir A faktörünün j. kategorisinin yada düzeyinin et_ kisi.

$\in$: Hata yada sapma adı verilen bir terimdir."Rastlantısal

(2.1.1.1.) modeline, bir sınıflama ölçeği kullanıldığı için, "tek yönlü sınıflama modeli" de denmektedir.

Yukarıdaki modeli, her gözleme dayanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz;

$$10 = y_{11} = \mu + \alpha_1 + \epsilon_{11}$$
$$12 = y_{21} = \mu + \alpha_1 + \epsilon_{21}$$
$$12 = y_{31} = \mu + \alpha_1 + \epsilon_{31}$$
$$14 = y_{41} = \mu + \alpha_1 + \epsilon_{41}$$
$$10 = y_{12} = \mu + \alpha_2 + \epsilon_{12}$$
$$10 = y_{22} = \mu + \alpha_2 + \epsilon_{22}$$
$$12 = y_{32} = \mu + \alpha_2 + \epsilon_{32}$$
$$10 = y_{42} = \mu + \alpha_2 + \epsilon_{42}$$
$$10 = y_{52} = \mu + \alpha_2 + \epsilon_{52}$$
$$14 = y_{62} = \mu + \alpha_2 + \epsilon_{62}$$
$$12 = y_{13} = \mu + \alpha_3 + \epsilon_{13}$$
$$16 = y_{23} = \mu + \alpha_3 + \epsilon_{23}$$
$$10 = y_{33} = \mu + \alpha_3 + \epsilon_{33}$$
$$10 = y_{43} = \mu + \alpha_3 + \epsilon_{43}$$
$$12 = y_{53} = \mu + \alpha_3 + \epsilon_{53}$$

Yukarıdaki denlemleri , vektör ve matrislerle şoyle gösterelenilir;

$$
\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{31} \\ Y_{41} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \\ Y_{42} \\ Y_{52} \\ Y_{62} \\ Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \\ Y_{43} \\ Y_{53} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{41} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{42} \\ \epsilon_{52} \\ \epsilon_{62} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{43} \\ \epsilon_{53} \end{bmatrix}
$$

Yada , daha genel olarak şöyle yazılabilir ;

$$
\underset{(15,1)}{Y} = \underset{(15,4)}{X}\ \underset{(4,1)}{\beta} + \underset{(15,1)}{\epsilon}
$$

Y : Gözlemler vektörü

X : Katsayılar matrisi

β : Bilinmeyen parametreler vektörü .

İki alt vektörden oluşur: $\beta' = (\ \mu \quad \alpha_j\ )$

ϵ : Gözlenemeyen hatalar vektörü

X matrisi iki özelik taşıyor :

1) Yalnızca 0 ve 1 değerlerinden oluşuyor.

2) Birinci sütun , öteki üç sütunun toplamına eşit. Bir başka deyişle, linner bağımsız sütun sayısı 3 dür.3<4 (r<q) olduğuna göre,X , sütun rankı tam olmayan bir matristir.

2.4.5. Uygulama

örnek 2.1.1. 'e dayanarak X'X matrisinin 1.3.2.1. ile 1.3.2.2 de gördüğümüz yöntemlerle iki g-tersini bulalım.Elle yapılan işlem_ lerde, X'X matrisinin özel yapısı nedeniyle, 1.3.2.2.deki yöntemle hesap kolay olacağı için, önce bu yöntemi uygulayalım.

a)

$$'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{--->} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$(M^{-1})' = M^{-1}$ dir. (M^{-1} simetrik olduğunden)

X'X in g-tersi ;

