YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİOFANT DENKLEMLERİ
ve
UYGULAMALARI

Mat. Müh. Evren KASAP

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Tahir ŞİŞMAN

Prof. Tahir Şişman

Prof. Dr. Behiç Çağal

Doç. Dr. Mehmet Ahlatçıoğlu

İSTANBUL, 1998

TEŞEKKÜR

Tez danışmanım Matematik Mühendisliği Bölüm Başkanı sayın Prof. Tahir Şişman'a, bu tezi hazırlamamda yol gösteren sayın Doç. Dr. Mustafa Sivri'ye ve eğitimim konusunda beni her zaman destekleyen sevgili aileme sonsuz saygılarımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

(a,b)	:	a ve b tam sayılarının en büyük ortak böleni
d \ c	:	c tam sayısı d sayısı ile tam olarak bölünebilir
$[x_0,y_0]$	:	denklemi sağlayan özel çözüm ikililerinden biri
[x,y]	:	denklemi sağlayan çözüm ikilileri
p Λ q	:	p ve q
p⇒ q	:	p ise q

ÖZET

Değişkenlerinin tam sayı değeri aldığı denklemlere Diofant Denklem adı verilmektedir. Bazı diofant denklemlerin, (örneğin $x^2+y^2=z^2$) sonsuz çözümleri mevcut olabilir. $2x+1=4y$ benzeri denklemlerin ise hiç tam sayılı çözümleri yoktur. $x^2+y^2=8$ benzeri, bazı Diofant denklemlerin ise sıfırdan farklı sonlu sayıda çözümü vardır.

Lineer ve birden fazla bilinmeyen bulunan Diofant denklemlerin veya denklem sistemlerinin çözümü aynı zamanda Tam sayılı lineer programlama problemlerinin de çözümünü teşkil etmektedir. $ax+by=c$ eşitliğinin, a, b, c tam sayı olmak üzere tam sayılı çözümünün bulunması için Euclid algoritmasından veya kongrüans yönteminden yararlanılır. Özel çözüm ikilisinin bulunmasından sonra ise, t parametresine bağlı tüm çözüm formülleri elde edilir.

İkiden daha fazla bilinmeyen bulunan lineer denklemlerin parametrik tam sayılı çözümleri ise dönüşüm formülleri ile iki bilinmeyenli denkleme indirgenerek bulunabilir.

İkinci bölümde, bir bilinmeyenli denklemlerin çözümleri açıklanıyor. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, iki ve daha fazla bilinmeyenli lineer Diofant Denklemlerin çözüm yöntemleri anlatılıyor. Beşinci bölümde, bu çözüm metodları Tam Sayılı Lineer Programlama problemlerine uygulanıyor. Son bölümde ise, yüksek dereceden bazı Diofant Denklem çözümleri yer alıyor.

ABSTRACT

Equations to be solved with integer values of the unknowns are called Diophantine equations. Some diophantine equations (such as $x^2+y^2=z^2$) have infinitely many solutions. Others, like $2x+1=4y$, have none. And there are some, like $x^2+y^2=8$, which have a nonzero finite number of solutions.

Solutions of a linear Diophantine equations with several unknowns as well as systems of such equations are the central problem of integral linear pogramming. The problem of finding integer or nonnegative solutions of an equation $ax+by=c$, in which a, b, c are positive integers can be solved with the help of The Euclidean algorithm or congrüence method. After special solution can be found, the general sulution is given the formula where t is an anbitrary integer.

The solutions in integer of linear indeterminate equations with several unknowns can always be reduced to the solution of a number of equations with two unknowns.

In second section, the solution of linear Diophantine equations with one unknown is explained. In third and fourth sections, the solutions of linear Diophantine Equations in two and morel unknowns are explained. In fifth section, These methods are made use of solving İnteger Lineer Programming problems. And in last section, there are more diophantine equations of the high degree.

1. GİRİŞ

Sayılar Teorisi esas itibarı ile pozitif tam sayıların aritmetik özelliklerini inceleyen, matematiğin en eski bölümlerinden biridir.

Diofant Denklemler Sayılar Teorisinin bir alt bölümüdür.Tam sayılı ve bir ve birden fazla bilinmeyen bulunan cebirsel denklemlerin tam sayılı çözümlerinin bulunması, Sayılar Teorisinin en güç problemlerinden biridir. Diofant Denklem çözümleri ise bu tür denklemlerin parametrelere bağlı tüm tam sayı çözümlerini bulmaya yöneliktir.

Diofant Denklemler adını eski yunan matematikçisi Diophantos'tan almıştır.Yaşamı konusunda, İ.S. 250 yıllarında yaşadığından başka bilgi bulunmayan Alexandria Diophantos'un başlıca yapıtı olan13 ciltlik aritmetik kitabından günümüze ancak altısı kalmıştır. Bu kaynaklarda sayılar kuramına ve cebir tekniğine önemli katkılar vardır. Diophantos cebirsel denklemlerin tam sayılılarla çözümü üzerinde çalışmıştır ve bu yönüyle eski çağın diğer matematikçilerinden ayrılmaktadır. Cebirsel sembolleri sistematik olarak kullanarak günümüz notasyonlarına ilk katkıda bulunan ve denklemlerin tam sayılı çözüm kavramını geliştiren yunan matematikçisidir. İki ve üç bilinmeyenli cebirsel denklemlerin tam sayılı çözümleri üzerinde çalışmıştır.

Cebirsel denklemlerin tam sayılı çözümleri üzerinde çalışılırken, bu tür denklemlere bu konuda ilk çalışan matematıkçinin adı verilerek Diofant Denklemler denilmiştir. Bu tür denklemlerin çözümlerine ise Diofant Denklemlerin Çözüm metodları adı verilmektedir.

2. TAM SAYILI BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$$a_n.x^n + a_{n-1}.^{n-1} +\ldots+a_2.x^2 +a_1.x + c = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmış bir bilinmeyenli n.dereceden bir denklemin a_i katsayıları ve c mutlak terimi tam sayı olmak üzere, tam sayılı çözümlerini araştırırken mutlak terimin tüm bölenleri bulunur ve bütün bölenlerin denklemi sağlayıp sağlamadıkları kontrol edilir. Sağlayan tam sayı bölenler denklemin kökleridir (Gelfond, 1962). (2.1) denklemini x parantezine alalım,

$$x.(a_nx^{n-1} + a_{n-1}.x^{n-2} +\ldots+a_2.x^1 +a_1) + c = 0 \quad (2.2)$$

$$x.(a_n.x^{n-1} + a_{n-1}.x^{n-2} +\ldots+a_2.x +a_1) = -c \quad (2.3)$$

$$(a_n.x^{n-1} + a_{n-1}.x^{n-2} +\ldots+a_2.x +a_1) = -c / x \quad (2.4)$$

(2.4) denkleminde, a_i katsayıları ve x değeri tam sayı olduğundan denklemin sol tarafı bir tam sayı değer alacaktır. Bunun sonucu olarak denklemin sağ tarafındaki ifade, c mutlak teriminin x tam sayı değerini tam olarak bölmesi gerektiğini göstermektedir.

(2.1) denkleminin tüm tam sayılı çözümleri c sabitinin böleni olmalıdır. Bölenlerin hiçbiri denklemi sağlamıyorsa (2.1) denkleminin tam sayılı bir çözümü yoktur. Örneğin,

$$x^{10} + x^7 + 2.x^3 + 2 = 0$$

denklemini sağlayan x tam sayı değerlerini arayalım. 2, -2, 1, -1 sabit terim olan 2' nin tüm bölenleridir. Fakat bunlardan yalnız (-1) köktür. Neticede bu denklemin kökleri arasında x=-1 tek tam sayılı köktür. Aynı metodla,

$$x^6- x^5 + 3.x^4 + x^2 -x + 3 = 0$$

denkleminin hiçbir tam sayılı kökü olmadığı gösterilebilir.

3. LİNEER İKİ BİLİNMEYENLİ 1. DERECE DENKLEMLER

$$\mathbf{a.x + b.y = c}$$

$a, b, c \in Z$, $a.b \neq 0$ ve x ve y değişkenleri tam sayı olmak üzere iki bilinmeyenli,

$$a.x + b.y = c \tag{3.1}$$

şeklindeki denklemlerin çözümleri ile ilgileneceğiz.

3.1 Lineer İki Bilinmeyenli 1. Derece Denklemin Çözümleri

İki değişkenli lineer Diofant denklemin çözümü iki aşamada incelenmelidir. İlk aşama çözümün varlığı ile ilgili, ikinci aşama ise varsa çözümün bulunmasına yöneliktir. Aşağıdaki teorem 1. derece lineer iki değişkenli Diofant denklemin çözümünün varlığı ile ilgilidir.

Teorem 1

İki değişkenli $a.x + b.y = c$ Diofant denkleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart d=(a, b) katsayıların en büyük ortak böleni olmak üzere d'nin c sabit sayısını tam olarak bölmesidir.

İspat

$a.x + b.y = c$ çözümünün olduğunu farzedelim. $d = (a,b)$ olduğundan,

$$a = d.a_1,\ b = d.b_1$$

olacak şekilde, a ve b katsayılarının a_1 ve b_1 çarpanları vardır. Bu durumda,

$$a.x + b.y = c$$

$d.a_1.x + d.b_1.y = c$

$d.(a_1.x + b_1.y) = c$

yazılabilir. d sol taraftaki ifadenin bir çarpanı olduğu için c sabitini böler.

Ancak c sabiti, d tam sayısı ile bölünebildiği takdirde (3.1) denklemin tam sayılı çözümlerinden bahsedilebilir (Gelfond, 1962).

Örneğin, $39.x + 26.y = 105$ iki değişkenli lineer Diofant denklemini inceleyelim.

$(39, 26) = 13$ ve 105 sayısı 13'e tam bölünemediğinden denklemin tam sayılı çözümü yoktur.

Aşağıdaki teorem ikinci aşama olan çözümün bulunmasına yöneliktir.

Teorem 2

$d = (a,b)$ ve $d \setminus c$ olmak üzere $a.x + b.y = c$ D-lineer denkleminin herhangi bir çözümü $[x_0,y_0]$ olmak üzere ,

$t = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ için; $x = x_0+(b/d).t$ ve $y = y_0 - (a/d).t$

formülleri denklemin bütün çözümlerini verir.

İspat

x_0 ve y_0 (2.1) denkleminin özel bir çözümü ise;

$a.x_0 + b.y_0 = c$ olacaktır.

$a.x + b.y = a.[x_0 + (b/d).t] + b.[y_0 - (a/d).t]$

$a.x + b.y = a.x_0 + (a.b).t /d + b.y_0 -(a.b).t / d$

$a.x + b.y = a.x_0 + b.y_0 = c$

olduğundan ;

$x = x_0 + (b/d).t$ ve $y = y_0 - (a/d).t$

formları da (3.1) denklemi için bir çözümdür.

[x,y] (3.1) denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde;

$a.x + b.y = c$ ve $a.x_0 + b.y_0 = c$

olacaktır. Bu eşitliklerden,

$a.x + b.y = a.x_0 + b.y_0$

$a.x - a.x_0 = b.y_0 - b.y$

$a.(x - x_0) = b.(y_0 - y)$

$(a/d).(x - x_0) = (b/d).(y_0 - y)$

yazılabilir.

