

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DUALİTE TEORİSİNİN BAZI
PROBLEMLERİ

706293

Mustafa TOPLU

FBE Matematik Anabilim Dalı Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSAN TEZİ

106293

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abbas Y. Azimov

A. Belev

Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu

Y. Doc. Dr. Ömer Gök

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ

İSTANBUL, 2001

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1 GİRİŞ	1
2 KONVEKS KÜMELER	3
2.1 Konveks Kümelerin Ayrılması ve Desteklenmesi	5
2.1.1 Konveks Bir Küme ile Bir Noktanın Ayrılması	6
2.1.2 İki Konveks Kümenin Ayrılması	6
2.1.3 Konveks Kümelerin Sınır Noktalarında Desteklenmesi	7
3 KONVEKS FONKSİYONLAR	9
3.1 Yönsel Türev	10
3.2 Bir Fonksiyonun Epigrafiği ve Hipografiği	10
4 KONJUGET FONKSİYONLAR	12
5 SUBDİFFERANSİYEL	17
6 DUALİTE	19
6.1 Primal Problem	19
6.2 Verilen Perturbasyon Fonksiyonuna Göre Dual Problem	19
6.3 Dual Problemin Dual Problemi	20
6.4 Normal Problemler	21
7 KONVEKS OLMAYAN DUALİTE	24
7.1 Zayıf Konjuget Fonksiyonlar	24
7.2 Zayıf Subdifferansiyel	26
7.3 Konveks Olmayan Dualite	31
8 UYGULAMA	35
9 SONUÇLAR	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGE LİSTESİ

N	Doğal sayılar kümesi
Z	Tamsayılar kümesi
Z^+	Pozitif tamsayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
R_+	Pozitif reel sayılar kümesi
$\bar{R}$	Reel sayılar kümesine pozitif sonsuz ve negatif sonsuz değerlerinin dahil edilmesi ile elde edilen küme
H	Hiper düzlem
H^+	Kapalı yarı hiper düzlem
$\bar{H}$	Kapalı yarı hiper düzlem
A^0	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$\in$	Elemanı olma, Ait olma
$\emptyset$	Boş küme
$\Rightarrow$	Gerektirme
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
S_α	S kümesinin α düzey kümesi
∂S	S kümesinin sınır noktaları
$H(S)$	S kümesinin konveks örtene
$epif$	f fonksiyonunun epigrafiği
$hipof$	f fonksiyonunun hipografiği
f^*	f fonksiyonunun konjuget fonksiyonu
f^{**}	f fonksiyonunun ikincil konjuget fonksiyonu
∂f	f fonksiyonunun subgradyanı
f^ω	f fonksiyonunun zayıf konjuget fonksiyonu
$f^{\omega\omega}$	f fonksiyonunun ikincil zayıf konjuget fonksiyonu
$\partial^\omega f$	f fonksiyonunun zayıf subgradyanı
(P)	Primal problem
(P^*)	Dual problem
Φ	Perturbasyon fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Konveks küme ile konveks olmayan küme farkı.....	3
Şekil 2.2 Koni örnekleri.....	5
Şekil 2.3 Kapalı konveks bir kümeye en yakın mesafe.....	5
Şekil 2.4 Konveks bir kümenin hiperdüzlemlerin kesişimi olarak gösterilmesi.....	6
Şekil 2.5 Konveks kümelerin hiper düzlem ile ayrılması.....	7
Şekil 2.6 Destek hiperdüzlem örnekleri.....	7
Şekil 2.7 Konveks kümenin sınır noktasındaki destek hiperdüzlemi.....	8
Şekil 3.1 Konveks ve konkav fonksiyonların gösterimi.....	9
Şekil 3.2 Epigrafik ve hipografik örnekleri.....	10



ÖZET

Bu çalışmada, konveks olmayan optimizasyon problemi için sıfır aralıklı bir dualite sunulmuştur. Bu Rockafellar dualite yaklaşımının genelleştirilmesidir. Sunulan dualite, bu çalışmada geliştirilen zayıf konjuget fonksiyonların üzerine inşa edilmiştir. Subdifferansiyel teoremlerini sağlamak için kuadratik konkav sürekli destek fonksiyonları kullanılmıştır. Bu bizi normlu bir uzayda aşağıdan Lipschitz amaç fonksiyonunu ele almamızı mümkün hale getirmiştir.

İlk olarak, genel bir minimizasyon problemi ele alınmıştır. Bu minimizasyon problemi bir perturbasyon problemleri ailesine gömülmüştür. Sonra, zayıf konjuget fonksiyonlar kullanılarak bu problem dual bir problem ile ilişkilendirilmiştir. Son olarak ise, aşağıdan Lipschitz amaç fonksiyona sahip ve konveks kısıt kümesine sahip bir probleme ilişkin bir uygulama sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: konveks olmayan programlama, zayıf konjuget fonksiyonlar, zayıf subdifferansiyel, sıfır aralıklı dualite.

ABSTRACT

In this study, a duality with zero gap for nonconvex optimization problem is presented. It is a generalization of the Rockafellar duality scheme. The duality is constructed on weak conjugate functions and weak subdifferentials developed in this work. The continuous quadratic concave support functions is used in order to provide subdifferentiability theorems. This enables us to consider support cones and the minimization problems with lower Lipschitz objective functions on normed spaces.

First, a general minimization problems is considered. The minimization problem is embedded in a family of perturbed problems. Then, a concave dual problem is associated with it by using weak conjugate functions. Finally, an application to problem with lower Lipschitz objective function and convex constraints is presented.

Key Words: nonconvex programming, conjugate functions, weak conjugate functions, subdifferentials, weak subdifferentials, duality with zero gap.



1 GİRİŞ

Verilen bir optimizasyon problemi için, bu problem ile yakın ilişkili diğer bir optimizasyon problemi daha vardır. Bu problemlerden ilki *primal problem* diğeri ise *dual problem* olarak isimlendirilir.

Verilen bir optimizasyon probleminin, dual problemini elde etmekte kullanılan çeşitli yaklaşımlar vardır. Lagrange dual problemi ve perturbasyon dual problemi bu yaklaşımlardan önemli ikisidir. Lagrange yaklaşımı özellikle hesaplamalar açısından önemli avantajlara sahiptir. Konveks dualite teorisinde dual problem Lagrange ya da perturbasyon yöntemi ile elde edilebilir. Khun-Tucker vektörü Lagrange yaklaşımında Lagrange çarpanlarını verirken, perturbasyon yönteminde perturbasyon fonksiyonun konjuget fonksiyonunun minimum değerini vermektedir. Bu alandaki ilk sonuçlar Fenchel (1949) ve Rockafellar (1970) tarafından yapılmıştır.

Lineer olmayan optimizasyon probleminin dual problemini elde etmekte Lagrange fonksiyonu kullanıldığında, amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları konveks olmadığı sürece çoğu kez dual fark oluşmaktadır. Genelleştirilmiş konvekslik gibi kavramlarla konvekslik varsayımlarını hafifletmek için bazı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin Hanson (1980) *inveks* fonksiyonlar olarak isimlendirilen fonksiyonlarla Khun-Tucker optimallik yeter koşullarını ispatlamıştır.

Konveks kümelerin sınır noktalarında destek hiper düzleme sahip oldukları iyi bilinen bir gerçektir. Bu kavram konveks analizin en önemli kavramlarından olan *subgradyant* kavramını ortaya çıkarmıştır. Subgradyant optimallik koşulları ve dualite teorilerinin elde edilmesinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Konveks olmayan kümeler her sınır noktasında destek hiper düzleme sahip olmadığından, subgradyant kavramı konveks olmayan problemler için optimallik koşulları olarak genelleştirilmiştir.

Bu çalışmada, lineer fonksiyonlar yerine konkav sürekli fonksiyonlar kümesi kullanılarak, konveks olmayan minimizasyon problemler için, konveks problemlerdeki klasik dualite

teorileri elde edilmek istenmiştir. Kullanılan yöntem konveks olmayan kümelerin konkav fonksiyonların hipografikleri ile ayrılması esasına dayandırılmıştır.

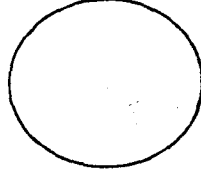


2 KONVEKS KÜMELER

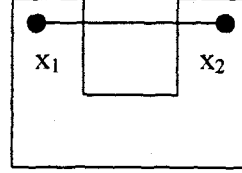
Tanım 2.1

$S \subseteq E_n$ ve $S \neq \emptyset$ küme olsun. S kümesinin herhangi iki elemanını birleştiren doğru parçası S kümesine dahil ise S kümesine konveks küme denir. Yani,

$$\forall x_1, x_2 \in S \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (2.1)$$



a) Konveks



b) Konveks değil

Şekil 2.1 Konveks küme ile konveks olmayan küme farkı

Önerme 2.2

S_1 ve S_2 , E_n 'de konveks kümeler olsun. O zaman

- (1) $S_1 \cap S_2$ konveks kümedir.
- (2) $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1 \text{ ve } x_2 \in S_2\}$ konveks kümedir.
- (3) $S_1 - S_2 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \in S_1 \text{ ve } x_2 \in S_2\}$ konveks kümedir.

Tanım 2.3

$S \subseteq E_n$ ve konveks bir küme olsun. S kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının topluluğuna S kümesinin *konveks örteni* denir ve $H(S)$ ile gösterilir. Yani,

$$x \in H(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_k \in S \text{ ve } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere} \\ x \text{ aşağıdaki gibi gösterilebilir} \\ x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \text{ için} \end{cases} \quad (2.2)$$

Önerme 2.4

$S \subseteq E_n$ olsun. $H(S)$, S kümesini içeren en küçük konveks kümedir.

Teorem 2.5

$S \subseteq E_n$ ve boş olmayan konveks bir küme olsun. $x_1 \in S$, $x_2 \in S^0$ ve $\forall \lambda \in (0,1)$ olsun. O halde,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S^0, \quad \forall \lambda \in (0,1) \text{ dir.}$$

Önerme 2.6 S konveks ise S^0 de konvektir.

Önerme 2.7 S konveks ise $\bar{S}$ de konvektir.

Önerme 2.8 S konveks ve $S^0 \neq \emptyset$ ise $\overline{S^0} = \bar{S}$ dir.

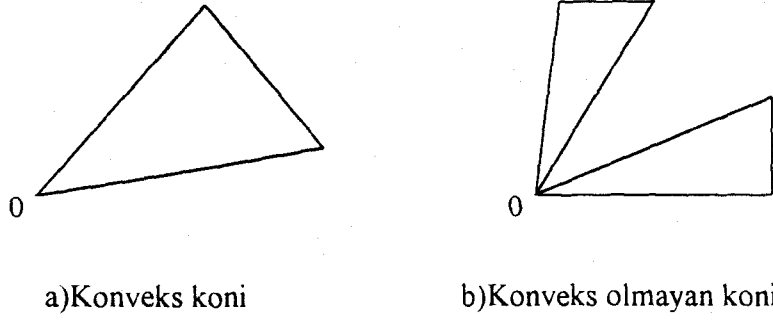
Önerme 2.9 S konveks ve $S^0 \neq \emptyset$ olsun. O halde, $\bar{S}^0 = S^0$

Tanım 2.10

$C \subseteq E_n$ ve $C \neq \emptyset$ olsun. C kümesi aşağıdaki şartı sağlıyorsa, C 'ye sıfır köşeli bir *koni* denir.

$$x \in C \Rightarrow \lambda x \in C, \quad \text{her } \lambda \geq 0$$

Ayrıca, C kümesi konveks bir küme ise, C konveks koni olarak isimlendirilir.