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Yalnızca G için ; X'X G X'X =X'X olduğunu gösterelim;

$$X'X\,G\,X'X = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6+5 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = X'X \quad \text{bulunur.}$$

b) Çözüme geçmeden önce uygulama olması açısından, denk_ lemlerin ;

$$X'X\,G\,X'Y = X'Y$$

koşulunu gerçekleştirip gerçekleştirmediğini arayarak , bir tutarlılık testi yapalım;

$$X'X\,G\,X'\,Y = X'X\,G \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \\ 12 \\ 10 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 16 \\ 10 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= X'X\,G \begin{bmatrix} 174 \\ 10+12+12+14 \\ 10+10+12+10+10+14 \\ 12+16+10+10+12 \end{bmatrix} = X'X\,G \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix} = X'Y$$

Olduğu görülür.Bu ise; tutarlığın geçerli olması demektir.

c) Şimdi (a) daki g_tersi kullanarak ;

$$\beta_0 = G\, X'Y + (H-I)\, Z$$

sayısız çözümlerinden bir kaçını bulalım:

Çözümlerden biri; $Z' = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ )$ için,

$$\beta_{01} = GX'Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

olur.Bu çözümün bir özeliği var.Şöyle ki:

$48 = Y_{.1}$ $\quad 66 = Y_{.2}$ $\quad 60 = Y_{.3}$ ve de $n_{.1} = 4$ $\quad n_{.2} = 6$, $n_{.3} = 5$

olduğuna göre;

$$\frac{Y_{.1}}{n_{.1}} = \frac{48}{4} = 12 = \overline{Y}_{.1}$$

$$\frac{Y_{.2}}{n_{.2}} = \frac{66}{6} = 11 = \overline{Y}_{.2}$$

$$\frac{Y_{.3}}{n_{.3}} = \frac{60}{5} = 12 = \overline{Y}_{.3}$$

Demek ki, β_{01} = GX'Y çözüm vektörünün 2. , 3. ve 4. ögeleri , eğitim faktörünün üç yönteme ilişkin düzeylerindeki gözlemlerin ortalamalarından başka bir şey değildir :

$$GX'Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{Y}_{.1} \\ \bar{Y}_{.2} \\ \bar{Y}_{.3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Z' = (2 1 2 1) alırsak ;

$$H = G\,X'X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Daha genel olarak çözümü şöyle yazabiliriz;

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ Z4 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} -Z1 \\ 12 + Z1 \\ 11 + Z1 \\ 12 + Z1 \end{bmatrix} \qquad (2.4.5.1.)$$

d) Son olarak çözüme ilişkin bazı özellikleri ele alalım;

d1) önce β_{01} ve β_{02} çözümlerini alarak , $\beta'_0X'Y$ nin (dolayısıyla $KT_k = Y'Y - \beta'_0X'Y$ nin) değişmezliğini gösterelim.

$$\beta_{01}'X'Y = [\,0 \quad 12 \quad 11 \quad 12\,] \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix} = 12 \cdot 48 + 11 \cdot 66 + 12 \cdot 60$$

$$\beta_{01}'X'Y = 576 + 726 + 720 = 2022$$

$$\beta_{02}'X'Y = [\,-2 \quad 14 \quad 13 \quad 14\,] \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix} = -2 \cdot 174 + 14 \cdot 48 + 13 \cdot 66 + 14 \cdot 60$$

$$\beta_{02}'X'Y = -348 + 672 + 858 + 840 = 2022$$

Böylece,iki ayrı çözüm için,$\beta_0'X'Y$ nin değişmez olduğunu gördük. Daha genel olarak bunu şöyle gösterebiliriz.

$$\beta_0'X'Y = (\,-Z1 \quad 12+Z1 \quad 11+Z1 \quad 12+Z1\,) \begin{bmatrix} 174 \\ 48 \\ 66 \\ 60 \end{bmatrix} = 2022$$

d2) KT_k 'yı hesaplayalım : $KT_k = Y'Y - \beta_0'X'Y$

$$Y'Y = (10\ 12\ 12\ 14\ 10\ 10\ 12\ 10\ 10\ 14\ 12\ 16\ 10\ 10\ 12) \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \\ 12 \\ 10 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 16 \\ 10 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = 100+144+144+196+100+100+144+100+100+196+144+196+100+100+144$$