$(a/d, b/d)=1$'dir. Bu nedenle, $(b/d) \backslash (x-x_0)$ ve $(a/d) \backslash (y_0-y)$ olacaktır. Buradan anlaşılır ki t bir tam sayı olmak üzere;

$x-x_0 = (b/d).t$ ve $y_0-y = (a/d).t$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlikler yeniden düzenlenirse;

$x = x_0+(b/d).t$ ve $y = y_0-(a/d).t$

formülleri bulunur (Uspensky ve Heaslet, 1939).

Lineer iki bilinmeyenli bir Diofant denklemin tüm çözümlerini hesaplamak için denklemi sağlayan bir $[x_0, y_0]$ çözümünü bulmalıyız. Aşağıda özel çözümü bulmaya yönelik yöntemler açıklanacaktır.

3.2 İki Bilinmeyenli Lineer Diofant Denklemin Bir Özel Çözümünün Bulunması

Özel Hal (c=0)

(3.1) denkleminde c=0 halini göz önüne alalım. Bu takdirde denklem;

$$a.x + b.y = 0 \tag{3.2}$$

şeklini alacaktır. Bu denklemi y değişkenine göre çözersek;

$$y = -(a/b).x \tag{3.3}$$

formunu elde ederiz.

y' nin tam sayı değeri alabilmesi için x'in b ile kalan bırakmadan bölünebilmesinin gerek ve yeter olduğu aşikardır. b' nin katları olan x tam sayıları ise; t bütün tam sayılı değerleri almak üzere

$$x = b.t$$

şeklinde gösterilebilir. x' in değerini (3.3) denkleminde yerine yazarsak,

$$y = -a.t$$

elde ederiz ki böylece (3.2) denkleminin tüm tam sayılı çözümlerini veren aşağıdaki formüllere ulaşırız (Gelfond, 1962) :

$x = b.t, \quad y = -a.t \qquad\qquad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Bulunan formüllerin genel çözüm formüllerine $x_0=y_0=0$ özel çözümünü uygulamak suretiyle bulunabileceği de görülmektedir.

$a.x + b.y = 0$ denklemi için $x=0$, $y=0$ sayı çiftinin aşikar olarak bir çözüm olmasından dolayı mümkündür.

Bu aşamada (3.1) denkleminin $c \neq 0$ genel halde $[x_0,y_0]$ özel çözümünü bulma yöntemlerini inceleyeceğiz.

3.2.1 Euclid algoritması yöntemi ile özel çözüm ikilisinin bulunması

Euclid Algoritmasını öncelikle bir örnek üzerinde inceleyelim :

$127x + 52y = 4$, $a=127$ $b=52$ ve $d=(127,52)=1$'dir.

Euclid algoritmasından,

$127 = 2.52 + 23$
$52 = 2.23 + 6$
$23 = 3.6 + 5$
$6 = 1.5 + 1$
$5 = 5.1$

yazılabilir. Dördüncü eşitlikten geriye doğru gidilerek :

$1 = 6 - 1.5$
$1 = 6 - 1.(23 - 3.6)$
$1 = 4.6 - 1.23$
$1 = 4.(52 - 2.23) - 1.23$

$1 = 4.52 - 9.23$

$1 = 4.52 - 9.(127 - 2.52)$

$1 = 22.52 - 9.127$

$1 = (-9).127 + (22).52$

ve buradan da

$127.(-9.4) + 52.(22.4) = 4$

$127.(-36) + 52.(88) = 4$

elde edilir. Böylece iki değişkenli $127x + 52y = 4$ D-lineer denkleminin özel bir çözümü;

$x_0=-36$ ve $y_0=88$

olarak bulunur. Denklemin Teorem 2'ye göre bütün çözümleri,

$x=-36+52t,\ y=88-127t \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

ile ifade edilir.

$t=1$ için $x=16$, $y=-39$ ve $127.16 - 52.39 = 4$ [16,-39] denklemi sağlayan başka bir çözümdür.

Euclid Algoritması a ve b sayıları için,

$a = q_1 b + r_2$

$b = q_2 r_2 + r_3$

$r_2 = q_3 r_3 + r_4$

....

$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n$

$r_{n-1} = q_n r_n$

şeklini alır.

$P_1 = q_1$ $\quad\quad\quad\quad$ $Q_1 = 1$

$P_k = P_{k-1}q_k + P_{k-2}$ $\quad\quad\quad\quad$ $Q_k = Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}$

formülleri kullanılarak;

$x_0 = (-1)^{n-1}.c.Q_{n-1}$, $y_0 = (-1)^{n}.c.P_{n-1}$

olmak üzere $[x_0 ,y_0]$ özel çözümü elde edilir (Gelfond, 1962).

3.2.2 Kongrüans yardımı ile özel çözüm ikilisinin bulunması

$a.x + b.y = c$ İki bilinmeyenli Lineer Diofant Denkleminde $(a,b)=1$ olduğunu kabul edelim. Genel çözümünün bulunması için gerekli özel çözümünü kongrüans yöntemi ile bulabiliriz (Şenkon,1993).

Verilen (3.1) denklemine tekabül eden lineer kongrüans,

$a.x \equiv c \pmod b$

olacaktır. Bu kongrüansın bir çözümü bulunabilir. Bulunan x değeri (3.1) denkleminde yerine yerleştirilerek y değeri hesaplanır. Kongrüans yöntemini bir örneğe uygulayalım:

$48x+7y=17$ D-lineer denklemini inceleyelim.

$(48,7)=1$ olduğundan denklemin tam sayılı çözümü vardır. Denkleme karşılık gelen lineer kongrüans,

$48x \equiv 17 \pmod 7$

$48 \equiv -1 \pmod 7$

$-x \equiv 17 \pmod 7$

$17 \equiv 3 \pmod 7$

$-x \equiv 3 \pmod 7$

$x \equiv -3 \pmod 7$

$-3 \equiv 4 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod 7$

olduğundan verilen denklemde x değerini 4 alarak,

$48(4)+7.y=17$

eşitliğinden y=-25 bulunur. [4,-25] denklemin özel çözümüdür.

4. LİNEER N BİLİNMEYENLİ BİRİNCİ DERECE DİOFANT DENKLEMLER (N>2)

4.1 Lineer Üç Bilinmeyenli Birinci Derece Diofant Denklemler

$$\mathbf{a.x + b.y + c.z = n}$$

a, b, c, n tam sayı olmak üzere ,

$$a.x + b.y + c.z = n \tag{4.1}$$

denkleminin tam sayılı çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart; d=(a,b,c) olmak üzere d' nin n'nin bir böleni olmasıdır.

Denkleminin tam sayılı çözümü mevcut ise,

$$y = AY+BZ\ ,\ z = CY + DZ \tag{4.2}$$

değişken dönüşümü uygulayabiliriz. s = (b, c) ile ifade edersek, B ve D katsayılarını,

$$B = c / s,\ \ D = -b / s$$

formülleri ile belirleyebiliriz. Buradan c=Bs ve b= -Ds eşitlikleri yazılabilir. A ve C katsayılarını ise,

$$AD - BC = 1$$

lineer iki bilinmeyenli Diofant denkleminin bir özel çözüm ikilisini hesaplayarak bulabiliriz. (4.2) denklem dönüşümlerini (4.1) denklemine yerleştirirsek,

$$ax+by+cz = ax+b(AY+BZ)+c(CY+DZ) = ax + (bA + cC)Y +(bB + cD)Z$$

$bB + cD = bc/s - cb/s = 0$

$bA + cC = -Ds.A + Bs.C = -s(AD - BC) = -s.1 = -s$

eşitlikleri ile;

$ax+by+cz = ax - s.Y$

$$ax - sY = d \qquad (4.3)$$

iki bilinmeyenli lineer Diofant denklemine indirgenir. (4.3) denklemin bir önceki bölümde açıklanan metodlarla T parametresine bağlı tüm çözümleri hesaplanır. (y, z) çözümleri ise (4.2) değişken dönüşümleri kullanılarak T ve Z parametrelerine bağlı olarak hesaplanır (Stewart, 1952).

$14x+6y+30z = 200$ denklemini inceleyelim.

$(14, 6, 30) = 2$, 2 200'ün bir böleni olduğundan denklemin tam sayılı çözümü vardır.

Denklemin sadeleştirirsek, $7x+3y+15z = 100$ şeklini alacaktır. Denklem dönüşümleri ise;

$y = AY+BZ \quad z = CY+DZ \quad (3,15) = 3$ olmak üzere,

$B = 5, D = -1$ olarak hesaplanır.

A ve C katsayıları ise,

$-A - 5C = 1$

denkleminin bir özel çözümü olarak, $A = -1$, $C = 0$ olarak elde edilir. Katsayılar sonucu dönüşümler,

$y = -Y+5Z, \ z = -Z$

olacaktır.Denklem üç bilinmeyenli bir lineer Diofant denklemden iki bilinmeyenli lineer Diofant denkleme indirgenir.

$7x+3y+15z = 7x-3Y$

$7x - 3Y = 100$ iki bilinmeyenli denkleminin bir özel çözümü [10,-10] olacaktır.

Denklemin genel çözümleri ise,

$x = 10 -3T, \ Y =-10-7T, \qquad (T=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

olarak ifade edilebilir. y, z bilinmeyenleri ise dönüşüm formüllerine x ve Y değişkenlerinin eşitliklerini yerleştirmek suretiyle,

$y = 10+7T+5Z, \ z = -Z, \qquad (T,Z=0,\pm1\pm2,\ldots)$

olarak elde edilir.

Örneğin $T = 1$, $Z = -2$ için $x = 7$, $y = 7$, $z = 2$

$7x+ 3y+15z = 7.7+3.7+15.2 = 100$ bir çözümdür.

Tüm pozitif çözümlerin bulunması için,

$x>0 \Rightarrow \ 10 -3T > 0 \Rightarrow \ T < 4$

$y>0 \Rightarrow \ 10+7T+5Z > 0 \Rightarrow 5Z > -10-7T \wedge Z \leq -1 \ \Rightarrow \ 5 < 10+7T \wedge \ T>0$

$z>0 \Rightarrow -Z > 0 \Rightarrow Z < 0 \ \wedge \ 0 <T < 4$

Bu sınırlar için tüm pozitif tam sayılı çözümler :

$T = 1 \quad (-10-7.1)/5 < Z < 0 \quad Z = -3,-2,-1$

$T = 2 \quad (-10-7.2)/5 < Z < 0 \quad Z = -4,-3,-2,-1$

$T = 3 \quad (-10-7.3)/5 < Z < 0 \quad Z = -6,-5,-4,-3,-2,-1$

olmak üzere 13 tanedir.

Örneğin T=2, Z=-3 değerleri için, x =4, y =9, z =3 bulunacaktır.

4.2 Lineer N Bilinmeyenli Birinci Derece Diofant Denklemler

$$\mathbf{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c, \quad n > 2}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c, \quad n > 2 \tag{4.4}$$

a_i katsayıları sıfırdan farklı n bilinmeyenli birinci derece lineer bir denklemin $(a_1, a_2, .., a_n)\backslash c$ ise tam sayılı çözümü mevcuttur.

Denklemin çözümü ise bir önceki bölümde üç bilinmeyenli denklemin çözüm yönteminin (4.4) denklemine (n-2) kere uygulanması ile bulunacaktır.

$$X_{n-1} = AU + BV, \; x_n = CU + DV, \tag{4.5}$$

dönüşümleri kullanılarak ve katsayılar,

$$B = a_n / (a_n, a_{n-1}), \; D = a_{n-1} / (a_n, a_{n-1}), \; (AD - BC) = 1, \tag{4.6}$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanır.