Şekil 2.2 Koni örnekleri

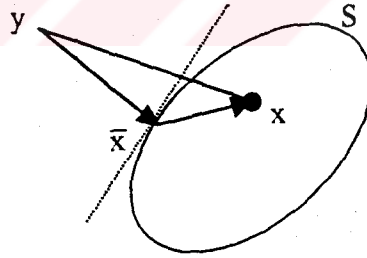
2.1 Konveks Kümelerin Ayrılması ve Desteklenmesi

Optimizasyonda, ayrık konveks kümelerin ayrılması ve destek hiperdüzlemi kavramlarının çok önemli bir yeri vardır. Hemen hemen tüm optimalite koşulları ve dualite sonuçları konveks kümelerin ayrılması ya da desteklenmesi teoremlerini kullanır.

Teorem 2.11

$S \subseteq E_n$ kapalı konveks bir küme ve $y \notin S$ olsun. O halde, S kümesinde, y noktasına uzaklığı minimum olan yalnız bir tek $\bar{x} \in S$ noktası vardır. Ayrıca,

$$\bar{x}, y \text{ noktasına en yakın nokta} \Leftrightarrow (x - \bar{x})'(y - \bar{x}) \leq 0, \quad \forall x \in S \quad (2.3)$$



Şekil 2.3 Kapalı konveks bir kümeye en yakın mesafe

Tanım 2.12 (Hiperdüzlem)

$p \neq 0$ ve $p \in E_n$ olsun. α bir skaler olsun. $\{x: p'x = \alpha\}$ şeklindeki noktaların topluluğuna E_n 'de bir hiperdüzlem denir ve H ile gösterilir. Yani,

$$H = \{x: p'x = \alpha\}, \quad p \in E_n, \quad p \neq 0 \text{ ve } \alpha \text{ skaler.} \quad (2.4)$$

Burada, p vektörüne hiperdüzlemin normali denir. Bir H hiperdüzlemi, H^+ ve H^- ile gösterilen iki tane kapalı yarı uzay belirtir.

$$H^+ = \{x : p'x \geq \alpha\} \text{ ve } H^- = \{x : p'x \leq \alpha\} \quad (2.5)$$

H hiperdüzlemi iki tane de *açık yarı uzay* belirtir

$$\{x : p'x > \alpha\} \text{ ve } \{x : p'x < \alpha\} \quad (2.6)$$

2.1.1 Konveks bir küme ile bir noktanın ayrılması

Teorem 2.13

$S \subseteq E_n$ ve $S \neq \emptyset$ kapalı konveks bir küme olsun. $y \notin S$ olsun. O halde,

$$p'y > \alpha \text{ ve } p'x \leq \alpha \quad \forall x \in S \quad (2.7)$$

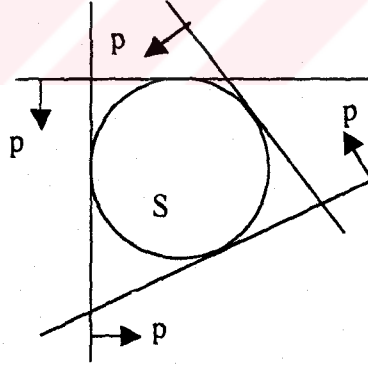
olacak şekilde, bir $p \neq 0$ vektörü ve bir α skaler sayısı vardır.

Teorem 2.14

$S \subseteq E_n$ kapalı konveks bir küme olsun. O halde, S kümesini içeren bütün yarım hiperdüzlemlerin kesişimi S kümesine eşittir. Yani,

$I = \{i \in \mathbb{N} : S \subseteq H_i^+ \text{ ve } H_i^+ \text{ yarım hiperdüzlem}\}$ olmak üzere,

$$S = \bigcap_{i \in I} H_i^+ \text{ dir.}$$



Şekil 2.4 Konveks bir kümenin hiperdüzlemlerin kesişimi olarak gösterilmesi

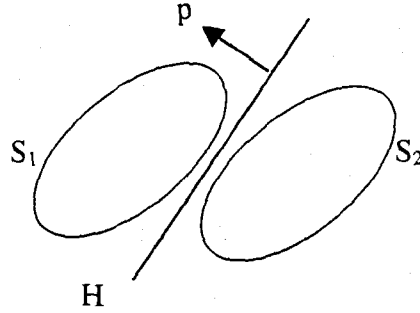
2.1.2 İki Konveks Kümenin Ayrılması

Tanım 2.15

S_1 ve S_2 , E_n 'de boşkümeden farklı iki küme olsun. Eğer,

$$p'x \geq \alpha, \quad \forall x \in S_1 \quad \text{ve} \quad p'x \leq \alpha, \quad \forall x \in S_2 \quad (2.8)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $p \in E_n$ var ise, $H = \{x : p'x = \alpha\}$ hiperdüzlemi S_1 ve S_2 kümelerini ayırır denir.



Şekil 2.5 Konveks kümelerin hiper düzlem ile ayrılması

2.1.3 Konveks Kümelerin Sınır Noktalarında Desteklenmesi

Tanım 2.16

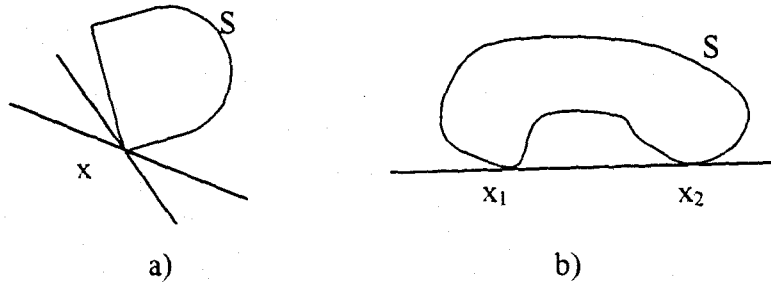
$S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ bir küme ve $\bar{x} \in \partial S$ olsun. Aşağıdaki şartlardan en az biri sağlanıyorsa $H = \{x : p'(x - \bar{x}) = 0\}$ hiperdüzlemine S kümesinin $\bar{x}$ noktasında destek hiperdüzlemi denir.

(i) $p'(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in S$ ya da (ii) $p'(x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in S$

Bu tanım şu şekilde de verilebilir.

$$p'\bar{x} = \inf\{p'x : x \in S\} \text{ ya da } p'\bar{x} = \sup\{p'x : x \in S\}$$

şartını sağlayan bir p vektörü varsa, $H = \{x : p'(x - \bar{x}) = 0\}$ hiperdüzlemine S kümesinin $\bar{x}$ noktasında destek hiperdüzlemi denir.

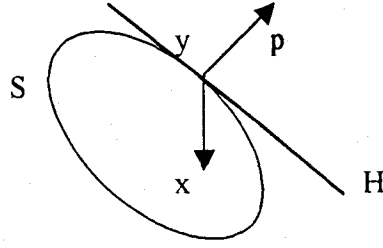


Şekil 2.6 Destek hiperdüzlem örnekleri

Teorem 2.17 (Destek Teoremi):

$S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ konveks bir küme ve $\bar{x} \in \partial S$ olsun. O halde, sıfırdan farklı öyle bir p vektörü

var ki, $p'(x - \bar{x}) \leq 0, \quad \forall x \in \bar{S}$ dir.



Şekil 2.7 Konveks kümenin sınır noktasındaki destek hiperdüzlemi

Teorem 2.18

S_1, S_2 kümeleri boş kümeden farklı iki konveks küme ve $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olsun. O halde, öyle bir hiperdüzlem var ki S_1 ve S_2 kümesini ayırır. Yani,

$$\exists p \neq 0: \quad \inf\{p'x : x \in S_1\} \geq \sup\{p'x : x \in S_2\}$$

Teorem 2.19

S_1, S_2 boş kümeden farklı iki konveks küme olsun. Ayrıca, $S_2 \neq \emptyset$ ve $S_1 \cap S_2^0 = \emptyset$ olsun. O halde öyle bir $p \neq 0$ vektörü vardır ki,

$$\inf\{p'x : x \in S_1\} \geq \sup\{p'x : x \in S_2\} \text{ dir.}$$

Teorem 2.20

S_1, S_2 içleri boş olmayan iki konveks küme olsun ($S_1^0 \neq \emptyset$ ve $S_2^0 \neq \emptyset$). O halde, öyle bir $p \neq 0$ vektörü vardır ki $\inf\{p'x : x \in S_2\} \geq \sup\{p'x : x \in S_1\}$ şartını sağlar.

3 KONVEKS FONKSİYONLAR

Tanım 3.1

$f : S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon, $S \subseteq E_n$ ve $S \neq \emptyset$ konveks bir küme olsun. Eğer

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in S \text{ ve } \forall \lambda \in [0,1] \quad (3.1)$$

şartı sağlanıyorsa, f ye S üzerinde *konveks* bir fonksiyon denir.

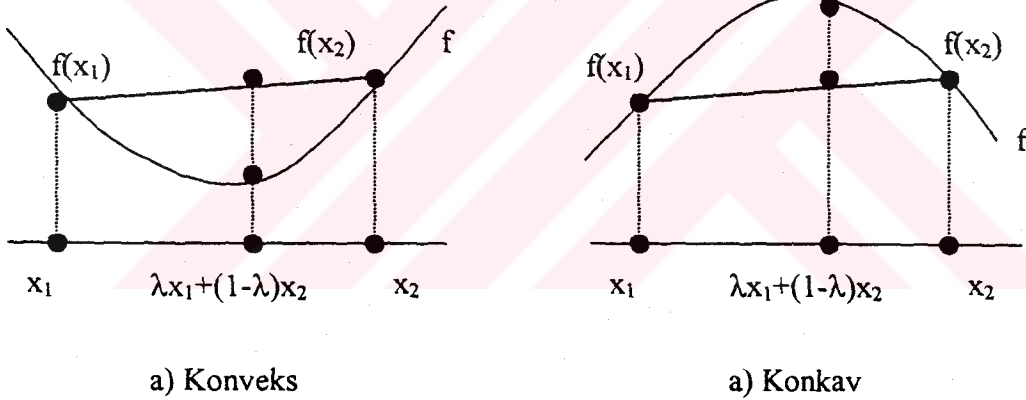
Tanım 3.2

$f : S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon, $S \subseteq E_n$ ve $S \neq \emptyset$ konveks bir küme olsun. Eğer

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in S \text{ ve } \forall \lambda \in (0,1) \quad (3.2)$$

şartı sağlanıyorsa, f ye S üzerinde *tam konveks* bir fonksiyon denir.

Ayrıca $-f$ S üzerinde (tam) konveks ise f ye S üzerinde (tam) konkav bir fonksiyon denir.



Şekil 3.1 Konveks ve konkav fonksiyonların gösterimi

Tanım 3.3

$f : S \rightarrow E_n$ konveks bir fonksiyon ve α bir skaler olsun. $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ kümesine f nin *düzey kümesi* denir.