$$Y'Y = 7 \cdot 100 + 5 \cdot 144 + 3 \cdot 196 = 700 + 720 + 588$$

$$Y'Y = 1420 + 588 = 2008$$

$KT_k = 2008 - 1020 = -18$ $\beta_0'X'Y$ değişmez ve herahangi bir çözüm_den bağımsız olduğuna göre,KT_k 'nın hangi β_0 çözümü kullanılırsa kul_lanılsın değişmeyeceği ortadadır.

```
1300 FOR I=2 TO N
1310 R=0
1320 FOR J=1 TO I-1
1330 R=R+T(J,I)^2:NEXT J
1340 T(I,I)=SQR(S(I,I)-R)
1350 FOR J=I+1 TO N
1360 T(I,J)=T(I,J)/T(I,I):NEXT J
1370 NEXT I
1380 '    alt ucgen sifirlaniyor......"
1390 FOR I=1 TO N
1400 FOR J=I+1 TO N
1410 T(J,I)=0:NEXT J,I
1420 PRINT "...t... :Üst üçgen matrisi...."
1430 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
1440 FOR I=1 TO N
1450 PRINT "|";
1460 FOR J=1 TO N
1470 PRINT USING "######";T(I,J);
1480 PRINT #1,USING "#####";T(I,J)
1490 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
1500 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
1510 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
1520 PRINT"transpoze (devrik t) t1 matrisi bulma..."
1530 PRINT"Alt Üçgen matris ..."
1540 FOR I=1 TO N
1550 FOR J=1 TO N
1560 T1(J,I)=T(I,J):NEXT J,I
1570 PRINT
1580 PRINT" .....T1........devrigini yazma"
1590 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
1600 FOR I=1 TO N
1610 PRINT "|";
1620 FOR J=1 TO N
1630 PRINT USING"#####";T1(I,J);
1640 PRINT #1,USING "#####";T1(I,J)
1650 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
1660 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
1670 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
1680 PRINT "..... s= t1*t .....yi bulma"
1690 FOR J=1 TO N
1700 FOR  K=1 TO N
1710 D=0
1720 FOR I=1 TO N
1730 R(J,K)=D+T1(J,I)*T(I,K)
1740 D=R(J,K)
1750 NEXT I,K,J
1760 PRINT" katsayilar matrisi   s  yi yazma ..."
1770 PRINT
1780 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
1790 FOR  I=1 TO N
1800 PRINT "|";
1810 FOR  K=1 TO N
1820 PRINT USING "#####";R(I,K);
1830 PRINT #1,USING "#####";R(I,K)
1840 NEXT K:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
1850 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
1860 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
```

```
1870 M=N
1880 DIM A1(M,M),S1(M,M),T2(M,M),C(M,M),D(M)
1890 FOR I=1 TO M
1900 FOR J=1 TO M
1910 A1(I,J)=0:U(I,J)=0:S1(I,J)=0:T2(I,J)=0
1920 NEXT J:NEXT I
1930 PRINT"----------verilen  matris ----------"
1940 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
1950 FOR I=1 TO M
1960 PRINT "|";
1970 FOR J=1 TO M
1980 PRINT USING "#####";S(I,J);
1990 PRINT #1,S(I,J)
2000 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
2010 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
2020 PRINT " Devam Için Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
2030 FOR I=1 TO M
2040 PRINT "D(";I;")=";
2050 INPUT "",D(I)
2060 PRINT #1,D(I)
2070 NEXT I
2080 FOR I=1 TO M
2090 A1(I,I)=1
2100 N1=I-1
2110 FOR J=1 TO M
2120 N2=J-1
2130 T0=0
2140 IF (I-J)>0 THEN 2240
2150 IF (I-1)<>0 THEN 2190
2160 FOR M1=1 TO M