Dönüşüm denklemleri (4.4) denklemine uygulandığında , (n-1) bilinmeyenli yeni bir denklem elde edilecektir. Yeni denklemin son iki bilinmeyeni olan x_{n-2} ve U değişkenlerine (4.5) (4.6) denklem dönüşümleri uygulanarak, (n-1) değişkenli denklem (n-2) değişkenli denkleme indirgenecektir.

(4.4) denklemi, değişken dönüşümü yönteminin (n-2) kez uygulanması ile; iki bilinmeyenli lineer bir diofant denkleme indirgendiğinde Bölüm 3'de açıklanan yöntemlerle genel çözümler bulunabilecektir. Her adım sırasındaki değişken dönüşümleri kullanılarak (4.4) denkleminin tüm tam sayılı çözümleri (n-1) parametreye bağlı olarak hesaplanacaktır (Stewart, 1952).

Bu yöntemi bir örnek üzerinde görelim :

$6x+3y+15z+45w = 90$ denklemini inceleyelim:

$(6,3,15,45) = 3$ olduğundan denklem,

$2x+y+5z+15w = 30$ denklemine dönüşecektir. Denklemi indirgemek için,

$z = AZ+BW, \quad w = CZ+DW$

dönüşümlerini uygularsak,

$(5,15) = 5, B = 3, D = -1,$

$-A - 3C = 1$ ise $A = 1, -C = 0$

olarak katsayılar elde edilir.

$z = -Z+3W , \quad w = -W$

dönüşümleri denkleme yerleştirilirse üç bilinmeyenli,

$2x+y-5Z=30$

lineer Diofant denklemi elde edilecektir. Yeni denkleme değişken dönüşümünü tekrar uygulanırsa,

$y = AU+BV, \quad Z = CU+DV$

$(1,5) = 1, B = -5, D = -1,$

$-A+5C = 1$ ise $A = -1, \; C = 0$

katsayıları elde edilir.

$y = -U-5V, \quad Z = -V$

dönüşümleri denkleme yerleştirilirse iki bilinmeyenli,

$2x - U = 30$ lineer Diofant denklemi elde edilecektir. Yeni denklemi diofant denklem çözüm yöntemlerinden birini uygulayarak çözdüğümüz zaman,

$x = 15 - T, \; U = -2T \qquad (T = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

çözümlerini buluruz. Diğer bilinmeyenler ise,

$y = 2T - 5V, \; z = V+3W, \; w = -W$

olarak bulunacaktır. Tüm pozitif tam sayılı çözümler ise,

$x > 0 \Rightarrow 15 - T > 0 \Rightarrow T < 15$

$y>0 \Rightarrow 2T-5V > 0 \Rightarrow 2T > 5V$

$z>0 \Rightarrow V+3W > 0 \Rightarrow V > -3W \wedge W < 0 \Rightarrow V > 0 \Rightarrow T > 0$

$w>0 \Rightarrow -W > 0 \Rightarrow W < 0 \wedge 15 < T < 0 \wedge (2/5)T > V > -3W$

$T = 14$ için $V = 5,4$, $W = -1$

$T = 13$ için $V = 5,4$, $W = -1$

$T = 12$ için $V = 4$, $W = -1$

$T = 11$ için $V = 4$, $W = -1$

olmak üzere altı pozitif tam sayı çözümleri bulunur.

Örneğin $T = 13$, $V = 4$, $W = -1$ için;

$x = 2$, $y = 6$, $z = 1$, $w = 1$ değerleri denklemi sağlamaktadır :

$2(2)+1(6)+5(1)+15(1) = 4+6+5+15 = 30.$

4.3 Birinci Derece Diofant Denklem Sistemleri

İki (veya daha fazla) birinci derece diofant denklemlerden oluşmuş bir sistemi çözmek için ilk adım birinci denklemin tam sayılı çözümlerinin hesaplanmasıdır. İkinci adım bu parametrik çözümlerin ikinci denklemde yerlerine yerleştirilmesidir.Bu şekilde ikinci denklem, birinci denklemin çözüm parametrelerinin bilinmeyen olduğu yeni bir lineer diofant denkleme dönüşecektir. Yeni denklem yine diofant denklem çözüm yöntemleri kullanılarak çözülür. Denklem sisteminin değişkenleri yeni parametrelere bağlı olarak yeniden düzenlenir.İkiden fazla denklem içeren sistemlerde ise bu iterasyon son denklemin çözümüne kadar devam eder (Stewart, 1952; Uspensky, 1939).

Denklem sistemlerinin bir veya daha fazla parametreye bağlı çözümleri olabileceği gibi yalnız bir çözümü mevcut olabilir veya tam sayılı bir çözümü mevcut olmayabilir.

Bir örnek üzerinde çalışalım :

$$7x + 3y + 15z = 100,$$
$$x + 5y + 3z = 120.$$

Birinci denklemin çözümünü daha önceki bir örnekte,

$x = 10 - 3T,\ \ y = 10+7T+5Z,\ \ z = -Z$

olarak bulunmuştu. Bu sonuçları ikinci denkleme yerleştirirsek,

$32T + 22Z = 60$

lineer iki bilinmeyenli Diofant Denklem elde edilir. Yeni denklemin çözümü ise;

$(32,22) = 2,\ \ 60 / 2 = 30$ ve $16T + 11Z = 30$ sadeleştirmesi ile,

$T = -60 + 11K,\ \ Z = 90 - 16K$

olacaktır. Denklem sisteminin tüm çözümleri ise K parametresine bağlı olarak,

$x = 190 - 33K,\ \ y = 40 - 3K,\ \ \ z = 16K - 90,\ \ (K=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

şeklinde hesaplanacaktır.

$K = 5$ için $x= 25,\ y = 25,\ z = -10$ değerleri iki denklemi de sağlamaktadır.

$$7x + 3y + 15z = 100 \Rightarrow 7(25)+ 3(25)+ 15(-10) = 100$$
$$x + 5y + 3z = 120 \Rightarrow 1(25)+ 5(25)+ 3(-10) = 120.$$

Denklemin pozitif tam sayılı çözümlerini araştıralım :

$x>0 \Rightarrow K< 190/33$ $\quad$ $K< 6$

$y>0 \Rightarrow K< 40/3$ $\quad$ $K< 14$

$z>0 \Rightarrow K> 90/16$ $\quad$ $K> 5$

bu kısıtlar için sistemin pozitif tam sayılı çözümü yoktur.

5. DİOFANT DENKLEMLERİN LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Lineer bir Diofant Denklem sisteminin pozitif tam sayı çözümlerinin bulunması aynı zamanda Tam Sayılı Lineer Programlama problemlerinin de çözümünün bulunması demektir.

Lineer n bilinmeyenli birinci dereceden denklem sisteminin parametrik çözümleri tam sayılı Lineer Programlama problemlerinin x_i değişkenlerine getirdiği kısıtları altında incelenerek z amaç fonksiyonunun maksimum değeri bulunabilir. Bir örnek üzerinde Diofant Denklem çözümlerinin nasıl bir tam sayılı Lineer Programlama problemine nasıl uygulandığını inceleyelim:

5.1 Uygulama 1.

max. $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_6 = 1$$

$x_4 \leq 3$

$x_5 \leq 4$

$x_6 \leq 6$

$x_i \geq 0$ (i=1,…,6)

Tam sayılı Lineer Programlama problemini Diofant Denklem sistemi olarak kabul edersek ilk denklemin çözümü;

$x_1 = 1 - T$, $x_2 = U$, $x_3 = 3T + U - V$, $x_4 = -4T + V - 1$

olarak bulunacaktır. İkinci ve üçüncü denklemlerden sırası ile x_5 ve x_6 değişkenleri x_1, x_2, x_3 değişkenleri cinsinden yazılır ve bu değişkenlerin parametrik çözümleri kullanılırsa sistemin çözümü aşağıdaki şekilde olacaktır :

$x_1 = 1 - T$

$x_2 = U$

$x_3 = 3T + U - V$

$x_4 = -4T + V - 1$

$x_5 = -V$

$x_6 = -8T + U + 2V + 1$

Tam sayılı Lineer Programlama probleminin kısıtları bu çözümlere uygulanırsa;

$x_1 \geq 0 \Rightarrow \quad T \leq 1$

$x_2 \geq 0 \Rightarrow \quad U \geq 0$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow \quad 3T+U \geq V$

$3 \geq x_4 \geq 0 \Rightarrow \quad 1 \leq -4T + V \leq 4$

$4 \geq x_5 \geq 0 \Rightarrow \quad -4 \leq V \leq 0$

$6 \geq x_4 \geq 0 \Rightarrow \quad 8T-1 \leq U+2V \leq 5+8T$

olacaktır.Bu kısıtlar altında T, U, V parametreleri ancak şu tam sayı değerlerini alır :

V = -2, T = -1, U = 1 ise çözüm değerleri (2, 1, 0, 1, 2, 6) ve z = 4

V = -3, T = -1, U = 0 ise çözüm değerleri (2, 0, 0, 0, 3, 3) ve z = 2

V = -3, T = -1, U = 1 ise çözüm değerleri (2, 1, 1, 0, 3, 4) ve z = 5

V = -3, T = -1, U = 2 ise çözüm değerleri (2, 2, 2, 0, 3, 5) ve z = 8

V = -3, T = -1, U = 3 ise çözüm değerleri (2, 3, 3, 0, 3, 6) ve z = 11

Tam sayılı Lineer Programlama probleminin çözümü $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=3$ ve max. $z=11$ olarak bulunacaktır.

5.2 Uygulama 2.

İkinci bir uygulama alanı olarak bir maksimum amaçlı Lineer Programlama probleminin herhangi bir yöntem ile bulunan ve tam sayı olmayan çözümlerinin amaç değer fonksiyonunu bir diofant denklem olarak çözmek suretiyle tam sayılı çözümlerin hesaplanmasıdır.

Uygulamanın ilk adımı her değişkeni tek başına amaç fonksiyonu olarak almaktır. Böylece aynı kısıtlar altında Lineer Programlama probleminin herhangi bir yöntemle hesaplanacak tam sayılı olmayan çözümleri her değişkenin alabileceği maksimum değeri verecektir..

Hesaplanan amaç değeri, değişkenlerin tam sayı değeri alması istendiğinde azalacaktır. İkinci adım, amaç fonksiyonu daha önce bulunan maksimum değerine en yakın tamsayı değerine eşitleyerek diofant denklem olarak çözümlemektir. Parametrik çözümler $x_i \geq 0$, ilk adımda hesaplanan kısıtlar ve tam sayı olmayan çözümlerde belirlenen diğer kısıtlar altında tekrar incelenir. Seçilen amaç değeri ile tam sayılı çözümlere ulaşılamıyor ise amaç fonksiyonu bir değer daha azaltılarak tekrar çözülür ve kısıtlar altında yeniden incelenir.Bir örnek üzerinde uygulayalım :

max. $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$

$3x_1 - x_2 - x_3 \leq 3$

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 7$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

probleminin çözümü;

$x_1 = 1.6429$, $x_2 = 1.4286$, $x_3 = 0.5$ ve $z = 5$ olarak bulunur.

max.z = x_1 olarak aynı kısıtlarla x_1 çözümü : $x_1 = 1.6429$;

max.z = x_2 olarak aynı kısıtlarla x_2 çözümü : $x_2 = 2.25$;

max.z = x_3 olarak aynı kısıtlarla x_3 çözümü : $x_3 = 2$

x_i değişkenlerinin maksimum alabilecekleri değerler olarak bulunur.