Önerme 3.4

$S \subseteq E_n$, S konveks bir küme ve $f : S \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon olsun. O halde, her α skaleri için,

$$S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$$

düzey kümesi konveks bir kümedir.

Teorem 3.5 (Konveks Fonksiyonların Sürekliliği)

$S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ konveks bir küme ve $f : S \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon olsun. O halde, f fonksiyonu S kümesinin içinde süreklidir.

3.1 Yönsel Türev

Tanım 3.6

$S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ ve $f : S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon olsun. $x \in S$ olsun. d sıfırdan farklı öyle bir vektör olsun ki, yeteri kadar küçük pozitif bir λ için $\bar{x} + \lambda d \in S$ olsun. f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasında ve d vektörü yönündeki yönsel türevi $f'(\bar{x}, d)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$f'(\bar{x}; d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \quad (3.3)$$

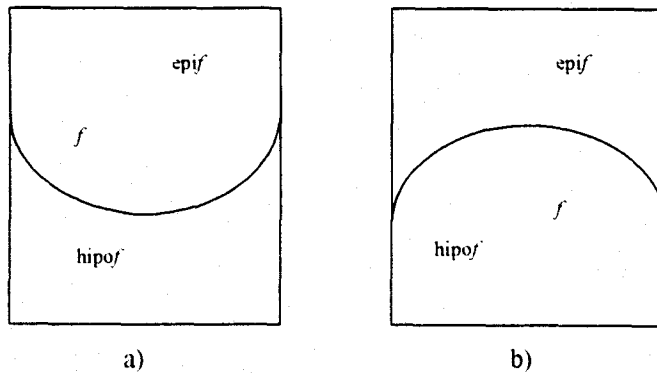
3.2 Bir Fonksiyonun Epigrafiği ve Hipografiği

Tanım 3.7

$S \subseteq E_n$ 'de boş kümeden farklı bir küme olsun. $f : S \rightarrow E_1$ bir fonksiyon olsun. f 'nin epigrafı

$$\text{epi} f = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \geq f(x)\} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 3.2 Epigrafik ve hipografik örnekleri

Teorem 3.8

$S \subseteq E_n$ 'de boş kümeden farklı konveks bir küme ve $f: S \rightarrow E_1$ olsun. O halde, f konveks $\Leftrightarrow \text{epi} f$ konveks kümedir.

Teorem 3.9

$S \subseteq E_n$ 'de boş kümeden farklı konveks bir küme ve $f: S \rightarrow E_1$ konveks bir fonksiyon olsun. O halde, $\bar{x} \in \text{int } S$ için öyle bir ξ vektörü vardır ki

$$H = \{(x, y) : y = f(\bar{x}) + \xi(x - \bar{x})\}$$

hiperdüzlemi $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ noktasında $\text{epi} f$ 'yi destekler.



4 KONJUGET FONKSİYONLAR

Tanım 4.1

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f 'nin konjuget fonksiyonu $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$ şöyle tanımlıdır.

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} \quad \text{her } x^* \in E_n \quad (4.1)$$

Önerme 4.2

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyon ve $f^* : E_n \rightarrow \bar{R}$ f 'nin konjuget fonksiyonu olsun. O halde,

$$f^*(0) = - \inf_{x \in E_n} f(x) \text{ dir.} \quad (4.2)$$

İspat: Tanım 4.1'den,

$$\begin{aligned} f^*(0) &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, 0 \rangle - f(x) \} \\ &= \sup_{x \in E_n} \{ -f(x) \} \\ &= - \inf_{x \in E_n} \{ f(x) \} \end{aligned}$$

Önerme 4.3

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ ve $g : E_n \rightarrow \bar{R}$ birer fonksiyon olsun. O halde,

$$\forall x \in E_n \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow f^*(x^*) \geq g^*(x^*) \text{ dir.} \quad (4.3)$$

İspat: Tanım 4.1'den,

$$\begin{aligned} \forall x \in E_n \quad f(x) \leq g(x) &\Rightarrow -f(x) \geq -g(x) \quad \forall x \in E_n \\ &\Rightarrow \langle x, x^* \rangle - f(x) \geq \langle x, x^* \rangle - g(x) \quad \forall x \in E_n \\ &\Rightarrow \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} \geq \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - g(x) \} \\ &\Rightarrow f^*(x^*) \geq g^*(x^*) \end{aligned}$$

Önerme 4.4

Her $i \in I$ için, $f_i : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. O halde aşağıdakiler doğrudur.

$$(i) \quad (\inf_{i \in I} f_i)^* = \sup_{i \in I} f_i^* \quad (4.4)$$

$$(ii) \quad (\sup_{i \in I} f_i)^* \leq \inf_{i \in I} f_i^* \quad (4.5)$$

İspat: (i) Tanım 4.1'den,

$$\begin{aligned} (\inf_{i \in E_n} f_i)^*(x^*) &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - \inf_{i \in E_n} f_i(x) \} \\ &= \sup_{x \in E_n} \sup_{i \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f_i(x) \} \\ &= \sup_{i \in E_n} \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f_i(x) \} \\ &= \sup_{i \in E_n} f_i^*(x^*) \end{aligned}$$

(ii) Tanım 4.1'den,

$$\begin{aligned} f_i^*(x^*) &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f_i(x) \}, \quad \forall i \in I \\ \inf_{i \in E_n} f_i^*(x^*) &= \inf_{i \in E_n} \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f_i(x) \} \\ &\geq \sup_{x \in E_n} \inf_{i \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f_i(x) \} \\ &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - \sup_{i \in E_n} f_i(x) \} \\ &= (\sup_{i \in E_n} f_i(x))^*(x^*) \end{aligned}$$

Önerme 4.5

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$, $f^*: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. O halde aşağıdakiler doğrudur.

$$(i) \quad (\lambda f)^*(x^*) = \lambda f^*\left(\frac{x^*}{\lambda}\right), \quad \forall \lambda > 0 \quad (4.6)$$

$$(ii) \quad (f + \alpha)^*(x^*) = f^*(x^*) - \alpha, \quad \forall \alpha \in R \quad (4.7)$$

İspat: (i) Tanım 4.1'den,

$$(\lambda f)^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - \lambda f(x) \}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \sup_{x \in E_n} \left\{ \left\langle x, \frac{x^*}{\lambda} \right\rangle - f(x) \right\} \\
&= \lambda f^* \left(\frac{x^*}{\lambda} \right)
\end{aligned}$$

(ii) Tanım 4.1'den,

$$\begin{aligned}
(f + \alpha)^*(x^*) &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - (f + \alpha)(x) \} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) - \alpha \} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} - \alpha \\
&= f^*(x^*) - \alpha
\end{aligned}$$

Tanım 4.6

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f 'nin konjuget fonksiyonu $f^*: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f 'nin ikincil konjuget fonksiyonu $f^{**}: E_n \rightarrow \bar{R}$ şöyle tanımlıdır:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in E_n} \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \} \quad \text{her } x \in E_n \quad (4.8)$$

Önerme 4.7

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. $f^*(x^*)$ ve $f^{**}(x)$ fonksiyonları konvektir.

İspat: $x_1^*, x_2^* \in E_n$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun.

$$\begin{aligned}
f^*(\lambda x_1^* + (1 - \lambda)x_2^*) &= \sup_{x \in E_n} \{ \langle x, \lambda x_1^* + (1 - \lambda)x_2^* \rangle - f(x) \} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda \langle x, x_1^* \rangle + (1 - \lambda) \langle x, x_2^* \rangle + \lambda f(x) - \lambda f(x) - f(x) \} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda \langle x, x_1^* \rangle + (1 - \lambda) \langle x, x_2^* \rangle + \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) \} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda [\langle x, x_1^* \rangle - f(x)] + (1 - \lambda) [\langle x, x_2^* \rangle - f(x)] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x \in E_n} \{\lambda[\langle x, x_1^* \rangle - f(x)]\} + \sup_{x \in E_n} \{(1-\lambda)[\langle x, x_2^* \rangle - f(x)]\} \\
&= \lambda \sup_{x \in E_n} \{\langle x, x_1^* \rangle - f(x)\} + (1-\lambda) \sup_{x \in E_n} \{\langle x, x_2^* \rangle - f(x)\} \\
&= \lambda f^*(x_1^*) + (1-\lambda) f^*(x_2^*)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $f^{**}(x)$ fonksiyonun da konveks olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.8

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. O halde

$$f^{**}(x) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n \quad (4.9)$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\langle x, x^* \rangle - f(x) &\leq f^*(x^*), \quad \forall x, x^* \in E_n \\
\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) &\leq f(x), \quad \forall x, x^* \in E_n
\end{aligned}$$

x noktasını sabitleyip supremum alırsak,

$$\begin{aligned}
\sup_{x^* \in E_n} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} &\leq f(x) \\
f^{**}(x) &\leq f(x)
\end{aligned}$$

Önerme 4.9

Her $f: E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonu için $f^* = f^{***}$ dir. (4.10)

İspat: Teorem 4.8'den $f^{**} \leq f$ olduğunu biliyoruz. (4.3)'den

$$f^* \leq f^{***} \quad (4.11)$$

Tanım 4.6'dan

$$\begin{aligned}
\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) &\leq f^{**}(x), \quad \forall x \in E_n \\
\langle x^*, x \rangle - f^{**}(x) &\leq f^*(x^*), \quad \forall x \in E_n
\end{aligned}$$

$$\sup_{x^* \in E_n} \{\langle x, x^* \rangle - f^{**}(x)\} \leq f^*(x^*)$$

$$f^{***}(x) \leq f^*(x^*) \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12)'den $f^* = f^{***}$ dir.



5 SUBDİFFERANSİYEL

Tanım 5.1

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$f(x) \text{ sınırlı ve } \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

şartını sağlayan $x^* \in E_n$ var ise x^* vektörüne f 'nin $\bar{x}$ 'daki subgradyantı denir. f 'nin $\bar{x}$ 'daki subgradyantlarının kümesine f 'nin $\bar{x}$ 'daki subdifferansiyeli denir ve $\partial f(\bar{x})$ ile gösterilir.

Teorem 5.2

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset \text{ ise } f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x}) \text{ dir} \quad (5.1)$$

İspat: $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x^* \in E_n : x^* \in \partial f(\bar{x})$ dir. Tanım 5.1'den,

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$$\langle x^*, x \rangle - f(x) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n$$

$$f^*(x^*) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \quad (5.2)$$

$$f(\bar{x}) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f^*(x^*) \leq f^{**}(\bar{x}) \quad (5.3)$$

(4.9) ve (5.3)'den $f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x})$ dir.