2170 U(I,M1)=S(I,M1):NEXT M1
2180 GOTO 2320
2190 FOR K=1 TO N1
2200 T0=T0+(A1(I,K)*U(K,J))
2210 NEXT K
2220 U(I,J)=S(I,J)-T0
2230 GOTO 2310
2240 IF (J-1)<>0 THEN 2270
2250 A1(I,J)=S(I,J)/U(J,J)
2260 GOTO 2310
2270 T0=0
2280 FOR K=1 TO N2
2290 T0=T0+(A1(I,K)*U(K,J)):NEXT K
2300 A1(I,J)=((S(I,J)-T0)/U(J,J))
2310 NEXT J
2320 NEXT I
2330 FOR I=1 TO M
2340 S1(I,I)=1
2350 FOR J=1 TO M
2360 IF (I-J)<=0 THEN 2430
2370 N3=I-1
2380 T0=0
2390 FOR K=J TO N3
2400 T0=T0+(A1(I,K)*S1(K,J)):NEXT K
2410 S1(I,J)=-T0
2420 GOTO 2510
2430 IF I-J<0 THEN 2460
2440 T2(I,I)=1/U(I,I)
2450 GOTO 2510
```

```
2460 N4=J-1
2470 T0=0
2480 FOR K=1 TO N4
2490 T0=T0+(T2(I,K)*U(K,J)):NEXT K
2500 T2(I,J)=-(T0/U(J,J))
2510 NEXT J
2520 NEXT I
2530 N5=M
2540 N6=M
2550 GOSUB 2690
2560 PRINT" Cholevsky nin Genelleştirilmiş tersi (İnversi) "
2570 PRINT
2580 PRINT "┌";TAB(40);"┐"
2590 FOR I=1 TO M
2600 PRINT "|";
2610 FOR J=1 TO M
2620 PRINT USING " ##.#### ";C(I,J);
2630 PRINT #1,C(I,J)
2640 NEXT J:PRINT TAB(40);"|":NEXT I
2650 PRINT "└";TAB(40);"┘":PRINT
2660 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
2670 GOSUB 2770
2680 CLOSE #1
2681 PRINT "Menuye Donmek Icin Bir tusa basiniz....";
2682 X$=INPUT$(1)
2683 RETURN
2690 FOR I1=1 TO M
2700 FOR I2=1 TO M
2710 T0=0
2720 FOR I3=1 TO M
2730 T0=T0+T2(I2,I3)*S1(I3,I1):NEXT I3
2740 C(I1,I2)=T0
2750 NEXT I2,I1
2760 RETURN
2770 PRINT" matris carpimi..."
2780 PRINT
2790 PRINT"... b... cozum vektorunun devrigi"
2800 PRINT
2810 PRINT "┌";TAB(60);"┐"
2820 PRINT "|";
2830 FOR  I=1 TO M
2840 C1(I)=0
2850 FOR K=1 TO M
2860 C1(I)=C1(I)+C(I,K)*D(K):NEXT K:
2870 PRINT USING "####.###### ";C1(I);
2880 PRINT #1,USING "####.#####";C1(I)
2890 NEXT I:PRINT TAB(60);"|"
2900 PRINT "└";TAB(60);"┘":PRINT
2910 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
2920 RETURN
5000 ' -----------------------------------------------------
5010 ' |                                                   |
5020 ' |             Listeleme İslemleri                   |
5030 ' |                                                   |
5040 ' -----------------------------------------------------
5050 OPEN "I",#1,"GENELMAT.DAT"
5060 CLS
```

```
5070 IF EOF(1) THEN CLOSE #1:PRINT"Menü için bir tuşa
basınız...";:X$=INPUT$(1):RETURN
5080 INPUT #1,N
5090 PRINT " Matrisin Boyutu.....:";N
5100 PRINT " Matrisin Elemanları.:"
5110 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
5120 FOR I=1 TO N
5130 PRINT "|";
5140 FOR J=1 TO N
5145 INPUT #1,S(I,J)
5150 PRINT" ";S(I,J);SPC(3);
5160 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
5170 PRINT "└";TAB(30);"┘"
5180 PRINT " Devam Için Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
5190 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
5200 FOR I=1 TO N
5210 PRINT "|";
5220 FOR J=1 TO N
5225 INPUT #1,T(I,J)
5230 PRINT USING "######";T(I,J);
5240 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
5250 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