Amaç değeri tam sayı olmasına karşın değişkenler tam sayı değildir. Tam sayılı çözümler amaç değerini 5' den daha küçük bir değere götürecektir. max.z = 4 olarak kabul ederek çözümü hesaplamaya çalışalım. Amaç satırı bu değere eşitlenerek diofant denklem olarak çözülürse, çözüm:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$x_1 = 4 - T,\ x_2 = U,\ x_3 = T - 2U$

olacaktır.

$x_i \geq 0$ kısıtı ve her değişkenin hesaplanan max. değer kısıtları her parametrik çözümde incenirse;

$0 \leq x_1 \leq 1.6429 \Rightarrow 2.36 \leq T \leq 4 \Rightarrow T = 3, 4$ tam sayı değerlerini alabilir.

$0 \leq x_2 \leq 2.25 \Rightarrow 0 \leq U \leq 2.25 \Rightarrow U = 0, 1, 2$ tam sayı değerlerini alabilir.

$0 \leq x_3 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq T\text{-}2U \leq 2 \Rightarrow T = 3$ için $U = 1$ tam sayı değerlerini alabilir.

$T = 4$ için $U = 1, 2$ tam sayı değerlerini alabilir.

Çözümler aynı zamanda kısıt satırlarını da sağlamalıdır :

$T - 2U = 1$

$T + 3U \geq 3$

$4T - U \geq 9$

$4T - 8U \geq 3$

olacaktır.

Bu kısıtlar altında T ve U parametreleri ancak şu tam sayı değerini alır :

$T = 3$, $U=1$; çözüm değerleri ise

$x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$ ve max. $z = 4$

olarak bulunacaktır.

5.3 Uygulama 3.

Üçüncü bir uygulama alanı olarak bir maksimum amaçlı Lineer Programlama probleminin amaç fonksiyonu değişkenler bir tarafa alınarak sıfıra eşitlenir. Bu suretle z amaç değişkeninin de denklemde bulunması durumunda amaç denklemi bir diofant denklem olarak çözerek tam sayılı çözümlerin hesaplanmasıdır.

x_i ve z değişkenlerinin parametrik çözümleri $x_i \geq 0$ ve Lineer Programlama probleminin diğer kısıtları altında incelenir ve tam sayılı çözümleri içinde z amaç değerini maksimum yapan değerler çözümü oluşturacaktır. Bir örnek üzerinde inceleyelim:

max. $z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$

$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 6$

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Lineer Programlama probleminin amaç satırını sıfıra eşitleyelim :

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 - z = 0.$

Dört bilinmeyenli birinci derece Diofant Denklemin çözümü;

$x_1 = -T,$

$x_2 = -U,$

$x_3 = -V,$

$z = -T - 3U + 2V$

şeklinde olacaktır. T, U ve V değişkenlerine verilecek herhangi tam sayı değerleri amaç satırını sağlayacaktır. Fakat Lineer Programlama probleminin kısıtlarını sağlaması için ;

$T \leq 0, U \leq 0, V \leq 0;$

$2V - T - 3V \geq 0;$

$-2T + U - V \geq 2;$

$-T - 5U + V \leq 6;$

$-3T + 2U - 3V \leq 8$

eşitsizliklerine uygun tam sayı değerleri seçilmelidir. Bu kısıtlar altında mümkün değerler ise,

$T = -1, V = 0, U = 0$ ise çözüm değerleri (1, 0, 0) ve $z = 1$

$T = -1, V = -1, U = -1$ ise çözüm değerleri (1, 1, 1) ve $z = 2$

$T = -2, V = 0, U = 0$ ise çözüm değerleri (2, 0, 0) ve $z = 2$

$V = -2, V = -1, U = -1$ ise çözüm değerleri (2, 1, 1) ve $z = 3$ olmak üzere dört tanedir.

Tam sayılı Lineer Programlama probleminin çözümü ise

$x_1=2, x_2=1, x_3=1$ ve max. $z = 3$

olarak bulunacaktır.

6. BAZI DİOFANT DENKLEMLER VE ÇÖZÜM FORMÜLLERİ

6.1 $x^2 + y^2 = n$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 = n \tag{6.1}$$

eşitliği n pozitif tam sayı değeri almak üzere hangi sayıların iki tam sayının karelerinin toplamı olarak yazılabileceğini araştıracağız. Aşağıdaki dört lemma bize çözüm hakkında ipuçları verecektir (Stewart, 1952).

Lemma 1. 4m+3 formundaki tam sayıları iki sayının karesi toplamı şeklinde yazılamaz.

Taban olarak mod 4'ü seçersek x değişkenini alabileceği değerler 0, 1, 2, 3 olacaktır. Bu durumda ise; $x^2 \equiv 0,1,0,1$ (mod 4) değerleri albileceğinden açık olarak görülmektedir ki $x^2+y^2 \equiv 0,1$ veya 2 (mod 4) olabilecektir. Lemma 1'de ise n sayısı 4m+3 formunda ise mod 4' e göre $n \equiv 3$ olmalıdır.

Lemma 2. n tam sayısının asal çarpanları iki sayının karesi toplamı formunda yazılabiliyorsa,n sayısı da iki kare değerinin toplamı formunda yazılabilir.

$(a^2+b^2)(a_1{}^2+b_1{}^2) = A^2+B^2$, $A=aa_1+bb_1$, $B=ab_1 -ba_1$, eşitliklerinden Lemma 2 doğrudur.

Lemma 3. n = mp, p asal ve 0< m < p olmak üzere p tam sayısı 4K+1 formunda ise (6.1) eşitliğinin x, y, m tam sayı değeri almak üzere çözümü mevcuttur.

Lemma 4. n tam sayısı 4K+1 formunda ise (6.1) eşitliğinin çözümü mevcutur.
Örneğin, n= 65 ise 65=4.16+1 olduğundan, 65= 8^2+1^2 olacaktır.

n=117 ise 117= 29.4+1 olduğundan, 117= 9^2+6^2 olacaktır.

6.2 $\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 = n$ Eşitliği

$$\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 = n$$

eşitliğinde x, y, z tam sayı değeri almak üzere, her n tam sayısı en fazla üç sayının karesinin toplamı ya da farkı şeklinde, belirtilen formda yazılabilir (Mordel, 1969).

Tüm tam sayılar, m tam sayı olmak üzere; tek sayı ise 2m+1, çift sayı ise 2m formunda yazılabilir. Bu formlar ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2,$$
$$2m = m^2 - (m - 1)^2 + 1,$$

Bu eşitlikler kullanılarak örneğin 23 sayısı m=11 değeri alarak;

$$23 = (11+1)^2 - 11^2$$
$$23 = 12^2 - 11^2$$

olmak üzere iki tam sayının karesi farkı şeklinde yazılabilir.

-150 çift tam sayısı ise m=-75 değerini alarak;

$$-150 = (-75)^2 - (-75-1)^2 + 1$$
$$-150 = 75^2 - 76^2 + 1^2$$

olmak üzere üzere üç sayının karesinin toplamı ve farkı şeklinde yazılabilir.

6.3 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = n$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = n$$

eşitliğinde x, y, z, w doğal sayı değeri almak üzere, her n doğal sayısı en az bir şekilde dört sayının karesi toplamı biçiminde yazılabilir (Anglin, 1995; Stewart, 1952).

Örneğin, $15=3^2+2^2+1^2+1^2$, $17=4^2+1^2+0^2+0^2$ veya $17=3^2+2^2+2^2+0^2$

olarak yazılabilir.

n sayısının değeri büyüdükçe,çarpanları kullanılarak x, y, z, w değerlerini daha kolay bulabiliriz.Bunun için aşağıdaki eşitliği kullanmalıyız :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

$A = ae + bf + cf + dh,$
$B = af - be + ch - dg,$
$C = ag - bh - ce + df,$
$D = ah + bg - cf + de.$

Örneğin, n=351 ise, 351=9.39 veya 351=13.27 olarak yazılabilir :

$9= 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ ve $39= 6^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ ise
$351= 18^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$'e eşit olacaktır.

$13= 3^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$ ve $27= 5^2 + 1^2 + 1^2 +0^2$ ise
$351= 17^2 + 7^2 + 3^2 + 2^2$'e eşit olacaktır.

6.4 $x^2 + y^2 = z^2$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{6.2}$$

ikinci dereceden üç bilinmeyenli (6.2) denkleminin tam sayılı çözümlerini araştıralım. Bu denklemin bütün tam sayılı çözümlerini bulmak problemin geometrik manası olan Pisagor üçgenlerini,yani kenarları ve hipotenüsü tam sayılar olan üçgenleri bulmaktır.

Teorem1

$x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin y çift bir sayı olmak üzere; $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$ denklemleri, a ve b aralarında asal, her ikisi de tek sayı olmayan ve $a > b > 0$ olmak koşuluyla tüm çözümleri verir.

İspat

x ve y sayılarının en büyük ortak bölenini d ile gösterirsek,

$x = x_1d$, $y = y_1d$ olur ve (6.2) denklemi ;

$$x_1^2d^2 + y_1^2d^2 = z^2$$

şeklini alır. Buradan z^2 nin d^2 ile bölünebildiği neticesi çıkar ki, bu d değerinin z'nin bir çarpanı olması demektir:

$z = z_1d$ ise $x_1^2d^2+y_1^2d^2 = z_1^2d^2$ şeklinde yazılabilen (6.2) denklemini d^2 ile bölersek $x_1^2+y_1^2= z_1^2$ elde ederiz.

Bu suretle başlangıçtaki denklemle aynı şekle haiz olan fakat şimdi x_1 ve y_1'in aralarında asal olduğu bir denkleme varırız.

(6.2) denkleminin aralarında asal olan [x, y] çözümleri bulunduğunda bu çözümlerin herhangi bir katı alınarak çözümler arttırılabilir. Şu halde $(x,y) = 1$ olsun. Bu takdirde x ve y sayılarından en azından birisi (mesela x) tektir. x^2'yi (6.2) denkleminin sağ tarafına geçirerek,

$$y^2 = z^2 - x^2; \quad y^2 = (z+x).(z-x) \tag{6.3}$$

elde ederiz. z+x ve z-x'nin en büyük ortak bölenini d_1 ile göstereceğiz. Bu takdirde u ve v aralarında asal olmak üzere,

$$z+x = ud_1, \; z - x = vd_1 \tag{6.4}$$

olacaktır. z+x ve z -y 'nin bu ifadelerini (6.3) denkleminde yerine koyarsak,

$$y^2 = uvd_1^{\,2}$$

elde ederiz. u ve v sayılarının hiçbir ortak böleni olmadığından, son denklem ancak u ve v'nin birer tam kare olması ile mümkündür (Aralarında asal iki sayının çarpımının kare olması ancak her çarpanın da bir sayının karesi olması halinde mümkündür.) :

a, b tam sayı olmak üzere;

$$u = a^2, \; v = b^2$$

olsun. Bu takdirde ise,

$$y^2 = a^2b^2d_1^{\,2} \tag{6.5}$$

ve $y = abd_1$ olur.

Şimdi x ve z'yi (6.4) denklemlerinden bulalım. Bu denklemlerin taraf tarafa toplanması,

$$2z = ud_1 + vd_1 = a^2d_1 + b^2d_1, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2} d_1 \tag{6.6}$$

verir. (6.4) denklemlerinden ikincisini birincisinden çıkarırsak,

$$2x = ud_1 - vd_1 = a^2d_1 - b^2d_1, \; x = a^2 - b^2 \; d_1$$

eşitliklerinden x ve y 'nin 1'den farklı d_1 gibi ortak bölenleri mevcut bulunduğu neticesi çıkar. a ve b sayıları aralarında asal olan u ve v sayıların

$u = a^2$, $v = b^2$ eşitlikleriyle bağlıdır ve bunun neticesinde a ve b aralarında asaldır; (6.4) denklemlerine göre u>v olduğundan, a>b'dir.