Teorem 5.3

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon olsun. f^* ise f 'nin konjuget fonksiyonu olsun. O halde,

$$x^* \in \partial f(\bar{x}) \Leftrightarrow f(\bar{x}) + f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle \text{ dir.} \quad (5.4)$$

İspat: $(\Rightarrow)$ $x^* \in \partial f(\bar{x})$ ise Tanım 5.1 ve (5.2)'den,

$$f^*(x^*) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x})$$

$$f^*(x^*) + f(\bar{x}) \leq \langle x^*, \bar{x} \rangle \quad (5.5)$$

Ayrıca Tanım 4.1'den $\langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x}) \leq f^*(x^*)$ dir. Yani,

$$\langle \bar{x}, x^* \rangle \leq f(\bar{x}) + f^*(x^*) \quad (5.6)$$

$$(5.5) \text{ ve } (5.6)'dan \quad f(\bar{x}) + f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle \text{ dir.} \quad (5.7)$$

($\Leftarrow$) Tanım 4.1'den,

$$\langle x, x^* \rangle - f(x) \leq f^*(x^*), \quad \forall x \in E_n$$

$$\langle x, x^* \rangle - f(x) \leq f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n \quad (\text{hipotezden})$$

$$\langle x, x^* \rangle - \langle \bar{x}, x^* \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$$\langle x - \bar{x}, x^* \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$$x^* \in \partial f(\bar{x}) \quad (5.8)$$

6 DUALİTE

Bu bölümde bir primal minimizasyon problem ile dual problem olarak isimlendirilen bir maksimizasyon problemi ilişkilendirilecek. Böylece bu iki problem arasındaki ilişki incelenecek.

6.1 Primal Problem

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere,

$$(P) \quad \inf_{x \in E_n} f(x) \quad (6.1)$$

minimizasyon problemi ile ilgileneceğiz. (P) problemi *primal* problem olarak isimlendirilir. (P) probleminin infimum değeri $\text{Inf}P$ olarak gösterilir. $f(x) = \text{Inf}P$ şartını sağlayan her $x \in E_n$, (P) probleminin bir çözümü olarak isimlendirilir. Eğer $f(x_0) < +\infty$ olacak şekilde $x_0 \in E_n$ var ise (P) problemi *basit olmayan* problem olarak isimlendirilir.

Pertürbasyon

$f(x)$ fonksiyonu ile ilgili $\Phi : E_n \times E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere

$$\Phi(x, 0) = f(x) \quad (6.2)$$

şartını sağlayan $\Phi(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım. $\Phi(x, y)$ fonksiyonuna *Perturbasyon fonksiyonu* denilir. $\forall y \in E_n$ için

$$(P_y) \quad \inf_{x \in E_n} \Phi(x, y) \quad (6.3)$$

minimizasyon problemini tanımlayalım. Burada açıkça görülmektedir ki, $y = 0$ için, (P_0) problemi ile (P) problemi aynı problemi ifade etmektedir. (P_y) problemine, verilen perturbasyon fonksiyonuna göre, (P) probleminin *Perturbasyon problemi* denir.

6.2 Verilen Perturbasyon Fonksiyonuna Göre Dual Problem

(P) problemi ve (P_y) perturbasyon problemi için dual problemi tanımlayabiliriz.

$\Phi^* : E_n \times E_n \rightarrow \bar{R}$, fonksiyonu Φ perturbasyon fonksiyonunun konjuget fonksiyonu olsun.

(P) probleminin Φ perturbasyon fonksiyonuna göre dual problemi

$$(P^*) \quad \sup_{y \in E_n} \{-\Phi^*(0, y^*)\} \quad (6.4)$$

olarak tanımlıdır. (P^*) probleminin supremum değeri $SupP^*$ şeklinde gösterilir. Ayrıca,

$$SupP^* = -\Phi^*(0, y^*) \quad (6.5)$$

şartını sağlayan her $y^* \in E_n$ elemanı (P^*) probleminin bir *çözümü* olarak isimlendirilir. (P) ile (P^*) arasındaki ilk ilişki aşağıdaki önerme de verilmiştir.

Önerme 6.1

$$SupP \leq InfP^*. \quad (6.6)$$

İspat: $y^* \in E_n$ de keyfi bir eleman olsun. Tanım 4.1'den,

$$\Phi^*(0, y^*) = \sup_{(x,y) \in E_n \times E_n} \{\langle y^*, y \rangle - \Phi(x, y)\}$$

Buradan da, $\forall x \in E_n$ için,

$$\Phi^*(0, y^*) \geq \langle y^*, 0 \rangle - \Phi(x, 0)$$

$$-\Phi^*(0, y^*) \leq \Phi(x, 0) \quad (6.7)$$

(6.7) deki ilişki her $(x, y^*) \in E_n \times E_n$ için geçerli olduğu için

$$SupP \leq InfP^*$$

sonucunu elde ederiz.

6.3 Dual Problemin Dual Problemi

Bir minimizasyon probleminin dual problemini elde etmekte kullanılan teknik kolayca bir maksimizasyon problemine dönüştürülebilir.

$$\sup_{x \in E_n} \{-f(x)\} = -\inf_{x \in E_n} \{f(x)\} \quad (6.8)$$

özelliğinden yararlanarak, (P^*) dual probleminin perturbasyon problemi verilen pertubasyonlara göre,

$$(P_x^*) \quad \sup_{y \in E_n} \{-\Phi^*(x^*, y^*)\} \quad (6.9)$$

şeklinde verilebilir. (P^*) probleminin de dual problemini oluşturacak olursak,

$$(P^{**}) \quad -\sup_{x \in E_n} \{-\Phi^{**}(x, 0)\} = \inf_{x \in E_n} \{\Phi^{**}(x, 0)\} \quad (6.10)$$

(P) probleminin ikincil dual problemi elde edilir. Bu aşamadan sonra dual problem prosesini devam ettirmenin bir anlamı yoktur. Çünkü, (P^{**}) probleminin perturbasyonları

$$(P_y^{**}) \quad \inf_{u \in E_n} \Phi^{**}(x, y) \quad (6.11)$$

biçiminde olup, verilen bu perturbasyonlara göre, (P^{**}) probleminin dual problemi,

$$(P^{***}) \quad \sup_{y^* \in E_n} \{-\Phi^{***}(0, y^*)\} \quad (6.12)$$

biçimindedir. Fakat, Önerme 4.9'dan $\Phi^{***} = \Phi^*$ olduğu dikkate alınırsa (P^{***}) probleminin (P^*) problemine eşdeğer olduğu görülür.

Ayrıca, (6.1), (6.2) ve (6.10) görülür ki, eğer

$$\Phi^{**}(x, 0) = \Phi(x, 0), \quad \forall x \in E_n \quad (6.13)$$

şartı sağlanırsa, (P) ve (P^*) problemleri birbirinin dual problemidir. Yani, primal problem ile dual problem arasında tam bir simetri vardır.

6.4 Normal Problemler

Bu bölümde $h: E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonu

$$h(y) = \inf_{x \in E_n} \Phi(x, y) \quad (6.14)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 6.2

Φ fonksiyonu konveks ise $h: E_n \rightarrow \bar{R}$ fonksiyonu da konvektir.

İspat: $x_1, x_2 \in E_n$ ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu durumda,

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2) \quad (6.15)$$

sağ taraf tanımlı olduğunda (6.15) eşitsizliğini göstermeliyiz. Eğer $h(x_1) = +\infty$ ya da $h(x_2) = +\infty$ ise (6.15) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Bu yüzden $h(x_1) \leq +\infty$ ve $h(x_2) \leq +\infty$

olduğunu kabul edelim. h nin tanımından,

$$\forall a > h(x_1) \quad \exists y_1 \in E_n : h(x_1) \leq \Phi(x_1, y_1) \leq a$$

$$\forall b > h(x_2) \quad \exists y_2 \in E_n : h(x_2) \leq \Phi(x_2, y_2) \leq b$$

Buradan,

$$\begin{aligned} h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \inf_{x \in E_n} \Phi(x, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ &\leq \Phi(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ &\leq (\Phi \text{ konveks olduğundan}) \\ &\leq \lambda \Phi(y_1, x_1) + (1-\lambda)\Phi(y_2, x_2) \\ &\leq \lambda a + (1-\lambda)b \end{aligned}$$

$a \rightarrow h(x_1)$ ve $b \rightarrow h(x_2)$ alınırsa (6.15) eşitsizliği elde edilir.

Önerme 6.3

$$h^*(y^*) = \Phi^*(0, y^*), \quad \forall y^* \in E_n \quad (6.16)$$

İspat: (6.14) 'den,

$$\begin{aligned} h^*(y^*) &= \sup_{y \in E_n} \{\langle y, y^* \rangle - h(y)\} \\ &= \sup_{y \in E_n} \{\langle y, y^* \rangle - \inf_{x \in E_n} \Phi(x, y)\} \\ &= \sup_{y \in E_n} \sup_{x \in E_n} \{\langle y, y^* \rangle - \Phi(x, y)\} \\ &= \sup_{(x,y) \in E_n \times E_n} \{\langle x, 0 \rangle + \langle y, y^* \rangle - \Phi(x, y)\} \\ &= \Phi^*(0, y^*) \end{aligned}$$

Önerme 6.4

$$SupP^* = h^{**}(0) \quad (6.17)$$

İspat:

$$\begin{aligned} SupP^* &= \sup_{y^* \in E_n} \{-\Phi^*(0, y^*)\} \\ &= \sup_{y^* \in E_n} \{-h^*(y^*)\}, \quad (6.16)'dan \\ &= \sup_{y^* \in E_n} \{\langle 0, y^* \rangle - h^*(y^*)\} \\ &= h^{**}(0) \end{aligned}$$

Tanım 6.5

$h(0) < +\infty$ ve $\partial h^{**}(0) \neq \emptyset$ ise (P) problemine *normal* problem denir.

Önerme 6.6

(P^*) Probleminin çözüm kümesi $\partial h^{**}(0)$ ile eşdeğerdir.

İspat: $y^* \in E_n$ (P^*) probleminin çözümü olsun. (6.5)'den

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\Phi^*(0, y^*) &= \sup_{z^* \in E_n} \{-\Phi^*(0, z^*)\} \\ \Leftrightarrow -h^*(y^*) &= \sup_{z^* \in E_n} \{-h^*(z^*)\}, \quad (6.16)'dan \\ \Leftrightarrow -h^*(y^*) &= \sup_{z^* \in E_n} \{\langle 0, z^* \rangle - h^*(z^*)\} \\ \Leftrightarrow -h^*(y^*) &= h^{**}(0) \end{aligned}$$

7 KONVEKS OLMAYAN DUALİTE

7.1 Zayıf Konjuget Fonksiyonlar

$$G_x = \{g : E_n \rightarrow \bar{R} \mid g \text{ sürekli, konkav ve } g(0) = 0\} \quad (7.1)$$

olsun.

Tanım 7.1

$\bar{R} = R \cup \{+\infty\}$ ve $f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. f nin zayıf konjuget fonksiyonu $f^\omega : G_x \rightarrow \bar{R}$

$$f^\omega(g) = \sup_{x \in E_n} \{g(x) - f(x)\} \quad (7.2)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 7.2

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $f^\omega : G_x \rightarrow \bar{R}$ f nin zayıf konjuget fonksiyonu olsun. f nin zayıf ikincil konjuget fonksiyonu $f^{\omega\omega} : E_n \rightarrow \bar{R}$

$$f^{\omega\omega}(x) = \sup_{g \in G_x} \{g(x) - f^\omega(g)\} \quad (7.3)$$

şeklinde tanımlıdır.

$g(x) = \langle x, x^* \rangle$ fonksiyonu sürekli, konkav ve $g(0) = 0$ olduğundan $g \in G_x$ dir. Bu durumda konveks dualite teorisindeki konjuget ve ikincil konjuget fonksiyonları elde edilir.

Teorem 7.3

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun.

- $f^\omega : G_x \rightarrow \bar{R}$ konvektir.
- f^ω aşağıdan yarı süreklidir.