5260 PRINT " Devam Için Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
5270 PRINT"transpoze (devrik t) t1 matrisi bulma..."
5280 PRINT
5290 PRINT".....T1........devrigini yazma"
5300 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
5310 FOR I=1 TO N
5320 PRINT "|";
5330 FOR J=1 TO N
5335 INPUT #1,T1(I,J)
5340 PRINT USING"#####";T1(I,J);
5350 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
5360 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
5370 PRINT " Devam Için Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
5380 PRINT "..... s= t1*t .....yi bulma"
5390 PRINT" katsayilar matrisi   s  yi yazma ..."
5400 PRINT
5410 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
5420 FOR  I=1 TO N
5430 PRINT "|";
5440 FOR  K=1 TO N
5445 INPUT #1,R(I,K)
5446 PRINT USING "#####";R(I,K);
5450 NEXT K:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
5460 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
5470 PRINT " Devam Için Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
5480 M=N
5490 PRINT"-----------verilen  matris ----------"
5500 PRINT "┌";TAB(30);"┐"
5510 FOR I=1 TO M
5520 PRINT "|";
5530 FOR J=1 TO M
5535 INPUT #1,S(I,J)
5540 PRINT USING "#####";S(I,J);
5550 NEXT J:PRINT TAB(30);"|":NEXT I
5560 PRINT "└";TAB(30);"┘":PRINT
5570 PRINT " Devam Için Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
```

```
5580 FOR I=1 TO M
5585 INPUT #1,D(I)
5590 PRINT "D(";I;")=";
5600 PRINT "",D(I)
5620 NEXT I
5630 PRINT" Cholevsky nin Genelleştirilmiş tersi (İnversi)  "
5640 PRINT
5650 PRINT "┌";TAB(40);"┐"
5660 FOR  I=1 TO M
5670 PRINT "│";
5680 FOR J=1 TO M
5685 INPUT #1,C(I,J)
5690 PRINT USING " ##.#### ";C(I,J);
5710 NEXT J:PRINT TAB(40);"│":NEXT I
5720 PRINT "└";TAB(40);"┘":PRINT
5730 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
5740 PRINT" matris carpimi..."
5750 PRINT
5760 PRINT" ... b... cozum vektorunun devrigi"
5770 PRINT
5780 PRINT "┌";TAB(60);"┐"
5790 PRINT "│";
5800 FOR  I=1 TO M
5805 INPUT #1,C1(I)
5810 PRINT USING "####.###### ";C1(I);
5830 NEXT I:PRINT TAB(60);"│"
5840 PRINT "└";TAB(60);"┘":PRINT
5850 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
5860 KS=KS+1
5870 PRINT KS ;" . Matris islemlerinin sonu devam icin bir tusa basiniz....";
5880 X$=INPUT$(1)
5890 RETURN
10000 ' ------------------------------------------------------------
10020 ' |              Yazicidan Liste Alma                          |
10030 ' |                                                            |
10040 ' ------------------------------------------------------------
10050 OPEN "I",#1,"GENELMAT.DAT"
10060 CLS
10070 IF EOF(1) THEN CLOSE #1:PRINT"Menü için bir tuşa
basınız...";:X$=INPUT$(1):RETURN
10080 INPUT #1,N
10090 LPRINT " Matrisin Boyutu.....:";N
10100 LPRINT " Matrisin Elemanları.:"
10110 LPRINT "┌";TAB(30);"┐"
10120 FOR I=1 TO N
10130 LPRINT "│";
10140 FOR J=1 TO N
10141  INPUT #1,S(I,J):LPRINT USING "#####";S(I,J);
10160 NEXT J:LPRINT TAB(30);"│":NEXT I
10170 LPRINT "└";TAB(30);"┘"
10180 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
10190 LPRINT "┌";TAB(30);"┐"
10200 FOR I=1 TO N
10210 LPRINT "│";
10220 FOR J=1 TO N
10221 INPUT #1,T(I,J)
10230 LPRINT USING "######";T(I,J);
```

```
10250 LPRINT "└";TAB(30);"┘":LPRINT
10260 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
10270 LPRINT"transpoze (devrik t) t1 matrisi bulma..."
10280 LPRINT
10290 LPRINT" .....T1........devrigini yazma"
10300 LPRINT "┌";TAB(30);"┐"
10310 FOR I=1 TO N
10320 LPRINT "|";
10330 FOR J=1 TO N
10331 INPUT #1,T1(I,J)
10340 LPRINT USING "#####";T1(I,J);
10350 NEXT J:LPRINT TAB(30);"|":NEXT I
10360 LPRINT "└";TAB(30);"┘":LPRINT
10370 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
10380 LPRINT "..... s= t1$t .....yi bulma"
10390 LPRINT" katsayilar matrisi   s  yi yazma ..."
10400 LPRINT
10410 LPRINT "┌";TAB(30);"┐"
10420 FOR  I=1 TO N
10430 LPRINT "|";
10440 FOR  K=1 TO N
10441 INPUT #1,R(I,K)
10446 LPRINT USING "#####";R(I,K);
10450 NEXT K:LPRINT TAB(30);"|":NEXT I
10460 LPRINT "└";TAB(30);"┘":LPRINT
10470 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
10480 M=N
10490 LPRINT"-----------verilen  matris ----------"
10495 LPRINT "┌";TAB(30);"┐"
10500 FOR  I=1 TO M
10505 LPRINT "|";
10510 FOR J=1 TO M
10520 INPUT #1,S(I,J)
10600 LPRINT USING "#####";S(I,J);
10620 NEXT J:LPRINT TAB(30);"|":NEXT I
10630 LPRINT "└";TAB(30);"┘":LPRINT
10633 LPRINT" Cholevsky nin Genelleştirilmiş tersi (İnversi)  "
10640 LPRINT
10650 LPRINT "┌";TAB(40);"┐"
10660 FOR  I=1 TO M
10670 LPRINT "|";
10680 FOR J=1 TO M
10681 INPUT #1,C(I,J)
10690 LPRINT USING " ##.#### ";C(I,J);
10710 NEXT J:LPRINT TAB(40);"|":NEXT I
10720 LPRINT "└";TAB(40);"┘":LPRINT
10730 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
10740 LPRINT" matris carpimi..."
10750 LPRINT
10760 LPRINT" ... b... cozum vektorunun devrigi"
10770 LPRINT
10780 LPRINT "┌";TAB(60);"┐"
10790 LPRINT "|";
10800 FOR  I=1 TO M
10801 INPUT #1,C1(I)
10810 LPRINT USING "####.###### ";C1(I);
10830 NEXT I:LPRINT TAB(60);"|"
```

```
10850 PRINT " Devam İçin Bir Tuşa Basınız...";XX$=INPUT$(1)
10860 KS=KS+1
10870 PRINT KS ;" . Matris islemlerinin sonu devam icin bir tusa basiniz....";
10880 X$=INPUT$(1)
10890 GOTO 10070
RUN <┘
```

```
Genellestirilmis Ters Matris Islemler Menusu

1. Matris Islemlerinin Girilmesi ve Kaydi

2. Yapilan Kayitlarin Sirali Olarak Listelenmesi

3. Yazicidan Toplu kayitlarinin Listelenmesi

4. <-------------- Cikis [Son] ---------------->

   Seciminiz [1-3] ============> [-]
```

```
Menuden 1 secilirse
-------------------------
Matrisin Boyutu.....: 4
Matrisin Elemanlari.:
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Devam İçin Bir Tuşa Basınız... 0

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Devam İçin Bir Tuşa Basınız...
transpoze (devrik t) t1 matrisi bulma...

......T1........devrigini yazma

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Devam İçin Bir Tuşa Basınız... 0