(6.4), (6.5) ve (6.6) eşitliklerinden $d_1 = 1$ yazarsak ve formüller 2 ile çarparak genişletirsek,

$$x = a^2 - b^2, \; y = 2ab, \; z = a^2 + b^2 \tag{6.7}$$

eşitliklerini elde ederiz (Gelfond, 1962).a ve b'nin ilk küçük değerleri için,aşağıdaki eşitlikler elde edilir :

(b = 1,a = 2) $\quad 3^2 + 4^2 = 5^2$
(b = 2,a = 3) $\quad 5^2 + 12^2 = 13^2$
(b = 1,a = 4) $\quad 15^2 + 8^2 = 17^2$

İspatlandığı gibi (6.7) formülleri $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin ortak bölensiz x,y,z çözümlerini verirler. Bu denklemin geri kalan bütün pozitif tam sayılı çözümleri (6.7) denklemlerinin verdiği ortak bölensiz çözümlerin d gibi keyfi bir ortak çarpanla çarpılması suretiyle elde edilir.

(6.2) denkleminin bütün çözümlerini elde ettiğimiz tarzda, aynı tipteki diğer denklemlerin de çözümlerini bulabiliriz.

Örneğin $x^2 + 2y^2 = z^2$ denklemini inceleyelim.

$2y^2 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x)$ olcaktır. Bu eşitlikte (a, 2b) aralarında asal tam sayı olmak üzere,

$(z-x) = 2a^2$ ve $(z+x) = 4b^2$ olarak seçersek;

$y=2ab$, $z=a^2+2b^2$, $x=\pm(a^2-2b^2)$ formüllerine ulaşırız.

Teorem2

Pisagor üçgenlerinin alanı hiçbir zaman bir kare değere eşit olamaz.

İspat

x, y, z, tam sayı olmak üzere , $x^2+y^2 = z^2$ pisagor üçgenin alanı, $xy = 2w^2$ olarak alalım.

Teorem1 'de ki diofant denklem çözümlerini kullanırsak;

a ve b aralarında asal, her ikisi de tek sayı olmayan ve $a > b > 0$ olmak koşuluyla,

$x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$

denklemlerine eşit olacaktır. Bu durumda üçgen alanı,

$w^2 = (a^2-b^2)ab = (a-b)(a+b)ab$

olacaktır.

a, b aralarında asal oldukları için, çarpımlarının kare olması ancak her çarpanın kare olması ile mümkündür. m, n, p, q tam sayı olmak üzere,

$a=m^2$, $b=n^2$, $a+b=p^2$, $a-b=q^2$

olarak seçersek, $m^2+n^2=p^2$ ve $m^2-n^2=q^2$ eşitlikleri meydana gelirki bu diofant denklem sisteminin çözümü mevcut değildir. Bu nedenle pisagor üçgeninin alanının w^2 gibi bir kare değere eşitliği mümkün değildir.

6.5 Fermat'ın Son Teoremi

Fransız matematikçi Pierre de Fermat'ın Arithmatica kitabının bir kopyasında boş bulunmuş kenarlardan birine düşürmüş olduğu küçük bir notun oğlu tarafından bulunması ile açığa çıkan ve yayınlanan "Fermat'ın Son Teoremi" ;

n ikiden büyük olmak üzere 0'dan farklı x,y,z tam sayıları için,

$$x^n + y^n = z^n$$

eşitliğinin hiçbir çözümünün olmadığıdır. Notun son cümlesi şöyleydi : " bunun için dikkat çekici bir ispat bulduysam da sayfanın kenarı buna yazabilmem için çok küçük kalıyor." Bu iddia 3,5 asır matematikçileri uğraştırdı ve tam olarak ispatlanmasa da $2<m<307$ değerleri için doğruluğu kanıtlandı.1994 yılında Andrew Wiles ispatı tamamladı ve 350 yıllık problemin çözümünü ortaya koyduğunda elinde 200 sayfalık bir kağıt tomarı vardı.(*)

(*) Özsöylev, Han Nazmi (1997), "Fermat'nın Son Teoremi", Bilim ve Teknik Dergisi, 355: 102-103

6.6 $Ax^2 + y^2 = z^2$ Eşitliği

$$Ax^2 + y^2 = z^2 \tag{6.8}$$

denkleminin A kare olmayan pozıtif tam sayı olmak üzere tüm çözümlerini verecek formüllerini araştıralım.

$(y,z)= d >1$ ise $Ax^2=(z^2-y^2)$ d^2 ile bölünecektir. A kare olmayan bır tam sayı olduğundan d en büyük ortak böleni x'i bölecektir.

x, y, z'nin (6.8) denklemin sağlayan aralarında asal tam sayılar olduklarını kabul edelim.Bu durumda denklemi,

$Ax^2= z^2-y^2=(z+y)(z-y)$ olarak yazabiliriz.

$(y,z)=1$ olduğundan $z+y$ ve $z-y$ değerleri için her ikisinin de tek sayı olabileceği veya birinin tek sayı diğerinin ise çift sayı olabileceği ihtimalleri düşünülebilir.

Önce z ve y değerlerinin her ikisininde tek sayı olduğunu düşünelim. Bu durumda $(u,v)=1$ olmak üzere $z+y=2u$, $z-y=2v$ eşitliklerini yazabiliriz. (6.8) eşitliğimizden, $Ax^2=4uv$ olacaktır. A kare bir tam sayı olmadığından x bilinmeyeni bu eşitlik nedeniyle çift bir sayı olup $x=2a$ olarak alınabilir. Bu durumda $Ax^2=4Aa^2=4uv$ ve $Aa^2=uv$ olacaktır. m^2 ve n^2 olarak u ve v sayılarının en büyük kare değerlerini seçersek; $u=m^2r$, $v=n^2s$ ve $(m,n)=(r,s)=(r,n)=(s,m)=1$ 'dir. $Aa^2=m^2r.n^2s$, ve $A=rs$, $a=mn$ olacaktır. $y=u-v$ ve $z=u+v$ olduğundan çözüm formüllerimiz :

$$x=2mn,\ y= m^2r-n^2s,\ z= m^2r+n^2s \tag{6.9}$$

olacaktır. r, s, m, n tam sayı ve $A=r.\ s$ olarak seçilmelidir.

Eğer y ve z değişkenlerinden biri çift biri de tek sayı ise, y^2 ve x^2 değerlerinden biri tek sayı olacak ve farkları tek sayı olduğundan (6.8) eşitliğinden A,x 'de tek sayı olacaktır. z+y=u ve z-y=v eşitliklerini yazabiliriz. u ve v tek ve (u,v)=1 olsun. Bu durumda $Ax^2=uv$ olacaktır. m^2 ve n^2 olarak u ve v sayılarının en büyük kare değerlerini seçersek; $u=m^2r$, $v=n^2s$, m ve n tek sayı ve (m,n)=(r,s)=(r,n)=(s,m)=1 'dir.

$Ax^2=m^2r.n^2s$, ve A=rs, x=mn

olacaktır. y=(u-v)/2 ve z=(u+v)/2 olduğundan çözüm formüllerimiz :

$$x=mn,\ \ y=(m^2r-n^2s)/2,\ \ z=(m^2r+n^2s)/2 \qquad (6.10)$$

olacaktır. r, s, m, n tam sayı ve A=r.s olarak seçilmelidir. Sonuç olarak;

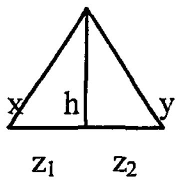
I. Eğer $Ax^2+y^2=z^2$ eşitliğinde A kare olmayan çift sayı ise tüm asal çözümler ve katlarını alarak bulabileceğimiz diğer çözümler (6.9) formülleri ile hesaplanabilicektir.

II. Eğer $Ax^2+y^2=z^2$ eşitliğinde A kare olmayan tek sayı ise tüm asal çözümler ve katlarını alarak bulabileceğimiz diğer çözümler (6.10) formülleri ile hesaplanabilecektir (Wright, 1948).

6.7 Üçgen Bağıntısı

Yüksekliği h olarak tanımlanmış her üçgenin kenar uzunlukları, $n(m^2+h^2)$, $m(n^2+h^2)$, $(m+n)(mn-h^2)$, formundaki sayılarla orantılıdır. Yüksekliği verilmiş bir üçgene uygun olan kenar uzunlukları, m, n, h tam sayı ve $mn>h^2$ seçildiği zaman formüller şu şekilde bulunur (Carmichael, 1959):

Yükseklik z uzunluğundaki kenarı z_1 ve z_2 olmak üzere iki parçaya ayıracaktır ve iki dik üçgen oluşacaktır.



$h^2 = x^2 - z_1^2 = y^2 - z_2^2$,

$z_1 + z_2 = z$,

$x+z_1 = m$,

$x-z_1 = h^2/m$,

$y+z_2 = n$,

$y-z_2 = h^2/n$.

Yukarıdaki eşitlikleri kullanarak;

$x = (m+h^2/m)/2$,

$y = (n+h^2/n)/2$,

$z= (m+n - h^2/m - h^2/n)/2$,

formülleri elde edilir. Formülleri 2mn ile çarparak tekrar düzenlersek,

$x = n(m^2+h^2)$,

$y = m(n^2+h^2)$,

$z = (m+n)(mn-h^2)$

olacaktır.

6.8 $x^2 + y^2 = z^3$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 = z^3 \tag{6.11}$$

denkleminin tüm çözüm değerleri m,n değişkenleri tam sayı değeri almak üzere,

$x = m^3 + mn^2$,
$y = m^2n + n^3$,
$z = m^2 + n^2$

formülleri ile ifade edilebilir. Örnek olarak m=2, n=-1 için;

x=10, y=-5, z=5 olarak bulunan tam sayı değerleri (6.11) denklemini sağlamaktadır:

$(10)^2 + (-5)^2 = (5)^3$

6.9 $x^2 + y^2 = z^4$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 = z^4 \tag{6.12}$$

denkleminin tüm çözüm değerleri m,n değişkenleri (m>n) tam sayı değeri almak üzere,

$x = 4mn(m^2 - n^2)$,
$y = \pm(m^4 - 6m^2n^2 + n^4)$,
$z = m^2 + n^2$

formülleri ile ifade edilebilir. Örnek olarak m=2, n=1 için;

x=24, y=-7, z=5 olarak bulunan tam sayı değerleri (6.12) denklemini sağlamaktadır:

$(24)^2 + (-7)^2 = (5)^4$

6.10 $x^2 + y^2 = z^k$ Eşitliği

$x^2 + y^2 = z^k$ genel formundaki tüm denklemlerin, k pozitif tam sayı değeri almak üzere çözümü mevcuttur (Carmichael, 1959). m^2+n^2 formundaki sayılar kullanılarak bu denklemlerin çözümleri bulunabilir :

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2) = (mp+nq)^2+(mq-np)^2,$$
$$(m^2+n^2)(p^2+q^2) = (mp-nq)^2+(mq+np)^2$$

olacaktır. Eğer p=m ve q=n seçersek;

$$(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)+(2mn)^2,$$

olacaktır ki bu formüller $x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin çözümü vermektedir.Benzer şekilde k=3 için daha önceki bölümde verdiğimiz formüllere ulaşabiliriz :

$$(m^2+n^2)^3 =(m^2+n^2)^2(m^2+n^2),$$
$$(m^2+n^2)^3 = [(m^2-n^2)+(2mn)^2](m^2+n^2),$$
$$(m^2+n^2)^3 = (m^3+mn^2)^2+(m^2n+n^3)^2.$$

6.11 $x^2 - Dy^2 = z^2$ Eşitliği

$$x^2 - Dy^2 = z^2 \qquad (6.13)$$

denkleminin D pozitif ve tam sayı olmayan bir değer olmak üzere tüm çözümleri m, n değişkenleri tam sayı değeri almak üzere,
$x = m^2+Dn^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 -Dn^2$

formülleri ile ifade edilebilir.