İspa:

- $g_1, g_2 \in G_x$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun.

$$\begin{aligned}
f^{\omega}(\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2) &= \sup_{x \in E_n} \{\lambda g_1(x) + (1-\lambda)g_2(x) - f(x)\} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{\lambda g_1(x) + (1-\lambda)g_2(x) - f(x) + \lambda f(x) - \lambda f(x)\} \\
&= \sup_{x \in E_n} \{\lambda g_1(x) - \lambda f(x) + (1-\lambda)g_2(x) - (1-\lambda)f(x)\} \\
&\leq \sup_{x \in E_n} \{\lambda g_1(x) - \lambda f(x)\} + \sup_{x \in E_n} \{(1-\lambda)g_2(x) - (1-\lambda)f(x)\} \\
&= \lambda f^{\omega}(g_1) + (1-\lambda)f^{\omega}(g_2)
\end{aligned}$$

$\therefore f^{\omega}$ konvektir.

b) $(g_n) \subset G_x$ de bir dizi ve g' ye noktasal yakınsak olsun. Yani,

$$(g_n) \in G_x \text{ ve } g_n(x) \rightarrow g(x) \quad \forall x \in E_n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\omega}(g_n) \geq f^{\omega}(g)$ olduğunu gösterelim.

$$f^{\omega}(g_n) \geq g_n(x) - f(x) \quad \forall x \in E_n \quad \forall n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\omega}(g_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} [g_n(x) - f(x)] \quad \forall x \in E_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\omega}(g_n) \geq g(x) - f(x) \quad \forall x \in E_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\omega}(g_n) \geq f^{\omega}(g)$$

$\therefore f$ aşağıdan yarı süreklidir.

Teorem 7.4

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun. $f^{\omega\omega}: E_n \rightarrow \bar{R}$ aşağıdan yarı süreklidir.2

İspat: $(x_n) \in E_n$ ve $x_n \rightarrow x$ olsun.

$f^{\omega\omega}$ nin tanımından,

$$f^{\omega\omega}(x_n) \geq g(x_n) - f^{\omega}(g), \quad \forall g \in G_x, \quad \forall n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\omega\omega}(x_n) \geq g(x) - f^{\omega}(g), \quad \forall g \in G_x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\omega\omega}(x_n) \geq f^{\omega\omega}(x)$$

$\therefore f^{\omega\omega}$ aşağıdan yarı süreklidir.

Teorem 7.5

$f: E_n \rightarrow \bar{R}$ olsun.

$$f^{\omega\omega}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E_n \text{ 'dir.}$$

İspat. f^ω nin tanımından,

$$f^\omega(g) \geq g(x) - f(x) \quad \forall x \in E_n \quad \forall g \in G_x$$

$$f(x) \geq g(x) - f^\omega(g) \quad \forall x \in E_n \quad \forall g \in G_x$$

$$f(x) \geq \sup_{g \in G_x} [g(x) - f^\omega(g)] \quad \forall x \in E_n$$

$$f(x) \geq f^{\omega\omega}(x) \quad \forall x \in E_n$$

7.2 Zayıf Subdifferansiyel

Tanım 7.6

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{x} \in E_n$ olsun.

$$g(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall x \in E_n \quad (7.4)$$

olacak şekilde bir $g \in G_x$ var ise, g ye f nin $\bar{x}$ daki zayıf subdifferansiyeli denir. f nin $\bar{x}$ daki zayıf subdifferansiyellerinin kümesine f nin $\bar{x}$ daki zayıf subgradyantı denir ve $\partial^\omega f(\bar{x})$ ile gösterilir. Yani,

$$\partial^\omega f(\bar{x}) = \{g \in G_x \mid g(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall x \in E_n\} \quad (7.5)$$

Teorem 7.7

$\partial^\omega f(\bar{x}) \neq \emptyset$ ise $f(\bar{x}) = f^{\omega\omega}(\bar{x})$ dir.

İspat

$\partial^\omega f(\bar{x}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists g \in G_x : g \in \partial^\omega f(\bar{x})$ Yani,

$$g(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n \quad (7.6)$$

$$g(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in E_n$$

$$v(x) = g(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) \quad \text{olsun.}$$

$v(x)$ in sürekli, konkav ve $v(\bar{x}) = f(\bar{x})$ olduğu açıkça görülüyor.

Yani, $v(x) \in G_x$ dir.

$$\begin{aligned} v(x) - v(\bar{x}) &= g(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \\ &= g(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

(7.6)'dan

$$v(x) - v(\bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n$$

$$v(\bar{x}) - f(\bar{x}) \geq \sup_{x \in E_n} \{v(x) - f(x)\}$$

$$v(\bar{x}) - f(\bar{x}) \geq f^{\omega}(v)$$

$$f(\bar{x}) \leq v(\bar{x}) - f^{\omega}(v)$$

$$f(\bar{x}) \leq \sup_{v \in G_x} \{v(\bar{x}) - f^{\omega}(v)\}$$

$$f(\bar{x}) \leq f^{\omega\omega}(\bar{x})$$

Teorem 7.5. den $f(\bar{x}) = f^{\omega\omega}(\bar{x})$

Tanım 7.8

$f: X \rightarrow \bar{R}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$f(x) - f(x_0) \geq L \|x - x_0\|, \quad \forall x \in N_{\varepsilon}(x_0)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ ve $L > 0$ sayıları var ise f 'ye $x_0 \in X$ noktasında *aşağıdan yerel Lipschitz* denir.

Teorem 7.9

$f: E_n \rightarrow R$, $\bar{x} \in E_n$ noktasında aşağıdan yerel Lipschitz olsun. Eğer,

$$f(x) \geq -p \|x\| + q, \quad \forall x \in E_n \quad (7.7)$$

olacak şekilde $p \geq 0$ ve q sayıları var ise f , $\bar{x}$ de subdifferansiyellenebilir.

İspat: f $\bar{x}$ de aşağıdan yerel Lipschitz olduğundan,

$$\exists L > 0: f(x) - f(\bar{x}) \geq -L \|x - \bar{x}\|, \quad \forall x \in E_n \quad (7.8)$$

Çelişki için,

$$\forall n \quad \exists x_n \in E_n: f(x_n) - f(\bar{x}) < -n \|x_n - \bar{x}\| \quad (7.9)$$

Hipotez (7.7)'den,

$$\begin{aligned} f(x_n) &\geq -p \|x_n\| + q \\ &\geq -p \|x_n - \bar{x} + \bar{x}\| + q \\ &\geq -p \|x_n - \bar{x}\| - p \|\bar{x}\| + q, \quad \forall n \end{aligned} \quad (7.10)$$

(7.9) ve (7.10)'dan,

$$\begin{aligned}
-n \|x_n - \bar{x}\| + f(\bar{x}) &> f(x_n) \geq -p \|x_n - \bar{x}\| - p \|\bar{x}\| + q, \quad \forall n \\
f(\bar{x}) + p \|\bar{x}\| - q &> (n - p) \|x_n - \bar{x}\|, \quad \forall n \\
\|x_n - \bar{x}\| &< \frac{f(\bar{x}) + p \|\bar{x}\| - q}{n - p}, \quad \forall n > p \\
n \rightarrow \infty &\Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x}
\end{aligned}$$

O halde,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n > n_0 \quad x_n \in N_\epsilon(\bar{x})$$

(7.8)'dan,

$$f(x_n) - f(\bar{x}) \geq -L \|x_n - \bar{x}\|, \quad \forall n > n_0$$

(7.9)'dan,

$$-L \|x_n - \bar{x}\| \leq f(x_n) - f(\bar{x}) < -n \|x_n - \bar{x}\|$$

$$-L < -n$$

$$L > n \quad \forall n > n_0$$

Bu durumda bir çelişki elde ederiz.

O halde, f aşağıdan Lipschitz ise

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq -L \|x - \bar{x}\|, \quad \forall x$$

eşitsizliği vardır. Eğer $g(x) = -L \|x - \bar{x}\|$ alırsak $g \in G_x$ olur. Buradan da,

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq g(x - \bar{x}). \text{ Yani, } g \in \partial^w f(\bar{x}) \text{ dir.}$$

$g(x) = -L \|x - \bar{x}\|$ formundaki $g(x)$ fonksiyonlarının kümesini, G_x içerisinde kalarak genişletmek mümkün. Örneğin,

$$g(x) = -c \|x - x_0\| + \langle x - x_0, x^* \rangle + f(x_0) \quad (7.11)$$

fonksiyonu sürekli ve konkav bir fonksiyondur. G_x kümesi içerisindeki bu forma sahip olan $g(x)$ fonksiyonları için zayıf konjuget, zayıf ikincil konjuget ve zayıf subdifferansiyel tanımları tekrar tanımlanabilir.

$\bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere $f: E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon olsun.

Tanım 7.10

$f^\omega : E_n \times E_n \times R_+ \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere,

$$f^\omega(x_0, x^*, c) = \sup_{x \in E_n} \{-c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle - f(x)\} \quad (7.12)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f 'nin zayıf konjuget fonksiyonu denir.

Tanım 7.11

$f^{\omega\omega} : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere,

$$f^{\omega\omega}(x) = \sup_{(x_0, x^*, c) \in E_n \times E_n \times R_+} \{-c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle - f^\omega(x_0, x^*, c)\} \quad (7.13)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f 'nin zayıf ikincil konjuget fonksiyonu denir.

Önerme 7.12

$f^{\omega\omega} : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere, f 'nin ikincil konjuget fonksiyonu daha sade olarak aşağıdaki tanımlanabilir.

$$f^{\omega\omega}(x) = \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \{-c \|x\| + \langle x, x^* \rangle - f^\omega(x, x^*, c)\} \quad (7.14)$$

İspat: Tanım 7.11'den,

$$\begin{aligned} f^{\omega\omega}(x) &= \sup_{(x_0, x^*, c) \in E_n \times E_n \times R_+} \{-c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle - f^\omega(x_0, x^*, c)\} \\ &= \sup_{(x_0, x^*, c) \in E_n \times E_n \times R_+} \{-c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle \\ &\quad - \sup_{y \in E_n} [-c \|y - x_0\| + c \|x_0\| + \langle y, x^* \rangle - f(y)]\} \\ &= \sup_{(x_0, x^*, c) \in E_n \times E_n \times R_+} \inf_{y \in E_n} \{-c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle \\ &\quad + c \|y - x_0\| - c \|x_0\| - \langle y, x^* \rangle + f(y)\} \\ &\leq \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \inf_{y \in E_n} \{c \|y - x\| + \langle x, x^* \rangle - \langle y, x^* \rangle + f(y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \inf_{y \in E_n} \{c \|y - x\| + \langle x, x^* \rangle - \langle y, x^* \rangle + f(y)\} \\
&= \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \inf_{y \in E_n} \{c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \\
&\quad + [c \|y - x\| - c \|x\| - \langle y, x^* \rangle + f(y)]\} \\
&= \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \{c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \\
&\quad - \sup_{y \in E_n} [-c \|y - x\| + c \|x\| + \langle y, x^* \rangle - f(y)]\} \\
&= \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \{c \|x\| + \langle x, x^* \rangle - f^w(x, x^*, c)\}
\end{aligned}$$

Buradan,

$$f^{**} \leq \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \{c \|x\| + \langle x, x^* \rangle - f^w(x, x^*, c)\} \quad (7.15)$$

Diğer taraftan,

$$f^{ww}(x) \geq \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \{-c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle - f^w(x, x^*, c)\}, \quad \forall x_0 \in E_n \quad (7.16)$$

(7.16)'de $x_0 = x$ alınırsa,

$$f^{ww}(x) \geq \sup_{(x^*, c) \in E_n \times R_+} \{c \|x\| + \langle x, x^* \rangle - f^w(x, x^*, c)\} \quad (7.17)$$

elde edilir. (7.15) ve (7.17)'den (7.14) elde edilir.