..... s= t1#t .....yi bulma
katsayilar matrisi   s yi yazma ...

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Devam İçin Bir Tuşa Basınız...
----------verilen matris----------

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Devam İçin Bir Tuşa Basınız... 0
D(1)=   -.462246
D(2)=   1.04659
D(3)=   3.296662
D(4)=   -1.6489
Cholevsky nin Genelleştırilmis tersi (İnversi)

$$\begin{bmatrix} 0.3906 & -0.0938 & -0.0625 & -0.1250 \\ -0.0938 & 0.3125 & -0.1250 & 0.0000 \\ -0.0625 & -0.1250 & 0.2500 & 0.0000 \\ -0.1250 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

Devam İcin Bir Tuşa Basınız...
matris carpimi...

... b... cozum vektorunun devrigi

$$\begin{bmatrix} -0.278610 & -0.041690 & 0.722230 & -0.354440 \end{bmatrix}$$

Devam İçin Bir Tuşa Basınız... 0
Menuye Donmek Icin Bir tusa basiniz....

SONUÇ

Kullandığımız yaklaşımdan çıkarılabilecek en önemli sonuç herhangi bir kısıtlamaya gitmeden genelleştirilmiş ters matrislerle çözümleme yapılabileceğidir.

Variyans analizi modelleri için de gecerli bir yöntem olarak ortaya çıkmaktadır.Nasıl lineer denklemler Penrose'un yalnızca birinci koşulunu sağlayan bir g-tersle çözülebili_ yorsa lineer modellerin de yalnızca X'X G X'X = X'X koşulunu sağlayan bir genelleştirilmiş ters matrislerle (g-ters) çözümlenebileceğini göstermiş olduk.

KAYNAKLAR

1.Searle S.R. ,"Lineer Models" (1971)

2.Merih İpek , "Genelleştirilmiş ters matrisler ve rankı tam olmayan modellere uygulama ",Doç.tezi,İst.Üni.,İktisat Fak.1980

3.Searle , S.R. , " Matrix Algebra Useful for statistics ", John Wiley and Lons , Newyork , 1982

4.Adnan Mazmanoğlu, " Etkileşimsiz çapraz 2-Faktörlü variyans analizi modellerinde matrislerle çözümleme " , Doktora tezi , İst. Üni. , İktisat Fak. , İst. 1984

5.Adnan Mazmanoğlü ,"GWBASIC programlama dili ", İstanbul 1989

6.Hasan Yıldız , " MSDOS altında BASIC " , İst. , 1991

7.E.A. Köksal , "İstatistik Analiz Metodları " , Çağlayan Kitap_ evi , İst. 1980

8.Merih İpek , "Betimsel istatistiğe giriş " ,Beta yayım-dağıtım, 1988, İst.

9.Gray bill F.A.,"Theory and application of the lincar model".1976

10.Rao C.R.,"Linear statistical inference and its Application",197

ÖZGEÇMİŞİM

1965 Yılında Sivas Zara kazası Derbent köyünde doğdum. İlk , orta ve lise tahsilimi, İstanbul ili Şişli ilçesinde yaptım . 1984-1985 öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Lisans bölümünü kazandım. 1988-1989 öğretim döneminde aynı bölümden mezun oldum. 1989-1990 öğretim döneminde Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans yapmaya hak kazandım. Bu arada özel şirketlerde;sistem sorumlusu, bilgisayar programcısı ve özel kurslarda ise; bilgisayar ders öğretmeni , dershanelerde ; matematik öğretmenliği görevlerinde bulundum. Halen özel bir okulda stajyer matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. 1991 yılında "MS-DOS altında BASIC " adlı çalışmamı okuyucu kit_ lesine kazandırdım.