Örnek olarak D=3 için;

m=1, n=2 ise; x=13, y =4, z=-11 olarak bulunan tam sayı değerleri (6.13) denklemini sağlamaktadır:

$x^2 - 3y^2 = z^2$, $(13)^2 - 3(4)^2 = (-11)^2$

6.12 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \tag{6.14}$$

denkleminin tüm çözüm değerleri m, n, p, q değişkenleri tam sayı değeri almak üzere,

$x = m^2 - n^2 - p^2 + q^2$,
$y = 2mn - 2pq$,
$z = 2mp + 2nq$,
$t = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$

formülleri ile ifade edilebilir (Carmichael, 1959).

Örnek olarak m=3, n=-1, p=-2, q=1 için;

x=5, y=-2, z=-14, t=15

olarak bulunan tam sayı değerleri (5.14) denklemini sağlamaktadır.

$(5)^2 + (-2)^2 + (-14)^2 = (15)^2$

6.13 $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ Eşitliği

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \tag{6.15}$$

denkleminin tüm çözüm değerleri m, n, p, q değişkenleri tam sayı değeri almak üzere,

$x = mp+nq,$

$y = mq - np,$

$u = mp - nq,$

$v = mq+np$

formülleri ile ifade edilebilir.

Örnek olarak $m=2$, $n=-1$, $p=3$, $q=-2$ için; $x=8$, $y=-1$, $u=4$, $v=-7$

olarak bulunan tam sayı değerleri (6.15) denklemini sağlamaktadır :

$(8)^2+(-1)^2 = (4)^2+(-7)^2$

6.14 $x^4 - y^4 = z^2$ Eşitliği

$$x^4 - y^4 = z^2 \tag{6.16}$$

denkleminin sıfır aşikar çözümünden başka çözümü yoktur.

(6.16) denkleminin her iki tarafını x^2y^2 çarpanı ile çarparsak;

$$(x^4 - y^4)x^2y^2= x^2y^2z^2 \tag{6.17}$$

$$(2x^2y^2)^2 + (x^4 -y^4)^2 = (x^4 + y^4)^2 \tag{6.18}$$

(6.18) eşitliğinde bir pisagor üçgeni mevcuttur. Bu üçgenin alanı $(x^4 - y^4)x^2y^2$ 'dir. Bu değer ise (6.17) formülünde $x^2y^2z^2$ 'nin karesine eşittir. Fakat bu mümkün değildir. Bu nedenle (6.16) denkleminin çözümü yoktur (Carmichael, 1959).

6.15 $x^4 + y^4 = z^2$ Eşitliği

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{6.19}$$

denkleminin sıfır aşikar çözümünden başka çözümü yoktur. (6.19) denklemini aşağıdaki formda yazarsak;

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$$

pisagor üçgenlerin formülüne dönüşecektir. Dik kenarların uzunlukları x^2 ve y^2 olduğundan üçgen alanı $A = (x^2y^2)/2$ olacaktır. Alan kare bir değere eşittir fakat bu mümkün değildir. Bu nedenle (6.19) denkleminin sıfır çözümden farklı bir çözümü yoktur (Carmichael,1959).

6.16 $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ Eşitliği

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \tag{6.20}$$

denkleminin tüm çözüm değerleri m, n değişkenleri tam sayı değeri almak üzere,

$x = 3m^2+5mn-5n^2$,
$y = 4m^2-4mn+6n^2$,
$z = 5m^2- 5mn-3n^2$,
$t = 6m^2- 4mn+4n^2$

formülleri ile ifade edilebilir (Hardy ve Wright,1938).

Örnek olarak m=2, n=-1 için; x=-7, y=20, z=-17, v=14 olarak bulunan tam sayı değerleri (6.20) denklemini sağlamaktadır :

$(-7)^3+(20)^3+(-17)^3 = (14)^3$

6.17 $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$ Eşitliği

$$x^4 + y^4 = u^4 + v^4 \tag{6.21}$$

denkleminin tüm çözüm değerleri m, n, p, q değişkenleri tam sayı değeri almak üzere,

$x = m+n,\ y = p-q,$
$u = p+q,\ v = m-n$

formülleri ile ifade edilebilir.Bu değişkenler ise a, b tam sayı değerler almak koşulu ile;

$m = b(a^2+b^2)(-a^4+18a^2b^2-b^4)$
$n = 2a(a^6+10a^4b^2+a^2b^4+4b^6)$
$p = 2b(4a^6+a^4b^2+10a^2b^4+b^6)$
$q = a(a^2+b^2)(-a^4+18a^2b^2-b^4)$

formülleri ile ifade edilebilir (Hardy ve Wright,1938).

Örnek olarak a=1, b=3 için; x=133, y=134, z=158, v=59 olarak bulunan tam sayı değerleri (6.21) denklemini sağlamaktadır :

$(133)^4 + (134)^4 = (158)^4 + (59)^4$

6.18 $x^4 + y^4 + z^4 = t^2$ Eşitliği

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^2 \tag{6.22}$$

denklemi inceleyelim. Çözüme ulaşmak için çözümünü bildiğimiz $u^2+v^2=w^2$ denklemini kullanacağız.

$u^2+v^2=w^2$ denkleminin çözüm formülleri ; a>b>0 a,b aralarında asal ve tam sayı olmak şartıyla $u=a^2-b^2$, $v=2ab$, $w=a^2+b^2$'dir. Bu denklemin her iki tarafını w^4 ile çarpıp $u^4v^4-2w^4u^2v^2$ ifadesini eklersek;

$$(uv)^4+(vw)^4+(uw)^4 = (w^4-u^2v^2)^2$$

formuna ulaşırız ki bu aradığımız (6.22) eşitliğinin benzeridir. Bu durumda eşitliğin çözüm formülleri aşağıdaki gibi olacaktır :

$x = uv \quad \Rightarrow \quad x=2ab(a^2-b^2)$,

$y = vw \quad \Rightarrow \quad y=2ab(a^2+b^2$

$z = uw \quad \Rightarrow \quad z=a^4-b^4$,

$t = w^4-u^2v^2 \quad \Rightarrow \quad t=m^8+14m^4n^4+n^8$

Örneğin m=2, n=1 için; x=12, y=20, z=15, t=481 olacaktır.

$$(12)^4+(20)^4+(15)^4 = (481)^2$$

7. SONUÇLAR

Diofant Denklemlerin çözümlerine yönelik genel formüller yoktur. Her denklem kendine özgü incelenmiş ve matematikçilerin araştırmaları ile bazı genel denklemlerin çözümleri bulunmuştur. Bölüm 6'da yer verdiğim denklemler ve çözüm formülleri sık rastlanılan ve bu alanda çalışmış matematikçilerin ortaya koydukları sonuçların bir bölümünü oluşturmaktadır. Çözüm yöntemlerini sunarak benzer ya da farklı tarzdaki Diofant Denklemlerin çözümlerine yönelik fikirlere yardımcı olmak istedim.

Tezin genel konusunu, Lineer n Bilinmeyenli Birinci Derece Denklemlerin varolan çözüm yöntemleri ve uygulama alanı oluşturmaktadır. Genel formüller; bir, iki, üç ve dört bilinmeyenli Diofant Denklemlerin incelenmesi suretiyle ve örneklerle açıklanmıştır. Uygulama alanı ise Lineer Programlama problemlerine üç farklı şekilde yaklaşarak tam sayılı çözümlerin bulunmaya çalışılmasıdır. Lineer Programlama problemlerine Diofant Denklemlerin uygulaması aynı zamanda amaç değerini maksimize yapmayan tam sayılı diğer çözümlerin de bulunmasını sağlamaktadır.

Ekler bölümünde ise tezin içinde yeralan beş problemin C dilinde bilgisayar programları yeralmaktadır.

KAYNAKLAR

Anglin, W. S. (1995), The Queen of Mathematics An Introduction to Number Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, Canada.

Apostol, Tom M. (1976), Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, NewYork and London.

Carmichael, Robert D. (1959), The Theory of Numbers and Diophantine Analysis, Dover Publications.

Gelfond A. O. (1962), Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi (Çev.,O. İçen), Türk Matematik Derneği Yayınları, 8, İstanbul.

Hardy, G. H. ve Wright, E. M.,(1938), An Introduction to The Theory of Numbers, Qxford At the Clarendon Press.

Mordell, L. J. (1969), Diophantine Equations, Academic Press, London and NewYork.

Özsöylev, Han Nazmi (1997),"Fermat'nın Son Teoremi", Bilim ve Teknik Dergisi,355:102-103.

Parshin, A. N. ve Shafavich, I. R.,(1990), Number Theory I, Springer.

Stewart, B. M. (1952), Theory of Numbers, The Macmillan Company, NewYork.

Şenkon, H. (1993), Soyut Cebir Dersleri Cilt I, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 3806, İstanbul.

Uspensky, J. V. ve Heaslet, M. A.,(1939), Elementary Number Theory, McGraw-Hillbook Company,Inc., NewYork and London.

Wright, Harry N. (1948), First Course in Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., NewYork.

EKLER

Ek 1. Lineer bir bilinmeyenli bir denklemin sabit terimin tüm bölenlerini bulan ve kök olup olmadıklarını kontrol eden bilgisayar programı.

Ek 2. Lineer iki bilinmeyenli ($ax+by = n$) denklemlerin tam sayılı çözümlerini araştıran bilgisayar programı.

Ek 3. Lineer üç bilinmeyenli ($ax+by+cz = n$) denklemlerin tam sayılı çözümlerini araştıran bilgisayar programı.

Ek 4. Lineer dört bilinmeyenli ($ax+by+cz+dw = n$) denklemlerin tam sayılı çözümlerini araştıran bilgisayar programı.

Ek 5. Girilen her pozitif tam sayının en fazla dört tam sayının kareleri toplamı biçiminde ifade edilebildiğini gösteren bilgisayar programı.