Tanım 7.13 (Weak Subdifferansiyel)

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere,

$$-c \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, x^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \forall x \in E_n \quad (7.18)$$

şartını sağlayan $(x^*, c) \in E_n \times R_+$ ikilisine f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki zayıf subgradyantı denir.

Ayrıca,

$$\partial^w f(\bar{x}) = \{(x^*, c) \in E_n \times R_+ \mid -c \|x - \bar{x}\| + \langle x - \bar{x}, x^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}), \text{ her } x \in E_n\} \quad (7.19)$$

Aşağıdaki teorem klasik konjuget fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 5.3'ün zayıf konjuget fonksiyonlar için eşdeğerini vermektedir.

Teorem 7.14

$f : E_n \rightarrow \bar{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde,

$$(x^*, c) \in \partial^o f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^o(x, x^*, c) = c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \text{ dir.} \quad (7.20)$$

İspat: $(\Rightarrow)$ Tanım 7.13'den,

$$f(y) - f(x) \geq -c \|y - x\| + \langle y - x, x^* \rangle, \quad \forall y \in E_n$$

Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x) - c \|y - x\| + c \|x\| + \langle y, x^* \rangle - f(y) \leq c \|x\| + \langle x, x^* \rangle, \quad \forall y \in E_n$$

$$f(x) + \sup_{y \in E_n} \{-c \|y - x\| + c \|x\| + \langle y, x^* \rangle - f(y)\} \leq c \|x\| + \langle x, x^* \rangle$$

$$f(x) - f^o(x, x^*, c) \leq c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \quad (7.21)$$

Ayrıca zayıf konjuget fonksiyon f^o tanımından,

$$f^o(x, x^*, c) + f(x) \geq c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \quad (7.22)$$

(7.21) ve (7.22)'den,

$$f^o(x, x^*, c) + f(x) = c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \quad (7.23)$$

$(\Leftarrow)$ $(x^*, c) \in E_n \times R_+$ elemanı (7.20)'deki ifadenin sağ tarafını sağladığını varsayalım. Zayıf konjuget fonksiyonun tanımından,

$$c \|x\| + \langle x, x^* \rangle \geq f(x) + [-c \|y - x\| + c \|x\| + \langle y, x^* \rangle - f(y)], \quad \forall y \in E_n$$

$$f(y) - f(x) \geq -c \|y - x\| + \langle y - x, x^* \rangle, \quad \forall y \in E_n \quad (7.24)$$

Tanım 7.13'den $(x^*, c) \in \partial^o f(x)$ dir.

7.3 Konveks Olmayan Dualite

Bu bölümde $f : E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere,

$$(P) \quad \inf_{x \in E_n} f(x)$$

problemi ile ilgileneceğiz. (P) problemi primal problem olarak isimlendirilecek. (P)

probleminin infimum değeri $\text{Inf}P$ olarak gösterilecek. $f(x) = \text{Inf}P$ şartını sağlayan her $x \in E_n$ (P) probleminin bir çözümü olarak isimlendirilir. Eğer $f(x_0) < +\infty$ olacak şekilde $x_0 \in E_n$ var ise (P) problemi *basit olmayan* problem olarak isimlendirilir.

Bu bölümde ayrıca $f(x)$ fonksiyonu ile ilgili $\Phi: E_n \times E_n \rightarrow \bar{R}$ olmak üzere $\Phi(x, 0) = f(x)$ şartını sağlayan $\Phi(x, y)$ fonksiyonu ile de ilgileneceğiz. $\inf_{x \in E_n} \Phi(x, 0)$ probleminin, (P)'nin kendisi olduğu açıkça görülmektedir. Burada Φ fonksiyonuna perturbasyon denilmektedir.

Verilen perturbasyona göre, (6.4)'de tanımlanan dual problemi kurabilmek için, Φ fonksiyonunun zayıf konjuget fonksiyonunu Φ^ω tanımlamak gerekiyor. Tanım 7.10'dan,

$$\begin{aligned} \Phi^\omega: (E_n \times E_n \times R_+) \times (E_n \times E_n \times R_+) &\rightarrow \bar{R} \\ \Phi^\omega(x_0, x^*, c, y_0, y^*, d) &= \sup_{(x, y) \in E_n \times E_n} \{-c \|x - x_0\| - d \|y - y_0\| + c \|x_0\| \\ &\quad + d \|y_0\| + \langle x, x^* \rangle + \langle y, y^* \rangle - \Phi(x, y)\}, \end{aligned}$$

her $(x^*, c) \in E_n \times R_+, (y^*, d) \in E_n \times R_+$ ve $(x_0, y_0) \in E_n \times E_n$ için.

Bu durumda, $c = 0, x^* = 0, x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ olduğunda, Φ^ω fonksiyonunun değeri daha sade olarak $\Phi^\omega(0, y^*, d)$ şeklinde gösterilebilir ve

$$\Phi^\omega(0, y^*, d) = \sup_{(x, y) \in E_n \times E_n} \{-d \|y\| + \langle y, y^* \rangle - \Phi(x, y)\} \quad (7.25)$$

Bir minimizasyon probleminin dual problemini, 6. bölümdeki klasik yöntem kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

$$(P^*) \quad \sup_{(y^*, d) \in E_n \times R_+} \{-\Phi^\omega(0, y^*, d)\} \quad (7.26)$$

Burada, (P^*) problemi (P) probleminin Φ perturbasyonuna göre dual problemi olarak isimlendirilir. (P^*) probleminin supremum değeri $\text{Sup}P^*$ olarak gösterilir. Ayrıca, $\Phi^\omega(0, y^*, d) = \text{Sup}P^*$ şartını sağlayan her $(y^*, d) \in E_n \times R_+$ ikilisine (P^*) probleminin bir çözümü denir. (P) ile (P^*) arasındaki ilk ilişki aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 7.15

$$SupP^* \leq InfP.$$

İspat: (7.25)'den,

$$\Phi^w(0, y^*, d) = \sup_{(x, y) \in E_n \times E_n} \{-d \|y\| - \langle y - y^* \rangle - \Phi(x, y)\} \text{ olduğunu biliyoruz. Buradan da,}$$

$$\text{her } x \in E_n \text{ için, } \Phi^w(0, y^*, d) \geq -d \|0\| + \langle 0, y^* \rangle - \Phi(x, 0)$$

$$\text{her } x \in E_n \text{ için, } \Phi^w(0, y^*, d) \leq \Phi(x, 0) \quad (7.27)$$

(7.27)'deki ilişki her $(y^*, d) \in E_n \times R_+$ ve $x \in E_n$ için geçerli olduğundan, $SupP^* \leq InfP$ dir.

Önerme 7.16

h fonksiyonu (6.14) ile tanımlı olsun. O halde $SupP^* = h^{ww}(0)$ dir.

İspat: Tanım 7.10'dan,

$$\begin{aligned} h^w(0, y^*, d) &= \sup_{y \in E_n} \{-d \|y\| + \langle y, y^* \rangle - h(y)\} \\ &= \sup_{y \in E_n} \{-d \|y\| + \langle y, y^* \rangle - \inf_{x \in E_n} \Phi(x, y)\} \\ &= \sup_{y \in E_n} \sup_{x \in E_n} \{-d \|y\| + \langle y, y^* \rangle - \Phi(x, y)\} \\ &= \Phi^w(0, y^*, d) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} SupP^* &= \sup_{(y^*, d) \in E_n \times R_+} \{-\Phi^w(0, y^*, d)\} \\ &= \sup_{(y^*, d) \in E_n \times R_+} \{-h^w(0, y^*, d)\} \\ &= \sup_{(y^*, d) \in E_n \times R_+} \{d \|0\| + \langle 0, y^* \rangle - h^w(0, y^*, d)\} \\ &= h^{ww}(0). \end{aligned}$$

Buradan, $SupP^* \leq InfP$ eşitsizliği ile $h^{ww}(0) \leq h(0)$ eşitsizliğinin eşitliği de görülmektedir.

Önerme 7.17

$h(0) < \infty$ ve $\partial^w h(0) \neq \emptyset$ olsun. O halde aşağıdakiler doğrudur.

$$(i) \text{Inf}P = \text{Sup}P^*$$

(ii) h fonksiyonunun $0 \in E_n$ daki zayıf subgradyanı (P^*) probleminin bir çözümüdür.

İspat: (i) $\partial^\omega h(0) \neq \emptyset$ ise Teorem 7.7'den $h(0) = h^{\omega\omega}(0)$ dir. Ayrıca h fonksiyonunun tanımından $h(0) = \text{Inf}P$ dir. Önerme 7.16'den $\text{Sup}P^* = h^{\omega\omega}(0)$ dir. Buradan da $\text{Inf}P = \text{Sup}P^*$ dir.

(ii) $(y^*, d) \in \partial^\omega h(0)$ olsun. Teorem 7.7'den $h(0) = h^{\omega\omega}(0)$ olduğunu ve Teorem 7.14'den $h(0) + h^\omega(0, y^*, d) = 0$ olduğunu biliyoruz. Yani, $h(0) = -h^\omega(0, y^*, d)$ dir. Bu son eşitlik ve $h^{\omega\omega}(0)$ tanımından,

$$\begin{aligned} -h^\omega(0, y^*, c) &= h(0) \\ &= h^{\omega\omega}(0) \\ &= \sup_{(z^*, c) \in E_n \times R_+} \{c \|0\| + \langle 0, z^* \rangle - h^\omega(0, z^*, c)\} \\ &= \sup_{(z^*, c) \in E_n \times R_+} \{-h^\omega(0, z^*, c)\} \end{aligned} \tag{7.29}$$

(7.28)'den, her $(z^*, c) \in E_n \times R_+$ için, $h^\omega(0, z^*, c) = \Phi^\omega(0, z^*, c)$ dir. O halde (7.29)'dan,

$$-\Phi^\omega(0, y^*, d) = \sup_{(z^*, c) \in E_n \times R_+} \{-\Phi^\omega(0, z^*, c)\}$$

Buradan da, (y^*, d) nin (P^*) probleminin bir çözümü olduğu görülür.

8 UYGULAMA

X sonlu boyutlu bir uzay ve Y ise Banach uzayı olsun. $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ kapalı sınırlı konveks bir küme olsun.

$f : S \rightarrow R$ aşağıdan Lipschitz bir fonksiyon olsun. (8.1)

K , Y 'de içi boş olmayan kapalı konveks noktasal (yani $K \cap (-K) = \{0\}$) bir koni olsun. K konisi ile $\leq$ kısmi sıralama bağıntısını

$$p \leq q \Leftrightarrow q - p \in K$$

şekline ilişkilendirelim.