EK 1.

```
/* Tek bilinmeyenli bir denklemin sabit teriminin
   tüm bölenlerini bulan ve kök olup olmadıklarını kontrol eden prg.
*/

# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <conio.h>

# define TRUE 1
# define FALSE 0

void first_screen(void);
void solve_equation(void);

int look_up(int);
int is_divisible (int,int);
int i_pow (int,int);

int degree, *quaficient, iConst;

void main(void)
{ first_screen( );

  solve_equation( );}

}

void first_screen(void)

{ int  i;

 clrscr( );

 printf (“a[1]X^ n + a[2]X^(n-1) + …+ a[n]X + c = 0\n”);

  do { printf(“Denklemin derecesini & katsayılarını giriniz…”);

         scanf(“%d ”,&degree);

     } while (degree < 2);

quaficient = malloc(sizeof (int)* degree);

if ( quaficent = =NULL) { printf ( “ Dinamik bellek hatası…” );

                              exit (1); }

for ( i=0; i< degree; i++) { printf (“ a[%d] =”, i+1 );

                              scanf (“ %d”, &quaficient[i]), if ( i = = 0  && quaficient[i] = = 0)

        { printf( “ En büyük dereceli terim katsayısı sıfır olmamalı…\n ”);

                exit(1); }   }
```

```
for( i= 0; i< degree; i++) {  printf ( " %dX^ %d + ", quaficent[i], degree -1);
          scanf ( " %d",&iConst ); }
void solve_equation( void)
{  int i;
   int cont = 0;
   if ( iConst = = 0) {  printf ( " Denklemin sadece ' sıfır çözümü ' mevcut...\n" );
                        exit(1);
    }
for ( i=1; i<= abs(iConst); i++)
          if ( is_divisible(iCost,i ) { cont += look_up( i );
                                        cont += look_up( -i );
                                   }
if ( cont = = 0) printf (" Denklemin tam sayılı çözümü yok.");
}
int is_divisible( int a,int b)
          { return a%b = = 0 ? TRUE : FALSE;  }
int look_up (int a)
{ int i;   int count = 0;
   int flag = FALSE;
  for (i=0; i<degree; i++)   count += quaficent[ i ] * i_pow(a, degree - i );
  if ( count + iConst = = 0) {  printf ( " \ n %d  Denklemin köküdür ",a );
                                 flag = TRUE;  }
return flag;  }
int i_pow(int a, int b)
{  int i;    int multiplier = 1;
     for ( i=0; i<b; int b)
          multiplier  *= a;
  return multiplier ;
}
```

Ekran Çıktısı Örnekleri

1.

a[1]X^ n + a[2]X^(n-1) + …+ a[n]X + c = 0

Denklemin derecesini & katsayılarını giriniz…5

a[1] = 2
a[2] = 3
a[3] = 4
a[4] = -2
a[5] = -1

2.X^ 5 + 3.X^4 + 4.X^3 + -2.X^2 + -1X^1 + -6

1 Denklemin köküdür.

2.

a[1]X^ n + a[2]X^(n-1) + …+ a[n]X + c = 0

Denklemin derecesini & katsayılarını giriniz…6

a[1] = 1
a[2] = -1
a[3] = 3
a[4] = 0
a[5] = 1
a[6] = -1

1.X^6 + -1.X^ 5 + 3.X^4 + 0.X^3 + 1.X^2 + -1X^1 + 3

Denkleminin tam sayılı çözümü yok.

EK 2.

```
/*  Lineer iki değişkenli denklemlerin tam sayılı çözüm prg.
                          a.x +b.y = c

*/

# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <conio.h>

# define TRUE 1
# define FALSE 0

typedef enum {MİNUS =-1, ZERO, PLUS = 1} SİGNAL;

void first_screen(void);
void equal_two(void);
void simplify(int);
void find_special_xy( int  *,int *, int *, int, int);
void process( int *, int *, int);

int  obeb(int, int);
int is_divisible (int, int);
int i_pow (int, int);
int i_div (int *, int *);
int swap (int *, int *);
SİGNAL signum (int);

int ia, ib, ic;

void main(void)
{ first_screen( );

  equal_two( );

  getch( );

}

void first_screen(void)

{ clrscr( );

 printf (“a.x + b.y =c \n denkleminin katsayılarını giriniz \n”);

 printf ( “\n”);

 printf (“a= ”);  scanf(“%d ”,&ia);

 printf (“b= ”);  scanf(“%d ”,&ib);

 printf (“c= ”);  scanf(“%d ”,&ic);

 printf ( “\n”); }
```

```
void equal_two(void)
{ int iobeb;   int *q;
   int i,x,y;    int r1,r2;
   int counter=0;   int x_spec,y_spec;
   int flag = TRUE;
   iobeb = obeb(ia,ib);
if (! is_divisible (ic,iobeb)) {printf ( "Denklemin tamsayılı çözümü yok.");
                                            getch( ); exit(1); };
simplify ( iobeb);
q= malloc (sizeof (int)*10);
if ( q= = NULL){ printf (" "); exit(1); }
clrscr( );
printf (" %d x + %d y = %d \n",ia,ib,ic);
if (ic = = 0) { printf ( " x = %d t \n",ib);
                      printf ( " y = - %d t \n",ia);
                      for( i=1; i<6; i++) { x=ib*i; y=-ia*i;
                                                    printf ("t= %d   x= %d    y = %d", i, x, y );  };
                      getch ( ); exit(1);  }
if ( abs(ia) < abs(ib) ) flag= swap(&ia, &ib);
r1= abs(ia); r2= abs(ib);
do { q[counter] = i_div (&r1, &r2);
        counter ++;
    } while (r1>1);
find_special_xy (&x_spec, &y_spec, q, counter, flag );
if ( ! flag) { swap(&ia, &ib);
                  x_spec *= -1; y_spec *= -1; };
if ( x_spec* ia+ y_spec* ib = -ic)  { x_spec *= -1; y_spec *= -1;};
if (ib<0)  {printf (" x =%d - %d t \n",x_spec, abs(ib) ); }
        else {printf (" x =%d + %d t \n",x_spec, ib ); };
if (ia<0)  {printf (" y =%d + %d t \n",y_spec, abs(ia) ); }
```

```
      else {printf (" y =%d - %d t \n",y_spec, ia ); };
for( i=0; i<6; i++) { x = x_spec + (ib*i);
      y = y_spec - (ia*i);  printf ("t= %d   x= %d    y = %d", i, x, y );
            }; }
int obeb ( int a, int b)
{ int i;
  int iobeb=1;
  for ( i=2;  ; I++)
   {if  ( is_divisible(a,i) && is_divisible(b,i)) iobeb= I;
     if ( i ≥ abs(a) || i ≥ abs(b)) return iobeb;
   }; }
void simplify( int iobeb )
{ ia /= iobeb;
  ib /= iobeb;
  ic /= iobeb; }
void find_special_xy (int *x_spec, int *y_spec, int *q, int counter, int flag)
{ int i, p1, p2, q1, q2;
  if (flag) {p1=1; p2=q[0]; q1=0; q2=1;}
 else { p1=0; p2=1; q1=1; q2=q[0];};
 for (i=2; i<= counter; i++)
   { process ( &p1, &p2, q[i-1] );
     process ( &q1, &q2, q[i-1] );  }
  *x_spec = i_pow(-1, counter)*signum(ia)*q2*ic;
  *y_spec = i_pow(-1, counter-1)*signum(ib)*p2*ic;
}
void process(int *a, int *b, int q)
{ int temp;   temp = *b;
   *b = *b * q+ *q;
   *a = temp;
}
```

```
int i_div( int *a, int *b )
 { int division, remainder;
   division = *a / *b;
   remainder = *a %*b;
   *a = *b;
   *b = remainder;
     return division;
 }

int i_pow (int a, int b)
{ int i;
  int result =1;
  for ( i=1; i<=b+1; i++)  result *=a;
  return result;
 }
int swap( int *a, int *b)
{ int temp;
 temp = *a;
 *a = *b;
 *b = temp;
 return FALSE;
}
SİGNAL signum ( int a)
{ if (a>0) return PLUS;
  if (a<0) return MİNUS;
  return ZERO; }
```

Ekran Çıktısı Örnekleri

1.

a.x + b.y =c denkleminin katsayılarını giriniz :

a = 4

b = 6

c = 14

2.x + 3.y = 7

x = -7 + 3.t

y = 7 - 2.t

t = 0   x = -7   y = 7

t = 1   x = -4   y = 5

t = 2   x = -1   y = 3

t = 3   x = 2   y = 1

t = 4   x = 5   y = -1

t = 5   x = 8   y = -3

2.

a.x + b.y =c denkleminin katsayılarını giriniz :

a = 8

b = 16

c = 2

Denklemin tam sayılı çözümü yok.

EK 3.

```
/* Lineer üç değişkenli denklemlerin tam sayılı çözüm prg.
                              a.x +b.y + c.z = n

*/


# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <conio.h>

# define TRUE 1
# define FALSE 0

typedef enum {MİNUS =-1, ZERO, PLUS = 1} SİGNAL;

void first_screen(void);
void equal_three(void);
void simplify(int);
void find_special_xy( int *,int *, int *, int, int, int, int, int);
void find_xy(int *,int *, int , int, int);
void process( int *, int *, int);

int obeb(int, int,int);
int is_divisible (int, int);
int i_pow (int, int);
int i_div (int *, int *);
int swap (int *, int *);
SİGNAL signum (int);

int ia, ib, ic, in;
int im=1;
int *q;
int r1, r2, i, x, y, a, b;
int counter=0;
int x_spec, y_spec, u_spec;
ınt flag=TRUE;



void main(void)
{ first_screen( );

  equal_three( );

  getch( );

}

void first_screen(void)

{ clrscr( );

 printf ("a.x + b.y + c.z  = n \n denkleminin katsayılarını giriniz \n");
```

```
  printf ( "\n");
  printf ("a= ");   scanf("%d ",&ia);
  printf ("b= ");  scanf("%d ",&ib);
  printf ("c= ");  scanf("%d ",&ic);
  printf ("n= ");  scanf("%d ",&in);
 printf ( "\n"); }

void equal_three(void)
{ int iobeb;
   int A1,B1,C1,D1;
   int  u, v, t;
   iobeb = obeb(ia,ib,ic);
   im= iobeb;
  if (! is_divisible (in,iobeb)) {printf ( "Denklemin tamsayılı çözümü yok.");
                                        getch( ); exit(1); };
iobeb=obeb(ib,ic,ib);
simplify ( im);
q= malloc (sizeof (int)*10);
if ( q= = NULL){ printf (" "); exit(1); }
clrscr( );
printf (" %d x + %d y +%d z = %d \n",ia,ib,ic,in);
B1 = ic / iobeb;
D1 = (-1)*ib / iobeb;
find_xy(&A1, &C1, D1, B1, 1);
flag= TRUE;
printf ("y = %d u+ %d v \n",A1,B1);
printf ("z = %d u+ %d v \n",C1,D1);
printf (" dönüşümleri uygulanarak; %d x - %d u = %d denklemin çözümü :\n",ia,iobeb,in);
find_xy (&x_spec, &u_spec, ia, iobeb, in );
printf (" x =%d - %d T \n",x_spec, iobeb);
printf (" y =%d + %d T + %d V \n",A1*u_spec, A1*-ia, B1);
```

```
printf (" z =%d + %d T + %d V \n", C1*u_spec,C1*-ia, D1);
}
int obeb ( int a, int b,int c)
{ int i;
  int iobeb=1;
  for ( i=2;  ; i++)
   {if  ( is_divisible(a,i) && is_divisible(b,i))
          {if ( is_divisible(c,i))  iobeb= i;};
      if ( i ≥ abs(a) || i ≥ abs(b) || i ≥ abs(c) )  return iobeb;
   }; }
void simplify( int iobeb )
{ ia /= iobeb;
  ib /= iobeb;
  ic /= iobeb;
  in /= iobeb;  }

void find_xy ( int *x_spec, int *y_spec, int ia, int ib, int ic)
{counter = 0; ib *=-1;
 if ( abs(ia)= =1) {*x_spec = ia*ic; *y_spec = 0; }
 else  { if ( abs(ib)= = 1) {*y_spec = ib*ic; *x_spec = 0; }
        else { if (abs(ia)<abs(ib) )
                   flag = swap(&ia,&ib);  r1= abs(ia); r2 = abs(ib);
                   do {q[counter] = i_div (&r1,&r2); counter ++; } while (r2>1);
               find_special_xy (x_spec,y_spec,q,counter,flag,ia,ib,ic);
              if ( ! flag) { swap (&ia,&ib);
                            *x_spec *= -1; *y_spec *= -1; };
             if ( *x_spec * ia + *y_spec * ib = = -ic )
                   {*x_spec *= -1; *y_spec *= -1; };
              }; };}
```

```
void find_special_xy (int *x_spec, int *y_spec, int *q, int counter, int flag)
{ int i, p1, p2, q1, q2;
  if (flag) {p1=1; p2=q[0]; q1=0; q2=1;}
 else { p1=0; p2=1; q1=1; q2=q[0];};
 for (i=2; i<= counter; i++)
    { process ( &p1, &p2, q[i-1] );
      process ( &q1, &q2, q[i-1] );  }
  *x_spec = i_pow(-1, counter)*signum(ia)*q2*ic;
  *y_spec = i_pow(-1, counter-1)*signum(ib)*p2*ic;
}
void process(int *a, int *b, int q)
{ int temp;
  temp = *b;
   *b = *b * q+ *q;
   *a = temp; }
int i_div( int *a, int *b )
{ int division, remainder;
  division = *a / *b;
  remainder = *a %*b;
  *a = *b;
  *b = remainder;
   return division;
 }
int i_pow (int a, int b)
{ int i;   int result =1;
  for ( i=1; i<=b+1; i++)  result *=a;
  return result; }
int swap( int *a, int *b)
{ int temp;
temp = *a;  *a = *b; *b = temp;
```

```
 return FALSE; }
SİGNAL signum ( int a)
{ if (a>0) return PLUS;
  if (a<0) return MİNUS;
  return ZERO;
}
```