$g : S \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\leq$ bağıntısına göre sürekli ve konveks olsun. Yani,

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in S \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (8.2)$$

$$\text{Ayrıca, } \{x \in S : g(x) \leq 0\} \neq \emptyset \quad (8.3)$$

olduğunu kabul edelim.

İlgileneceğimiz primal problem şöyle ifade edilebilir:

$$(P) \quad \inf\{f(x) : x \in S, g(x) \leq 0\}.$$

Bu durumda perturbasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} f(x), & x \in S \text{ ve } g(x) \leq 0 \text{ ise} \\ +\infty, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (8.4)$$

Φ fonksiyonu $-\infty$ değerini alamaz ve (8.3)'den görüldüğü gibi $+\infty$ ile eşdeğer de değildir. Yani, Φ uygun bir fonksiyondur.

$G : Y \rightarrow X$ küme değerli fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$G(y) = \{x \in X : x \in S \text{ ve } g(x) \leq y\}. \quad (8.5)$$

Önerme 8.1

Her $y \in Y$ için, $G(y) \subseteq X$ kapalı ve konveks bir kümedir.

İspat: $x_1, x_2 \in G(y)$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. O halde, $x_1 \in S, x_2 \in S$ ve $g(x_1) \leq y, g(x_2) \leq y$ dir.

S konveks olduğundan, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ dir. Ayrıca son eşitsizlikten $\lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \leq y$ dir. g konveks olduğundan $g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq y$ dir. Buradan da $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in G(y)$ dir. S kümesi kapalı ve g fonksiyonu sürekli olduğundan $G(y)$ de kapalıdır.

Aşağıdaki tanımlar Ekeland ve Aubin (1984)'de verilmiştir.

Tanım 8.2

$E: Y \rightarrow X$ küme değerli bir fonksiyon olsun. $\text{dom}E = \{y \in Y : E(y) \neq \emptyset\}$ ve $\text{graf}E = \{(y, x) \in Y \times X : x \in E(y)\}$ kümeleri sırası ile E 'nin *etkin tanım kümesi* ve E 'nin *grafı* olarak isimlendirilir. Etkin tanım kümesi boş olmayan küme değerli fonksiyona *uygun* fonksiyon denir.

Tanım 8.3

$E: Y \rightarrow X$ küme değerli bir fonksiyon ve $C \subset Y$ olsun. Eğer, bütün $y_1, y_2 \in C$ ve her $x_1 \in E(y_1)$ için $\|x_1 - x_2\|_X \leq l \|y_1 - y_2\|_Y$ olacak şekilde $x_2 \in E(y_2)$ var ise E 'ye C 'de Lipschitz ve l 'ye de Lipschitz sabiti denir.

Tanım 8.4

$E: Y \rightarrow X$ küme değerli bir fonksiyon olsun. Eğer, $\text{graf}E$ $Y \times X$ 'de konveks ise E 'ye konveks, $\text{graf}E$ $Y \times X$ 'de kapalı ise E 'ye de kapalı denir.

Bu tanımdan şu sonucu çıkarabiliriz. E küme değerli fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul, her $y_1, y_2 \in Y$ için

$$\lambda E(y_1) + (1 - \lambda)E(y_2) \subset E(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Önerme 8.5

(8.5)'de tanımlanan $G: Y \rightarrow X$ küme değerli fonksiyonu konvektir.

İspat: $y_1, y_2 \in Y$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in \lambda G(y_1) + (1 - \lambda)G(y_2)$ olsun. Yani,

öyle $x_1 \in G(y_1)$ ve $x_2 \in G(y_2)$ vardır ki $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. (8.5)'de verilen G 'nin tanımından, $x_1 \in S$ ve $x_2 \in S$, $g(x_1) \leq y_1$ ve $g(x_2) \leq y_2$ dir. S konveks bir küme ve g konveks bir fonksiyon olduğundan, $x \in S$, $g(x) \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$ dir. Buradan da,

$x \in G(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$ dir.

Aşağıdaki teorem Ekeland ve Aubin (1984)'de ispatlanmıştır.

Teorem 8.6

Y bir Banach uzayı, X sonlu boyutlu bir uzay ve G ise Y 'den X 'e küme değerli bir fonksiyon olsun. B_X ve B_Y sırası ile X ve Y deki sıfır merkezli birim küreler olsun. $\text{graf}G$ 'nin konveks bir küme ve $\exists M, \varepsilon > 0: MB_X \supset G(y) \neq \emptyset, \forall y \in 2\varepsilon B_Y$ olduğunu farzedelim. O halde, her $y_1, y_2 \in \varepsilon B_Y$ ve her $x_1 \in G(y_1)$ için öyle bir $x_2 \in G(y_2)$ elemanı vardır ki, $\|x_1 - x_2\|_X \leq l \|y_1 - y_2\|_Y$, burada $l = 4M / \varepsilon$ dir.

Şimdi dual problemi formülize edebiliriz. (7.25)'den, $(y^*, d) \in Y^* \times R_+$ olmak üzere

$$\Phi^w(0, y^*, d) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} \{-d \|y\| + \langle y, y^* \rangle - \Phi(x, y)\}$$

$$= \sup_{x \in S} \sup_{y \in Y, y \geq g(x)} \{-d \|y\| + \langle y, y^* \rangle - f(x)\}$$

Φ fonksiyonu (8.4)'de tanımlanmıştır. $y = g(x) + z, z \in K$ alınırsa

$$\Phi^w(0, y^*, d) = \sup_{x \in S} \sup_{z \in K} \{-d \|g(x) + z\| + \langle g(x) + z, y^* \rangle - f(x)\}$$

Dual problemi kurmak için, $\sup_{(y^*, d) \in Y^* \times R_+} \{-\Phi^w(0, y^*, d)\}$ değerini hesaplamalıyız.

$\|g(x) + z\| = \sup\{\langle g(x) + z, e \rangle : e \in Y^*, \|e\|_* \leq 1\}$ gösterimini kullanılırsa

$$\sup_{(y^*, d) \in Y^* \times R_+} \{-\Phi^w(0, y^*, d)\} = \sup_{(y^*, d) \in Y^* \times R_+} \inf_{x \in S} \{f(x) + \inf_{z \in K} [-\langle g(x) + z, y^* \rangle + \sup_{\|e\|_* \leq 1} d \langle g(x) + z, e \rangle]\}$$

$$= \sup_{(y^*, d) \in Y^* \times R_+} \inf_{x \in S} \{f(x) - \langle g(x) + z, y^* \rangle + \inf_{z \in K} \sup_{\|e\|_* \leq 1} [d \langle g(x), e \rangle + \langle z, de - y^* \rangle]\}$$

$$= \sup_{(y^*, d) \in Y^* \times R_+} \inf_{x \in S} \{f(x) - \langle g(x), y^* \rangle + \sup_{\|e\|_* \leq 1} \inf_{z \in K} [d \langle g(x), e \rangle + \langle z, de - y^* \rangle]\}$$

Burada sırası ile

$$K^* = \{y^* \in Y^* : \langle y, y^* \rangle \geq 0, \text{ her } y \in K\}$$

$$V = \{(y^*, d) \in Y^* \times R_+ : de - y^* \in K^*, e \in Y^*, \|e\|_* \leq 1\} \quad (8.6)$$

$$\tau(x, y^*, d) = \sup \{ d \langle g(x), e \rangle : e \in Y^*, \text{ öyle ki } \|e\|_* \leq 1, de - y^* \in K^* \} \quad (8.7)$$

alınırsa (P^*) dual problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$(P^*) \quad \sup_{(y^*, d) \in V} \inf_{x \in S} \{ f(x) - \langle g(x), y^* \rangle + \tau(x, y^*, d) \}.$$

Teorem 8.7

(8.1), (8.2), (8.3) hipotezlerine ek olarak, $\inf \{ f(x) : x \in S \}$ 'in sınırlı ve $g(\bar{x}) < 0$ şartını sağlayan $\bar{x} \in S$ olduğunu varsayalım. O halde,

$$a) \quad \text{Inf}P = \inf_{g(x) \leq 0, x \in S} f(x) = \sup_{(y^*, d) \in V} \inf_{x \in S} \{ f(x) + \tau(x, y^*, d) - \langle g(x), y^* \rangle \} = \text{Sup}P^* \quad (8.8)$$

b) (P^*) dual problemi en az bir $(y_0^*, d_0) \in V$ çözümü vardır ve

$$\text{Inf}P = \inf_{x \in S} \{ f(x) + \tau(x, y_0^*, d_0) - \langle g(x), y_0^* \rangle \} \text{ dir.} \quad (8.9)$$

c) $(y_0^*, d_0) \in V$ ikilisi (P^*) probleminin bir çözümü ve $x_0 \in S$ elemanı (P) probleminin bir çözümü ise

$$\inf_{x \in S} \{ f(x) + \tau(x, y_0^*, d_0) - \langle g(x), y_0^* \rangle \} = f(x_0) + \tau(x_0, y_0^*, d_0) - \langle g(x_0), y_0^* \rangle \text{ ve} \quad (8.10)$$

$$\tau(x_0, y_0^*, d_0) - \langle g(x_0), y_0^* \rangle = 0 \text{ dir.} \quad (8.11)$$

İspat: Φ perturbasyon fonksiyonu (8.4)'deki gibi tanımlı olsun. h fonksiyonunu

$$h(y) = \inf_{x \in X} \Phi(x, y) \quad (8.12)$$

şeklinde tanımlayalım ve bu fonksiyonun $0 \in Y$ da zayıf subdifferansiyellenebilir olduğunu gösterelim. Hipotezden, $0 \in Y$ nin öyle bir N_1 komşuluğu vardır ki, her $y \in N_1$ için $y \geq g(\bar{x})$ dir. Öyle ise (8.5)'de tanımlanan küme değerli G fonksiyonu için $N_1 \subset \text{dom}G$ dir. Teoremin varsayımlarından, Önerme 8.1 ve Önerme 8.5'i gözönüne aldığımızda G küme değerli fonksiyonu Teorem 8.6'nın tüm varsayımlarını sağlamaktadır. Teorem 8.6'yı kullanarak, $0 \in Y$ noktası öyle bir N_2 komşuluğuna sahiptir ki, küme değerli G fonksiyonu bu komşulukta $l > 0$ Lipschitz sabiti ile Lipschitz şartını sağlar. $N = N_1 \cap N_2$ olsun. $y_1 \in N$ ve keyfi pozitif ε sayısını alalım. (8.12)'deki h fonksiyonunun tanımından, öyle bir $x_1 \in G(y_1)$ elemanı vardır ki,

$$h(y_1) \geq \Phi(x_1, y_1) - \varepsilon \quad (8.13)$$

şartını sağlar. G fonksiyonu $N \subset Y$ üzerinde Lipschitz şartını sağladığından, öyle bir $x_2 \in G(0)$ vardır ki,

$$\|x_1 - x_2\| \leq l \|y_1 - 0\| \text{ dir.} \quad (8.14)$$

h fonksiyonunun tanımından

$$h(0) \leq \Phi(x_2, 0) \text{ dir.} \quad (8.15)$$

(8.14) ve (8.15)'den

$$h(y_1) - h(0) \geq \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_2, 0) - \varepsilon \text{ dir.}$$

$x_1 \in G(y_1)$, $x_2 \in G(0)$, $x_1, x_2 \in S$, $g(x_1) \leq y_1$ ve $g(x_2) \leq 0$ olduğundan, $\Phi(x_1, y_1) = f(x_1)$ ve $\Phi(x_2, 0) = f(x_2)$ 'dir. Sonuçta $h(y_1) - h(0) \geq f(x_1) - f(x_2) - \varepsilon$ dir. Teoremin hipotezinden, f fonksiyonu S kümesinde aşağıdan Lipschitz'dir. Yani, öyle bir $c > 0$ sayısı vardır ki, $f(x_1) - f(x_2) \geq -c \|x_1 - x_2\|$ dir. Buradan da, $h(y_1) - h(0) \geq -c \|x_1 - x_2\| - \varepsilon$ dir.

Son eşitsizlikte (8.14) gözönüne alınırsa, $h(y_1) - h(0) \geq -cl \|y_1\| - \varepsilon$ elde edilir. ε keyfi bir pozitif sayı olduğundan, h fonksiyonu $0 \in Y$ noktasında aşağıdan yerel Lipschitz'dir. Tanımdan $h(y) = \inf_{x \in X} \Phi(x, y)$, ya da $h(y) = \inf_{x \in G(y)} f(x)$ dir. $G(y) \subset S$ ve $\inf\{f(x) : x \in S\}$ 'in sınırlı olduğu hipotezinden, h fonksiyonu aşağıdan sınırlıdır. Böylece Teorem 7.17'den h fonksiyonu $0 \in Y$ noktasında zayıf subdifferansiyele sahiptir. Önerme 7.17 i)'den a) elde edilir. Ayrıca, Önerme 7.17 ii)'den h fonksiyonunun $0 \in Y$ noktasındaki her (y_0^*, d_0) subgradyanı (P^*) dual problemin bir çözümüdür. Bu çözümü (8.8)'de yerine konulursa Teoremin b) şıkkı elde edilir. Teoremin c) şıkkını ispatlamak için, $(y_0^*, d_0) \in V$ ikilisinin (P^*) dual problemin bir çözümü olduğunu ve $x_0 \in S$, $g(x_0) \leq 0$ noktasının ise (P) probleminin bir çözümü olduğunu varsayalım. O halde (8.9)'dan,

$$f(x_0) = \inf_{x \in S} \{f(x) + \tau(x, y_0^*, d_0) - \langle g(x), y_0^* \rangle\} \leq f(x_0) + \tau(x_0, y_0^*, d_0) - \langle g(x_0), y_0^* \rangle \quad (8.16)$$

$$\text{Böylece, } \tau(x_0, y_0^*, d_0) - \langle g(x_0), y_0^* \rangle \geq 0 \text{ dir.} \quad (8.17)$$

Fakat $(y_0^*, d_0) \in V$ ve $g(x_0) \in -K$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \tau(x_0, y_0^*, d_0) - \langle g(x_0), y_0^* \rangle \\
& = \sup \{ \langle g(x_0), d_0 e - y_0^* \rangle + \langle g(x_0), y_0^* \rangle : \|e\| \leq 1, d_0 e - y_0^* \in K^* \} - \langle g(x_0), y_0^* \rangle \quad (8.18) \\
& \leq \langle g(x_0), y_0^* \rangle - \langle g(x_0), y_0^* \rangle = 0
\end{aligned}$$

(8.17) ve (8.18)'den (8.11) elde edilir. (8.11)'i gözönüne aldığımızda (8.9)'dan

$$\inf_{x \in S} \{ f(x) + \tau(x, y_0^*, d_0) - \langle g(x), y_0^* \rangle \} = f(x_0) = f(x_0) + \tau(x_0, y_0^*, d_0) - \langle g(x_0), y_0^* \rangle$$

elde edilir ki bu da (8.10)'daki istenen ilişkidir.

Örnek 8.8

$$f(x) = \begin{cases} -4, & x \leq -4 \text{ ise} \\ -x^2, & -2 < x \leq 0 \text{ ise} \\ 0, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $X = Y = R$ olmak üzere primal problem

$$\begin{aligned}
(P_1) \quad & \min f(x) \\
\text{kısıtlama} \quad & g(x) = -x - 4 \leq 0
\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. $f(x)$ amaç fonksiyonu aşağıdan Lipschitz ve mümkün çözümlerin kümesi de konvektir. İlk olarak primal ve dual problemlerin optimal değerlerinin eşitliğini gösterelim. $\inf P_1 = -4$ ve (P_1) primal problemin optimal çözümlerinin kümesinin $X_0 = [-4, -2]$ olduğu kolayca görülmektedir. (P_1^*) dual problemi formüle etmek için V_1 kümesini inşa edilmelidir. (8.6)'dan,

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{ (y^*, d) \in R \times R_+ : de - y^* \geq 0, e \in R, |e| \leq 1 \} \\
&= \{ (y^*, d) \in R \times R_+ : y^* \leq d \}
\end{aligned}$$

O halde, (P_1^*) dual problemi,

$$\begin{aligned}
\tau(x, y^*, d) &= \sup \{ de(-x - 4) : |e| \leq 1, de - y^* \geq 0 \} \\
&= \begin{cases} -d(x + 4), & x \leq -4 \text{ ise} \\ -y^*(x + 4), & x \geq -4 \text{ ve } y^* + d \geq 0 \text{ ise} \\ d(x + 4), & x \geq -4 \text{ ve } y^* + d < 0 \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

her $(y^*, d) \in V_1$ ve $x \in R$

olmak üzere,

$$(P_1^*) \quad \sup_{(y^*, d) \in \mathcal{V}_1} \inf_{x \in R} \{f(x) - y^*(-x - 4) + \tau(x, y^*, d)\}$$

şeklindedir.

(P_1^*) dual problemin optimal değeri,

$$\varphi_i(y^*, d) = \inf_{x \in X_i} \{f(x) + y^*(x + 4) + \tau(x, y^*, d)\} \text{ ve}$$

$$X_1 = [-\infty, -4], X_2 = [-4, -2], X_3 = [-2, 0], X_4 = [0, +\infty]$$

olmak üzere,

$$\sup_{(y^*, d) \in \mathcal{V}_1} \min_{1 \leq i \leq 4} \{\varphi_i(y^*, d)\}$$

olarak hesaplanabilir. O halde,

$$\varphi_1(y^*, d) = -4,$$

$$\varphi_2(y^*, d) = \begin{cases} -4, & y^* + d \geq 0 \text{ ise} \\ -4 + 2(y^* + d), & y^* + d < 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\varphi_3(y^*, d) = \begin{cases} -4, & y^* + d \geq 0 \text{ ise} \\ 4(y^* + d), & y^* + d < -2 \text{ ise} \\ -4 + 2(y^* + d), & -2 \leq y^* + d < 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\varphi_4(y^*, d) = \begin{cases} 0, & y^* + d \geq 0 \text{ ise} \\ -\infty, & d = 0 \text{ ve } y^* + d < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Sonuç olarak,

$$\sup_{(y^*, d) \in \mathcal{V}_1} \min_{1 \leq i \leq 4} \{\varphi_i(y^*, d)\} = -4 \text{ ve } \text{Sup}P_1^* = \text{Inf}P_1 = -4 \text{ dir.}$$

Bu problem için,

$$h_1(y) = \inf\{f(x) : -x - 4 \leq y\} = \begin{cases} 0, & y \leq -4 \text{ ise} \\ -(y + 4)^2, & -4 \leq y \leq -2 \text{ ise} \\ -4, & y \geq -2 \text{ ise.} \end{cases}$$

Şimdi de $\partial^\infty h_1(0)$ değerini hesaplayalım. Önerme 7.17'den bu değer (P_1^*) dual probleminin optimal çözümlerinin kümesine eşit olacaktır. Tanımdan,

$$\partial^w h_1(0) = \{(y^*, d) \in R \times R_+ : h_1(y) - h_1(0) \geq -d|y| + yy^*, \forall y \in R\}.$$

$i = 1, 2, 3, 4$ için B_i aşağıdaki gibi olsun.

$$B_i = \{(y^*, d) \in R \times R_+ : h_1(y) - h_1(0) \geq -d|y| + yy^*, \forall y \in X_i\}.$$

Bu durumda,

$$B_1 = B_2 = B_3 = \{(y^*, d) \in R \times R_+ : y^* + d \geq 0\} \text{ ve } B_4 = \{(y^*, d) \in R \times R_+ : y^* - d \leq 0\} \text{ dir.}$$

Böylece,

$$\partial^w h_1(0) = \bigcup_{i=1}^4 B_i = \{(y^*, d) \in R \times R_+ : -d \leq y^* \leq d\} \text{ dir.}$$

Son olarak, her $(y^*, d) \in \partial^w h_1(0)$ ikilisi ve $x \in [-4, -2]$ için $y^* + d \geq 0$ ve $\tau(x, y^*, d) = -y^*(x+4)$ dür. Yani,

$$\tau(x, y^*, d) - y^*(-x-4) = -y^*(x+4) + y^*(x+4) = 0 \text{ dir.}$$

9 SONUÇLAR

Bu çalışmada konveks olmayan minimzasyon problemleri için konveks programlamadaki klasik dualite teoremleri, lineer fonksiyoneller yerine sürekli konkav fonksiyonların kümesi kullanılarak elde edilmek istenmiştir. Bu dualite yaklaşımı konveks olmayan kümelerin konkav fonksiyonların hipografikleri ile ayrılması esasına dayandırılmıştır.

Çalışmalar neticesinde, bu sürekli konkav fonksiyonların formunun

$$g(x) = -c \|x - x_0\| + c \|x_0\| + \langle x, x^* \rangle$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Bu forma sahip fonksiyonların hipografiği konveks bir konidir. Bu konveks koni amaç fonksiyonun epigrafiği için destek konisi olarak kullanılmıştır. Bu fonksiyonlar kullanılarak zayıf konjuget fonksiyonlar ve zayıf subdifferansiyel tanımlanmıştır. Ayrıca zayıf subdifferansiyellik için gerek ve yeter koşullar sunulmuştur. Uygulamada ise klasik dualite teorisi yaklaşımı kullanıldığında dual fark olan bir minimizasyon problemi ele alınarak yeni yaklaşım neticesinde dual farkın sıfır olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Azimov, A.Y. ve Kasimov, R.N. (1999), "On Weak Conjugacy, Weak Subdifferentials and Duality with Zero Gap in Nonconvex Optimization", *International Journal of Applied Mathematics*, 1(2):171-192.

Ekeland, I. ve Temam, R. (1976), *Convex Analysis and Variational Problems*, Elsevier North-Holland, Amsterdam.

Ekeland, I. ve Aubin, J.P. (1984), *Applied Nonlinear Analysis*, Elsevier John Wiley & Sons, New York.

Fenchel, W. (1949), "On Conjugate Functions", *Canadian Journal of Mathematics*, 1:73-74.

Hanson, M.A. (1981), "On Sufficiency of the Khun-Tucker Conditions", *J. Math. Analysis and Appl.*, 80:545-550.

Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. ve Shetty, C.M. (1993), *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Singapore.

Rockafellar, R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 10.09.1973

Doğum yeri Adana

Lise 1987-1990 Adana Fen Lisesi

Lisans 1990-1997 Boğaziçi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurum(lar)

1997-2000 YTÜ İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi.
2000-Devam ediyor TRIO Çözüm evi Yazılım Uzmanı.