Ekran Çıktısı Örnekleri

1.

a.x + b.y + c.z = n denkleminin katsayılarını giriniz:

a = 3

b = 6

c = 9

n = 5

Denklemin tam sayılı çözümü yok.

2.

a.x + b.y + c.z = n denkleminin katsayılarını giriniz:

a = 65

b = 5

c = 45

n = 15

13x + y + 9z = 3

y = (-1)U + (9)V

dönüşümleri uygulanarak; 13x + (-1)U = 3

z = (0)U + (-1)V

x= -T

y= 3 + 13T + 9V

z= 0 + 0T -V

EK 4.

```
/*  Lineer dört değişkenli denklemlerin tam sayılı çözüm prg.
                    a.x +b.y + c.z  + d.w = n

*/


# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <conio.h>

# define TRUE 1
# define FALSE 0

typedef enum {MİNUS =-1, ZERO, PLUS = 1} SİGNAL;

void first_screen(void);
void equal_four(void);
void simplify(int);
void find_special_xy( int  *,int *, int *, int, int, int, int, int);
void find_xy(int  *,int *, int , int, int);
void process( int *, int *, int);

int  obeb(int, int, int, int);
int is_divisible (int, int);
int i_pow (int, int);
int i_div (int *, int *);
int swap (int *, int *);
SİGNAL signum (int);

int ia, ib, ic, id, in;
int im=1;
int *q;
int r1, r2, i, x, y, a, b, c, d;
int counter=0;
int x_spec, y_spec, u_spec, v_spec;
ınt flag=TRUE;

void main(void)
{ first_screen( );

  equal_four( );

  getch( );

}

void first_screen(void)

{ clrscr( );

 printf (“a.x + b.y + c.z  = n \n denkleminin katsayılarını giriniz \n”);

 printf ( “\n”);
```

```
 printf ("a= ");   scanf("%d ",&ia);
 printf ("b= ");  scanf("%d ",&ib);
 printf ("c= ");  scanf("%d ",&ic);
 printf ("d= ");  scanf("%d ",&id);
 printf ("     n= ");  scanf("%d ",&in);
 printf ( "\n"); }
void equal_four (void)
{ int iobeb;
  int A1,B1,C1,D1;
  int A2,B2,C2,D2;
  int  u1, v1,u2, v2, t;
  iobeb = obeb(ia,ib,ic,id);
  im= iobeb;
 if (! is_divisible (in,iobeb)) {printf ( "Denklemin tam sayılı çözümü yok.");
                                      getch( ); exit(1); };
 iobeb=obeb(ic,id,ic,id);
 simplify ( im);
 q= malloc (sizeof (int)*10);
 if ( q= = NULL){ printf (" "); exit(1); }
 clrscr( );
 printf (" %d x + %d y +%d z + %d w = %d \n",ia,ib,ic,id,in);
 B1 = id / iobeb;  D1 = (-1)*ic / iobeb;
 find_xy(&A1, &C1, D1, B1, 1);
 im = iobeb;  iobeb = obeb(ib, im, ib, im);
 B2 = - im / iobeb;  D2 = - ib / iobeb;
 find_xy(&A2, &C2, D2, B2, 1);
 find_xy(&x_spec, &u_spec, ia, iobeb, in);
 printf (" x =%d - %d T \n",x_spec, iobeb);
 printf (" y =%d - %d T + %d U \n",A2*u_spec, A2*ia, B2);
 printf (" z =%d - %d T + %d U + %d V \n",C2*u_spec, A1*C2*ia, A1*D2, B1);
 printf (" w =%d - %d T + %d U + %d V \n", C1*C2*u_spec,C1*C2*ia, C1*D2, D1);
```

```
}
int obeb ( int a, int b, int c, int d)
{ int i;   int iobeb=1;
  for ( i=2;  ; i++)
   {if  ( is_divisible(a,i) && is_divisible(b,i))
         {if ( is_divisible(c,i) && is_divisible(b,i) )  iobeb= i;};
     if ( i ≥ abs(a) || i ≥ abs(b) || i ≥ abs(c) || i ≥ abs(d)  )  return iobeb;
   }; }
void simplify( int iobeb )
{ ia /= iobeb; ib /= iobeb;
  ic /= iobeb;  id /= iobeb;  in /= iobeb; }
void find_xy ( int *x_spec, int *y_spec, int ia, int ib, int ic)
{counter = 0; ib *=-1;
  if ( abs(ia)= =1) {*x_spec = ia*ic; *y_spec = 0; }
  else  { if ( abs(ib)= = 1) {*y_spec = ib*ic; *x_spec = 0; }
         else { if (abs(ia)<abs(ib) )
                    flag = swap(&ia,&ib); r1= abs(ia); r2 = abs(ib);
                    do {q[counter] = i_div (&r1,&r2); counter ++; } while (r2>1);
                find_special_xy (x_spec,y_spec,q,counter,flag,ia,ib,ic);
               if ( ! flag) { swap (&ia,&ib);
                            *x_spec *= -1; *y_spec *= -1; };
              if ( *x_spec * ia + *y_spec * ib = = -ic )   {*x_spec *= -1; *y_spec *= -1; };
                  }; }; }
void find_special_xy (int *x_spec,int *y_spec,int *q,int counter,int flag,int ia,int ib,int ic)
{ int i, p1, p2, q1, q2;
  if (flag) {p1=1; p2=q[0]; q1=0; q2=1;}
 else { p1=0; p2=1; q1=1; q2=q[0];};
 for (i=2; i<= counter; i++)
   { process ( &p1, &p2, q[i-1] );
     process ( &q1, &q2, q[i-1] );  }
```

```
  *x_spec = i_pow(-1, counter)*signum(ia)*q2*ic;
  *y_spec = i_pow(-1, counter-1)*signum(ib)*p2*ic;}
void process(int *a, int *b, int q)
{ int temp;   temp = *b;
   *b = *b * q+ *q;    *a = temp; }
int i_div( int *a, int *b )
{ int division, remainder;
  division = *a / *b;   remainder = *a %*b;
  *a = *b;  *b = remainder;
    return division; }
int i_pow (int a, int b)
{ int i;   int result =1;
  for ( i=1; i<=b+1; i++)  result *=a;
  return result; }
int swap( int *a, int *b)
{ int temp; temp = *a;
 *a = *b; *b = temp;
 return FALSE; }
SİGNAL signum ( int a)
{ if (a>0) return PLUS;
  if (a<0) return MİNUS;
  return ZERO; }
```

Ekran Çıktısı Örnekleri

1.

a.x + b.y + c.z + d.w = n denkleminin katsayılarını giriniz:

a = 22

b = 11

c = 33

d = 44

n = 54

Denklemin tam sayılı çözümü yok.

2.

a.x + b.y + c.z + d.w = n denkleminin katsayılarını giriniz:

a = 8

b = 6

c = 4

d = 2

n = 10

4x +3y+2z +w = 5

x= 0 - (1)T

y= 5 - (-4)T + (-2)U

z= -5 - (4)T + (3)U + (1)V

w = 0 - (0)T + (0)U + (-1)V

EK 5.

```
/*      Girilen her pozitif tam sayının  en fazla dört tam sayının kareleri toplamı biçiminde
      yazılabildiğini gösteren prg.
 */

# include <stdio.h>
# include <math.h.>
# include <conio.h>

unsigned long first_screen (void);
void process ( unsigned long , unsigned *, unsigned *, un *, un *);
void last_screen ( un long , un , un , un , un );
un long ul_sq (un int);

void main( )

{ unsigned long number;
  unsigned int num1, num2, num3, num4;

 number = first_screen ( );
 process (number, &num1, &num2, &num3, &num4);
 last_screen   (number, num1, num2, num3, num4);
 getch( );

}
unsigned long first screen(void)

{ unsigned long number;

  clrscr( );   printf (" Pozitif bir tam sayı giriniz….");   scanf ( "%lu",&number);

  return number; }

void process(unsigned long n, unsigned *a, unsigned *b, unsigned *c, unsigned *d)

{ unsigned i, k, m;

 *a = sqrt(n);

  for  ( i=*a; ; i--)    { *b = sqrt(n - ul_square(i) );

            if (*b = = 0) {*c = *d = 0; return;}

      for( k=*b; k>0; k --)   {*c = sqrt(n - ul_square(i) - ul_square(k) );

        if (*c = = 0) {*a = i; *b = k; *d = 0; return;}

      for(m = *c; m>0; m--)

          {*d = sqrt(n - ul_square(i) - ul_square(k) - ul_square(m) )

            if( n = = ul_square(i) + ul_square(k) + ul_square(m) + ul_square(*d) )
```

```
{ *a = i; *b = k; *c= m; return;};
 }; };};}
void last_screen(unsigned long n, unsigned a, unsigned b, unsigned c, unsigned d)
{ printf(" % lu sayısı %u , %u , %u , %u  sayılarının  kareleri toplamı biçiminde
yazılabilir.",n,a,b,c,d);
  }
unsigned long ul_square (unsigned a)
{return ( unsigned long) a*a; }
```

Ekran Çıktısı Örnekleri

1.

Pozitif bir tam sayı giriniz....999

999 sayısı 31, 6, 1, 1 sayılarının kareleri toplamı biçiminde yazılabilir.

999 = 31^2 + 6^2 + 1^2 + 1^2.

2.

Pozitif bir tam sayı giriniz....78943

78943 sayısı 279, 33, 3, 2 sayılarının kareleri toplamı biçiminde yazılabilir.

78943 = 279 ^2 + 33^2 + 3^2 + 2^2.

3.

Pozitif bir tam sayı giriniz....5

5 sayısı 2, 1, 0, 0 sayılarının kareleri toplamı biçiminde yazılabilir.

5 = 2^2 + 1^2.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	15.07.1974	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1988-1992	Haydarpaşa Anadolu Teknik Lisesi Elektronik Bölümü
Lisans	1992-1996	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fakültesi Matamatik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1996-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü