YILDIZ TEKNIK ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ

TASIMA PROBLEMLERINE ÇÖZÜM ÖNERILERI

Matematik Müh. Metin TABUK

FBE Matematik Anabilim Dali Matematik Programinda
Hazirlanan

YÜKSEK LISANS TEZI

Tez Danismani : Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

ISTANBUL, 2006

IÇINDEKILER Sayfa

KISALTMA LISTESI

BDPP	Bulanik Dogrusal Programlama Problemi
CO	Complete Optimal Solution
ÇADPP	Çok Amaçli Dogrusal Programlama Problemi
ÇADTP	Çok Amaçli Dogrusal Tasima Problemi
ÇATP	Çok Amaçli Tasima Problemi
DPP	Dogrusal Programlama Problemi
Km	Kilometre
Min	Minimum
Maks	Maksimum
MODI	Modified Distribution
P	Pareto Optimal Solution
TP	Tasima Problemi
WP	Weak Pareto Optimal Solution
VAM	Vogel’ s Approximation Method
YTL	Yeni Türk Lirasi

SEKIL LISTESI Sayfa

ÖNSÖZ

Teknoloji günümüzde hizli bir sekilde gelismekte ve bu gelismenin sonucunda da hayatimizda önemli yer teskil etmektedir. Teknolojiyi verimli sekilde kullanan milletler göz önünde bulunmakta ve örnek alinmaktadir. Bu teknolojik gelismenin esas kaynagi ise bilgidir.

Bilgi ile teknoloji arasinda dogal bir döngü bulunmaktadir. Bu döngüde bilgi teknolojiyi üretmektedir. Dolayisiyla faydali bilginin sinirlari ne kadar fazla genislerse buna paralel olarak teknolojide gelisecektir. Bu faydali bilginin ürünü olan teknolojiyi kullanan toplumlar gelisecektir.

Insanlik, gereksinimlerden biri olan bilgi açligi giderirken bilginin kaynagina zorluklar içinde ulasmaktadir. Bu zorluklarin sonunda ulasilan bilgi kaynaklarindan en verimli sekilde faydalanilmasi da gerekmektedir. Bu zorluklarin giderilmesi umuduyla hazirladigimiz çalismamizin gelecekte kaynak olarak kullanilmasi, gelistirilmesi, yeni arastirmalara yol göstermesi en büyük gurur kaynagimiz olacaktir.

Bu çalismanin hazirlanmasinda her türlü yardimi benden esirgemeyen çok degerli hocam, Yrd. Doç. Dr. Nuran Güzel’ e tesekkür ediyorum.

ÖZET

Bu çalismamizda, matematik programlamanin özel bir hali olan tasima problemleri ele alinmakta ve matematiksel olarak ifade edilmektedir. Tasima problemlerine örnekler verilerek optimal çözümleri hesaplanmistir.

Bulanik programlamayi içeren bölümde ise bulanik programlama ile ilgili olan üyelik fonksiyonu, bulanik dogrusal programlama problemi ve optimal çözüm tanimlari verilmistir.

Çalismamizin son bölümünde ise çok amaçli tasima problemine, bulanik programlama yaklasimi kullanarak optimal çözümü hesaplayan algoritmalar sunulmustur. Birim ürün tasima maliyetinin, üretim merkezi miktarlari ve tüketim merkezi miktarlarinin bulanik sayilar olarak verildigi tasima problemine çözüm öneren bir algoritma sunulmustur.

Anahtar kelimeler: Çok amaçli tasima problemi, üyelik fonksiyonu, bulanik programlama.

ABSTRACT

In this paper, the conventional transportation problem that is a special form of linear programming problem is mathematically defined. The optimal solution of the problems is calculated.

Then the fuzzy programming is defined by giving basic structures; membership function, fuzzy linear programming problem and optimal solution.

Finally, some algorithms for multiobjective transportation problems to find optimal solution using fuzzy programming approach is determined. This paper also represents a procedure to derive the fuzzy objective value of objective fuzzy transportation problem in that the cost coefficient and the supply and demand quantities are fuzzy numbers.

Keywords: Multiobjective transportation problem, membership function, fuzzy programming

1. GIRIS

Isletmelerde, üretimin planlamasinda ve üretim sürecinin tamamlanmasindan sonra ürünlerin üretim merkezlerinden (fabrikalardan), çesitli tüketim merkezlerine (pazarlara) dagitilmasi olayi önemli bir problem olmaktadir. Çünkü, bu problemin geleneksel veya bilime dayali olmayan yöntemlerle çözülmesi isletmelere büyük mali yükler getirebilmektedir. Bunun sonucunda ise isletmeler iflas edebilmektedir. Örnegin, hazir beton üreten bir firmanin, üretim merkezinden Istanbul' un çesitli bölgelerinde bulunan santiyelere betonun ulastirilmasi probleminin çözümü, mevsim kosullari, Istanbul' un trafigi, sokaklarin durumu göz önüne alindiginda çok ciddi bir planlama ve bilimsel destek gerektirmektedir. Diger bir problemde ise saglik sektöründe ilaçlarin tasinmasinin yaninda tasinma seklide önemli bir sorun olarak yer almaktadir. Bazi ilaçlar özel kosullar altinda tasinirken iki nokta arasinda soguk hava depolari gibi aktarma noktalari bulunabilmektedir. Dolayisiyla degisik problemlerde farkli degiskenler maliyeti etkileyebilmektedir. Tasima problemi, sadece ürünlerin tasinmasinda degil isletmelerde planlamanin her asamasinda kullanilmaktadir.

Tasima problemleri asagidaki alanlarda kullanilmaktadir.

1. Üretim ve tüketim merkezleri arasinda optimal ürün dagitiminin belirlenmesinde.

2. Üretim islerinin birimlere dagitiminda.

3. Çesitli sebeke agi problemlerinde.

4. Organize sanayi bölgelerinin ve fabrika yerlerinin belirlenmesinde.

Bütün bunlarin yaninda, isletmelerde üretim miktarlari ve gerekse farkli bölgelerdeki pazarlarin talep miktarlari ile ilgili bazi sinirlamalar bulunabilmektedir. Örnegin yolcu tasima firmalari acentelerini kuracaklari yerlerin belirlenmesinde, degisik semtlerdeki yolcu potansiyelini, merkeze ulasim zamanini göz önüne alarak hangi semtlerde ve birbirlerine ne kadar uzaklikta olmalari gerektigi gibi bazi sinirlamalari göz önüne almalari gerekmektedir.

Tasima problemi (TP) olarak kurulan bir problem, dogrusal programlama problemi (DPP)' nin özel bir halidir. Bu yüzden, tasima problemleri, dogrusal programlamada kullanilan özel yöntemlerle çözülebilmektedir. Tasima problemleri, sadece tasima problemleri için gelistirilen tasima tablolarini kullanan bazi yöntemlerle daha çabuk ve daha az hesaplamalarla çözülebilmektedir.

Tasima problemi, ilk olarak 1941 yilinda F.L. Hitchcock tarafinda formüle edilmis ve daha sonra T.C. Koopmans tarafindan gelistirilmistir. Problemin ilk dogrusal programlama modelini G.B. Dantzing kurmustur. 1953 yilinda W.W. Cooper ve A. Charnes atlama tasi yöntemini gelistirmistirler. Bu yöntem tasima problemlerinin çözümüne yönelik, özel amaçli bir uygulama getirmistir.[*]

[*] Kwak N.K., (1973), Mathematical Programming with Business Applications, 88, Mc Graw-Hill Book Company, New York.

2. TASIMA PROBLEMININ MATEMATIKSEL YAPISI

m tane üretim merkezi ve n tane tüketim merkezi içeren tasima probleminde i numarali tüketim merkezinin arz miktari a_i, j numarali tüketim merkezinin talep miktari b_j ile gösterilmektedir $(1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq n)$. Üretim merkezi en fazla a_i miktarda ürünü sunabilmektedir. Tüketim merkezi ise en fazla b_j miktarda ürün isteyebilmektedir. i numarali üretim merkezinden, j numarali tüketim merkezine tasinan toplam ürün miktari x_{ij}, birim ürün tasima maliyet ise c_{ij} ile gösterilmektedir.

Tasima problemlerindeki toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} c_{ij} x_{ij} \tag{2.1}$$

Bu sekilde tanimlanan tasima problemleri asagidaki ön kosullari da saglamalidir.

1. Tasinacak ürünler ayni degere sahip birimlerle ifade edilmelidir.

2. Üretim merkezi arz miktarlari, tüketim merkezi talep miktarlari kesin degerler olarak bilinmelidir. Bu miktarlarin esit olmasi veya esitligin saglanmasi gerekmektedir.

3. Üretilen ürünler aktarma olmadan tüketim merkezlerine gönderilmelidir.

4. Birim ürün tasima maliyeti sabit olmalidir.

Bu kosullari saglayan tasima probleminin matematiksel modeli kurulurken, arz ve talep miktarlarinin birbirine esit olmasi gerekmektedir.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.2}$$

(2.2) denklemi saglanmiyorsa tasima problemi dengesiz tasima problemi olarak isimlendirilmektedir. Tasima probleminin çözülebilmesi için dengeli veya dengelenmis tasima problemi olmasi gerekmektedir.

Tasima problemlerinin çözümünde kullanilan tasima tablosunun yapisi Tablo 2.1’ deki gibi olmaktadir.

Tablo 2.1

(i) / (j)	P_1	P_2	………	P_J	………	P_n	a_i
F_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	………	c_{1j} x_{1j}	………	c_{1n} x_{1n}	a_1
F_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	………	c_{2j} x_{2j}	………	c_{2n} x_{2n}	a_2
………	………	………	………	………	………	………	………
F_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	………	c_{ij} x_{ij}	………	c_{in} x_{in}	a_i
………	………	………	………	………	………	………	………
F_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	………	c_{mj} x_{mj}	………	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	………	b_j	………	b_n	Σa_i / Σb_j

a_i : Fabrikanin arz ettigi maksimum miktar.

b_j : Pazarin talep ettigi maksimum miktar.

c_{ij} : i. fabrikadan j. pazara birim ürün tasima maliyeti.

Birim tasima maliyetleri c_{ij} $(i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n)$, ile gösterilmektedir. 1. fabrika ile ilgili tasima maliyetleri toplami,

$$Z_{11} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{ij}x_{ij} + ... + c_{1n}x_{1n}$$

seklinde yazabilmektedir. Benzer sekilde, 2., 3. ve m. fabrikalarla ilgili $Z_2, Z_3, \ldots, Z_m$ tasima maliyetleri yazilabilmektedir.

Bu maliyetler belirlendikten sonra toplam tasima maliyeti

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Z} = \; & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} \\
& + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}
\end{aligned}
$$

seklinde yazilmaktadir.

Tablo 2.1’ de a_i ile fabrika kapasiteleri, b_j ile pazar talepleri gösterilmektedir. Her bir fabrikadan gönderilen ürünlerin toplamini o fabrikanin kapasitesine, her bir pazara ulastirilan toplam miktarin da o pazarin talebine esit olma kosulu bulunmaktadir. Buna göre fabrika kosullari için;

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\
& x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ve pazar kosullari için;

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = b_1 \\
& x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = b_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = b_m
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

esitlikleri yazilabilmektedir. (2.3) ve (2.4) esitlikleri toplam ifadesiyle (2.5)’ deki gibi yazilmaktadir.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m), \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,\ldots,n),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Tasima problemlerinde, tasinacak ürün miktarlari negatif olmayacaktir.

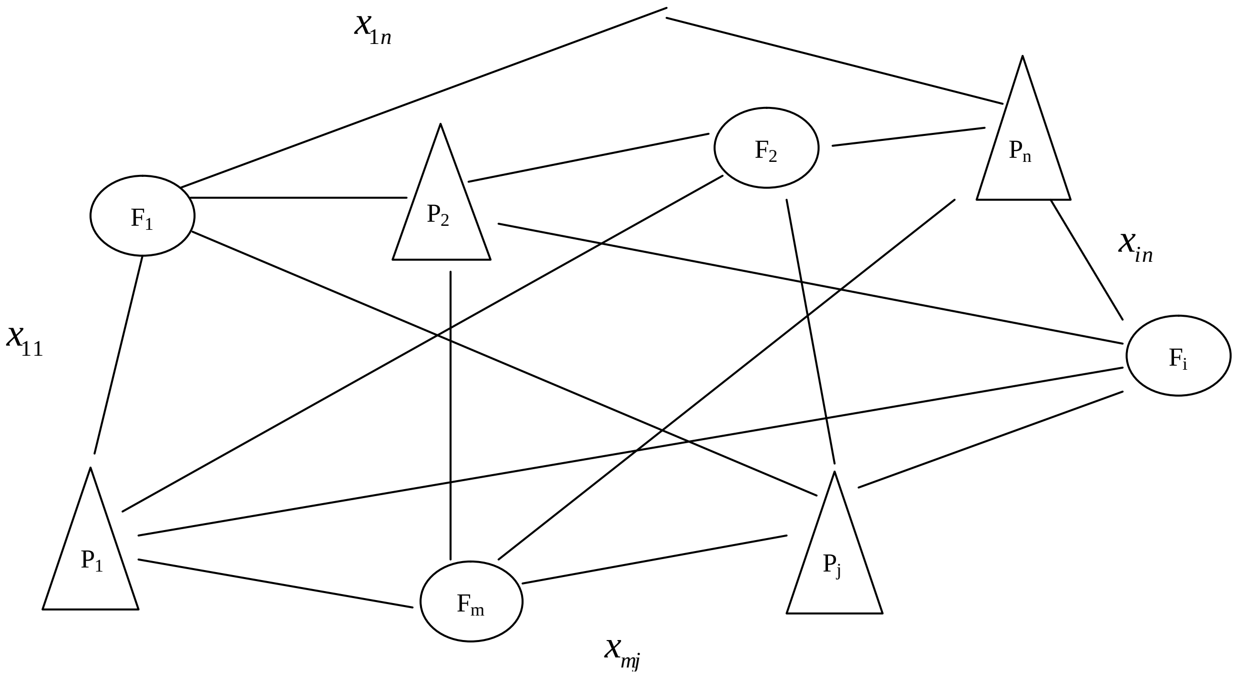
$$x_{ij} \geq 0. \tag{2.6}$$

Tasima problemi (2.5) ve (2.6) kisitlari altinda (2.2) denkleminin minimum yapilmasini amaçlamaktadir. Tasima probleminin amaç denklemi asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$Min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.7}$$

Bir tasima problemi ayni zamanda bir dogrusal programlama problemi (DPP) dir. DPP' nin çözüm yöntemleri tasima problemleri için de kullanilmaktadir. Fakat fabrika veya pazar sayilarinin artmasi, bu çözüm yöntemlerinin etkinligini ortadan kaldirmaktadir.

m tane fabrika, n tane pazar içeren tasima problemi Sekil 2.1' deki gösterilmektedir.



Sekil 2.1 Tasima probleminin grafik gösterimi.*

F_i : Fabrikalar

P_j : Pazarlar

x_{ij} : $i.$ fabrikadan $j.$ pazara gönderilen ürün miktari.

* Tulunay, Y., (1980), Matematik Programlama ve Isletme Uygulamalari, 338, Istanbul.

2.1 Dengeli ve Dengesiz Tasima Problemleri

Genel tasima problemlerinde fabrikada üretilen ürünlerin toplam arzi, pazarlarin toplam talebine esit oldugu kabul edilmektedir. Bu durumda tasima problemi, dengeli tasima problemi olmaktadir. Dengeli tasima probleminin matematiksel ifadesi asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{2.8}$$

Bazi tasima problemlerinde, arz miktari talepten az veya talepten çok olmaktadir. Bu sekildeki modellere dengesiz tasima problemi denir. Dengesiz tasima problemlerinin çözümünün hesaplanabilmesi için kukla pazar veya fabrika eklenerek dengeli tasima problemine dönüstürülmektedir. Eger toplam arz miktari toplam talep miktarindan fazla ise problemi dengelemek için fazla miktar olan

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

arz miktarini tüketmesi için kukla bir pazar eklenmektedir. Eklenen bu kukla pazara ürün gönderilmeyeceginden fabrikalardan kukla pazarlara birim ürün tasima maliyeti sifir olmaktadir. Ayrica herhangi bir ürün fabrikadan kukla pazara gönderildiginde bu durum fabrikada atil kapasite oldugunu göstermektedir.

Eger toplam arz miktari, toplam talep miktarindan az ise problem uygun tasima problemi olmadigindan bu tasima problemini dengelemek için

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

miktarinda arz eksikligi kukla fabrika tarafindan karsilanmaktadir. Herhangi bir pazar kukla fabrikadan ürün alamayacaktir.

Dengesiz tasima problemi, dengeli tasima problemine dönüstürüldükten sonra herhangi bir tasima problemi çözüm yöntemiyle çözülebilmektedir.

2.2 Tasima Problemlerinin Çözüm Yöntemleri

Tasima problemlerinin çözümünde genel olarak asagidaki adimlar sirasiyla uygulanmaktadir.

1. Tasima tablosu hazirlanarak baslangiç temel çözümün bulunmasi.

2. Baslangiç çözümün, uygun çözüm olup olamadigi incelenmesi.

3. Baslangiç uygun çözüm, optimal çözüm degil ise gelistirilmesi.

4. Optimal çözüm bulununcaya kadar ikinci ve üçüncü adimlarin tekrarlanmasi.

Tablo (2.1)' deki tasima tablosunda m tane satir fabrika sayisini, n tane sütun pazar sayisini göstermektedir. Dagitim islemlerinin tamamlanmasindan sonra olusturulan baslangiç temel çözümünde $(m+n-1)$ tane hücreye dagitim yapiliyorsa, bu çözüm baslangiç uygun çözüm olmaktadir. $(m+n-1)$ tane hücreye dagitim yapilmiyorsa mevcut olan bu bozulma durumunun giderilerek tasima probleminin çözümüne ait dagitim tablosunda $(m+n-1)$ tane temel degisken bulunmasi saglanmalidir.

Tasima problemlerinin uygun çözümünün hesaplanmasinda baslica üç yöntem kullanilmaktadir.

1. Kuzey bati köse yöntemi.

2. En ucuz maliyetli hücreler yöntemi.

3. Vogel yaklasim yöntemi.

2.2.1 Kuzey Bati Köse Yöntemi

Kuzey bati köse yöntemini, G.B. Dantzig teklif etmis, A. Charnes ve W.N. Cooper tarafindan gelistirilmistir. Tasima problemlerine sistematik olarak çözüm arayan yöntemlerden biridir. Dagitim islemine baslangiç tablosunun kuzey bati kösesinden baslandigi için bu ismi almaktadir. Bu hücreye mümkün olan en fazla miktarda dagitim yapilmaktadir. Her dagitim isleminden sonra bir sag taraftaki hücreye veya asagidaki hücreye geçilmek sartiyla tüm sira ve sütun sartlari saglanip dagitim islemi tamamlanmaktadir.[*]

Örnek 2.1:[**]

A sirketine ait olan üç fabrikanin üretim kapasiteleri sirasiyla 180, 120, 140 birimdir. Bu fabrikalardan dört farkli pazarin talep ettigi ürün miktarlari ise 100, 140, 120, 80 birimdir. Tasima maliyeti ise km basina 1 YTL olarak hesaplanmaktadir. Fabrikalar ile pazarlar arasinda mesafeler km olarak Tablo 2.2' de verilmektedir.

Tablo 2.2

	P_1	P_2	P_3	P_4
F_1	10	5	12	8
F_2	3	11	7	14
F_3	6	12	9	8

[*] Dogan, I., (1995), Yöneylem Arastirmasi Teknikleri ve Isletme Uygulamalari, Bilim Teknik Yayinevi, 84, Ankara.

[**] Cerit, C., (1996), Lineer Programlama, Istanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 80, Istanbul.

Çözüm:

Tasima problemi kuzey bati köse yöntemiyle çözülecegindendagitim islemine tasima tablosunun sol üst kösesinden baslanmalidir. F_1 fabrikasindan 180 birim ürün, P_1 pazarinin ise 100 birim talebi bulunmaktadir. F_1 fabrikasindan P_1 pazarinin talebi tamamen karsilanmaktadir. F_1 fabrikasinda kalan 80 birim ürün ile P_2 pazarinin gereksiniminin 80 birimi karsilanmaktadir. Bu dagitimlar sonucunda F_1 fabrikasinin tüm kapasitesi kullanilmis olmaktadir. P_2 pazarinin 60 birim gereksinimi F_2 fabrikasi tarafindan karsilanmaktadir. Böylece P_2 pazarinin talebinin tamami karsilanmis olmaktadir. F_2P_3 hücresine F_2 fabrikasindan geriye kalan 60 birimlik dagitim yapilmaktadir. P_3 pazarinin gereksinimi olan 60 birim F_3P_3 hücresine 60 birim dagitim yapilarak F_3 fabrikasi tarafindan karsilanmis olmaktadir. Son adimda F_3P_4 hücresine 80 birim dagitim yapilarak dagitim islemi tamamlanmaktadir. Bu dagitim islemleri Tablo 2.3' de gösterilmektedir.

Tablo 2.3

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	10 100	5 80	12	8	180
F_2	3	11 60	7 60	14	120
F_3	6	12	9 60	8 80	140
Talep	100	140	120	80	440 440

Tablo 2.3' de $(m+n-1) = 3+4-1 = 6$ tane temel degisken bulundugu için hesaplanan çözüm baslangiç uygun çözüm olmaktadir. Tasima maliyeti ise asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (100*10) + (80*5) + (60*11) + (60*7) + (60*9) + (80*8)
= 3660 YTL dir.

2.2.2 En Ucuz Maliyetli Hücreler Yöntemi

Bu yöntemde tasima tablosunda en ucuz maliyeti olan hücre belirlenmektedir. En ucuz maliyetli hücreye tüketim merkezinin talep miktari ve tüketim merkezinin arz miktari göz önüne alinmak sarti ile mümkün olan en büyük miktarda dagitim yapilmaktadir. Arz ve talep miktarlarinin hepsi kullanilana kadar dagitim islemlerine devam edilerek, baslangiç dagitim tablosu olusturulmaktadir. Bu yöntemin üç farkli yaklasimi bulunmaktadir.

1. Satir yaklasimi.

2. Sütun yaklasimi.

3. Genel yaklasim.

Örnek 2.2: *

B sirketinin degisik yerlerde kurulmus dört fabrikasi, bu fabrikalara bagli olan dört farkli pazari vardir. Tasima birim maliyeti, arz ve talep miktarlari Tablo 2.4’ de verilmektedir.

Tablo 2.4

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	4	3	4	5	40
F_2	6	8	5	8	60
F_3	3	4	5	5	40
F_4	1	2	3	4	50
Talep	55	25	50	60	190 / 190

* Dogan, I., (1995), Yöneylem Arastirmasi Teknikleri ve Isletme Uygulamalari, Bilim Teknik Yayinevi, 86, Ankara.

1. Satir yaklasimi:

Dagitim islemi satir ve sütun gereksinimleri göz önünde bulundurmak sartiyla her satirin en ucuz maliyetli hücrelerine dagitim yapilmasi esasina dayanmaktadir. Birden fazla ucuz maliyetli hücre varsa sütun sayisi küçük olan hücre seçilerek dagitim yapilmaktadir.

Birinci satirin en ucuz maliyetli hücresi F_1P_2 hücresidir. Arz ve talep miktarlarina göre F_1P_2 hücresine 25 birim dagitim yapilmaktadir. Ikinci en ucuz maliyetli hücresi olan F_1P_1 hücresine, 15 birim dagitim yapilmaktadir. Ikinci satirin en ucuz maliyetli hücresi F_2P_3 hücresidir. F_2P_3 hücresine 50 birim dagitim yapilmaktadir. Ikinci en ucuz maliyetli hücresi olan F_2P_1 hücresine 10 birim dagitim yapilir. Üçüncü satirin en ucuz maliyetli hücresi F_3P_1 hücresidir. F_3P_1 hücresine 30 birim dagitim yapilmaktadir. Arz ve talep miktarlarina göre F_3P_4 hücresine 10 birim dagitim yapilmaktadir. Dördüncü satirda F_4P_4 hücresine 50 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim islemlerinden sonra tasima tablosu asagidaki sekilde olusmaktadir.

Tablo 2.5

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	4 15	3 25	4	5	40
F_2	6 10	8	5 50	8	60
F_3	3 30	4	5	5 10	40
F_4	1	2	3	4 50	50
Talep	55	25	50	60	190 / 190

Toplamtasimamaliyeti $= (15*4) + (25*3) + (10*6) + (50*5) + (30*3) + (10*5) + (50*4)$
$= 785$ YTL dir.

2. Sütun yaklasimi:

Sütun yaklasiminda, her sütunun en ucuz maliyetli hücresi seçilmek sartiyla dagitim yapilmaktadir. Birden fazla ucuz maliyetli hücre varsa satir numarasi küçük olan hücreye arz ve talep miktarlari göz önüne alinarak dagitim yapilmaktadir.

Birinci sütunun en ucuz maliyetli hücresi F_4P_1 hücresidir. F_4P_1 hücresine 50 birim dagitim yapilmaktadir. Ikinci en ucuz maliyetli hücresi F_3P_1 hücresine 5 birim dagitim yapilmaktadir. Ikinci sütunda arz ve talep miktarlarina göre F_1P_2 hücresine 25 birim dagitim yapilmaktadir. Üçüncü sütunda arz ve talep miktarlarina göre F_1P_3 hücresine 15 birim, F_2P_3 hücresine 35 birim dagitim yapilmaktadir. Dördüncü sütunda arz ve talep miktarlarina göre F_3P_4 hücresine 35 birim, F_2P_4 hücresine 25 birim dagitim yapilmaktadir. Dagitim islemlerinden sonra tasima tablosu Tablo 2.6' teki gibi olusmaktadir.

Tablo 2.6

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	4	3 25	4 15	5	40
F_2	6	8	5 35	8 25	60
F_3	3 5	4	5	5 35	40
F_4	1 50	2	3	4	50
Talep	55	25	50	60	190 / 190

Toplam tasima maliyeti = (25*3) + (15*4) + (35*5) + (25*8) + (5*3) + (35*5) + (50*1)
= 750 YTL dir.

3. Genel yaklasim:

Genel yaklasimda, en ucuz maliyetli hücre seçiminde tasima tablosunun geneli dikkate alinarak dagitim yapilmaktadir. Birden fazla ucuz maliyetli hücre olmasi durumunda, dagitim yapilacak hücre rasgele seçilerek dagitim yapilmaktadir.

Tablo 2.4' ün en ucuz maliyeti hücresi olan F_4P_1 hücresine 50 birim dagitim yapilmaktadir. Arz ve talep miktarlari göz önüne alinarak F_3P_1 hücresine 5 birim dagitim yapilmaktadir. Dagitim yapilmamis hücreler arasinda en ucuz maliyetli hücre F_1P_2 hücresine 25 birim dagitim yapildiktan sonra, kalan hücreler arasinda en ucuz maliyetli hücre olan F_1P_3 hücresine 15 birim ve F_2P_3 hücresine 35 birim dagitim yapilmaktadir. Son adimda dagitim yapilmamis hücrelerin arz ve talep miktarlarina göre F_3P_4 hücresine 35 birim ve F_2P_4 hücresine 25 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimlardan sonra tasima tablosu asagidaki sekilde olusmaktadir.

Tablo 2.7

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	4	3 25	4 15	5	40
F_2	6	8	5 35	8 25	60
F_3	3 5	4	5	5 35	40
F_4	1 50	2	3	4	50
Talep	55	25	50	60	190 / 190

Toplam tasima maliyeti = (25*3) + (15*4) + (35*5) + (25*8) + (5*3) + (35*5) + (50*1)
= 750 YTL dir.

Örnek 2.2' nin sütun ve genel yaklasimda hesaplanan toplam tasima maliyeti satir yaklasimina göre daha ucuz olmaktadir.

2.2.3 Vogel Yaklasim Yöntemi

Vogel yaklasim yöntemi VAM (Vogel's Approximation Method) olarak adlandirilmaktadir. Bu yöntem W.R. Vogel tarafindan 1958 yilinda gelistirilmistir. VAM, kuzey bati köse yöntemine göre baslangiç temel çözümün hesaplanmasinda daha fazla islem gerektirmektedir. Fakat bu yöntemin, baslangiç uygun çözümü optimal çözüme oldukça yakin sonuçlar vermektedir. VAM ile baslangiç temel çözüm hesaplanirken her bir hücredeki maliyetler hesaba katilmaktadir.

VAM için sirasiyla takip edilecek adimlar asagidaki sekilde siralanmaktadir.

1. Her bir satirda ve sütunda tasima maliyeti en ucuz olan iki hücrenin farklari alinir. Bu farklar tasima tablosunun altina sütun ceza ve sagina satir ceza degeri olarak yazilir.

2. Satir veya sütun ceza degerlerinden en büyük degerin bulundugu satir veya sütundaki en ucuz maliyetli hücreye mümkün olan en çok miktarda ürün dagitim yapilir.

3. Dagitim yapilan satir veya sütun tasima tablosundan çikartilir.

4. Fabrika veya pazarlardan bir tane kalincaya kadar önceki adimlar tekrarlanir.*

Bu adimlarda sonra dagitim tablosu olusturulmaktadir.

Örnek 2.3:

C isletmesine ait olan 3 fabrikanin arz miktarlari sirasiyla 400, 300 ve 300 birimdir. Ayni isletmeye ait olan 5 magazanin talep miktarlari 240, 40, 200, 200 ve 320 birimdir. Bu isletmeye ait arz, talep miktarlari ve birim ürün tasima maliyetleri Tablo 2.8' de verilmektedir.

---

* Ünsal, F. M., Rüzgar,B. ve Rüzgar, N., (2000), Isletme ve Ekonomi için Bilgisayar Uygulamali Sayisal Yöntemler, Türkmen Kitapevi, 173, Istanbul.

Tablo 2.8

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	9	2	5	13	16	400
F_2	14	11	12	4	3	300
F_3	6	7	8	15	10	300
Talep	240	40	200	200	320	1000 / 1000

Çözüm:

Tablo 2.9' da birim ürün tasima maliyetleri ve birim ceza degerleri bulunmaktadir.

Tablo 2.9

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Satir Ceza
F_1	9	2	5	13	16	3
F_2	14	11	12	4	3	1
F_3	6	7	8	15	10	1
Sütun Ceza	3	5	3	9	7	

Satir ve sütunlar için hesaplanan birim ceza degerlerinin en büyügü 9 olup, P_4 sütunu hizasindadir. Bu sütunun en ucuz maliyetli hücresi F_2P_4 ' e 200 birim dagitim yapilmaktadir. F_2P_4 hücresine yapilan dagitim ile P_4 pazarinin talebi tamamen karsilanmis olup ikinci adimda P_4 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

P_4 sütunu dahil edilmeden hazirlanan tasima tablosunun birim ceza degerleri, Tablo 2.10' deki gibi hesaplanmaktadir.

Tablo 2.10

	P_1	P_2	P_3	P_5	Satir Ceza
F_1	9	2	5	16	3
F_2	1	11	12	3	8
F_3	6	7	8	10	1
Sütun Ceza	3	5	3	7	

Tablo 2.10' da en büyük birim ceza degeri 8 olup, F_2 satiri hizasinda bulunmaktadir. F_2 satirindaki en ucuz maliyetli hücre olan F_2P_5 hücresine 100 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim miktari P_5 sütunun toplamindan çikartilir. Ikinci adim sonunda F_2 pazarinin arz miktari tamamen kullanildigindan F_2 satiri tasima tablosundan çikartilir.

Tablo 2.11

	P_1	P_2	P_3	P_5	Satir Ceza
F_1	9	2	5	16	3
F_3	6	7	8	10	1
Sütun Ceza	3	5	3	6	

Tablo 2.11' e göre birim ceza degerlerinin en büyügü 6 olup, P_5 sütunu hizasinda bulunmaktadir. Bu sebeple P_5 sütunundaki en ucuz maliyetli hücre olan F_3P_5 hücresine 220 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim miktari F_3 sirasi toplamindan çikartilir. Üçüncü adimdan sonra F_3P_5 hücresine yapilan dagitimla P_5 pazarinin talep miktari karsilanmis oldugu için dördüncü adimda P_5 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.12

	P_1	P_2	P_3	Satir Ceza
F_1	9	2	5	3
F_3	6	7	8	1
Sütun Ceza	3	5	3	

Tablo 2.12' de birim ceza degerlerinin en büyügü 5 olup, P_2 sütunu hizasindadir. Bu sebeple P_2 sütunundaki en ucuz maliyetli F_1P_2 hücresine 40 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim miktari F_1 satirinin toplamindan çikartilmaktadir. Dördüncü adim sonunda P_2 pazarinin talebi tamamen karsilandigi için besinci adimda P_2 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.13

	P_1	P_3	Satir Ceza
F_1	9	5	4
F_3	6	8	2
Sütun Ceza	3	3	

Besinci adimda olusturulan Tablo 2.13' e göre birim ceza degerlerinin en büyügü 4 olup, F_1 satiri hizasinda bulunmaktadir. Bu sebeple F_1 satirinin en ucuz birim maliyetli hücresi F_1P_3 hücresine 200 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim miktari F_1 satiri toplaminda çikartilmaktadir. Bu dagitimla P_3 pazarinin talep miktari tamamiyla karsilanmis olmaktadir. Yapilan dagitim islemlerinin sonunda P_2, P_3, P_4 ve P_5 pazarlarinin talep miktarlari tamamen karsilanmis olmaktadir. Tatmin edilmemis P_1 sütunu ile F_1 ve F_3 satirlari kalmistir. F_3P_1 ve F_1P_1 hücresine sirasiyla 80, 160 birim dagitim yapilarak dagitim islemi tamamlanmaktadir. Bu dagitimlardan sonra tasima tablosu Tablo 2.14' deki gibi olusacaktir.

Tablo 2.14

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	9 160	2 40	5 200	13	16	400
F_2	14	11	12	4 200	3 100	300
F_3	6 80	7	8	15	10 220	300
Talep	240	40	200	200	320	1000 / 1000

Tablo 2.14' de (m+n-1)=3+5-1=7 tane temel degisken bulundugu için hesaplanan çözüm baslangiç uygun çözümdür. Tablo 2.14' e göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (160*9)+(40*2)+(200*5)+(200*4)+(100*3)+(80*6) +(220*10)
= 6300 YTL dir.

2.3 Dengesiz Tasima Problemleri

Tasima problemlerinde toplam arz miktari, toplam kapasite miktarina esit olmayabilmektedir. Bu durum iki degisik sekilde gerçeklesmektedir.

1. Toplam talep miktari, toplam arz miktarindan büyük olan tasima problemleri.

2. Toplam talep miktari, toplam arz miktarindan küçük olan tasima problemleri.

Toplam talep miktari büyük ise talep fazlasi var demektir. Bu sekildeki tasima problemlerinde talep fazlasini karsilayacak sekilde kukla fabrika eklenmektedir.

Toplam talep miktari toplam kapasite miktarindan küçük ise, tasima problemlerinde arz miktari fazlasini karsilayacak sekilde kukla pazar eklenmektedir.

Iki durumda da eklenen kukla merkezlerdeki maliyetler sifir olacak sekilde seçilmektedir. Kukla merkezlerinin eklenmesinden sonra tasima problemleri önceki bölümde yer alan çözüm yöntemlerinden herhangi biriyle çözülebilmektedir.

2.3.1 Talep Miktari Arz Miktarindan Büyük Tasima Problemleri

Örnek 2.4:[*]

D sirketi, arabalarini iki ayri yerden kiraya vermektedir. Arabalari kiralamak isteyen merkezlerin talep sayilari sirasiyla $P_1 = 9,\ P_2 = 6,\ P_3 = 7$ ve $P_4 = 9$ tanedir. D sirketinde birinci merkezde 15, ikincisinde 13 tane fazla araba bulunmaktadir. Arabalar kiralandiktan sonra tekrar kiralanan merkeze teslim edilmektedir. Arabalarin kiralandigi merkezler arasindaki birim araba tasima maliyeti YTL türünden Tablo 2.15' de verilmektedir.

Tablo 2.15

	P_1	P_2	P_3	P_4
Merkez 1	45	17	21	30
Merkez 2	14	18	19	31

Çözüm:

Bu tasima probleminin çözümü VAM ile hesaplanmaktadir.

Örnek 2.4' de toplam arz ve talep miktari asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$\sum_{j=1}^{4} b_j = 9 + 6 + 7 + 9 = 31$ tane araba talep edilmektedir.

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 15 + 13 = 28$ tane araba arz edilmektedir.

$\sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{2} a_i = 31 - 28 = 3$ tane araba ise istenmekte fakat sirketin elinde bulunmamaktadir.

Fazla olan talep miktarini karsilayacak sekilde kukla bir arz merkezi olusturulmalidir. Bu kukla merkezin birim araba tasima maliyeti sifir olarak alinmaktadir.

---

[*] Öztürk, A., (2002), Yöneylem Arastirmasi, Ekin Kitapevi, 128, Bursa.

Tablo 2.16

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
M_1	45	17	21	30	15
M_2	14	18	19	31	13
M_3 (Kukla)	0	0	0	0	3
Talep	9	6	7	9	31 / 31

Satir ve sütun birim ceza degerleri Tablo 2.17' deki gibi hesaplanmaktadir.

Tablo 2.17

	P_1	P_2	P_3	P_4	Satir ceza
M_1	45	17	21	30	4
M_2	14	18	19	31	4
M_3 (Kukla)	0	0	0	0	0
Sütun ceza	14	17	19	30	

Tablo 2.17' ye göre birim ceza degerlerinin en büyügü P_4 sütunu hizasindadir. Bu sütunun en ucuz maliyetli hücresi olan M_3P_4 hücresine, 3 tane araba dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim isleminden sonra M_3 arz merkezi tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.18

	P_1	P_2	P_3	P_4	Satir ceza
M_1	45	17	21	30	4
M_2	14	18	19	31	4
Sütun ceza	31	1	2	1	

Tablo 2.18' e göre satir veya sütun birim ceza degerlerinin en büyük olani P_1 sütunu hizasinda bulunmaktadir. P_1 sütununun en ucuz maliyetli hücresi olan M_2P_1 hücresine 9 tane araba dagitim yapilarak, P_1 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir. Yeni birim ceza degerleri Tablo 2.19' deki gibi hesaplanmaktadir.

Tablo 2.19

	P_2	P_3	P_4	Satir ceza
M_1	17	21	30	4
M_2	18	19	31	1
Sütun ceza	1	2	1	

Tablo 2.19' da birim ceza degerleri arasinda en büyügü 4 olup, M_1 satiri hizasinda bulunmaktadir. Bu satirdaki en ucuz maliyetli hücre M_1P_2 olup bu hücreye 6 tane araba dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimdan sonra P_2 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.20

	P_3	P_4	Satir ceza
M_1	21	30	9
M_2	19	31	12
Sütun ceza	2	1	

Tablo 2.20' ye göre birim ceza degerleri arasinda en büyük deger 12 olup, M_2 satiri hizasinda bulunmaktadir. Bu satirin en ucuz maliyetli hücresi olan M_2P_3' e 4 tane araba dagitim yapilmaktadir. Arz merkezlerindeki 9 tane araba ise $M_1P_3 = 3$, $M_1P_4 = 6$ tane dagitim yapilarak, dagitim islemi tamamlanmaktadir. Dagitim tablosu Tablo 2.21' deki olusacaktir.

Tablo 2.21

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
M_1	45	17 6	21 3	30 6	15
M_2	14 9	18	19 4	31	13
M_3 (Kukla)	0	0	0	0 3	3
Talep	9	6	7	9	31 31

Tablo 2.21' de $(m+n-1) = 3+4-1 = 6$ tane temel degisken bulunmaktadir. Buna göre bu çözüm baslangiç uygun çözümdür. Toplam tasima maliyeti hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (6*17) + (3*21) + (6*30) + (9*14) + (4*19) + (3*0)
= 547 YTL dir.

2.3.2 Talep Miktari Arz Miktarindan Küçük Tasima Problemleri

Örnek 2.5:[*]

E isletmesinin, fabrika kapasiteleri sirasiyla $F_1 = 75,\ F_2 = 125,\ F_3 = 100$ birimdir. Dört farkli müsterisinin talep miktarlari sirasiyla $P_1 = 30,\ P_2 = 70,\ P_3 = 40$ ve $P_4 = 90$ birimdir. Bu örnegin tasima tablosu Tablo 2.22' de verilmektedir.

Tablo 2.22

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	35	28	6	40	75
F_2	20	9	15	24	125
F_3	30	8	16	12	100
Talep	30	70	40	90	300 / 230

Çözüm:

Örnek 2.5' e göre toplam talep ve arz esitligi asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$\sum_{j=1}^{4} b_j = 30 + 70 + 40 + 90 = 230$ birim talep edilmektedir.

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 75 + 125 + 100 = 300$ birim arz edilmektedir.

$\sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 300 - 230 = 70$ birim fazla arz miktari bulunmaktadir.

[*] Esin, A., (1983), Yöneylem Arastirmasinda Yararlanilan Karar Yöntemleri, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 263, Ankara.

Bu miktari karsilamak için kukla tüketim merkezi olusturulmalidir. Bu kukla tüketim merkezine ürün gönderilmeyeceginden tasima maliyeti sifir olarak alinmaktadir. Örnek 2.5' in yeni tasima tablosu Tablo 2.23' deki gibi olmaktadir.

Tablo 2.23

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5 (Kukla)	Arz
F_1	35	28	6	40	0	75
F_2	20	9	15	24	0	125
F_3	30	8	16	12	0	100
Talep	30	70	40	90	70	300 / 300

Tablo 2.23' deki dengeli tasima probleminin çözümü VAM ile hesaplanabilmektedir.

Tablo 2.24

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5 (Kukla)	Satir ceza
F_1	35	28	6	40	0	6
F_2	20	9	15	24	0	9
F_3	30	8	16	12	0	8
Sütun ceza	10	1	9	12	0	

Tablo 2.24’ e göre en büyük birim ceza degeri, P_4 sütunu hizasinda bulunmaktadir. Bu sütundaki en ucuz maliyetli hücresi olan F_3P_4’ e 90 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimdan sonra P_4 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.25

	P_1	P_2	P_3	P_5 (Kukla)	Satir ceza
F_1	35	28	6	0	6
F_2	20	9	15	0	9
F_3	30	8	16	0	8
Sütun ceza	10	1	9	0	

Tablo 2.25’ de en büyük birim ceza degeri P_1 sütunu hizasinda olup, en ucuz maliyetli hücresi F_2P_1’ e 30 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimdan sonra P_1 sütunu tasima tablosundan çikartilir.

Tablo 2.26

	P_2	P_3	P_5 (Kukla)	Satir ceza
F_1	28	6	0	6
F_2	9	15	0	9
F_3	8	16	0	8
Sütun ceza	1	9	0	

Tablo 2.26' da en büyük birim ceza degerlerinden biri F_2 satirindadir. Bu satirin en ucuz maliyetli hücresi F_2P_5 ' e 70 birim dagitim yapilarak, P_5 sütunu tasima tablosundan çikartilir.

Tablo 2.27

	P_2	P_3	Satir ceza
F_1	28	6	22
F_2	9	15	6
F_3	8	16	8
Sütun ceza	1	9	

Tablo 2.27' ye göre en büyük birim ceza degeri, F_1 satiri hizasinda bulunmaktadir. F_1 satirinin en ucuz maliyetli hücresi olan F_1P_3 ' e 40 birim dagitim yapildiktan sonra, P_3 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir. Bu dagitimdan sonra sirasiyla $F_1P_2 = 35$, $F_2P_2 = 25$ ve $F_3P_2 = 10$ birim dagitim yapildiktan sonra tasima tablosu Tablo 2.28' deki gibi olusmaktadir.

Tablo 2.28

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5 (Kukla)	Arz
F_1	35	28 35	6 40	40	0	75
F_2	20 30	9 25	15	24	0 70	125
F_3	30	8 10	16	12 90	0	100
Talep	30	70	40	90	70	300 / 300

Tablo 2.28’ de $(m+n-1) = 3 + 5 - 1 = 7$ tane temel degisken bulunmaktadir. Buna göre hesaplanan çözüm baslangiç uygun çözüm olmaktadir. Tablo 2.28’ e göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (35*28)+(40*6)+(30*20)+(25*9)+(70*0)+(10*8)+(90*12)
= 3205 YTL dir.

2.4 Tasima Problemlerinde Optimal Çözümün Bulunmasi

Kuzey bati köse yöntemi, en ucuz maliyetli hücreler yöntemi ve VAM ile bulunan çözümler, baslangiç uygun çözüm olmakla birlikte, optimal çözüm olmayabilmektedir. Baslangiç temel uygun çözümlerin, optimal çözüm olup olmadiginin belirlenebilmesi için, dagitimda (m+n-1) tane hücreye dagitim yapilmis olmasi gerekmektedir. Baska bir ifadeyle bozulma durumu olmamasi gerekmektedir. Bozulma durumu varsa giderilmelidir.

Baslangiç uygun çözümün optimalliginin belirlendigi optimallik testlerinde, dagitim yapilan temel degiskenlerin disinda kalan temel olmayan degiskenlerin çözüme katilmasi saglanmaktadir. Temel olmayan degiskenlerin çözüme katilmasiyla, toplam tasima maliyetinde herhangi bir azalmanin olup olmadigi kontrol edilebilmektedir. Toplam tasima maliyetindeki azalmayi saglayan temel olmayan degiskenler, temel degisken olarak tasima tablosuna alinmaktadir. Bu islemler sonucunda optimal çözüme ulasilabilmektedir.

Bu bölüm sirasiyla asagidaki üç basliktan olusmaktadir.

1. Atlama tasi yöntemi.

2. Çogaltan yöntemi.

3. Bozulma durumu ve çözümü.

2.4.1 Atlama Tasi Yöntemi

Atlama tasi yönteminde, baslangiç uygun çözümde yer almayan temel olmayan degiskenlerden herhangi birine dagitim yapildiginda, toplam tasima maliyetindeki degisim miktari hesaplanmaktadir.

Her temel olmayan degisken için, bu degiskenlerin bulunduklari hücrelere bir birim dagitim yapildiginda, maliyetteki net degisme veya test miktari $d_{ij} > 0$ hesaplanmaktadir. Bu dagitimlar yapilirken satir veya sütun sartlari konulmaktadir. Bu sartlarin konulabilmesi için dagitim yapilan hücreden baslanilarak, ayni satir ve sütunlardaki önceden dagitim yapilmis hücrelerdeki dagitim miktarlari azaltilmakta veya arttirilmaktadir. Dagitim yapilirken, bos hücrelerin test miktarlarinda negatif degere $(d_{ij} < 0)$ sahip olanlar göz önüne alinmaktadir. Net degisimi pozitif olan $(d_{ij} > 0)$ bir hücreye yapilacak olan dagitim, toplam tasima maliyetinde herhangi bir azalma saglamamaktadir. Ilk dagitim, en büyük negatif test miktarina sahip olan hücreye yapilmaktadir. Bu dagitim islemleri negatif test miktari kalmayincaya kadar devam etmektedir. Negatif test miktari kalmayinca optimal çözüme ulasilmaktadir.

Örnek 2.6:*

Üç dagitim merkezinden, bes müsteriye araba gönderilmektedir. Tasima maliyetleri, dagitim merkezleri ve müsteriler arasindaki uzakliga bagli olarak km basina belirlenmektedir. Tasima maliyeti, tasima yapan kamyonun tam yüklü veya kismen yüklü olmasina bagli degildir. Tam dolu bir kamyon 18 araba almaktadir. Tasima maliyeti de kamyon basina her km için 2 YTL dir. Dagitim merkezleriyle müsteriler arasindaki uzakliklar, arz ve talep miktarlari, araba sayisi türünden Tablo 2.29' da verilmektedir.

---

* Taha, H. A., (2002), Yöneylem Arastirmasi, (Çev. Baray, S. A. ve Esnaf, S), Literatür Yayincilik, 168, Istanbul.

Tablo 2.29

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	100	150	200	140	35	400
F_2	50	70	60	65	80	200
F_3	40	90	100	150	130	150
Talep	100	200	150	160	140	750 / 750

Çözüm:

Örnek 2.6' daki tasima probleminin optimal çözümünün hesaplanabilmesi için ilk önce baslangiç uygun çözümün hesaplanmasi gerekmektedir. Baslangiç uygun çözümünün hesaplanmasi için en ucuz maliyetli hücreler yöntemi kullanilabilmektedir.

Tablo 2.29' un en ucuz maliyetli hücresi F_1P_5 olup bu hücreye 140 birim dagitim yapilabilmektedir. Ikinci en ucuz maliyetli hücresi olan F_3P_1 hücresine 100 birim dagitim yapilmaktadir. Üçüncü adimda en ucuz maliyetli hücre F_2P_3 hücresine 150 birim dagitim yapilmaktadir. Dördüncü adimda en ucuz maliyetli hücre olan F_2P_4 hücresine arz ve talep miktarlari göz önüne alinmak sartiyla 50 birim dagitim yapilmaktadir. Besinci adimda F_3P_2 hücresine 50 birim dagitim yapilmaktadir. En ucuz maliyetli hücrelerden biri olan F_1P_4 hücresine 110 birim dagitim yapilmaktadir. Yedinci adimda dagitim yapilmamis hücreler içinde en ucuz maliyetli hücre olan F_1P_2 hücresine 150 birim dagitim yapilmaktadir. Bu islemler sonucunda baslangiç dagitim tablosu Tablo 2.30' daki gibi olusmaktadir.

Tablo 2.30

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	100	150 150	200	140 110	35 140	400
F_2	50	70	60 150	65 50	80	200
F_3	40 100	90 50	100	150	130	150
Talep	100	200	150	160	140	750 / 750

Tablo 2.30' da $(m+n-1) = 3+5-1 = 7$ tane temel degisken bulundugu için hesaplanan çözüm baslangiç uygun çözüm olmaktadir.

Örnek 2.6' da toplam tasima maliyeti tasinan araba sayisina bagli degildir. Toplam tasima maliyeti hesaplanirken tasinan kamyon sayisi göz önüne alinmaktadir. Her bir kamyon 18 araba almaktadir. Tablo 2.30' da hesaplanan degerler tasinan araba sayisini göstermektedir. Hesaplanan bu degerler 18' e bölünmek sartiyla çikan degerler bir üst tamsayi degerine tamamlanmaktadir. Bu degerler, tasima isleminde kullanilan kamyon sayisini göstermektedir. Ayrica bulunan sonuç 2 YTL ile çarpilmasi sonucunda toplam tasima maliyeti hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (2/18)*[(150*150)+(140*110)+(35*140)+(60*150)+(65*50)
+(40*100)+(90*50)]
= 2*(150*9+140*7+35*8+60*9+65*3+40*6+90*3)
= 2*(1350+980+280+540+195+240+270)
= 2*3855
= 7710 YTL dir.

Tablo 2.30' da hesaplanan çözümün optimalliginin hesaplanmasinda atlama tasi yöntemi kullanilirsa ilk önce test degerleri hesaplanmalidir. Test degerlerinin hesaplanmasinda çevrim kuralindan yararlanilmaktadir. Çevrim kuralinda, seçilen bos hücreden baslanilarak, diger dolu hücreleri kullanarak ve tekrar baslangiç hücresine ulasilmaktir. Bu sirada üzerinden geçilen her dolu hücrenin maliyetleri baslangiçtan itibaren sirasiyla (-), (+) olmak üzere isaretlenmektedir. Bu isaretlenen maliyetler sonra toplanmaktadir. Hesaplanan net degisim miktarlarindan negatif (-) olani varsa, bulunan çözümden daha optimal bir çözümün oldugu anlasilmaktadir. Test degerleri

$$d_{11} = c_{11} - c_{31} + c_{32} - c_{12} = 100 - 40 + 90 - 150 = 0$$
$$d_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{33} - c_{14} = 200 - 60 + 65 - 140 = 65$$
$$d_{21} = c_{21} - c_{24} + c_{14} - c_{12} + c_{32} - c_{31} = 50 - 65 + 140 - 150 + 90 - 40 = 25$$
$$d_{22} = c_{22} - c_{24} + c_{14} - c_{12} = 70 - 65 + 140 - 150 = -5$$
$$d_{25} = c_{25} - c_{15} + c_{14} - c_{24} = 80 - 35 + 140 - 65 = 120$$
$$d_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{24} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 100 - 60 + 65 - 140 + 150 - 90 = 25$$
$$d_{34} = c_{34} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 150 - 140 + 150 - 90 = 70$$
$$d_{35} = c_{35} - c_{15} + c_{12} - c_{32} = 130 - 35 + 150 - 90 = 155$$

seklinde hesaplanmaktadir. Hesaplanan degerlerden tek negatif çikan test degeri, d_{22} dir. Bu degerin bulundugu hücreye dagitim yapilmasiyla toplam tasima maliyetinin azalmasi saglanmaktadir. Bu çevrimin dagitim tablosu Tablo 2.31' de gösterilmektedir.

Tablo 2.31

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	100	150 150	200	140 110	35 140	400
F_2	50	70	60 150	65 50	80	200
F_3	40 100	90 50	100	150	130	150
Talep	100	200	150	160	140	750 / 750

Negatif deger d_{22} için çevrim, $x_{24} = 50$, $x_{14} = 110$, $x_{12} = 150$ birim olarak hesaplanmaktadir. Atlama tasi yönteminde çevrim içindeki dagitimlardan en düsük olani seçilmektedir. d_{22} çevrimindeki en az dagitim x_{24} hücresine 50 birimlik dagitimdir. Çevrim içindeki isareti (-) olan hücrelerden 50 birim çikartilir, isareti (+) olanlara ise 50 birim ilave edilmektedir. Bu dagitimlardan sonra tasima tablosu, Tablo 2.32' deki hesaplanmaktadir.

Tablo 2.32

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	100	150 100	200	140 160	35 140	400
F_2	50	70 50	60 150	65	80	200
F_3	40 100	90 50	100	150	130	150
Talep	100	200	150	160	140	750 / 750

Tablo 2.32' ye ait test degerleri asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$$d_{11} = c_{11} - c_{31} + c_{32} - c_{12} = 100 - 40 + 90 - 150 = 0$$
$$d_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{22} - c_{12} = 200 - 60 + 70 - 150 = 60$$
$$d_{21} = c_{21} - c_{22} + c_{32} - c_{31} = 50 - 70 + 90 - 40 = 30$$
$$d_{24} = c_{24} - c_{22} + c_{12} - c_{14} = 65 - 70 + 150 - 140 = 5$$
$$d_{25} = c_{25} - c_{15} + c_{12} - c_{22} = 80 - 35 + 150 - 50 = 125$$
$$d_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{32} = 100 - 60 + 70 - 90 = 20$$
$$d_{34} = c_{34} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 150 - 140 + 150 - 90 = 70$$
$$d_{35} = c_{35} - c_{15} + c_{12} - c_{32} = 130 - 35 + 150 - 90 = 155$$

Tablo 2.32' ye ait test degerlerinde negatif deger bulunmamaktadir. Bunun için Tablo 2.32' de hesaplanan çözüm optimal çözümdür.

Tablo 2.32’ ye göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = 2*(150*6+140*9+35*8+70*3+60*9+40*6+90*3)
= 2*(900+1260+280+210+540+240+270)
= 2*3700
= 7400 YTL dir.

Tablo 2.32’ de hesaplanan optimal çözüm ile Tablo 2.30’ da hesaplanan baslangiç uygun çözüm arasinda 7740 – 7400 = 310 YTL fark bulunmaktadir. Bu çözüm toplam tasima maliyetinde 310 YTL tasarruf saglamistir.

2.4.2 Çogaltan Yöntemi

Çogaltan yöntemi, yatirim projelerinin seçiminde önemli rol oynamaktadir. Maliyette tasarrufu daha fazla saglamasindan dolayi diger yöntemlere daha fazla tercih edilmektedir. Ayrica bu yöntem daha önce ele alinan atlama tasi yöntemine oranla islem basamaklari daha az oldugundan optimal çözüm daha kolay hesaplanmaktadir. Çogaltan yöntemi, dual problemin çözümüne dayanmaktadir. Tasima modelinin genel formülü primal model olarak sayilirsa ayni problem dual model olarak ta gösterilebilmektedir.

$$
\begin{aligned}
&MinZ = && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
&Kisitlar && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,...,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,...,n, \\
& && x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Dual problem ise asagidaki formda yazilmaktadir.

$$
\begin{aligned}
&Maks && Y = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \\
&Kisitlar && u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Çogu zaman çogaltan olarak adlandirilan dual degiskenler $u_i\,(i = 1,2,...,m)$, m tane arz kisitlayicisina ve $v_j\,(i = 1,2,...,n)$ de n tane talep kisitlayicisina karsilik oldugundan $(m+n)$ tane u_i ve v_j vardir. Ayrica tasima probleminde m tane sira, n tane sütun oldugundan $(m+n)$ tane denklem vardir. Ancak bu denklemlerden $(m+n-1)$ tanesini belirlenerek herhangi bir çözüm bulunmaktadir. Buna göre, u_i veya v_j degerlerinden birinin degeri sifir olarak kabul edilmektedir. Genellikle u_1' e sifir degeri verilmektedir. Sonrasinda dolu hücreler yani temel degiskenler için $u_i + v_j = c_{ij}$ veya $-c_{ij} + u_i + v_j = 0$ olarak kabul edilmek sartiyla u_i ve v_j degerleri hesaplanmaktadir. Bos hücrenin yani temel olmayan degiskenlerin test miktarlari $u_i + v_j - c_{ij}$ bagintisina göre hesaplanmaktadir. Bu baginti $d_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ seklinde de ifade edilebilmektedir. Test miktari olan d_{ij}' in ifade ettigi gibi bu miktar net degisim maliyetidir. Temel olmayan degiskenlerden birinin test miktari pozitif ise buna karsilik olan hücreye ayirim yapilarak toplam maliyet azaltilabilmektedir.

Diger taraftan birden fazla temel olmayan degiskenin test miktari pozitif ise ayirim en yüksek pozitif degerli temel degiskene yapilmaktadir. Eger tüm temel olmayan degiskenlerin test miktarlari degerleri sifira esit veya sifirdan küçük ise hesaplanan baslangiç temel çözüm, optimal çözüm olmaktadir.*

Örnek 2.7:

G sirketine ait olan fabrikalarin arz miktarlari, pazar talep miktarlari birim ürün tasima maliyetleri Tablo 2.33' deki gibi verilmektedir. Bu örnek Primal ve dual problem olarak ifade edildikten sonra problemin çogaltan yöntemine göre optimal çözümü hesaplanabilmektedir.

Tablo 2.33

	P_1	P_2	P_3	P_4	Arz
F_1	15	18	12	13	200
F_2	10	10	11	9	300
F_3	8	5	7	8	450
Talep	250	100	225	325	950 / 900

Çözüm:

$$\sum_{i=1}^{3} F_i = 200 + 300 + 450 = 950$$

$$\sum_{j=1}^{4} P_j = 250 + 100 + 225 + 325 = 900$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_i \geq \sum_{i=1}^{4} P_j$$

---

* Öztürk, A., (2002), Yöneylem Arastirmasi, Ekin Kitapevi, 136, Bursa.

Tasima problemi dengesiz oldugundan kukla talep merkezi olusturulmalidir.

Kukla talep merkezi talep miktari ise

$$P_5 = \sum_{i=1}^{3} F_i - \sum_{j=1}^{4} P_j = 950 - 900 = 50 \text{ birimdir.}$$

Kukla merkeze yapilan dagitimlarin birim tasima maliyetleri sifirdir.

$$\begin{aligned} MinZ = \; & 15x_{11} + 18x_{12} + 12x_{13} + 13x_{14} + 0x_{15} + 10x_{21} - 10x_{22} \\ & + 11x_{23} + 9x_{24} + 0x_{25} + 8x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} + 8x_{34} - 0x_{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 300 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 450 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 225 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 325 \\ & x_{15} + x_{25} + x_{35} = 50 \\ & x_{ij} \geq 0, \; i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4,5. \end{aligned}$$

Dual problem ise

$$Maksy = 200u_1 + 300u_2 + 450u_3 + 250v_1 + 100v_2 + 225v_3 + 325v_4 + 50v_5$$

$$\begin{aligned} Kisitlar \quad & u_1 + v_1 \leq 15, \quad && u_1 + v_2 \leq 18, \\ & u_1 + v_3 \leq 12, && u_1 + v_4 \leq 13, \\ & u_1 + v_5 \leq 0, && u_2 + v_1 \leq 10, \\ & u_2 + v_2 \leq 10, && u_2 + v_3 \leq 11, \\ & u_2 + v_4 \leq 9, && u_2 + v_5 \leq 0, \\ & u_3 + v_1 \leq 8, && u_3 + v_2 \leq 5, \\ & u_3 + v_3 \leq 7, && u_3 + v_4 \leq 8, \\ & u_3 + v_5 \leq 0, && \end{aligned}$$

formunda yazilmaktadir.

Tablo 2.34’ de verilen tasima problemi VAM ile çözülebilmektedir.

Tablo 2.34

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	15	18	12	13	0	200
F_2	10	10	11	9	0	300
F_3	8	5	7	8	0	450
Talep	250	100	225	325	50	950 / 950

Tablo 2.34' un birim ceza degerleri, Tablo 2.35' deki gibi hesaplanmaktadir.

Tablo 2.35

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Satir Ceza
F_1	15	18	12	13	0	12
F_2	10	10	11	9	0	9
F_3	8	5	7	8	0	5
Sütun Ceza	2	5	4	1	0	

Tablo 2.35' e göre en büyük birim ceza degeri 12 olup, F_1 satiri hizasindadir. F_1 satirinin en ucuz maliyetli hücresi olan F_1P_5' e mümkün olan en büyük miktar 50 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim miktari, F_1 satiri dagitim miktari degerinden çikartilir. Bu dagitim islemlerinden sonra P_5 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.36

	P_1	P_2	P_3	P_4	Satir Ceza
F_1	15	18	12	13	1
F_2	10	10	11	9	1
F_3	8	5	7	8	2
Sütun Ceza	2	5	4	1	

Tablo 2.36' ya göre en büyük birim ceza degeri, P_2 sütunu hizasinda bulunmaktadir. P_2 sütununda en ucuz maliyetli hücre, F_3P_2 hücresidir. F_3P_2 hücresine 100 birim dagitim yapilabilmektedir. Bu dagitim ile P_2 sütununun talep miktari tamamen karsilandigi için P_2 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.37

	P_1	P_3	P_4	Satir Ceza
F_1	15	12	13	1
F_2	10	11	9	1
F_3	8	7	8	1
Sütun Ceza	2	4	1	

Tablo 2.37’ de en büyük birim ceza degeri, P_3 sütunu hizasinda bulunmaktadir. Bu sütundaki en ucuz maliyetli hücre olan F_3P_3 hücresine mümkün olan en büyük dagitim miktari, 225 birimdir. Bu dagitimdan sonra P_3 sütunu tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 2.38

	P_1	P_4	Satir Ceza
F_1	15	13	2
F_2	10	9	1
F_3	8	8	0
Sütun Ceza	2	1	

Tablo 2.38’ e göre en büyük birim ceza degerlerinden biri P_1 sütunu hizasinda bulunmaktadir. P_1 sütunun en ucuz maliyetli hücresi F_3P_1 ’ e mümkün olan en büyük dagitim miktari 125 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitim isleminden sonra dagitim yapilmayan F_1P_4 ve F_2P_4 hücrelerine sirasiyla 150, 175 birim dagitim yapilarak dagitim islemi tamamlanmaktadir. Bu dagitim islemlerinden sonra baslangiç dagitim tablosu Tablo 2.39’ deki sekliyle olusmaktadir.

Tablo 2.39

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	15	18	12	13 150	0 50	200
F_2	10 125	10	11	9 175	0	300
F_3	8 125	5 100	7 225	8	0	450
Talep	250	100	225	325	50	950 / 950

VAM' a göre elde edilen temel baslangiç degiskenlerin degerleri $x_{14}=150,\ x_{15}=50,$ $x_{21}=125,\ x_{24}=175,\ x_{31}=125,\ x_{32}=100,\ x_{33}=225$ birimdir. Tablo 2.39' da hesaplanan çözümde $(m+n-1)=3+5-1=7$ tane temel degisken oldugu için bu çözüm baslangiç uygun çözümdür. Tablo 2.39' a göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (13*150)+ (0*50)+(10*125)+(9*175)+(8*125)+(5*100)+(7*225)
= 7850 YTL dir.

Temel degiskenlere karsilik gelen dual denklemler hesaplanarak çogaltan yöntemine göre optimal çözüm hesaplanabilmektedir.

$x_{14}:\quad u_1+v_4=c_{14}=13,$
$x_{15}:\quad u_1+v_5=c_{15}=0,$
$x_{24}:\quad u_2+v_4=c_{24}=9,$
$x_{21}:\quad u_2+v_1=c_{21}=10,$
$x_{31}:\quad u_3+v_1=c_{31}=8,$
$x_{32}:\quad u_3+v_2=c_{32}=5,$
$x_{33}:\quad u_3+v_3=c_{33}=7.$

Eger $u_1=0$ degeri verilirse dual degisken degerleri, temel olmayan degiskenlerin yani bos hücrelerin test miktarlari hesaplanmaktadir.

$$
\begin{aligned}
&0+v_4=13, && v_4=13,\\
&0+v_5=0, && v_5=0,\\
&u_2+13=9, && u_2=-4,\\
&-4+v_1=10, && v_1=14,\\
&u_3+14=8, && u_3=-6,\\
&-6+v_2=5, && v_2=11,\\
&-6+v_3=7, && v_3=13.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_{11}=u_1+v_1-c_{11}=0+14-15=-1,\\
&d_{12}=u_1+v_2-c_{12}=0+11-18=-7,\\
&d_{13}=u_1+v_3-c_{13}=0+13-12=1,\\
&d_{22}=u_2+v_2-c_{22}=-4+11-10=-3,\\
&d_{23}=u_2+v_3-c_{23}=-4+13-11=-2,\\
&d_{34}=u_3+v_4-c_{34}=-6+13-8=-1,\\
&d_{35}=u_3+v_5-c_{35}=-6+0-0=-6,
\end{aligned}
$$

x_{13} temel olmayan degiskenin test miktari pozitif degerli oldugundan, hesaplanan bu çözüm optimal çözüm degildir. x_{13} hücresinden baslamak sartiyla kapali çevrim belirlenmelidir. Bu çevrim sadece temel degiskenlerden geçen yatay ve dikey çizgiler içermektedir. Çevrimin yönü ise sadece temel degiskenli hücrelerde degismektedir. Kapali çevrimin köse isaretleri programa giren degiskenin yani yüksek pozitifli test miktarli temel olmayan degiskenin bulundugu hücreye (+) isareti, komsu hücreye (-) isareti verilmektedir. Bu çevrimde yer alan degiskenler için arz ve talep kosulu bozulmayacak sekilde yapilmalidir.

Tablo 2.40

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1			+	-		
F_2	-			+		
F_3	+		-			
Talep						

Tablo 2.40’ da kapali çevrim gösterilmektedir. x_{13} temel olmayan degiskene yapilacak dagitim miktari kapali çevrim içinde yer alan negatif isaretli degiskenlerin en küçük degerli olani kadardir. Bu miktar arz ve talep kisitlarina göre çevrimdeki temel degiskenlerin isaretine göre eklenmekte veya çikarilmaktadir. Buna göre, çevrimde negatif isaretli temel degiskenler, $x_{14} = 150,\ x_{21} = 125,\ x_{33} = 225$ birimdir. Degiskenler ise asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$x_{14} = 150 - 125 = 25,$
$x_{21} = 125 - 125 = 0,$
$x_{24} = 175 + 125 = 300,$
$x_{31} = 125 + 125 = 250,$
$x_{33} = 225 - 125 = 100,$
$x_{15} = 50,\ x_{32} = 100.$

x_{21} degiskeni sifir oldugu için programdan çikar. Hesaplanan bu degiskenle Tablo 2.41’ deki gibi gösterilmektedir.

Tablo 2.41

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Arz
F_1	15	18	12 125	13 25	0 50	200
F_2	10	10	11	9 300	0	300
F_3	8 250	5 100	7 100	8	0	450
Talep	250	100	225	325	50	950 / 950

Tablo 2.41’ e göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (12*125)+(13*25)+(0*50)+(9*300)+(8*250)+(5*100)+(7*100)
= 7725 YTL dir.

Tablo 2.39' da hesaplanan toplam tasima maliyetine göre 7850-7725=135 YTL tasarruf saglanmaktadir. Bu çözümün optimal çözüm olup olmadigini arastirmak için u_i ve v_j degerleri, $u_1 = 0$ kabul edilmek sartiyla,

$$
\begin{aligned}
&u_1 + v_3 = c_{13}, \quad && 0 + v_3 = 12, \quad && v_3 = 12,\\
&u_1 + v_4 = c_{14}, && 0 + v_4 = 13, && v_4 = 13,\\
&u_1 + v_5 = c_{15}, && 0 + v_5 = 0, && v_5 = 0,\\
&u_2 + v_4 = c_{24}, && u_2 + 13 = 9, && u_2 = -4,\\
&u_3 + v_3 = c_{33}, && u_3 + 12 = 7, && u_3 = -5,\\
&u_3 + v_1 = c_{31}, && -5 + v_1 = 8, && v_1 = 13,\\
&u_3 + v_2 = c_{32}, && -5 + v_2 = 5, && v_2 = 10,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 13 - 15 = -2,\\
d_{12} &= u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 10 - 18 = -8,\\
d_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = -4 + 13 - 10 = -1,\\
d_{22} &= u_2 + v_2 - c_{22} = -4 + 10 - 10 = -4,\\
d_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = -4 + 13 - 11 = -3,\\
d_{25} &= u_2 + v_5 - c_{25} = -4 + 0 - 0 = -4,\\
d_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = -5 + 13 - 8 = 0,\\
d_{35} &= u_3 + v_5 - c_{35} = -5 + 0 - 0 = -5,
\end{aligned}
$$

seklinde hesaplanmaktadir.

Temel olmayan degiskenlerin test miktari sifir veya negatif oldugundan ulasilan çözüm optimal çözümdür. Toplam tasima maliyeti, dual problemin amaç fonksiyonundan faydalanilarak asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$\sum_{i=1}^{3} S_i u_i + \sum_{j=1}^{5} D_j v_j$ =(200*0)-(4*300)-(5*450)+(13*250)+(10*100)+(12*225)+(13*325)+(50*0)

= 0-1200-2250+3250+1000+2700+4225+0

= 7725 YTL dir.

2.4.3 Bozulma Durumu ve Çözümü

m tane üretim merkezi, n tane tüketim merkezi bulunana tasima problemlerinde hesaplanan baslangiç çözümünün, baslangiç temel uygun çözüm olmasi için, temel degisken sayisinin (m+n-1) olmasi gerekmektedir. Temel degisken sayisi (m+n-1)' den az oldugu zaman bozulma durumu ortaya çikmaktadir. Tasima probleminin çözümünün devam ettirilebilmesi ve optimal çözümün bulunabilmesi için temel degisken sayisinin (m+n-1)' e esitlenmesi gerekmektedir. Bunun için temel olmayan degiskenlere yani bos hücrelere yeterli sayida sifir degerli veya sifira çok yakin pozitif degerli miktarlar dagitilmaktadir. Baslangiç çözüm tablosu hesaplandiktan sonra, hangi yönteme göre optimallik testi uygulanacak ise, ona göre bozulma durumu giderilmektedir. Baslangiç çözümünde bozulma durumu varsa ve çogaltan yönteme göre çözüm yapiliyorsa ilk olarak dual degiskenleri olan u_i ve v_j degerlerinin hesaplanmasi gerekmektedir. Dual degiskenlerin hesaplanmasi için bos hücreye dagitim yapilmaktadir. Bos hücre sayisi birden fazla ve seçim yapilmasi gerekiyor ise en ucuz maliyetli hücreye dagitim yapilmaktadir. Optimal çözüme atlama tasi yöntemi kullanarak ulasilacak ise en kolay çevrim yapilabilecek bos hücreye yapay degisken ayrilmaktadir.

Örnek 2.8:

Baslangiç çözümü Tablo 2.42' de verilen tasima probleminin çözümünün optimal degeri hesaplanabilmektedir.

Tablo 2.42

	P_1	P_2	P_3	Arz
F_1	5	7 100	4	100
F_2	10 30	3	6 170	200
F_3	9 150	5	2	150
Talep	180	100	170	450 / 450

Tablo 2.42' e göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (100*7)+(30*10)+(170*6)+(150*9)
=3370 YTL dir.

Tablo 2.42' de görüldügü üzere temel degisken sayisi $(m+n-1) = 3+3-1 = 5$ sayisindan daha küçüktür. Temel degisken sayisi bes olmasi gerekirken dört tanedir. Bu bozulma durumunu gidermek için temel degisken sayisinin bes olmasi gerekmektedir. Bu sebeple temel olmayan degiskenli hücrenin bir tanesine sifir miktarinda dagitim yapilmasi gerekmektedir. Atlama tasi yöntemine göre en kolay çevrimi saglayabilecek dagitim yapilmamis hücre x_{11} hücresi olmaktadir ve yapay degisken buraya ayrilmak sartiyla çözüm temel duruma getirilmektedir.

Tablo 2.43

	P_1	P_2	P_3	Arz
F_1	5 0	7 100	4	100
F_2	10 30	3	6 170	200
F_3	9 150	5	2	150
Talep	180	100	170	450 450

Test degerleri ise asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$d_{11} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11} = 4-6+10-5 = 3,$
$d_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12} = 3-10+5-7 = -9,$
$d_{32} = c_{32} - c_{31} + c_{11} - c_{12} = 5-9+5-7 = -6,$
$d_{33} = c_{33} - c_{31} + c_{21} - c_{23} = 2-9+10-6 = -3.$

Çevrimde yer alan negatif sayilarin en küçük olani 30 birim x_{22} hücresine ayrilir, çünkü en yüksek negatif degerli temel olmayan degisken x_{22} hücresindedir. Bu islemlerden sonra

$x_{22} = 30,\ x_{12} = 70,\ x_{23} = 170,\ x_{31} = 150$ ve $x_{21} = 0$ birim olarak progr amdan çikmaktadir.

Bu dagitimlari içeren tasima tablosu Tablo 2.44' deki gibi olusmaktadir.

Tablo 2.44

	P_1	P_2	P_3	Arz
F_1	5 30	7 70	4	100
F_2	10	3 30	6 170	200
F_3	9 150	5	2	150
Talep	180	100	170	450 450

Tablo 2.44' de toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (30*5)+(70*7)+(30*3)+(170*6)+(150*9)
=3100 YTL dir.

Tablo 2.44' de hesaplanan toplam tasima maliyeti arasindaki fark 3370-3100 = 270 YTL dir.

Net degisim maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$$d_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{22} - c_{12} = 4 - 6 + 3 - 7 = -6,$$
$$d_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 10 - 5 + 7 - 3 = 9,$$
$$d_{32} = c_{32} - c_{31} + c_{11} - c_{12} = 5 - 9 + 5 - 7 = -6,$$
$$d_{33} = c_{33} - c_{31} + c_{11} - c_{12} + c_{22} - c_{23} = -12.$$

En küçük test degeri x_{33} hücresine ait oldugu için bu hücreye 70 birim dagitim yapilmaktadir.

Tasima tablosu, Tablo 2,45' deki gibi olusmaktadir.

Tablo 2.45

	P_1	P_2	P_3	Arz
F_1	5 100	7	4	100
F_2	10	3 100	6 100	200
F_3	9 80	5	2 70	150
Talep	180	100	170	450 / 450

Tablo 2.45' e göre toplam tasima maliyeti asagidaki gibi hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (100*5)+(100*3)+(100*6)+(80*9)+(70*2)
= 2260 YTL dir.

Tablo 2.44' e göre 3100-2260 = 840 YTL tasarruf saglanmaktadir. Net degisim maliyetleri,

$$d_{12} = c_{12} - c_{11} + c_{31} - c_{33} + c_{23} - c_{22} = 7 - 5 + 9 - 2 + 6 - 3 = 12,$$
$$d_{13} = c_{13} - c_{11} + c_{31} - c_{33} = 4 - 5 + 9 - 2 = 6,$$
$$d_{21} = c_{21} - c_{31} + c_{33} - c_{23} = 10 - 9 + 2 - 6 = -3,$$
$$d_{32} = c_{32} - c_{33} + c_{23} - c_{22} = 5 - 2 + 6 - 3 = 6,$$

seklinde hesaplanmaktadir. x_{21} hücresinin net degisim maliyeti negatif oldugundan çözüm optimal degildir. x_{21} hücresine ayrilacak miktar 80 birimdir. Buna göre temel degiskenlerin degerleri, $x_{21} = 80$, $x_{33} = 150$, $x_{23} = 20$, $x_{22} = 100$ ve $x_{11} = 100$ birimdir. Bu dagitimlari içeren tasima tablosu Tablo 2.46' da verilmektedir.

Tablo 2.46

	P_1	P_2	P_3	Arz
F_1	5 100	7	4	100
F_2	10 80	3 100	6 20	200
F_3	9	5	2 150	150
Talep	180	100	170	450 / 450

Tablo 2.46’ ya göre toplam tasima maliyeti asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

Toplam tasima maliyeti = (5*100)+(10*80)+(3*100)+(6*20)+(2*150)
= 2020 YTL dir.

Tablo 2.45’ de hesaplanan toplam tasima maliyetine göre 2260-2020 = 240 YTL tasarruf saglanmaktadir.

Tablo 2.46’ da temel olmayan degiskenlerin net degisim maliyetleri,

$$d_{12} = c_{12} - c_{22} + c_{21} - c_{11} = 7 - 3 + 10 - 5 = 9,$$
$$d_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11} = 4 - 6 + 10 - 5 = 3,$$
$$d_{31} = c_{31} - c_{33} + c_{23} - c_{21} = 9 - 2 + 6 - 10 = 3,$$
$$d_{32} = c_{32} - c_{33} + c_{23} - c_{22} = 5 - 2 + 6 - 3 = 6,$$

seklinde hesaplanmaktadir.

Temel olamayan degiskenlerin net degisim maliyetleri pozitif oldugundan Tablo 2.46’ da hesaplanan çözüm optimal çözümdür.

3. AKTARMA PROBLEMLERI

Tasima problemlerinde amaç üretim merkezlerinden üretilen ürünlerin, tüketim merkezlerine dogruda ve en ucuz maliyetle gönderilmesini saglamaktir. Bu hesaplamalar yapilirken, ürünlerin tasima merkezlerine aktarmasiz olarak veya dogrudan gönderilmesi göz önünde bulundurulmaktadir. Ancak bazi durumlarda ürünlerin tüketim merkezlerinden, önce aktarma noktalarina daha sonra bu aktarma noktalarindan tüketim merkezlerine gönderilmesi daha uygun olacaktir. Bu tip aktarma noktalarinin kullanildigi problemler aktarma problemleri olarak adlandirilmaktadir. Aktarma noktalari hem arz merkezlerinden ürün alabilen, hem de talep merkezlerine ürün gönderebilen noktalardir. Bazi durumlarda arz ve talep merkezleri de birer aktarma noktasi olabilmektedir. Üretim merkezleri arasinda bir ürün tasinmasi söz konusu ise bu arz noktalari ayni zamanda birer aktarma noktasi olabilmektedir. Ayni sekilde talep merkezleri arasinda tasima söz konusu oldugunda, arz merkezleri aktarma noktasi olmaktadir. Aktarma probleminde tasima probleminin çözümünde kullanilan yöntemler kullanilmaktadir.

Örnek 3.1:

L sirketinin Istanbul ve Bursa olmak üzere, ayni ürünü üreten iki fabrikasi bulunmaktadir. Istanbul ve Bursa' da bulunan fabrikanin günlük kapasitesi sirasiyla 250 ve 150 birimdir. Bu sirketin biri Adana digeri Van' da olmak üzere iki müsterisi vardir. Bu iki müsterinin günlük talepleri 200' er birimdir. Tasima maliyetleri göz önüne alinmak sartiyla Istanbul ve Bursa' da bulunan fabrikadan ürünler bazi durumlarda, Ankara ve Konya' daki depolara, oradan da Adana ve Van' a gönderilmektedir. Ayrica Ankara ve Konya' daki depolar arasinda da tasima yapilmaktadir. Birim tasima maliyetleri Tablo 3.1' de verilmektedir.

Tablo 3.1

	Istanbul	Bursa	Ankara	Konya	Adana	Van
Istanbul	0	-	3	2	5	6
Bursa	-	0	1	3	4	7
Ankara	-	-	0	1	3	5
Konya	-	-	2	0	2	3
Adana	-	-	-	-	0	-
Van	-	-	-	-	-	0

Çözüm:

Örnek 3.1’ de Istanbul ve Bursa arz noktalari, Ankara ve Konya aktarma noktalari, Adana ve Van’ da talep noktalari olmaktadir. Örnek 3.1’ de

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2 = 250 + 150 = 400,$$

$$\sum_{j=1}^{2} b_j = b_1 + b_2 = 200 + 200 = 400,$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j ,$$

esitlikleri sagladigindan dengeli tasima problemi olmaktadir. Tasima tablosu olusturulurken arz ve aktarma noktalari tablonun satirinda, talep ve aktarma noktalari da tablonun sütununda yer almaktadir. Her üretim ve tüketim merkezinin arz ve talep miktarlari problemde verilen arz ve talep miktarlaridir. Aktarma noktalarinin arz ve talep miktarlari ise toplam arz miktarina esittir. VAM kullanilarak baslangiç çözümü hesaplanabilmektedir.

Tablo 3.2

	Ankara	Konya	Adana	Van	Arz
Istanbul	3	2	5	6	250
Bursa	1	3	4	7	150
Ankara	0	1	3	5	400
Konya	2	0	2	3	400
Talep	400	400	200	200	1200 / 1200

Tablo 3.2’ den faydalanarak satir ve sütun birim ceza degerleri Tablo 3.3’ deki gibi hesaplanmaktadir.

Tablo 3.3

	Ankara	Konya	Adana	Van	Satir Ceza
Istanbul	3	2	5	6	1
Bursa	1	3	4	7	2
Ankara	0	1	3	5	1
Konya	2	0	2	3	2
Sütun Ceza	1	1	1	2	

Tablo 3.3' ün en büyük birim ceza degerlerinden biri olan ikinci satirin İlk hücresine 150 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimdan sonra ikinci satir tasima tablosundan çikartilmaktadir. Yeni birim ceza degerleri Tablo 3.4' deki gibi hesaplanmaktadir.

Tablo 3.4

	Ankara	Konya	Adana	Van	Satir Ceza
Istanbul	3	2	5	6	1
Ankara	0	1	3	5	1
Konya	2	0	2	3	2
Sütun Ceza	2	1	1	2	

Tablo 3.4' e göre en büyük birim ceza degerlerinden biri olan dördüncü sütun hizasinda bulunmaktadir. Bu sütunun en ucuz maliyetli hücresine mümkün olan en büyük dagitim, 200 birim dagitimdan sonra dördüncü sütün tasima tablosundan çikartilmaktadir. Yeni birim ceza degerlerini içeren Tablo 3.5' deki sekilde olusmaktadir.

Tablo 3.5

	Ankara	Konya	Adana	Satir Ceza
Istanbul	3	2	5	1
Ankara	0	1	3	1
Konya	2	0	2	2
Sütun Ceza	2	1	1	

Tablo 3.5' e göre en büyük birim ceza degerlerinden biri üçüncü satir hizasinda bulunmaktadir. Bu satirin ikinci hücresine mümkün olan en büyük 200 birim dagitim yapilmaktadir. Dagitim yapildiktan sonra üçüncü satir tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 3.6

	Ankara	Konya	Adana	Satir Ceza
Istanbul	3	2	5	1
Ankara	0	1	3	1
Sütun Ceza	3	1	2	

Tablo 3.6’ ya göre en büyük birim ceza degeri birinci sütun hizasinda bulunmaktadir. Bu sütunun en ucuz maliyetli hücresine mümkün olan en büyük dagitim, 250 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimdan sonra birinci sütun tasima tablosundan çikartilmaktadir.

Tablo 3.7

	Konya	Adana	Satir Ceza
Istanbul	2	5	3
Ankara	1	3	2
Sütun Ceza	1	2	

Tablo 3.7’ de en büyük birim ceza degeri birinci satir hizasinda bulunmaktadir. Birinci satirin en ucuz maliyetli hücresine en büyük dagitim, 200 birim dagitim yapilmaktadir. Bu dagitimdan sonra Tablo 3.7’ nin ikinci sütununun en ucuz maliyetli hücresine 150 birim, diger hücresine 50 birim dagitim yapilmaktadir. Yeni tasima tablosu Tablo 3.8’ de verilmektedir.

Tablo 3.8

	Ankara	Konya	Adana	Van	Arz
Istanbul	3	2 200	5 50	6	250
Bursa	1 150	3	4	7	150
Ankara	0 250	1	3 150	5	400
Konya	2	0 200	2	3 200	400
Talep	400	400	200	200	1200 1200

Hesaplanan çözümün optimal çözüm oldugunu belirlemek için dual degiskenlerin degerleri asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$u_1 = 0$
$x_{12}: \quad u_1 + v_2 = c_{12}, \quad 0 + v_2 = 2, \quad v_2 = 2,$
$x_{13}: \quad u_1 + v_3 = c_{13}, \quad 0 + v_3 = 5, \quad v_3 = 5,$
$x_{33}: \quad u_3 + v_3 = c_{33}, \quad u_3 + 5 = 3, \quad u_3 = -2,$
$x_{31}: \quad u_3 + v_1 = c_{31}, \quad (-2) + v_1 = 0, \quad v_1 = 2,$
$x_{21}: \quad u_2 + v_1 = c_{21}, \quad u_2 + 2 = 1, \quad u_2 = -1,$
$x_{42}: \quad u_4 + v_2 = c_{42}, \quad u_4 + 2 = 0, \quad u_4 = -2,$
$x_{44}: \quad u_4 + v_4 = c_{44}, \quad (-2) + v_4 = 3, \quad v_4 = 5.$

Temel olmayan degiskenlerin test miktarlari asagidaki gibi hesaplanmaktadir.

$d_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 2 - 3 = -1,$
$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 5 - 6 = -1,$
$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -1 + 2 - 3 = -2,$
$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 5 - 4 = 0,$
$d_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 + 5 - 7 = -3,$
$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 2 - 1 = -1,$
$d_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -2 + 5 - 5 = -2,$
$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -2 + 2 - 2 = -2,$
$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -2 + 5 - 2 = 1.$

x_{43} temel olmayan degiskenin test miktari pozitif oldugundan bulunan çözüm optimal çözüm degildir. x_{43} degiskeninin bulundugu bos hücreye dagitim yapilmalidir. Buraya yapilan dagitim miktari, x_{43} hücresinden baslayan ve bu hücrede biten çevrimde yer alan ve negatif isarete sahip en küçük miktar olan 50 birimdir. Diger temel degiskenlerin degerleri asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$x_{13} = 50 - 50 = 0,$
$x_{12} = 200 + 50 = 250,$
$x_{42} = 200 - 50 = 150.$

Böylece x_{13} degiskeni programdan çikmaktadir.

Tablo 3.9

	Ankara	Konya	Adana	Van	Arz
Istanbul	3	2 250	5	6	250
Bursa	1 150	3	4	7	150
Ankara	0 250	1	3 150	5	400
Konya	2	0 150	2 50	3 200	400
Talep	400	400	200	200	1200 1200

Tablo 3.9' un dual degisken degerleri asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$u_1 = 0$

$x_{12}:\quad u_1 + v_2 = c_{12},\quad 0 + v_2 = 2,\quad v_2 = 2,$

$x_{42}:\quad u_4 + v_2 = c_{42},\quad u_4 + 2 = 0,\quad u_4 = -2,$

$x_{43}:\quad u_4 + v_3 = c_{43},\quad -2 + v_3 = 2,\quad v_4 = 4,$

$x_{44}:\quad u_4 + v_4 = c_{44},\quad (-2) + v_4 = 3,\quad v_4 = 5,$

$x_{33}:\quad u_3 + v_3 = c_{33},\quad u_3 + 4 = 3,\quad u_3 = -1,$

$x_{31}:\quad u_3 + v_1 = c_{31},\quad (-1) + v_1 = 0,\quad v_1 = 1,$

$x_{21}:\quad u_2 + v_1 = c_{21},\quad u_2 + 1 = 1,\quad u_2 = 0.$

Temel olmayan degiskenlerin test miktarlari asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$d_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 3 = -2$

$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 5 = -1$

$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 5 - 6 = -1$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 2 - 3 = -1$

$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 4 - 4 = 0$

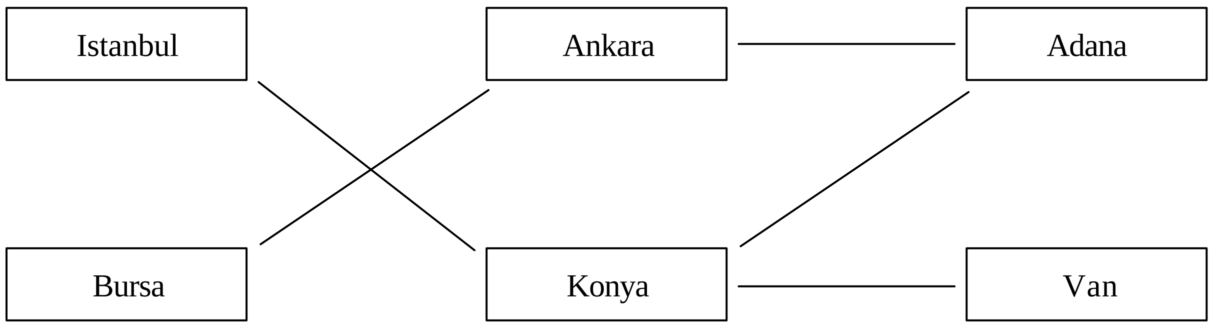
$d_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 5 - 7 = -2$

$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + 2 - 1 = 0$

$d_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -1 + 5 - 5 = -1$

$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -2 + 1 - 2 = -3$

Temel olmayan degiskenlerin test miktarlari sifira esit veya negatif oldugundan, pozitif degerli test degiskeni bulunmadigindan hesaplanan çözüm optimal çözüm olarak kabul edilmektedir. Optimal çözümün dagitim tablosu Tablo 3.9' da verilmektedir. Bu dagitim tablosuna göre L sirketi, Istanbul' da ürettigi 250 birim ürünün tamamini önce Konya' ya oradan da 50 birim ürünü Adana' ya, 200 birim ürünü ise Van' a göndermektedir. Bursa' da ürettigi 150 birim ürünü önce Ankara' ya oradan da Adana' ya göndermektedir. Bu aktarma islemleri Sekil 3.1' deki gibi olusmaktadir.



Sekil 3.1 Örnek 3.1' in aktarma islemleri.

4. BULANIK PROGRAMLAMA

4.1 Bulanik Kümeler

1965 yilinda L.A. Zadeh belirsizligin temsili için araç olarak, bulanik kümeler teorisini gelistirmistir. Ingilizce de civcivlerin tüyleri için kullanilan fuzz kelimesinden türetilen fuzzy kelimesinin karsiligi bulanik, hayaldir. Geçmiste genel ve özel olarak belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar, gelisigüzel ayrima tabi tutulmuslar ve iki degerli kümeler kuramiyla tanimlanmislardir. Adi kümeler teorisi genisletilerek ikili lojik, bulanik kümeler teorisi genisletilerek çok degerli lojik elde edilmektedir. Bulanik mantigin kullanim alanlari çok çesitli olup endüstriyel süreçleri, asansörleri, metrolari, çesitli beyaz esya, elektronik araç ve gereçleri kapsamina almistir. Kuzey Japonya'nin Sendai kentindeki metro sisteminde bulanik mantigin basarili bir sekilde uygulanmasi Japonya'da bir çigir açmistir.[*] Zadeh ilk olarak n degerli mantigi kullanarak, sonsuz degerli mantiga geçmeyi basarmis ve bunun için önce bulanik küme kavramini pekistirmistir. Bulanik küme 0 ile 1 arasinda yer alan ancak, rasgele seçilmis sonsuz tane elemani içeren bir küme olarak tanimlanmistir. Ayrica matematigin gerçek dünyayi yorumlamasinda daha genis uyarlama alani bu yolla bulunmustur. Artik sadece siyah ile beyaz yoktur. Bunlarin arasinda, bütün renkler ve onlarin her tondaki nüanslari da yer almaktadir. Iki degerli mantigin kesin degerleri yerine daha esnek degerlendirmeler gelmis olmaktadir. Örnegin sicak ile soguk arasina ilik gelmektedir. Bunun gibi gevsek niteleyicilere belli üyelik dereceleri atayarak gerçek dünyayi daha yaklasik olarak temsil eden bir sistem kurmayi basarmistir. Modern mantiktaki bir kümenin elemanlari, keskin elemanlardir. Bu elemanlarin olusturdugu kümeye keskin küme denir. Günlük hayatta keskin sayilar veya ifadeler yerine sinirlari, bulanik sayilar veya ifadeler kullanilmaktadir. Keskin kümede bu ifade $m_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile gösterilmektedir.

$$m_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \in A \end{cases} \tag{4.1}$$

(4.1) de $m_A(x)$, A kümesindeki üyelik derecesini verir. $m_A(x)$, 1 e yaklastiginda x elemaninin A kümesindeki üyeligi artmaktadir.

[*] Aksoy, Y., Özkan, M. ve Karanfil, S., (2003), Bulanik Mantiga Giris, Yildiz Teknik Üniversitesi Vakfi, 25, Istanbul.

Degisik sekillerde tanimlanmis üyelik fonksiyonlari vardir.*

1) Zadeh' in tanimladigi üyelik fonksiyonu

$$m_{young}(x) = \begin{cases} 1/\{1+[(x-25)/5]^2\} & ;x > 25 \\ 1 & ;x \leq 25 \end{cases}$$

$$m_{old}(x) = \begin{cases} 1/\{1+[(x-50)/5]^{-2}\} & ;x \geq 50 \\ 0 & ;x < 50 \end{cases}$$

2) Zimmermann' in tanimladigi üyelik fonksiyonu

$$m_x(x) = 1 - x/a,\ x \in [0, a],$$

3) Svarovski' nin tanimladigi üyelik fonksiyonu

$$m_x(x) = \begin{cases} 0 & ;x < a \\ K(x-a)^2 & ;a \leq x < b \\ K_2 x^2 + K_1 x + K_0 & ;b < x \leq c \\ 1 & ;x > c \end{cases}$$

4.2 Bulanik Dogrusal Programlama*

Zimmermann ilk olarak 1976'da bulanik küme teorisini klasik dogrusal programlama problemi (DPP)' nin çözümünde kullandi. Zimmerman DPP' ni bulanik hedefler ve sinirlar ile beraber ele aldi. Dogrusal üyelik fonksiyonu ile bulanik karar vermenin Bellmann ve Zadeh tarafindan 1970' te ortaya konulmasinin ardindan Zimmermann' da buna esdeger bir DPP ortaya koydu. Bunun ardindan bulanik dogrusal programlama farkli alanlarda hizla gelisti ve pek çok farkli uygulamalari ortaya kondu. Bulanik programlama, çok amaçli optimizasyonun bir alani olarak görülmektedir.

DPP' inde amaç fonksiyonu asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots + c_n x_n \qquad (4.2)$$

---

* Lai J.Y., and Hwang C.L., (1994), Fuzzy Mathematical Programming, 31, Springer – Verlag,

* Sakawa, M., (1993), Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, 36, New York.

m tane esitsizlik kisitlari,

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,n, \tag{4.4}$$

seklinde olmak üzere a_{ij}, b_i, c_j sabitleri vermektedir. Bu sekilde tanimlanan n boyutlu satir vektörü $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, n boyutlu sütun vektörü $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, m boyutlu sütun vektörü $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, (m x n) boyutlu $A = [a_{ij}]$ matrisi ile asagidaki vektör matris formu yazilmaktadir.

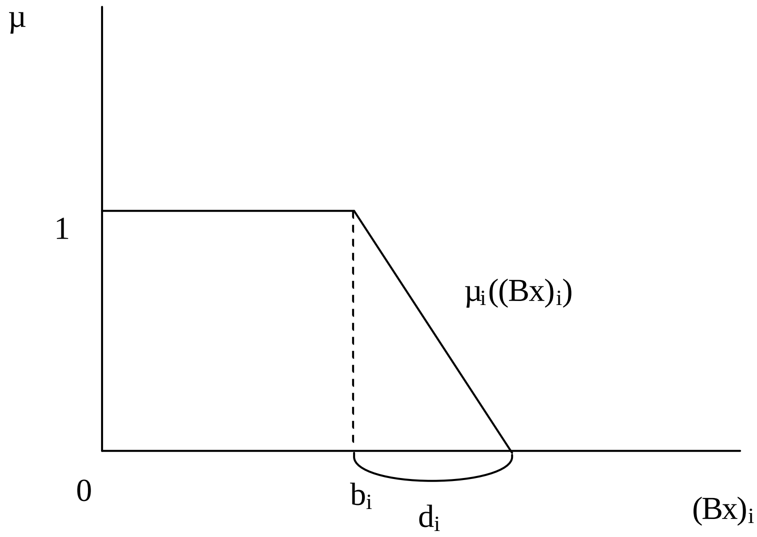
$$
\begin{aligned}
& Min z && = cx \\
& Kisitlar && Ax \le b \\
& && x \ge 0.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Zimmerman 1976' da klasik DPP' deki kati ön sartlari esneklestiren yeni durumlari sunmustur. Bunu da DPP' nin bulanik versiyonu (4.6)' deki formu ile vermistir.

$$
\begin{aligned}
& cx \precsim z_0 \\
& Ax \precsim b \\
& x \ge 0.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

(4.6)' da kullanilan $\precsim$ sembolü siradan $\le$ isaretinin bulanik versiyonunu belirtmektedir. Direkt olarak karar vericilerin bulanik hedefleri ve sinirlari bu esitsizliklerle gösterilmektedir. Yani amaç fonksiyonu z ' yi temel alarak z_0 seviyesine esit yada ondan küçüktür. Kisitlar Ax ise b ' den büyük olmamaktadir. Bellman ve Zadeh' in $cx \precsim z_0$ bulanik hedefi ve $Ax \precsim b$ bulanik sinirlamaya içeren, Zimmerman' a ait bulanik karar formülü asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$
\begin{aligned}
& Bx \precsim b' \\
& x \ge 0.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$



Sekil 4.1 Dogrusal üyelik fonksiyonu.

Buradan

$$B = \begin{bmatrix} c \\ A \end{bmatrix}, \; b' = \begin{bmatrix} z_0 \\ b \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

esitligi yazilmaktadir. Bulanik esitsizlik ise asagidaki formdadir.

$$(Bx)_i \preceq b_i^{'}, \; i = 0,1,...,m. \tag{4.9}$$

Dogrusal üyelik fonksiyonu asagidaki sekilde tanimlanmaktadir.

$$m_i((Bx)_i) = \begin{cases} 1 & , \quad (Bx)_i \le b_i' \\ 1 - \dfrac{(Bx)_i - b_i'}{d_i} & , \quad b_i' \le (Bx)_i \le b_i' + d_i \\ 0 & , \quad (Bx)_i \ge b_i' + d_i . \end{cases} \tag{4.10}$$

(4.10)' da her d_i esitsizlikteki öznel olarak seçilmis sabittir. Bu kabul edilir sinirlari göstermektedir. Su farz edilmistir ki $i.$ dereceden dogrusal üyelik fonksiyonu sinirlar içinde tanimlanmis ise 1, sinirlar disinda tanimlanmis ise 0 degerini almaktadir. Bu sekilde tanimlanan dogrusal üyelik fonksiyonu, Sekil 4.1' de verilmektedir. Bellman ve Zadeh' in bulanik karari, dogrusal üyelik fonksiyonunu ile beraber göz önüne alinirsa maksimum karar verme problemi x^* degerinin hesaplanmasindan ibaret olacaktir.

Baska bir ifadeyle problem $x^{*} \geq 0$ olacak sekilde minimum üyelik fonksiyonunu maksimum yapan degeri bulmaktir. Matematiksel olarak (4.11)' deki gibi yazilmaktadir.

$$m_D(x^*) = \underset{x \geq 0}{Maks} \underset{i=0,\dots,m}{Min} \{m_i((Bx)_i)\} \tag{4.11}$$

Sekil 4.1 den faydalanarak

$$b_i'' = b_i' / d_i,\ (B'x)_i = (Bx)_i / d_i, \tag{4.12}$$

ifadesi yazilmaktadir. (4.12)' yi, (4.11)' de yerine yazilirsa (4.13) denklemi elde edilmektedir.

$$m_D(x^*) = \underset{x \geq 0}{Maks} \underset{i=0,\dots,m}{Min} \{1 + b_i'' - (B'x)_i\} \tag{4.13}$$

(4.13) denklemi ile yardimci bir l degerinin tanimlanmasiyla asagidaki klasik DPP' ne dönüstürülmüs olmaktadir.

$$\begin{aligned} &Maks\, l \\ &Kisitlar \quad l \leq 1 + b_i'' - (B'x)_i,\ i = 0, \dots, m \\ &\qquad\qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Örnek 4.1:

N sirketi M1, M2 ve M3 ham maddelerini kullanarak P1 ve P2 ürünlerini üretirken maksimum kar elde etmek istiyor. 1 ton P1 üretmek için 2 ton M1, 8 ton M2 ve 3 ton M3 maddesi gerekirken, 1 ton P2 üretmek için 6 ton M1, 6 ton M2 ve 1 ton M3 gerekmektedir. M1, M2 ve M3 maddeleri sirasiyla 27, 45 ve 15 ton olarak sinirlidir. P1 ürününün 1 tonunun satis fiyati 100 YTL iken P2 ürününün 1 tonunun satis fiyati 200 YTL dir. Bu verilere göre maksimum kar elde etmek için üretilecek P1 ve P2 ürünleri miktarini bulunuz. Örnek 4.1' in tablo olarak ifadesi Tablo 4.1' de verilmektedir.

Tablo 4.1

	P1	P2	Eldeki miktar
M1	2	6	27
M2	8	6	45
M3	3	1	15
Kar	1	2	

Çözüm:

Örnek 4.1' in, amaç fonksiyonu ve kisitlari asagidaki sekilde yazilabilmektedir.

$$
\begin{aligned}
Min z = \quad & -x_1 - 2x_2 \\
Kisitlar \quad & 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\
& 8x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 15 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Örnek 4.1' in optimal çözümü $x_1 = 3$, $x_2 = 3.5$, $z = -10$ dir. Örnek 4.1' de kisitlar ve amaç fonksiyonu kesin degerlerdir. Bu kesin degerlere karar vericiyle etkilesim içinde bazi esneklestirmeler yapilabilmektedir. Bu islemler sonucunda bulanik amaç fonksiyonunun ve kisitlarin degerleri elde edilmektedir. Tablo 4.1' de, $m = 0$ kabul edilemeyen, $m = 1$ kabul edilebilen degerleri içermektedir.

Tablo 4.2

	Bulanik olmayan çözüm	Bulanik kisitli çözüm	
		μ=0	μ=1
Amaç fonksiyonu	-10	-9.5	-10.5
Birinci kisit	27	30	27
Ikinci kisit	45	50	45
Üçüncü kisit	15	18	15

Ayni denkleme denk olan DPP asagidaki formda olusmaktadir.

$Min\, l$

$$
\begin{aligned}
Kisitlar \quad & \frac{2}{3}x_1 + 2x_2 + l \le 10 \\
& 1.6x_1 + 1.2x_2 + l \le 10 \\
& 1.5x_1 + 0.5x_2 + l \le 8.5 \\
& x_1 + 2x_2 - l \ge 9.5 \\
& x_1, x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$

Bu problem simpleks metot ile çözülerek $x_1 = 3.0789$, $x_2 = 3.5921$, $l = 0.76316$, optimal degerleri elde edilmektedir. Bu bulanik dogrusal programlama problemi (BDDP)' inde keskin sinirlar bazi makul zorlamalar kabul edilerek esnetildiginde, mesela ilk sinirlar 27 den küçük ve ait sartina $\mu_1(30)=0$ dan $\mu_1(27)=1$ dogrusal fonksiyonu ile esneklestirilmistir. Ayrica amaç fonksiyonu minimum etmek için çözüm bölgesi -10.5 ile -9.5 arasi kabul edilebilir bölge olacaktir. Bu esneklestirme sonucu %2.6 daha fazla kar elde edilebilecegi ortaya çikmaktadir. Tablo 4.3' de bulanik kisitli dogrusal programlamadaki ve bulanik olmayan dogrusal programlamadaki çözümler yer almaktadir.

Tablo 4.3

Bulanik olmayan çözüm		Bulanik kisitli çözüm	
$x_1 = 3$, $x_2 = 3.5$, $z = -10$		$x_1 = 3.0789$, $x_2 = 3.5921$, $z = -10.2631$	
Kisitlar		Kisitlar	
Birinci kisit	27	Birinci kisit	27.71
Ikinci kisit	45	Ikinci kisit	46.18
Üçüncü kisit	12.5	Üçüncü kisit	12.83

Üyelik fonksiyonunu kullanarak bulanik kisitli DPP ise (4.15)' de verilmektedir.

$$\begin{aligned} &Maks && \sum_{i=0}^{m} m_i((Bx)_i) \\ &Kisitlar && x \geq 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.3 Çok Amaçli Dogrusal Programlama

Bazi problemlerde birden fazla amaç fonksiyonu yer alabilmektedir çok amaçli dogrusal programlama problemi (ÇADPP),

$$\begin{aligned} &z_1(x) = c_1 x \\ &z_2(x) = c_2 x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &z_k(x) = c_k x \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$Ax \leq b, x \geq 0, \tag{4.17}$$

seklinde yazilmaktadir.

Buradan

$$c_i = (c_{i1},.......c_{in}),\ i = 1,2,...,k, \tag{4.18}$$

$$x = (x_1,......., x_n)^T, \tag{4.19}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11},......., a_{1n} \\ .... \\ a_{m1},......., a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

$$b = (b_1,......., b_n)^T, \tag{4.21}$$

dönüsümleriyle ÇADPP bazi problemlerde vektör minimizasyonu problemine dönüsmektedir.

$$\begin{aligned} &Min(x) \quad \overset{\Delta}{=} Cx \\ &Kisitlar \quad x \in X \overset{\Delta}{=} \left\{ x \in R^n \,\middle|\, Ax \le b, x \ge 0 \right\}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$z(x) = (z_1(x),......., z_k(x))^T = (c_1 x,.......c_k x)^T, \tag{4.23}$$

$$C = (c_1,.......c_k)^T \tag{4.24}$$

Bu dönüsümlerden sonra ÇADPP, tek amaçli dogrusal programlama problemine dönüsmektedir. Böylece optimal çözüm hesaplanabilmektedir.

4.4 Çok Amaçli Dogrusal Programlama Probleminin Çözüm Yöntemleri

Tanim 4.1 Tam Optimal Çözüm:

Her $x \in X$ degerleri için, $z_i(x^*) \le z_i(x),\ i = 1,2,...,k,$ sartlarini saglayan eger ancak ve ancak bir $x^* \in X$ degeri varsa bu x^* degeri tam optimal çözüm olmaktadir. Genelde böyle bir tam optimal çözüm, ayni zamanda bütün çok amaçli fonksiyonlari minimize etmektedir. Eger amaç fonksiyonlari çelisirse böyle bir çözüm mevcut degildir. Bu durumda çok amaçli dogrusal programlamaya tam optimal çözüm yerine, Pareto optimali olarak isimlendirilen yeni bir kavram girmektedir.

Tanim 4.2 Pareto Optimal Çözüm:

Bütün i degerleri için $z_i(x) \leq z_i(x^*),\ i = 1,2,...,k,$ ve bir j degeri için $z_j(x) \neq z_j(x^*),$ olacak sekilde ancak ve ancak baska bir $x \in X$ degeri yoksa bu x^* degeri Pareto optimal çözüm olmaktadir.

Tanim 4.2' de görülebilecegi gibi Pareto optimal çözüm sonsuz sayida noktadan olusabilmektedir. Bu çözüm alternatifi olamayan çözüm olarak ta tanimlanmaktadir. Çünkü olasi baska çözümü yoktur. Bununla beraber, daha zayif bir çözüm olarak zayif Pareto optimal çözümü hesaplanamamaktadir.

Tanim 4.3 Zayif Pareto Optimal Çözüm:

Her $x \in X$ degerleri için, $z_i(x) < z_i(x^*),\ i = 1,2,...,k,$ sartlarini saglayan eger ancak ve ancak diger bir $x \in X$ degeri yoksa bu x^* degeri zayif Pareto çözüm olmaktadir.

Sonuç olarak tam optimal çözüm, Pareto optimal çözüm ve zayif Pareto optimal çözüm sirasi ile X^{CO}, X^{P} ve X^{WP} seklinde gösterilmektedir. Tanimdan da anlasilacagi gibi $X^{CO} \subseteq X^{P} \subseteq X^{WP}$ iliskisi ortaya çikmaktadir.

Örnek 4.2:

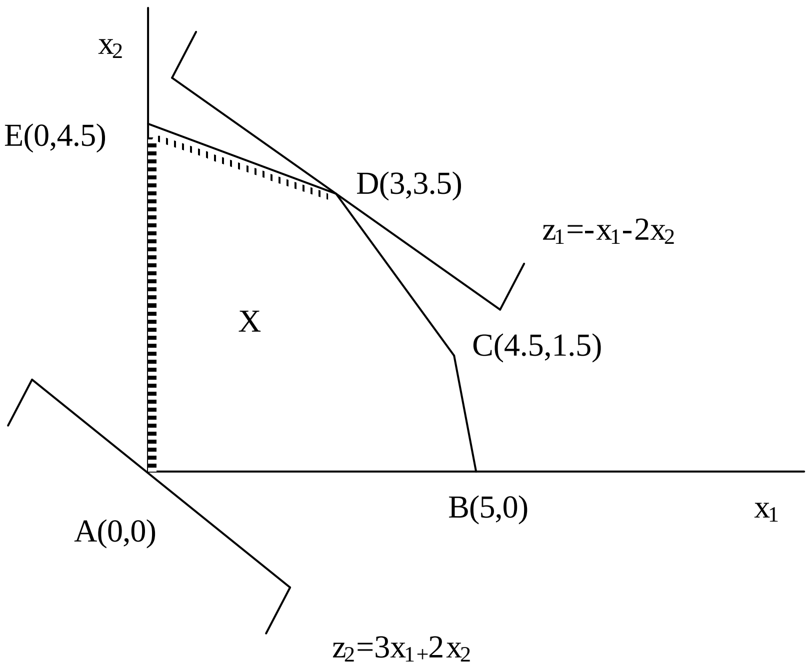
Örnek 4.1' e ek olarak Örnek 4.2' de su nokta verilmektedir. P1' in her tonu 3 birim, P2' nin her tonu 2 birim kirlilige sebep olmaktadir. Yönetim kari maksimize etmenin yani sira kirliligi de minimize etmek zorundadir.

Çözüm:

Bu problemin kisitlarini ve amaç fonksiyonlari asagidaki sekilde yazilabilir.

$$
\begin{aligned}
&Min z_1 = && -x_1 - 2x_2 \\
&Min z_2 = && 3x_1 + 2x_2 \\
&Kisitlar && 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\
& && 8x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& && 3x_1 + x_2 \leq 15 \\
& && x_1, x_2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

Örnek 4.2' de verilen amaç fonksiyonlarinin ve kisitlarin geometrik ifadesi Sekil 4.2' deki gibi olusmaktadir.



Sekil 4.2 Örnek 4.2' in grafik çözümü.

$[AE]$ ve $[ED]$ disinda kalan mümkün diger noktalar Pareto optimal degildir. Çünkü her zaman baska amaç fonksiyonlardan en az birini saglayan mümkün noktalar vardir. Buradan düzlem degistirilerek $z_1 - z_2$ düzlemine geçilebilir.

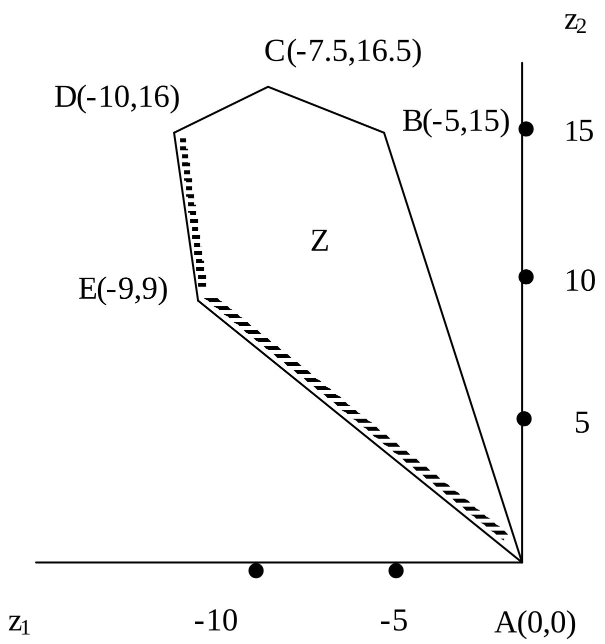
$$Z = \{(z_1, z_2) | x \in X)\}.$$

Amaç fonksiyonlari ise degiserek

$$z_1 = x_1 - 4x_2,\ z_2 = 2x_1 - x_2,$$

seklinde yazilmaktadir. Buradan çikan tam optimal çözüm ise $(z_1, z_2) = (-18, -4.5)$ ' tir.

Sekil 4.3, Örnek 4.2' nin $z_1 - z_2$ düzlemindeki ifadesini göstermektedir.



Sekil 4.3 Örnek 4.2' in Z düzlemi grafigi.

Buradan Pareto optimal çözümü asagidaki formda

$$z_1 = -\frac{2}{3}x_1 - 2x_2,\; z_2 = 3x_1 + 2x_2,$$

zayif Pareto optimal çözüm olrak yazilmaktadir.

Scalarization Yöntemi:

Pareto optimal çözümü nitelendirmek için ÇADPP' ni skaler yapan farkli metotlara dayanan farkli hesaplama yöntemleri öngörülmektedir. Pek çok ÇADPP' ni skalarize etme yöntemleri arasinda, agirliklandirma yöntemi, kisitlandirma yöntemi ve agirlikli minimaks yöntemi bulunmaktadir. Bu yöntemler Pareto optimal çözümleri karakterize etme yöntemi olarak kullanilmaktadir.

1. Agirliklandirma Yöntemi:

Pareto optimal çözümü elde etmek için kullanilan agirliklandirma yöntemi, ÇADPP' ne ait bütün amaç fonksiyonlarinin agirlikli toplamini alarak elde edilen agirliklandirma probleminin çözümüdür. Agirliklandirma problemi (4.25)' deki sekliyle tanimlanmaktadir.

$$
\begin{aligned}
&Min \qquad wz(x) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{k} w_i z_i(x) \\
&Kisitlar \quad x \in X.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Amaç fonksiyonuna ait $w = (w_1, ..., w_k)$ agirlikli fonksiyon, katsayi vektörü ise $w = (w_1, ..., w_k) \geq 0,$ olarak varsayilmistir. Agirlikli katsayi probleminin optimal çözümü x^* ile ÇADPP' nin Pareto optimal çözüm kavrami arasindaki iliski Teorem 4.1 ile karakterize edilebilmektedir.

Teorem 4.1:

Eger $x^* \in X$ bazi $w > 0$ degerleri için agirlik probleminin optimal çözümü ise x^* ÇADPP' nin Pareto optimal çözümüdür.

Ispat:

Eger agirlik probleminin optimal x^* ÇADPP' nin Pareto optimal çözümü ise o halde, öyle bir $x \in X$ degeri vardir ki bazi j degerleri için $z_i(x) \leq z_i(x^*)$ ve $i = 1,2,...,k;\ i \neq j,$ olmak üzere, $z_j(x) < z_j(x^*)$ dir. $w = (w_1, ..., w_k) > 0,$ oldugundan $\sum_i w_i z_i(x) < \sum_i w_i z_i(x^*)$ olmaktadir. Bununla beraber, $x^* \in X$ bazi $w > 0$ degerleri için agirlik probleminin optimal çözümü degildir varsayimi ile çelismektedir.

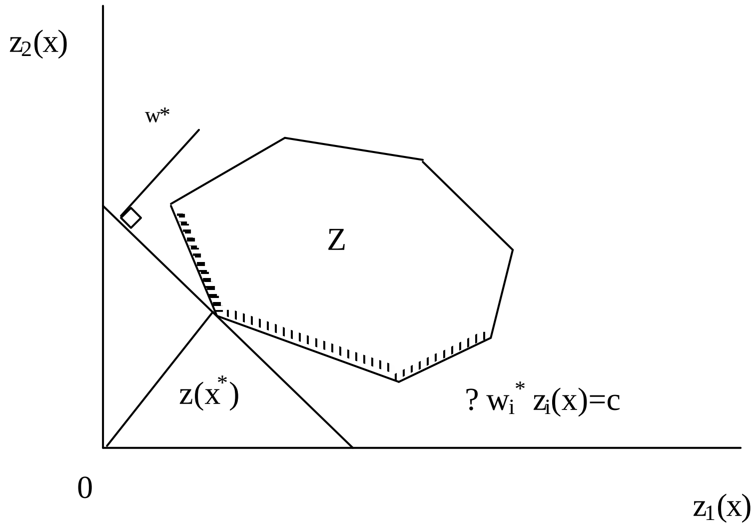
Teorem 4.1' de ön sart, bazi $w \geq 0,$ degerleri için agirlik probleminin tek optimal çözümü oldugu ön sarti ile degistirilebilir.

Geometrik olarak ise k boyutlu $z = (z_1, ..., z_k)$ uzayinda

$$
W = (w_1 z_1(x) + w_2 z_2(x) + ... + w_k z_k(x)) = c \tag{4.26}
$$

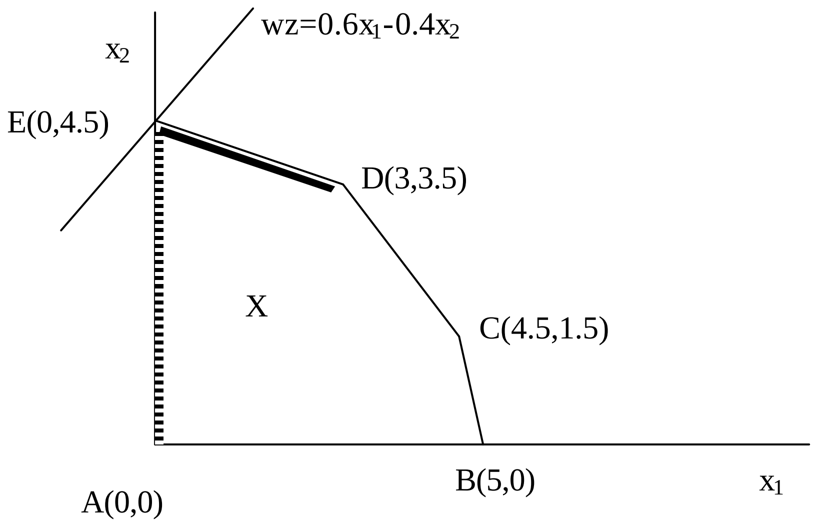
ifadesi bir geometrik sekli göstermektedir. Bu geometrik sekil iki amaçli problemlerde dogruyu üç amaçli problemlerde yüzeyi temsil etmektedir. Agirliklandirma probleminin çözümünde agirliklandirma katsayisi $w^* \geq 0,$ normal vektörü $w = (w_1, w_2, ..., w_k)$ ise mümkün olan z uzayinda c' yi minimum yapan en az bir nokta vardir. Bu nokta Pareto optimal çözüm x^* dir.

Bu ifadenin geometrik gösterimi Sekil 4.4' de verilmektedir.



Sekil 4.4 Agirliklandirma yöntemi grafigi.

Örnek 4.2' in agirliklandirma yöntemiyle çözümü, Sekil 4.5' de verilmektedir.



Sekil 4.5 Örnek 4.2' in agirliklandirma yöntemiyle çözüm grafigi.

2. Kisitlandirma Yöntemi:

Pareto optimal çözümü karakterize eden kisitlandirma yöntemi, bir amaç fonksiyonunun amaç fonksiyonunu diger amaç fonksiyonlarini da kisitlandirma esitsizligi olarak hesaba katarak bir kisitlandirma problemi çözmektir. Sekil 4.5' de kisitlandirma problemi verilmektedir.

$$
\begin{array}{ll}
Min z_j(x) & \\
Kisitlar & z_i(x) \le e_i, i = 1,2,...,k; i \ne j \\
& x \in X,
\end{array}
\tag{4.27}
$$

Kisitlandirma problemine ait optimal çözüm x^* ile Pareto optimal kavrami arasindaki iliski Teorem 4.2 ile karakterize edilmektedir.

Teorem 4.2:

Eger e_i, $i = 1,2,...,k;\ i \ne j,$ için $x^* \in X$ kisitlandirma problemine ait tek optimal çözüm ise x^* ÇADPP için Pareto optimal çözümdür.

Ispat:

Eger kisitlandirma problemine ait tek optimal çözüm x^* ÇADPP' ne ait bir Pareto optimal çözüm degilse, bazi l degerleri için $z_l(x) < z_l(x^*)$ ve $z_i(x) \le z_i(x^*),\ i = 1,2,...,k;\ i \ne l$ olacak sekilde $x \in X$ varsa, asagidaki iki ifadeden birini göstermektedir.

$$
\begin{array}{l}
z_i(x) \le z_i(x^*) \le e_i,\ i = 1,2,...,k;\ i \ne j,\ z_j(x) < z_j(x^*), \\
z_i(x) \le z_i(x^*) \le e_i,\ i = 1,2,...,k;\ i \ne j,\ z_j(x) = z_j(x^*),
\end{array}
\tag{4.28}
$$

(4.28) bazi $e_i,\ i = 1,2,...,k;\ i \ne j,$ sartlari için kisitlandirma probleminin tek optimal çözümü x^* degerinin var oldugu varsayimiyla çelismektedir. Teoremin ispatindan, çözümün tek oldugu garanti degil ise sadece tek zayif Pareto optimal çözümü garanti edilmis olmaktadir.

Teorem 4.3:

Eger $x^* \in X$, ÇADPP' ne ait bir Pareto optimal çözümse, bazi $e_i,\ i = 1,2,...,k;\ i \ne j,$ için x^* kisitlandirma problemine ait optimal bir çözümdür.

Ispat:

Eger ÇADPP' ne ait $x^* \in X$ Pareto optimal çözümü, $e_i,\ i = 1,2,...,k;\ i \ne j,$ kisitlandirma problemine ait bir optimal degilse,

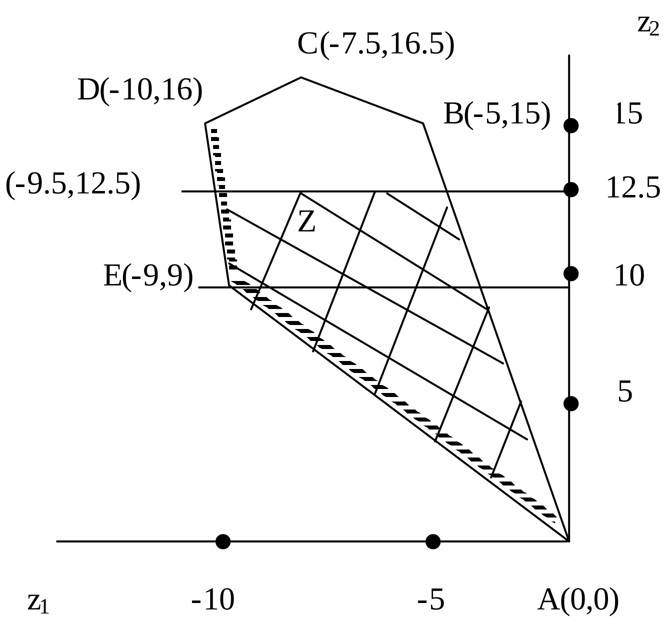
$$
z_j(x) \le z_j(x^*),\ z_i(x) \le e_i = z_i(x^*),\ i = 1,2,\ldots,k;\ i \ne j,
$$

sartlarini saglayan bir $x \in X$ degeri vardir. Bu da x^* degerinin ÇADPP' ne ait bir Pareto optimal çözüm oldugu ile çelisir.

Kisitlandirma yöntemini örneklendirmek için Örnek 4.2 göz önünde tutulursa $j=1$, degeri için kisitlandirma problemi asagidaki sekilde olusmaktadir.

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Min} & z_1 = -x_1 - 2x_2 \\
\textit{Kisitlar} & 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
 & 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
 & 3x_1 + x_2 \le 15 \\
 & z_2 = 3x_1 + 2x_2 \le e_2 \\
 & x_1, x_2 \ge 0.
\end{array}
$$

Örnek 4.2' in kisitlandirma yöntemiyle çözümünün geometrik ifadesi Sekil 4.6' deki sekliyle olusmaktadir.



Sekil 4.6 Örnek 4.2' in kisitlandirma yöntemiyle çözüm grafigi.

Burada örnegin, eger $e_2 = 9$ alinirsa Sekil 4.6' de oldugu gibi kisitlandirma problemine ait optimal çözümün E (-9,9) gerçeklestigi ve bir Pareto optimal çözüm elde edildigi anlasilmaktadir. Eger $e_2 = 12.5$ olarak alinirsa Sekil 4.6' deki Pareto optimal çözüm $(z_1, z_2) = (-9.5, 12.5)$ olarak hesaplanmaktadir.

3. Agirlikli Minimaks Yöntemi:

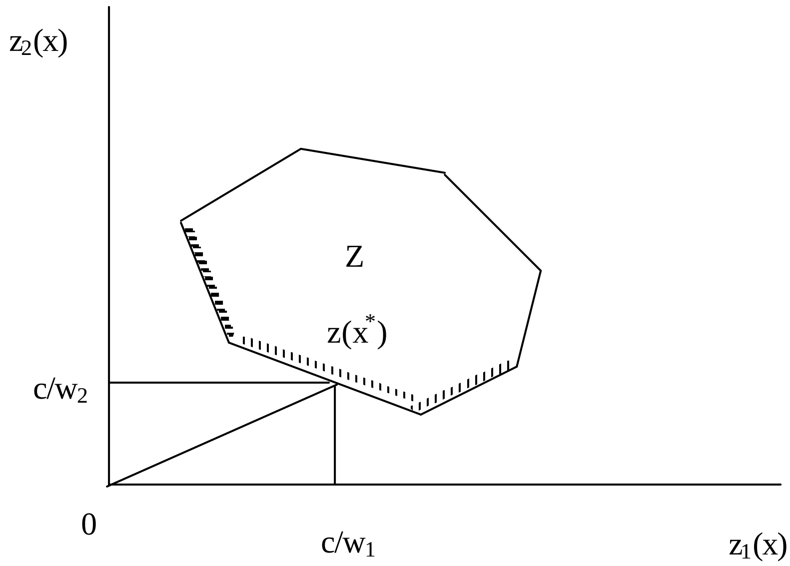
Pareto optimal çözümleri karakterize eden, agirlikli minimaks problemi,

$$\begin{array}{ll} Min & \underset{i=1,\dots\dots,k}{Maks}\, w_i z_i(x) \\ Kisitlar & x \in X, \\ Min & v \\ Kisitlar & w_i z_i(x) \le v, i = 1,2,\dots,k, \\ & x \in X, \end{array} \tag{4.29}$$

olarak ifade edilmektedir. (4.29)' da genellemeleri kaybetmeksizin su varsayilabilir; bütün $x \in X$ degerleri için $z_i(x) > 0,\ i = 1,2,\dots,k,$ olmaktadir. $z_i(x) > 0$ ve $x \in X$ sartlarini saglamayan amaç fonksiyonlarinin, $z_i^{Min} = Min_{x \in X} z_i(x)$ seklinde hesaplanan minimum degerleri (4.30)' deki formdadir.

$$\begin{array}{l} \hat{z}_i(x) = z_i(x) - z_i^{Min}, \\ \hat{z}_i(x) > 0,\ i = 1,2,\dots,k,\ x \in X. \end{array} \tag{4.30}$$

Geometrik olarak, agirlikli minimaks problemlerinde, amaç fonksiyonundaki $Maks\{w_i z_i\} = c,$ alaninin sinirlari verilen agirlikli katsayilara göre dörtgen olusturmaktadir. Böylece agirlikli minimaks problemlerinin çözümü, Pareto optimal çözümü vermektedir. Bu ise Sekil 4.7' de gösterilen, $Z = \{z(x) | x \in X\}$ seklinde tanimlanan bir çokgen alani göstermektedir.



Sekil 4.7 Agirlikli minimaks yöntemi.

Agirlikli minimaks problemine ait optimal çözüm x^* ile ÇADP' ne ait Pareto optimal kavrami arasindaki iliski Teorem 4.4 ile karakterize edilmektedir.

Teorem 4.4:

Eger $x^* \in X$ agirlikli minimaks problemine ait bazi $w = (w_1, w_2, ..., w_k) \geq 0,$ degerleri için tek optimal çözüm ise x^* ÇADPP' ye ait bir Pareto optimal çözümdür.

Ispat:

Eger agirlikli minimaks probleminin tek optimal çözümü x^* bazi $w = (w_1, w_2, ..., w_k) \geq 0,$ için bir Pareto optimal çözüm degilse, öyle bir $x \in X$ degeri vardir ki, bazi j degerleri için $z_j(x) < z_j(x^*)$ ve $z_i(x) \leq z_i(x^*),\ i = 1,2,...,k;\ i \neq j$ dir. $w = (w_1, w_2, ..., w_k) \geq 0$ ifadesi için $w_i z_i(x) \leq w_i z_i(x^*),\ i = 1,2,...,k$ dir. Buradan (4.30) formu yazilmaktadir.

$$\begin{aligned} &Maks\, w_i z_i(x) \leq Maks\, w_i z_i(x^*) \\ &Kisitlar \qquad x \in X, \end{aligned} \tag{4.30}$$

Bu x^* degerinin $w = (w_1, w_2, ..., w_k) \geq 0,$ sarti ile agirlikli minimaks probleminin tek optimal çözümü oldugu gerçegi ile çelismektedir. Teorem 4.4' in ispatindan ulasilan sonuç, eger çözüm tekligi garanti degilse sadece zayif Pareto optimalligi garanti olmaktadir.

Teorem 4.5:

Eger $x^* \in X$ ÇADPP' ne ait bir Pareto optimal çözüm ise bazi $w = (w_1, w_2, ..., w_k) > 0$ için x^* minimaks probleminin bir optimal çözümüdür.

Ispat:

ÇADPP' nin Pareto optimal çözümü $x^* \in X$ için $w^* = (w_1^*, w_2^*, ..., w_k^*) > 0$ olarak seçin öyle ki $w_i^* z_i(x^*) = v,\ i = 1,2,...,k$ olsun. Daha sonra bütün $x^* \in X$ için $z_i(x) > 0,\ i = 1,2,...,k$ ve $w^* = (w_1^*, w_2^*, ..., w_k^*) > 0$ ifadesini elde edilmektedir. Simdi su varsayilsin ki, x^* minimaks probleminin bir optimal çözümü olmasin öyleyse bir $x \in X$ vardir ki, $w_i^* z_i(x) < w_i^* z_i(x^*) = v^*,\ i = 1,2,...,k$ dir. Buradan $w^* = (w_1^*, w_2^*, ..., w_k^*) > 0$ oldugu göz önüne alinirsa, bu bir $x \in X$ ' in varligini gerektirmektedir. Öyle ki burada $z_i(x) < z_i(x^*),\ i = 1,2,...,k$ olmaktadir. Bu ifade x^* ' in bir Pareto optimal çözüm oldugu varsayimi ile çelismektedir.

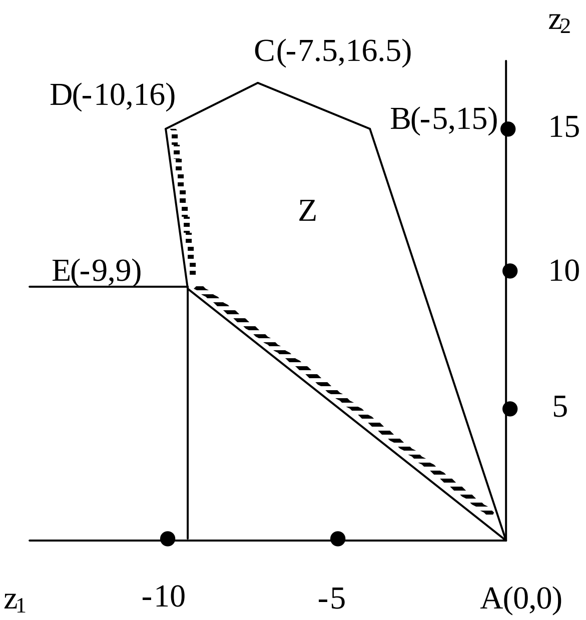
Bu ispattan Teorem 4.5' deki Pareto optimalligi zayif Pareto optimalligi ile degistirilebilir oldugu elde edilmektedir.

Agirlikli minimaks problemini örneklendirmek için Örnek 4.2' teki $z_1(x)$ ve $z_2(x)$' in minimum degerleri sirasi ile $Min_{x\in X} z_1(x) = -10$ ve $Min_{x\in X} z_2(x) = 0$ dir. $\hat{z}_1(x) = z_1(x) - (-10)$ dönüsümü yapilarak $w_1 = 0.5$ ve $w_2 = 0.5$ olarak alinirsa agirlikli minimaks problemi

$$
\begin{array}{ll}
MinMaks & (-0.5x_1 - x_2 + 5, 1.5x_1 + x_2) \\
Kisitlar & 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
 & 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
 & 3x_1 + x_2 \le 15 \\
 & x_1, x_2 \ge 0,
\end{array}
$$

seklinde veya buna es bir sekilde asagidaki formda yazilmaktadir.

$$
\begin{array}{ll}
Min & v \\
Kisitlar & 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
 & 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
 & 3x_1 + x_2 \le 15 \\
 & -0.5x_1 - x_2 + 5 \le v \\
 & 1.5x_1 + x_2 \le v \\
 & x_1, x_2 \ge 0.
\end{array}
$$



Sekil 4.8 Örnek 4.2' nin agirlikli minimaks çözüm grafigi.

Sekil 4.8' de $\hat{z}_1 = z_1 + 10$ oldugu anlasilmaktadir. Örnek 4.2' nin optimal çözümü, uç nokta olan E (-9,9) noktasini z_1 boyunca 10 birim degistirmektedir. Bununla beraber, orijinal problemin optimal çözümü (1,9) noktasidir, bu çözüm Pareto optimal çözümdür. Teorem 4.2 ve Teorem 4.4' ten (4.31) denklemi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} &Maks && \sum_{i=1}^{k} e_i \\ &Kisitlar && z_i(x) + e_i = z_i(x^*), i = 1,2,\ldots,k \\ & && x \in X,\ e \geq 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Böylece $\bar{x}$ ve $\bar{e}$ teoremlere göre dogrusal problemin optimal çözümü olmaktadir.

5. TASIMA PROBLEMLERINE ÇÖZÜM ÖNERILERI

Tasima problemleri, kapasiteleri $a_1, a_2, ..., a_m$ olan m tane kaynaktan; kapasiteleri $b_1, b_2, ..., b_n$ olan n tane talep merkezine, i. kaynaktan, j. talep merkezine birim ürünün tasinmasiyla ilgili c_{ij} $(i = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ cezalari altinda, tasinacak x_{ij} ürün miktarinin belirlenmesi problemi olarak tanimlanmaktadir.

Gerçek yasamda karsilasilan tasima problemleri, ayni zaman içinde farkli ölçeklerle degerlendirilmis ve birbirleri ile zitlik içeren amaçlarla da modellenebilmektedir.

Bu bölümde, tasima problemleri, çok amaçli ve tek amaçli tasima problemi olarak iki ayri alt baslik altinda incelenmektedir. Ayrica tek amaçli tasima problemleri altinda, miktarin ve tasima birim fiyatlarinin bulanik oldugu bulanik tasima problemleri de incelenmekte ve bu problemlere bulanik programlama yaklasimini kullanarak çözüm yöntemleri öneren, son yillarda yapilmis bazi çalismalar da sunulmaktadir. Bu çalismalar asagidaki sekilde siralanmis dört ayri alt baslik altinda incelenmektedir.

1. Waiel F. Abd El-Wahed’ in çözüm yöntemi.

2. Jeffrey L. Ringuest ve Dan B. Rinks’ in çözüm yöntemi.

3. Shiang-Tai Liu ve Chiang Kao’ nun çözüm yöntemi.

4. Ahlatçioglu M., Sivri M. ve Güzel N.’ in çözüm yöntemi.

5.1 Çok Amaçli Tasima Problemi

Bu bölümde çok amaçli tasima problemi ele alinmaktadir. Çogu zaman bu amaç fonksiyonlari farkli ölçeklerle ölçülmekte ve amaçlar arasinda zitliklar bulunabilmektedir. Böyle durumlarla karsilasan karar vericiler için tüm amaç fonksiyonlarini ayni anda optimal çözüme ulastirmak çok zor hatta imkansizdir. Bu durumla karsilasan karar verici amaç fonksiyonlarini ayni anda minimize etmek isterken, bir amaç fonksiyonunun degerinin azaltilmasi baska bir amaç fonksiyonunun degerinin artmasina neden olmaktadir.

Çok amaçli tasima problemi, m tane üretim merkezinin kapasiteleri $a_1, a_2, ..., a_m$, ve n tane talep merkezinin kapasiteleri $b_1, b_2, ..., b_n$, olmak üzere, i. üretim merkezinden j. tüketim merkezine birim ceza degerleri c_{ij}^k, $(k = 1,2,\ldots,l)$ altinda bilinmeyen tasinacak ürün miktari x_{ij} ' in belirlenmesidir. Çok amaçli tasima problemi asagidaki sekilde matematiksel olarak ifade edilebilir.

$$Minimum \quad \begin{cases} z_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \\ z_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 x_{ij} \\ \ldots. \\ z_l = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^l x_{ij} \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \, i = 1,...,m, \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \, j = 1,2,...,n \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \, i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n. \tag{5.4}$$

Burada z_k ' nin alt ve c_{ij}^k ' nin üst indisleri k. amaç fonksiyonunu ve k. birim ceza degerini tanimlamakta kullanilmaktadir.

Dengeyi saglamak için $a_i > 0,\; b_j > 0,\; c_{ij}^k \geq 0,\; \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,\; (i = 1,2,...,m,\; j = 1,2,\ldots,n),$ oldugu varsayilmaktadir.

5.1.1 Çözümün Mümkün Olmasi

Çok amaçli tasima problemlerinde ideal çözüm, her amaç fonksiyonunu minimum yapan çözüm ile hesaplanmaktadir. Yani,

$$z_k^* = Min z_k = Min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}, \tag{5.5}$$

ise $z^* = \left(z_1^*, \ldots z_l^* \right)$ vektörü ideal çözümdür. Eger x^* uygun köse noktalari ve bu noktalardaki amaç fonksiyonlarinin degerleri $z_1^* = z_1\left(x^*\right), \ldots, z_l^* = z_l\left(x^*\right)$ ise çok amaçli tasima problemi bu noktalar için ideal bir çözüme sahiptir. Bu,

$$Min z_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}, \tag{5.6}$$

(5.2), (5.3) ve (5.4) altinda olusan alt problemlerin her biri için her z_k yi optimal yapan en az bir tane ayni köse noktasi mevcuttur anlamina gelmektedir. Bu uygulamada mümkün olmayan bir durumdur. Bu yüzden uygun bir çözüm elde edilmektedir. Optimal çözüm, karar verici tarafindan ideal çözüme en yakin oldugu varsayilan, uygun bir x noktasinda elde edilen çözüm seklinde tanimlanmaktadir. Optimal çözümde ihtiyaç duyulan özelliklerden biri çözümün basilamayan çözüm olmasidir. Tüm k degerleri için

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k \overline{x}_{ij}, \tag{5.7}$$

ve yalniz bir k degeri için

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \neq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k \overline{x}_{ij}, \tag{5.8}$$

esitsizliklerini saglayan $x = \left\{ x_{ij} \right\}$ vektörü yoksa $\overline{x} = \left\{ \overline{x}_{ij} \right\}$ vektörü çok amaçli tasima problemi için basilamayan çözümü vermektedir. (5.7) ve (5.8) esitliklerini saglayan $\overline{x}$ nin etkili bir çözüm oldugu söylenmektedir.*

Böylece $\overline{x}$ etkili degilse iç veya basilan bir çözümü vermektedir.

---

* Ringuest, J. L. and Rinks, D. B., (1987), "Interactive Solutions for The Linear Multiobjective Transportation Problem", European Journal of Operational Research 32:96-106.

5.1.2 Çok Amaçli Tasima Problemlerine Bulanik Programlama Yaklasimi*

1970'te Bellman ve Zadeh bulanik amaç (G), bulanik kisitlar (C), bulanik karar (D) gibi üç temel kavrami ortaya attilar ve bulanik ortamlarda karar verme ile ilgili bu kavramlarin uygulamalari üzerine çalismalar yaptilar. Bulanik karari,

D = G n C

seklinde tanimladilar. Bu problemi karakterize eden üyelik fonksiyonu

$$m_D(x) = Min\ (m_G(x)\ ,\ m_C(x)), \tag{5.9}$$

seklindedir.

Çok amaçli tasima problemi (ÇATP)' nin üyelik fonksiyonunu tanimlamak için $z^k(x)$ amaç fonksiyonuna ait alt ve üst sinir degerleri sirasiyla L_k ve U_k olsun. Verilen kisitlar kümesi altinda tasima probleminin amaç fonksiyonlarinin minimumu ayri ayri hesaplanmaktadir. $X^1, X^2, \ldots, X^K$ sirasi ile K tane farkli tasima probleminin optimal çözümü olsun, bütün bu K optimal çözümlerde her amaç fonksiyonun degeri hesaplansin. k. amaç fonksiyonu farkli sinir degerlerine sahip oldugu için bu çözümlerin en az iki tanesinin farkli oldugu kabul edilir. Her $z^k(x)$ amaç fonksiyonu için, alt sinir deger L_k ve üst sinir deger U_k degerleri hesaplanmaktadir. L_k ve U_k degerlerin tanimlarina dayanarak çok amaçli geometrik programlama probleminin üyelik fonksiyonunu asagidaki sekilde belirtmistir.

$$m_k(z^k(x)) = \begin{cases} 1 & z^k(x) \le L_k, \\ \dfrac{U_k - z^k(x)}{U_k - L_k} & L^k < z^k(x) < U_k, \\ 0 & z^k(x) \ge U_k, \end{cases} \tag{5.10}$$

Burada $k = 1,2,\ldots,K$ olmak üzere $L_k \neq U_k$, eger $L_k = U_k$ ise herhangi bir k degeri için $m_D(z^k(x)) = 1$ olur. Bellman ve Zadeh' in bulanik kararini kullanarak dogrusal üyelik fonksiyonunu içeren ÇATP' nin bulanik minimum modeli asagidaki sekilde yazilabilir.

---

* Abd El-Wahed, W.F., (2001), "A Multi-Objective Transportation Problem Under Fuzziness", Fuzzy Sets and Systems 117:27-33.

$$
\begin{aligned}
&P2: Maks \quad && Min\, m_k (z^k(x)) \quad && k = 1,2,\dots,K, \\
&Kisitlar && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, && i = 1,2,\dots,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, && j = 1,2,\dots,n, \\
& && x_{ij} \ge 0, && i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

ß degiskeni ile beraber P2 problemi denk olan (5.12)’ deki dogrusal programlama problemi (DPP)’ ne dönüsmektedir.

$$
\begin{aligned}
&P3: Maks\, b \\
&Kisitlar \quad && m_k (z^k(x)) \ge b \quad && k = 1,2,\dots,K, \\
& && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, && i = 1,2,\dots,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, && j = 1,2,\dots,n, \\
& && 0 \le b \le 1, && \\
& && x_{ij} \ge 0, && \forall i, j.
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

P3 probleminde kisitlar asagidaki forma indirgenmektedir.

$$
\begin{aligned}
&b(U_k - L_k) \le (U_k - z^k(x)), \\
&b(U_k - L_k) + z^k(x) \le U_k, \\
&b(U_k - L_k)/U_k + (1/U_k)\ z^k(x) \le 1.
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

5.1.3 Waiel F. Abd El-Wahed' in Çözüm Yöntemi [*]

ÇATP için Waiel F. Abd El. Wahed tarafindan önerilen algoritma asagidaki sekildedir.

1. Adim: Birinci amaç fonksiyonunu seçerek tek amaçli tasima problemini verilen kisitlar altinda çöz. Bu islemi K farkli amaç fonksiyonu için K defa tekrarla. Eger bütün çözümler $(X^1 = X^2 = ... = X^K = \{x_{ij}\},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n)$, ayni ise bu çözümlerden biri optimal çözümdür. Bundan sonra 6. adima git aksi takdirde 2. adima git.

2. Adim: K tane optimal çözümde k. amaç fonksiyonunu hesapla. Her amaç fonksiyonu için alt sinir degeri L_k ve üst sinir degeri U_k ' yi optimal çözüm kümesine göre belirle.

3. Adim: (5.10)' de gösterildigi gibi üyelik fonksiyonunu tanimla.

4. Adim: Bulanik programlama problemi P2' yi olustur. Denk olan dogrusal programlama problemi olan P3 problemini bul.

5. Adim: Tamsayi programlama problemini kullanarak P3 problemini çöz. Elde edilen optimal uygun çözüm için K tane amaç fonksiyonunu hesapla.

6. Adim: Dur.

Bu çözüm islemi her amaç fonksiyonun ayri ayri alt ve üst sinirlarin belirlenmesini gerektirmektedir. Böylece ÇATP' ne ait üyelik fonksiyonu olusturulmaktadir. Bundan sonra, dogrusal uygun problem olan P3' ü çözmek için Zadeh' in minimum operatörü kullanilmaktadir. Bu da tamsayi programlama teknigi kullanilarak çözülebilmektedir.

Waiel F. Abd El. Wahed bulanik yaklasimda hesaplanan sonuçlarin ideal çözüme yakinliginin derecesini belirlemek için asagidaki aralik fonksiyonlarini kullandi.

$$L_p(l, K) = \left[\sum_{k=1}^{K} l_k^p (1\text{-}d_k)^p \right]^{1/p} \tag{5.14}$$

burada d_k k. amaca göre ideal çözüm vektörüne uygun çözüm vektörü X^* in yakinlik derecesini, $l\,(l_1, l_2, ..., l_K)$ ise amaç vektörünün seviyelerini, P ise uzaklik parametresini göstermektedir $1 \le P \le \infty$ 1.

[*] Abd El-Wahed, W.F., (2001), "A Multi-Objective Transportation Problem Under Fuzziness", Fuzzy Sets and Systems 117:27-33.

$\sum_{k=1}^{K} ?_k = 1$, varsayalim $p = 1, 2$ ve ∞ degerleri için $L_p(l, K)$

$$
\begin{aligned}
&L_1(l, K) = 1 - \sum_{k=1}^{K} l_k d_k, \\
&L_2(l, K) = [\sum_{k=1}^{K} [l_k^2 (1-d_k)^2]]^{1/2}, \qquad (5.15) \\
&L_\infty = (l, K) = Maks_k \{ l_k (1\text{-}d_k) \},
\end{aligned}
$$

seklinde yazilabilir. (5.15)' de minimum problemdeki d_k asagidaki formda yazilmaktadir.

d_k = (z^k 'nin ideal çözümü)/(z^k 'nin uygun çözümü) (5.16)

Böylece uygun çözümü veren yaklasimin, ideal çözüme yakinliginin diger çözümlerden daha iyi oldugunu ifade edebilmektedir.

Örnek 5.1:

Kapasiteleri $a_1 = 9, a_2 = 20, a_3 = 18$ ve $b_1 = 11,\ b_2 = 4, b_3 = 17, b_4 = 15$ olan tasima probleminde birim ürün tasima maliyetleri asagidaki sekilde verilen tasima problemini göz önüne alalim.

$$
C^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix},\ C^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}
$$

Çözüm:

Amaç fonksiyonlarinin degerleri

X^1 = (5, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 13, 0, 0, 14, 3), X^2 = (0, 0, 8, 0, 11, 2, 6, 0, 0, 1, 0, 16),

$z^1(X^1) = 143,\ z^1(X^2) = 208,\ z^2(X^2) = 167,\ z^2(X^1) = 265, \qquad 208 \geq z^1 \geq 143,\ 265 \geq z^2 \geq 167,$

seklinde hesaplanmaktadir.

Üyelik fonksiyonlari ise

$m_1(z^1(x)) = (208 - z^1(x))/(208 - 143),\ m_2(z^2(x)) = (265 - z^2(x))/(265 - 167),$

seklinde yazilmaktadir.

P3 problemi asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$$
\begin{aligned}
&\textit{Maks} \quad b \\
&\textit{Kisitlar} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 8, \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 19, \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 17, \\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 11, \\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3, \\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 14, \\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 16, \\
&0.0048x_{11} + 0.0096x_{12} + 0.0337x_{13} + 0.0037x_{14} + 0.0048x_{21} + 0.0433x_{22} + 0.01442x_{23} \\
&0.0192x_{24} + 0.0385x_{31} + 0.0433x_{32} + 0.0192x_{33} + 0.02881x_{34} + 0.3125b \leq 1, \\
&0.0151x_{11} + 0.0151x_{12} + 0.01132x_{13} + 0.01509x_{14} + 0.01887x_{21} + 0.03019x_{22} + 0.03396x_{23} \\
&0.03774x_{24} + 0.02264x_{31} + 0.007547x_{32} + 0.01887x_{33} + 0.00377x_{34} + 0.3698b \leq 1,
\end{aligned}
$$

Bu problem WINQSB optimizasyon paket programi ile çözülebilmektedir.

Çözüm degerleri $X^*: \; x_{12} = 3, x_{13} = 2, x_{14} = 3, x_{21} = 11, x_{23} = 8, x_{33} = 4, x_{34} = 13, b = 0.7654$ dir.

Amaç fonksiyonu degerleri, $z^1(x^*) = 170$ ve $z^2(x^*) = 190$ seklinde hesaplanmaktadir.

5.1.4 Jeffrey L. Ringuest ve Dan B. Rinks' in Çözüm Yöntemi*

5.1.4.1 Etkilesimli Iki Algoritma

Yazarlar ÇATP' nin çözümü için etkilesimli iki algoritma sunmuslardir. Bu algoritmalar içinde Diaz' in dogrusal uygunluk fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{l} y_k \tag{5.17}$$

$$y_k = \frac{1}{z_k^*} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \quad k = 1, 2, \ldots, l \tag{5.18}$$

ve ikinci derece uygunluk fonksiyonu ise

$$f(x) = \sum_{k=1}^{l} y_k^2 \tag{5.19}$$

$$y_k = \frac{1}{z_k^*} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} - 1 \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{5.20}$$

seklinde yazilmaktadir. Bu iki fonksiyon birkaç sebeple kullanilmaktadir. En önemlisi (5.17) ve (5.19) amaç fonksiyonlarini, (5.2), (5.3) ve (5.4) kisitlari altinda bir araya getirmektedir. Böylece kolay çözülecek matematiksel program üretilmektedir.

Etkilesimli iki algoritma asagidaki genel algoritmik yaklasim ile tanimlanmaktadir.

Birinci Algoritma: ÇATP' de etkilesimli algoritmada ilk önce basilamayan temel çözüm belirlenmektedir. Baslangiç basilamayan çözüm mümkün oldugunca optimal çözüme yakin olmasi tercih edilmektedir. Bunun için ilave edilen dogrusal uygunluk fonksiyonu ile iyi bir baslangiç çözüm elde hesaplanmaktadir. Bu basilamayan çözümler köse noktalari vermektedir. Tek amaçli tasima problemlerinde optimal çözüm ise bu köse noktalarindan birinde gerçeklesmektedir. Karar verici bu asamadan sonra karar vermek için basilamayan çözüm kümesindeki çözümleri karsilastirmaktadir.

* Ringuest, J. L. and Rinks, D. B., (1987), "Interactive Solutions for The Linear Multiobjective Transportation Problem", European Journal of Operational Research 32:96-106.

Bu adimlar asagidaki algoritmada verilmektedir.

1. Adim: (5.6)' da tanimlanan l tane tek amaçli alt problemi, (5.2), (5.3) ve (5.4) kisitlari altindaki optimal çözümünü hesapla ve $z_k = [z_1(x_k^*),..., z_l(x_k^*)]$ seklindeki l tane basilamayan uygun çözümünü hesapla. Burada x_k^*, k. alt problemin optimal uç noktasidir.

2. Adim: (5.17)' in (5.2), (5.3) ve (5.4) kisitlari altinda optimal dogrusal uygun çözümünü hesapla. 1. adim ve 2. adimda hesaplanan tüm basilamayan çözümler kümesini olustur.

3. Adim: Basilamayan çözümler kümesini karar vericiye sun ve en çok tercih edilen çözümü belirle. Bu çözüm, en çok tercih edilen çözüm ise 7. adima git.

4. Adim: Karar verici 3. adimda belirlenen çözümle tatmin olursa çözümü belirle.

4a. Adim: Eger karar verici tatmin olmus ise dur.

4b. Adim: Eger karar verici tatmin olmamis ise 5. adim ile devam et.

5. Adim: 3. adim, 7b. adim ve 7c. adimda belirlenen uç noktalara karsilik gelen uç noktadaki tüm basilamayan çözümleri belirle.

6. Adim: 3. adim ve 5. adimdaki tüm çözümlerden basilmayan çözümlerin kümesini belirle ve 3. adima dön.

7a. Adim: Yeni adim için baska basilamayan çözümler yok ise ve önceki adimlar mevcut degil ise, karar verici tüm basilamayan çözümler kümesinden en çok tercih edilen çözümü belirler ve durur.

7b. Adim: Yeni adim için baska basilamayan çözümler yok ise ve önceki adimlar mevcut degil ise, o zaman daha önceki adimlardan basilamayan çözümler kümesini yeniden düzenle. 5. adimda incelenmemis en çok tercih edilen çözümü belirle ve 5. adima dön.

7c. Adim: Yeni adim için baska basilamayan çözümler yok ise ve önceki adimlar mevcut degil ise, o zaman karar vericiden daha sonraki tercih edilen çözümü belirle ve 5. adima dön.

Bu algoritma 1. ve 2. adimda basilamayan çözümlerin baslangiç kümesini belirlemektedir. 1. adimda bulunan çözümler çözüm uzayini geren çözümler kümesi ile baslayan algoritmayi içermektedir. Dogrusal uygun çözüm, belirlenen fayda fonksiyonu için zayif bir yaklasim saglasa bile, bu önemli olmaktadir.

Ikinci Algoritma: Ikinci algoritmada çok amaçlarin dogrusal agirliklandirilmis kombinasyonunun optimal degeri hesaplanmaktadir. Agirliklar, karar vericiden seçilen tercih edilmis bilgiler yardimiyla belirlenmektedir. Böylece her adimda dogru fayda fonksiyonuna, dogrusal yeni bir yaklasim olusturulmaktadir. Bu yaklasimla her adimda optimal deger hesaplanmaktadir. Bu algoritmada özel yapidaki tasima problemlerine avantaj saglayacak sekilde uygulanmaktadir. Bu algoritma asagidaki sekilde siralanmaktadir.

1. Adim: (5.6)' deki l tane tek amaçli alt problemi, (5.2), (5.3) ve (5.4) kisitlari altinda çöz ve l tane basilamayan çözümü $z_k = [z_1(x_k^*),..., z_l(x_k^*)]$ formunda hesapla burada x_k^* noktasi k. alt problemin optimal uç noktasidir.

2. Adim: Karar vericiden en çok tercih edilen basilamayan çözümü tanimlamasini iste.

3. Adim: 2. adimda belirlenen çözümden karar vericinin tatmin olup olmadigini sor.

3a. Adim: Eger karar verici tatmin olmus ise dur.

3b. Adim: Eger karar verici tatmin olmamis ise 4. adim ile devam et.

4. Adim: l tane basilamayan çözüm vektörü z_k' dan geçen (5.21) fonksiyonunu belirle.

$$z'(x) = \sum_{k=1}^{l} w_k z_k(x) \tag{5.21}$$

formundadir. (5.21)' da w_k, (l+1) tane türdes dogusal denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{l} w_k z_{kj} - w_{l+1} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,l, \tag{5.22}$$

belirlenmektedir. z_{kj}, z_k' in j. elemani olmaktadir.

5. Adim: (5.6) problemini (5.2), (5.3) ve (5.4) kisitlari altinda optimize eden x' vektörünü belirle. Sonuç tek amaçli tasima problemi oldugu için etkili bir algoritma ile çözülebilir.

6. Adim: $z(x')$ çözümünü karar vericiye ilet. Eger $z(x')$ basilamayan çözümlerin olusturdugu bir kümeden en az bir çözüme tercih ediliyorsa ve x' yeni bir çözüm ise 7a. Adima git. Aksi söz konusu olur ise 7b. adima git.

7a. Adim: Bu çözümü $z(x')$ basilamayan çözümlerin kümesine ekle.

7b. Adim: Basilamayan çözümlerden en çok tercih edilen çözümü karar vericiye ilet ve dur.

Iki algoritma arasindaki baslica fark, birinci algoritmada karar verme uzayinin köseden köseye hareket ederken, ikinci algoritmada amaç fonksiyon uzayini boydan boya kesmektedir.

Örnek 5.2:

Arz ve talep miktarlari $a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 9$, $b_1 = 4,\ b_2 = 4,\ b_3 = 6,\ b_4 = 2,\ b_5 = 4$ dir.

Cezalar ise

$$C^1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 7 & 7 & 5 \\ 6 & 5 & 9 & 11 & 3 \\ 6 & 8 & 11 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ C^2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 8 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 9 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 8 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix},\ C^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

seklinde verilmektedir.

Çözüm:

Fayda fonksiyonunu $U(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3$ seklinde varsayilirsa, cezalar matrisi $C = C^1 + C^2 + C^3$ oldugunda $x_{11} = 3,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2,\ x_{23} = 2,\ x_{32} = 2,\ x_{41} = 1,\ x_{43} = 4,\ x_{45} = 4$ ve $z_1(x^*) = 127,\ z_2(x^*) = 104,\ z_3(x^*) = 76,\ \sum z(x^*) = 307$ dir.

Birinci algoritma:

Uygun x degerlerinde tek alt amaç fonksiyonlari için optimal çözümler hesaplanmaktadir.

C^1 matrisi için $x_{13} = 5,\ x_{22} = 4,\ x_{31} = 1,\ x_{33} = 1,\ x_{41} = 3,\ x_{44} = 2,\ x_{45} = 4$ ve $z_1(x_1^*) = 102,\ z_2(x_1^*) = 148,\ z_3(x_1^*) = 100,\ \sum z(x_1^*) = 350$ dir.

C^2 matrisi için $x_{11} = 3,\ x_{14} = 2,\ x_{25} = 4,\ x_{32} = 2,\ x_{41} = 1,\ x_{42} = 2,\ x_{43} = 6$ ve $z_1(x_2^*) = 157,\ z_2(x_2^*) = 72,\ z_3(x_3^*) = 86,\ \sum z(x_2^*) = 315$ dir.

C^3 matrisi için $x_{11} = 3,\ x_{12} = 2,\ x_{23} = 4,\ x_{32} = 2,\ x_{41} = 1,\ x_{43} = 2,\ x_{44} = 2,\ x_{45} = 4$

ve $z_1(x_3^*) = 129, z_2(x_3^*) = 126, z_3(x_3^*) = 64, \sum z(x_3^*) = 319$ dir.

Ideal çözümler ise $z_1 = 102, z_2 = 72,\ z_3 = 64$ dir.

Ceza matrisi ise

$$C^L = \frac{1}{102}C^1 + \frac{1}{72}C^2 + \frac{1}{64}C^3$$

seklinde yazilmaktadir.

Uygun x degerleri için dogrusal uygun çözüm

$x_{11} = 3,\ x_{14} = 2,\ x_{22} = 2,\ x_{25} = 2,\ x_{32} = 2,\ x_{41} = 1,\ x_{43} = 6,\ x_{45} = 2$ ve

$z_1(x_L^*) = 141,\ z_2(x_L^*) = 86,\ z_3(x_L^*) = 82,\ \sum z(x_L^*) = 309$

buradan basilamayan çözüm kümesi

$z(x_1^*) = (102,148,100),$
$z(x_2^*) = (157,72,86),$
$z(x_3^*) = (129,126,64),$
$z(x_L^*) = (141,86,82),$

seklinde hesaplanmaktadir.

Burada on iki nokta temel nokta bulunmaktadir. Bu noktalar

Degisken	Çözümvektörü	$\sum z$
x_{12}	(159,74,84)	317
x_{13}	(126,92,94)	312
x_{15}	(149,82,100)	331
x_{21}	Basilamayançözüm	
x_{23}	(127,104,76)	307
x_{24}	Basilamayançözüm	
x_{31}	Basilamayançözüm	
x_{33}	Basilamayançözüm	
x_{34}	Basilamayançözüm	
x_{35}	Basilamayançözüm	
x_{42}	(157,72,86)	315
x_{44}	(140,94,78)	312

seklinde hesaplanmaktadir. Bu noktalardan alti tanesi basilamayan çözüm, geriye kalan bes nokta dogrusal uygun çözümdür.

Ikinci algoritma:

Birinci algoritmada hesaplanan uygun x degerlerinde tek alt amaç fonksiyonlari için optimal çözüm degerleriyle (5.21) denklemi asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$$
\begin{aligned}
&102w_1 + 148w_2 + 100w_3 - w_4 = 0,\\
&157w_1 + 72w_2 + 86w_3 - w_4 = 0,\\
&129w_1 + 126w_2 + 64w_3 - w_4 = 0,\\
&w_1 + w_2 + w_3 = 1,
\end{aligned}
$$

Bu denklem sisteminin çözümü $w_1 = 0.30828,\ w_2 = 0.34254,\ w_3 = 0.34918$ dir. Buradan optimize edilecek yeni tasima problemi ceza matrisleriyle $C' = 0.30828\,C^1 + 0.34254\,C^2 + 0.34918\,C^3$ seklinde yazilmaktadir. Bu problemin vektör çözümü (127, 104, 76) dir. Bu çözüm basilmayan çözüm kümesine ait olan bir çözümdür.

5.2 Tek Amaçli Tasima Problemi

m tane üretim merkezi, n tane tüketim merkezi içeren bir tasima problemi ele alalim, bu problemde $s_i > 0,\ i = 1,2,...,m$ ve $d_j > 0,\ j = 1,2,...,n$ olmak üzere c_{ij}, $i.$ üretim merkezinden $j.$ tüketim merkezine ait birim ürün tasima maliyetini göstermektedir.

Klasik tek amaçli tasima probleminin matematiksel ifadesi asagidaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
Z = Min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
Kisitlar \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, \qquad i = 1,...,m, \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, \qquad j = 1,...,n, \\
& x_{ij} \ge 0, \ \forall i, j.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

(5.23)' de c_{ij}, s_i ve d_j parametreleri bulanik ise toplam tasima maliyeti olan Z' de bulanik olmaktadir. Bu durumda (5.23)' de tanimlanan klasik tasima problemi bulanik tasima problemine dönüsmektedir. Birim ürün tasima maliyeti c_{ij}, üretim merkezi miktari s_i, tüketim merkezi miktari d_j degerleri yaklasik olarak bilindigi ve sirasiyla $\tilde{C}_{ij}, \tilde{S}_i$ ve $\tilde{D}_j$ konveks bulanik kümelerle gösterildigi varsayilsin. Eger $m_{\tilde{A}}(l x_1 + (1 - l) x_2) \ge Min\left\{ m_{\tilde{A}}(x_1), m_{\tilde{A}}(x_2) \right\},\ x_1, x_2 \in X,\ \ l \in [0,1]$ ise $\tilde{A}$ bulanik kümesi konvekstir. $\tilde{C}_{ij}, \tilde{S}_i$ ve $\tilde{D}_j$ konveks bulanik kümelere ait üyelik fonksiyonlari $m_{\tilde{C}_{ij}}$, $m_{\tilde{S}_i}$ ve $m_{\tilde{D}_j}$ seklinde gösterilmektedir.

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_{ij} &= \{(c_{ij}, m_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij})) \mid c_{ij} \in S(\tilde{C}_{ij})\}, \\
\tilde{S}_i &= \{(s_i, m_{\tilde{S}_i}(s_i)) \mid s_i \in S(\tilde{S}_i)\}, \\
\tilde{D}_j &= \{(d_j, m_{\tilde{D}_j}(d_j)) \mid d_j \in S(\tilde{D}_j)\},
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

(5.24)' da $S(\tilde{C}_{ij}), S(\tilde{S}_i)$ ve $S(\tilde{D}_j)$ sirasi ile $\tilde{C}_{ij}$, $\tilde{S}_i$ ve $\tilde{D}_j$ degerlerine ait destekleri göstermektedir.[*]

---

[*] Liu, S T. and Kao, C., (2004), "Solving Fuzzy Transportation Problems Based on Extension Principle", European Journal of Operational Research 153:661-674.

Bulanik tasima problemi

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} = Min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_{ij}x_{ij} \\
Kisitlar \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le \tilde{S}_i, \qquad i = 1,...,m, \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge \tilde{D}_j, \qquad j = 1,...,n, \\
& x_{ij} \ge 0, \ \forall i, j,
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

seklindedir. Bütün tasima maliyetleri, arz ve talep miktarlari (5.25)’ de bulanik sayilar olarak kabul edilmektedir.

5.2.1 Shiang-Tai Liu ve Chiang Kao' nun Çözüm Yöntemi[*]

Bu çalismada yazarlar birim ürün tasima maliyetleri, üretim ve tüketim merkezi miktarlari $\tilde{C}_{ij}$, $\tilde{S}_i$ ve $\tilde{D}_j$ konveks sayilarla gösterildigi (5.25)' e çözüm önerisinde bulunmuslardir.

$\tilde{C}_{ij}, \tilde{S}_i$ ve $\tilde{D}_j$ ' in α kesenleri

$$\left(C_{ij}\right)_a = [\left(C_{ij}\right)_a^L, \left(C_{ij}\right)_a^U] = [\min_{c_{ij}} \left\{ c_{ij} \in S\left(\tilde{C}_{ij}\right) \middle| m_{\tilde{C}_{ij}}\left(c_{ij}\right) \geq a \right\}, \max_{c_{ij}} \left\{ c_{ij} \in S\left(\tilde{C}_{ij}\right) \middle| m_{\tilde{C}_{ij}}\left(c_{ij}\right) \geq a \right\}]$$

$$\left(S_i\right)_a = [\left(S_i\right)_a^L, \left(S_i\right)_a^U] = [\min_{s_i} \left\{ s_i \in S\left(\tilde{S}_i\right) \middle| m_{\tilde{S}_i}\left(s_i\right) \geq a \right\}, \max_{s_i} \left\{ s_i \in S\left(\tilde{S}_i\right) \middle| m_{\tilde{S}_i}\left(s_i\right) \geq a \right\}],$$

$$\left(D_j\right)_a = [\left(D_j\right)_a^L, \left(D_j\right)_a^U] = [\min_{d_j} \left\{ d_j \in S\left(\tilde{D}_j\right) \middle| m_{\tilde{D}_j}\left(d_j\right) \geq a \right\}, \max_{d_j} \left\{ d_j \in S\left(\tilde{D}_j\right) \middle| m_{\tilde{D}_j}\left(d_j\right) \geq a \right\}]$$

seklinde gösterilmektedir. Bu araliklar mümkün olan a seviyesinde birim ürün tasima maliyetini, arz ve talep degerini göstermektedir. Karsilasilan en büyük zorluk tasima maliyeti, arz ve talep miktarlarina ait degisim araliklarini ne sekilde dikkate alinacagi noktasindadir. Bunun için Zadeh' in uzanim prensibi kullanilmaktadir. Açilim prensibine dayanarak üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{Z}}$ asagidaki sekilde tanimlanmaktadir.

$$m_{\tilde{Z}}(z) = \underset{c,s,d}{MaksMin} \left\{ m_{\tilde{C}_{ij}}\left(c_{ij}\right), m_{\tilde{S}_i}\left(s_i\right), m_{\tilde{D}_j}\left(d_j\right), \forall i,j \,\middle|\, z = Z(c,s,d) \right\} \tag{5.26}$$

Her a degerinde $\tilde{Z}$ ' nin a kesenleri ayni noktada kesisirse, toplam tasima maliyeti kesin sayi, aksi takdirde bulanik sayi olmaktadir. (5.26) üyelik fonksiyonlarini içermektedir. Kapali formda $\mu_{\tilde{Z}}$ üretmek imkansizdir. (5.25)' e göre $m_{\tilde{Z}}\ \forall i,j$ için $m_{\tilde{C}_{ij}}, m_{\tilde{S}_i}, m_{\tilde{D}_i}$ ' in minimum degeridir. $m_{\tilde{C}_{ij}}\left(c_{ij}\right) \geq a$, $m_{\tilde{S}_i}\left(s_i\right) \geq a$, $m_{\tilde{D}_j}\left(d_j\right) \geq a$, ihtiyaç vardir. En az bir $\forall i,j$ için $m_{\tilde{C}_{ij}}\left(c_{ij}\right)$, $m_{\tilde{S}_i}\left(s_i\right)$, $m_{\tilde{D}_j}\left(d_j\right)$ a degerine esittir.

Öyle ki $z = Z(c,s,d), \mu_{\tilde{Z}}(z) = a$ esitligini saglar. $\mu_{\tilde{Z}}$ üyelik fonksiyonunu bulmak için sag ve sol fonksiyonlarini bulmak yeterlidir. Bu islem $\tilde{Z}$ ' nin a kesenine ait Z_a^L alt sinir ve Z_a^U üst sinir degerinin bulunmasina denk olmaktadir.

Z_a^L ve Z_a^U, $Z(c,s,d)$ ' nin sirasiyla minimum ve maksimum degerleri oldugu için asagidaki

---

[*] Liu, S T. and Kao, C., (2004), "Solving Fuzzy Transportation Problems Based on Extension Principle", European Journal of Operational Research 153:661-674.

sekilde ifade edilmektedir.

$$Z_a^L = Min\left\{ Z\,(c,s,d) \,\middle|\, \left(C_{ij}\right)_a^L \le c_{ij} \le \left(C_{ij}\right)_a^U,\ \left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U,\ \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U,\ \forall i,j \right\}$$
$$Z_a^U = Maks\left\{ Z\,(c,s,d) \,\middle|\, \left(C_{ij}\right)_a^L \le c_{ij} \le \left(C_{ij}\right)_a^U,\ \left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U,\ \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U,\ \forall i,j \right\} \quad (5.27)$$

Iki seviyeli matematik programi asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$Z_a^L = \underset{\substack{\left(C_{ij}\right)_a^L \le c_{ij} \le \left(C_{ij}\right)_a^U \\ \left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U \\ \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U \\ \forall i,j}}{Min} \begin{cases} Min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ Kisitlar & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \qquad \forall i,j. \end{cases} \quad (5.28a)$$

$$Z_a^U = \underset{\substack{\left(C_{ij}\right)_a^L \le c_{ij} \le \left(C_{ij}\right)_a^U \\ \left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U \\ \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U \\ \forall i,j}}{Maks} \begin{cases} Min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ Kisitlar & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \qquad \forall i,j. \end{cases} \quad (5.28b)$$

(5.28)' e göre en az bir c_{ij}, s_i veya d_j, $m_{\tilde{Z}}(z) = a$ saglayan a kesenlerinin sinirina ulasmaktadir. Uygun çözümlere sahip olan (5.28) için gerek ve yeter kosul $\sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j$ olmasidir. (5.28)' in birinci seviyesinde s_i ve d_j sirasiyla $[\left(S_i\right)_a^L, \left(S_i\right)_a^U]$ ve $[\left(D_j\right)_a^L, \left(D_j\right)_a^U]$ araliklarinda degismektedir. Bununla birlikte uygun olan ikinci seviye tasima problemini garanti altina almak için $\sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j$ sarti kisitin birinci seviyesinde kabul edilmektedir.

Böylece (5.28) asagidaki formda yazilmaktadir.

$$Z_a^L = \min_{\substack{(C_{ij})_a^L \le c_{ij} \le (C_{ij})_a^U \\ (S_i)_a^L \le s_i \le (S_i)_a^U \\ (D_j)_a^L \le d_j \le (D_j)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ Kisitlar & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j, \end{array} \right. \tag{5.29a}$$

$$Z_a^U = \text{Maks}_{\substack{(C_{ij})_a^L \le c_{ij} \le (C_{ij})_a^U \\ (S_i)_a^L \le s_i \le (S_i)_a^U \\ (D_j)_a^L \le d_j \le (D_j)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ Kisitlar & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j. \end{array} \right. \tag{5.29b}$$

$\sum_{i=1}^{m} (S_i)_{a=0}^{U} \le \sum_{j=1}^{n} (D_j)_{a=0}^{L}$ ise herhangi bir a seviyesinde (5.29) uygun olmayacaktir. Baska bir ifade ile toplam bulanik arzin üst siniri, toplam bulanik talebin alt sinirina esit veya daha büyük ise bulanik tasima problemi uygundur. (5.29a)' da amaç fonksiyonunun alt sinirini elde etmek için $\forall i, j$ için alt sinir $(C_{ij})_a^L$ degerine ait c_{ij} belirlenmektedir. (5.29a) denklemi (5.30)' deki formda yazilmaktadir.

$$Z_a^L = \min_{\substack{(S_i)_a^L \le s_i \le (S_i)_a^U \\ (D_j)_a^L \le d_j \le (D_j)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (C_{ij})_a^L x_{ij} \\ Kisitlar & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i, i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j, j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \forall i, j. \end{array} \right. \tag{5.30}$$

(5.30) tüm minimum amaç degerlerinin minimumunu bulmak oldugu için seviye 1 in kisitlari seviye 2 içine yerlestirilir. 2 seviyeli matematik programlama geleneksel 1 seviyeli programlamaya (5.31)' deki gibi dönüsmektedir.

$$
\begin{aligned}
Z_a^L = \quad & Min && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij}\right)_a^L x_{ij} && \\
& Kisitlar && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, && i = 1,2,\dots,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, && j = 1,2,\dots,n, \\
& && \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j, && \\
& && \left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U, && i = 1,2,\dots,m, \\
& && \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U, && j = 1,2,\dots,n, \\
& && x_{ij} \ge 0, && \forall i, j.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

(5.31) kolay sekilde çözülebilen dogrusal programlama problemidir. (5.30)’ da tüm c_{ij}, a kesenlerinin alt sinirinda belirlendigi için yani $m_{\tilde{C}_{ij}}\left(c_{ij}\right) = a$ oldugundan (5.29)’ a gerekli olan $m_{\tilde{Z}}\left(z\right) = a$ esitligi saglanmaktadir. (5.29b)’ yi çözmek için seviye 2 problemin duali, seviye 1 maksimizasyon islemleriyle tutarli olan bir maksimizasyon problemi elde edilmektedir. Primal model ve dual modelin ayni amaç degerlerine sahip oldugu dogrusal programlamanin dualite teoreminden bilinir. (5.29b) denklemi (5.32)’ deki formuna dönüsmektedir.

$$
Z_a^U = \max_{\substack{\left(C_{ij}\right)_a^L \le c_{ij} \le \left(C_{ij}\right)_a^U \\ \left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U \\ \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{
\begin{aligned}
& Maks && -\sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j && \\
& Kisitlar && -u_i + v_j \le c_{ij}, && i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n, \\
& && u_i,\ v_j \ge 0, && \forall i, j.
\end{aligned}
\right.
\tag{5.32}
$$

Buradan (5.32) denklemi

$$
Z_a^U = \max_{\substack{\left(S_i\right)_a^L \le s_i \le \left(S_i\right)_a^U \\ \left(D_j\right)_a^L \le d_j \le \left(D_j\right)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{
\begin{aligned}
& Maks && -\sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j && \\
& Kisitlar && -u_i + v_j \le \left(C_{ij}\right)_a^U, && i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n \\
& && u_i, v_j \ge 0, && \forall i, j,
\end{aligned}
\right.
\tag{5.33}
$$

seklinde yazilmaktadir. (5.33)’ de seviye 1 ve 2’ nin kendilerine ait kisitlarla maksimizasyon islemi yapildiginda (5.34)’ deki 1 seviyeli matematik programlama problemi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&Z_a^U = Maks \quad && -\sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \\
&Kisitlar && -u_i + v_j \leq \left(C_{ij}\right)_a^U, \qquad i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n, \\
& && \sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j \\
& && \left(S_i\right)_a^L \leq s_i \leq \left(S_i\right)_a^U, \qquad i = 1,2,...,m, \\
& && \left(D_j\right)_a^L \leq d_j \leq \left(D_j\right)_a^U, \quad j = 1,2,...,n, \\
& && u_i, v_j \geq 0,\ \forall i, j.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

(5.34) dogrusal olarak kisitlandirilmis fakat dogrusal olmayan bir programlama problemidir. (5.31)' e benzer sekilde, tüm c_{ij} degerleri kendi a kesenlerinin üst sinirlarindan elde edildigi yani $m_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}) = a$ oldugu için, bu durum (5.26)' da oldugu gibi $m_{\tilde{Z}}(z) = a$ sartini saglamaktadir. (5.29a) ve (5.29b)' da eger toplam bulanik talebin alt siniri toplam bulanik arzin üst sinirindan küçük ise problemin uygun olmaktadir. Yani $\sum_{j=1}^{n}(D_j)_{a=0}^{L} \leq \sum_{i=1}^{m}(S_i)_{a=0}^{U}$ dir. Eger bu sart saglanmazsa problemde uygun bölge olusmaz. Bu durumda, hayali $(m+1)$ tane arz noktasi $s_{m+1} \geq \sum_{j=1}^{m}(D_j)_{a=0}^{L} - \sum_{i=1}^{m}(S_i)_{a=0}^{U}$ miktari ile beraber klasik tasima probleminin yazilabilecegi varsayilir. Hayali arz noktasindan tasinacak miktar onun talep noktasindan eksiktir. $0 < a_2 < a_1 \leq 1$, olmak üzere mümkün a_1 ve a_2 seviyeleri için (5.31) ve (5.34)' de a_1 ile tanimlanan uygun bölge, a_2 ile tanimlanan uygun bölgeden daha küçüktür. Sonuç olarak, $\left(Z\right)_{a_1}^L \geq \left(Z\right)_{a_2}^L$ ve $\left(Z\right)_{a_1}^U \leq \left(Z\right)_{a_2}^U$ dir. Baska bir ifade ile sol tarafi temsil eden fonksiyon azalmaz, sag tarafi temsil eden fonksiyon ise artmaz. Bu ifade konveks bulanik küme tanimina dayanmaktadir. $\tilde{Z}$' nin konveksligini saglar. Eger her iki Z_a^L ve Z_a^U degeri de a' ya göre ters yazilabilir ise sol taraf fonksiyonu $L(z) = \left(Z_a^L\right)^{-1}$ ve sag taraf fonksiyonu $R(z) = \left(Z_a^U\right)^{-1}$ olarak elde edilmektedir. $L(z)$ ve $R(z)$' den üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{Z}}$ asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$
\mu_{\tilde{Z}} = \begin{cases} L(z), & (Z)_{a=0}^{L} \leq z \leq (Z)_{a=1}^{L} \\ 1, & (Z)_{a=1}^{L} \leq z \leq (Z)_{a=1}^{U} \\ R(z), & (Z)_{a=1}^{U} \leq z \leq (Z)_{a=0}^{U}. \end{cases}
\tag{5.35}
$$

Çogu durumda Z_a^L ve Z_a^U degerleri analitik olarak hesaplanamaz. Bununla beraber birlikte farkli mümkün a seviyesinde Z_a^L ve Z_a^U sayisal çözümleri $L(z)$ ve $R(z)$' in yaklasik degerini elde etmek için kullanilmaktadir.

Örnek 5.3:

Iki bulanik arz ve üç bulanik talep içeren tasima problemini göz önüne alalim. Birinci arz ve üçüncü talep üçgensel sayilar kalanlar ise yamuk bulanik sayilardir.

Çözüm:

Örnek 5.3 asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} = Min \quad & 10x_{11} + 50x_{12} + 80x_{13} + (60,70,80,90)x_{21} + 60x_{22} + 20x_{23} \\
Kisitlar \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq (70,90,100) \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq (40,60,70,80) \\
& x_{11} + x_{21} \geq (30,40,50,70) \\
& x_{12} + x_{22} \geq (20,30,40,50) \\
& x_{13} + x_{23} \geq (40,50,80) \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Toplam arz $\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = (110,150,160,180)$, toplam talep $\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{D}_3 = (90,120,140,200)$ seklinde hesaplanmaktadir. $\tilde{Z}$' nin a seviyeleri için alt ve üst sinir degerleri asagidaki sekild

$$
\begin{aligned}
Z_a^L = Min \quad & 10x_{11} + 50x_{12} + 80x_{13} + (60 + 10a)x_{21} + 60x_{22} + 20x_{23} \\
Kisitlar \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq s_1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq s_2 \\
& x_{11} + x_{21} \geq d_1 \\
& x_{12} + x_{22} \geq d_2 \\
& x_{13} + x_{23} \geq d_3 \\
& s_1 + s_2 \geq d_1 + d_2 + d_3 \\
& 70 + 20a \leq s_1 \leq 100 - 10a, 40 + 20a \leq s_2 \leq 80 - 10a, \\
& 30 + 10a \leq d_1 \leq 70 - 20a, 20 + 10a \leq d_2 \leq 50 - 10a, \\
& 40 + 10a \leq d_3 \leq 80 - 30a, \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_a^U = Maks \quad & -s_1u_1 - s_2u_2 + d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3 \\
Kisitlar \quad & -u_1 + v_1 \le 10 \\
& -u_1 + v_2 \le 50 \\
& -u_1 + v_3 \le 80 \\
& -u_2 + v_1 \le (90 - 10a) \\
& -u_2 + v_2 \le 60 \\
& -u_2 + v_3 \le 20 \\
& s_1 + s_2 \ge d_1 + d_2 + d_3 \\
& 70 + 20a \le s_1 \le 100 - 10a,\ 40 + 20a \le s_2 \le 80 - 10a, \\
& 30 + 10a \le d_1 \le 70 - 20a,\ 20 + 10a \le d_2 \le 50 - 10a, \\
& 40 + 10a \le d_3 \le 80 - 30a, \\
& u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Tablo 5.1

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Z_a^L	2100	2180	2260	2340	2420	2500	2580	2660	2740	2820	2900
Z_a^U	5800	5600	5400	5200	5000	4800	4440	4080	3860	3680	3500

Tablo 5.1, a ’ in (0, 0.1, 0.2,…,1.0) degerleri için toplam tasima maliyetini göstermektedir. Özellikle $a = 1.0$ kesim degeri en kuvvetle muhtemel gerçeklesebilecek toplam tasima maliyetini göstermektedir. Örnek 5.3’ de toplam tasima maliyeti bulanik sayi oldugunda 2900 ve 3500 araliginda degismektedir. $a = 0$ ise $\tilde{Z}$ ’ nin alt sinir degeri $Z^* = 2100$, $x_{11}^* = 30,\ x_{12}^* = 20,\ x_{23}^* = 40,\ x_{12}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = 0$, talep ve arz degerleri $d_1 = 30,\ d_2 = 20,\ d_3 = 40$ $s_1 = 70, s_2 = 40$, $\tilde{Z}$ ’ nin üst sinir degeri $Z^* = 5800$, $x_{11}^* = 30,\ x_{12}^* = 30,\ x_{13}^* = 40,\ x_{23}^* = 40,$ $x_{21}^* = x_{22}^* = 0$, talep ve arz degerleri $d_1 = 30,\ d_2 = 30,\ d_3 = 80,\ s_1 = 100,\ s_2 = 40$ olarak hesaplanmaktadir. $a = 1.0$ için $\tilde{Z}$ ’ nin alt sinir degeri $Z^* = 2900$, $x_{11}^* = 40,\ x_{12}^* = 30,\ x_{23}^* = 50,$ $x_{12}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = 0$, talep ve arz degerleri ise $d_1 = 40,\ d_2 = 30, d_3 = 50, s_1 = 70,\ s_2 = 50$, $\tilde{Z}$ ’ nin üst sinir degeri $Z^* = 3500$, $x_{11}^* = 50,\ x_{12}^* = 40,\ x_{23}^* = 50,\ x_{13}^* = 40,\ x_{21}^* = x_{22}^* = 0$, talep ve arz degerleri $d_1 = 50,\ d_2 = 40, d_3 = 50, s_1 = 90,\ s_2 = 50$ dir.

5.2.1.1 Sinirlama Esitlikleri

Bu bölümde, yazarlar ele aldiklari bulanik tasima problemini esitlik kisitlari altinda incelemislerdir. Esitlik kisitlari altindaki tasima problemi

$$
\begin{aligned}
&Z = Min && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} && \\
&Kisitlar && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, && i = 1,2,\ldots,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, && j = 1,2,\ldots,n, \\
& && x_{ij} \geq 0, \ \forall i, j, &&
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

seklinde yazilmaktadir. Denklem (5.36) ancak ve ancak $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$ ise uygun olmaktadir. Eger tasima maliyeti, arz ve talep degerleri tam olarak bilinmediginde tasima problemi

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z} = Min && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_{ij}x_{ij} && \\
&Kisitlar && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{S}_i, && i = 1,2,\ldots,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{D}_j, && j = 1,2,\ldots,n, \\
& && x_{ij} \geq 0, \ \forall i, j, &&
\end{aligned} \tag{5.37}
$$

bulanik tasima problemi olarak yazilmaktadir. Esitsizlik kisitlarinda incelendigi gibi mümkün a seviyesinde $\tilde{Z}$' in alt siniri (5.38a)' deki

$$
Z_a^L = \underset{\substack{(C_{ij})_a^L \leq c_{ij} \leq (C_{ij})_a^U \\ (S_i)_a^L \leq s_i \leq (S_i)_a^U \\ (D_j)_a^L \leq d_j \leq (D_j)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i, j}}{Min} \left\{
\begin{aligned}
&Min && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} && \\
&Kisitlar && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, && i = 1,2,\ldots,m, \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, && j = 1,2,\ldots,n, \\
& && x_{ij} \geq 0, && \forall i, j,
\end{aligned}
\right. \tag{5.38a}
$$

matematik programlama problemi olarak yazilmaktadir.

$\tilde{Z}$' in üst siniri asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$Z_a^U = \underset{\substack{(C_{ij})_a^L \le c_{ij} \le (C_{ij})_a^U \\ (S_i)_a^L \le s_i \le (S_i)_a^U \\ (D_j)_a^L \le d_j \le (D_j)_a^U \\ \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}}{Maks} \left\{ \begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ Kisitlar & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \qquad \forall i, j. \end{array} \right. \tag{5.38b}$$

Bir seviyeli matematik programlamaya karsilik gelen

$$\begin{aligned} Z_a^L = Min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (C_{ij})_a^L x_{ij} \\ Kisitlar \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \qquad j = 1,2,\ldots,n, \\ & \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \\ & (S_i)_a^L \le s_i \le (S_i)_a^U, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & (D_j)_a^L \le d_j \le (D_j)_a^U, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j. \end{aligned} \tag{5.39a}$$

$$\begin{aligned} Z_a^U = Maks \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \\ Kisitlar \quad & u_i + v_j \le (C_{ij})_a^U, \qquad i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n, \\ & \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \\ & (S_i)_a^L \le s_i \le (S_i)_a^U, \quad i = 1,2,\ldots,m, \\ & (D_j)_a^L \le d_j \le (D_j)_a^U, \quad j = 1,2,\ldots,n, \\ & u_i, v_j \ge 0, \quad \forall i, j, \end{aligned} \tag{5.39b}$$

denklemleri yazilmaktadir. a seviyesinde toplam tasima maliyetinin alt ve üst sinirlari, (5.39) çözülerek farkli seviyelerde $\tilde{Z}$' nin $[Z_a^L, Z_a^U]$, a seviyeleri olmaktadir.

Örnek 5.4:

Örnek 5.3 esitlik kisitlari altinda asagidaki sekilde yazilmaktadir.

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} = Min \quad & 10x_{11} + 50x_{12} + 80x_{13} + (60,70,80,90)x_{21} + 60x_{22} + 20x_{23} \\
Kisitlar \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = (70,90,100) \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = (40,60,70,80) \\
& x_{11} + x_{21} = (30,40,50,70) \\
& x_{12} + x_{22} = (20,30,40,50) \\
& x_{13} + x_{23} = (40,50,80) \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0,
\end{aligned}
$$

Çözüm:

$\tilde{Z}$ ' in a kesenine ait alt ve üst sinir degerleri asagidaki sekilde hesaplanmaktadir.

$$
\begin{aligned}
Z_a^L = Min \quad & 10x_{11} + 50x_{12} + 80x_{13} + (60 + 10a)x_{21} + 60x_{22} + 20x_{23} \\
Kisitlar \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = s_1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = s_2 \\
& x_{11} + x_{21} = d_1 \\
& x_{12} + x_{22} = d_2 \\
& x_{13} + x_{23} = d_3 \\
& s_1 + s_2 = d_1 + d_2 + d_3 \\
& 70 + 20a \leq s_1 \leq 100 - 10a,\ 40 + 20a \leq s_2 \leq 80 - 10a, \\
& 30 + 10a \leq d_1 \leq 70 - 20a,\ 20 + 10a \leq d_2 \leq 50 - 10a, \\
& 40 + 10a \leq d_3 \leq 80 - 30a, \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0, \\
Z_a^U = Maks \quad & s_1u_1 + s_2u_2 + d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3 \\
Kisitlar \quad & u_1 + v_1 \leq 10 \\
& u_1 + v_2 \leq 50 \\
& u_1 + v_3 \leq 80 \\
& u_2 + v_1 \leq (90 - 10a) \\
& u_2 + v_2 \leq 60 \\
& u_2 + v_3 \leq 20 \\
& s_1 + s_2 = d_1 + d_2 + d_3 \\
& 70 + 20a \leq s_1 \leq 100 - 10a,\ 40 + 20a \leq s_2 \leq 80 - 10a, \\
& 30 + 10a \leq d_1 \leq 70 - 20a,\ 20 + 10a \leq d_2 \leq 50 - 10a, \\
& 40 + 10a \leq d_3 \leq 80 - 30a, \\
& u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in R.
\end{aligned}
$$

a kesenlerine ait toplam tasima maliyetinin sinir degerleri Tablo 5.2' de hesaplanmaktadir.

Tablo 5.2

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Z_a^L	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3040	3260	3680	-
Z_a^U	5800	5600	5400	5200	5000	4800	4440	4080	3860	3680	-

0,9' dan büyük a degerleri için bu problemi yazmak mümkün degildir. Baska ifade ile sinirin maksimum degeri 0,9' a esittir. Su dikkate deger bir noktadir. Örnek 5.4' de amaç degere ait üyelik fonksiyonu Örnek 5.3' de bulunan üyelik fonksiyonunu kapsamaktadir. Bu sebeple, esitlik kisitlari esitsizlik kisitlarina göre daha belirleyicidir.

$a = 0$ ise $\tilde{Z}$' nin alt sinir degeri $Z^* = 2300,\ x_{11}^* = 50,\ x_{12}^* = 20,\ x_{23}^* = 40,\ x_{12}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = 0$ talep ve arz degerleri ise $d_1 = 50,\ d_2 = 20,\ d_3 = 40,\ s_1 = 70,\ s_2 = 40$ olarak hesaplanmaktadir. $\tilde{Z}$' nin üst sinir degeri $Z^* = 5800,\ x_{11}^* = 30,\ x_{12}^* = 30,\ x_{13}^* = 40,\ x_{23}^* = 40,\ x_{21}^* = x_{22}^* = 0$, talep ve arz degerleri $d_1 = 30,\ d_2 = 30,\ d_3 = 80,\ s_1 = 100,\ s_2 = 40$ dir.

$a = 0.9$ için $\tilde{Z}$' nin alt sinir ve üst sinir degeri esit $Z^* = 3680,\ x_{11}^* = 52,\ x_{12}^* = 36,\ x_{22}^* = 5,$ $x_{23}^* = 53,\ x_{13}^* = x_{21}^* = 0$, talep ve arz degerleri ise $d_1 = 52,\ d_2 = 41,\ d_3 = 53,\ s_1 = 88,\ s_2 = 58$ olarak hesaplanmaktadir.

5.2.2 Ahlatçioglu M., Sivri M. ve Güzel N.' in Çözüm Yöntemi

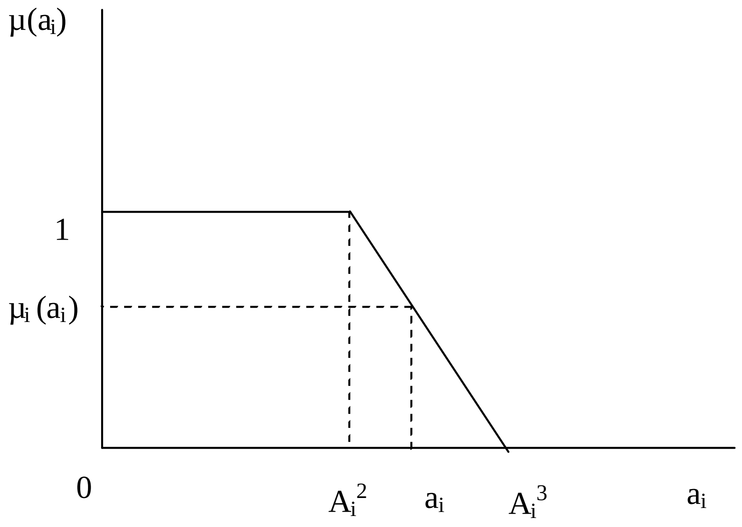
Bu çalismada, hem miktarlarin hem de fiyatlarin bulanik olmasi halini ayni anda göz önüne alinmaktadir. Ayrica, miktar ve fiyat farkliligina uygun olacak sekilde farkli tatmin seviyeleri kullanilmaktadir. Fiyatlardaki büyüklük sirasini degistiren, tatmin seviyesi kirilma noktalari belirlendikten sonra, ardisik kirilma noktalari ile olusturulan her bir aralikta bir optimal çözümün varligini gösterilmekte ve miktarlarin bagli oldugu tatmin seviyesinin büyümesi ile optimal çözümler uygunlugunu kaybetmekte, dualite ile yeni optimal çözüme geçis yapilmaktadir. Optimal çözümleri degistiren, miktarlarin bagli oldugu tatmin seviyelerinin kirilma noktalari elde edilmektedir. Bütün bu islemler, problemin özel yapisi geregi, tablo ile yapilabilmekte ve gelecekte ortaya çikabilecek bütün bulanik durumlara uygun optimal çözümler elde edilmektedir. m üretim merkezi sayisi, n tüketim merkezi sayisi, A_i i. üretim merkezindeki bulanik ürün miktari B_j, j. tüketim merkezinin bulanik talep miktari C_{ij}, bulanik birim tasima maliyeti X_{ij}, i. üretim merkezinden j. tüketim merkezine tasinacak bulanik ürün miktari olmak üzere problem, tek amaçli tasima problemi matematiksel olarak asagidaki sekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} & Z = Min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \\ & Kisitlar \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = A_i, \qquad i = 1,...,m, \\ & \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = B_j, \qquad j = 1,...,n, \\ & \qquad\qquad X_{ij} \geq 0, \ \ \forall i, j. \end{aligned} \tag{5.40}$$

(5.40)' da A_i ve B_j bulanik miktarlari, $A_i = (-\infty, A_i^2, A_i^3)$, $B_j = (B_j^1, B_j^2, \infty)$ olarak bulanik sayilardir. Birim ürün tasima fiyatlari da $C_{ij} = (-\infty, C_{ij}^2, C_{ij}^3)$ bulanik sayisi ile verilmektedir. A_i ' nin üyelik fonksiyonu

$$m_i(a_i) = \begin{cases} 1 & , \quad a_i \leq A_i^2 \\ \dfrac{a_i - A_i^3}{A_i^2 - A_i^3} & , \quad A_i^2 \leq a_i \leq A_i^3 \\ 0 & , \quad a_i \geq A_i^3 \end{cases} \tag{5.41}$$

seklindedir. (5.41) geometrik olarak Sekil 5.1' deki gibi ifade edilmektedir.

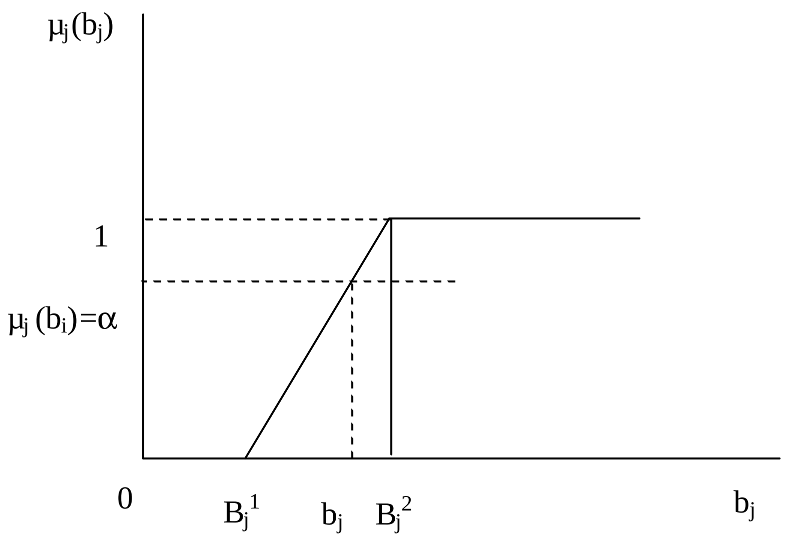


Sekil 5.1 A_i ' nin üyelik fonksiyonu.

B_j ' nin üyelik fonksiyonu (5.42)' deki gibi yazilmaktadir.

$$m_j(b_j) = \begin{cases} 0 & , \quad b_j \le B_j^1 \\ \dfrac{b_j - B_j^1}{B_j^2 - B_j^1} & , \quad B_j^1 \le b_j \le B_j^2 \\ 1 & , \quad b_j \ge B_j^2 \end{cases} \tag{5.42}$$

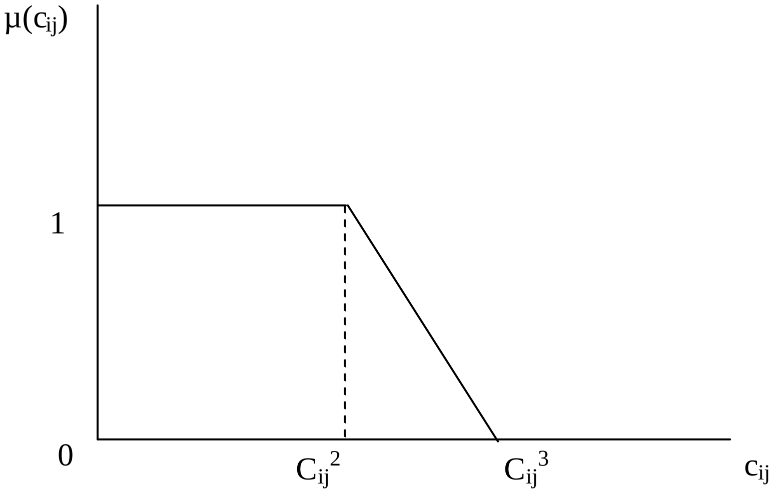
(5.42)' nin geometrik ifadesi Sekil 5.2' deki gibi olusmaktadir.



Sekil 5.2 B_j ' nin üyelik fonksiyonu.

C_{ij}' nin üyelik fonksiyonu (5.43)' deki yazilmakta, Sekil 5.3' deki gibi gösterilmektedir.

$$m(c_{ij}) = \begin{cases} 1 & , \quad c_{ij} \le C_{ij}^2 \\ \dfrac{c_{ij} - C_{ij}^3}{C_{ij}^2 - C_{ij}^3} & , \quad C_{ij}^2 \le c_{ij} \le C_{ij}^3 \\ 0 & , \quad c_{ij} \ge C_{ij}^3 \end{cases} \tag{5.43}$$



Sekil 5.3 C_{ij}' nin üyelik fonksiyonu.

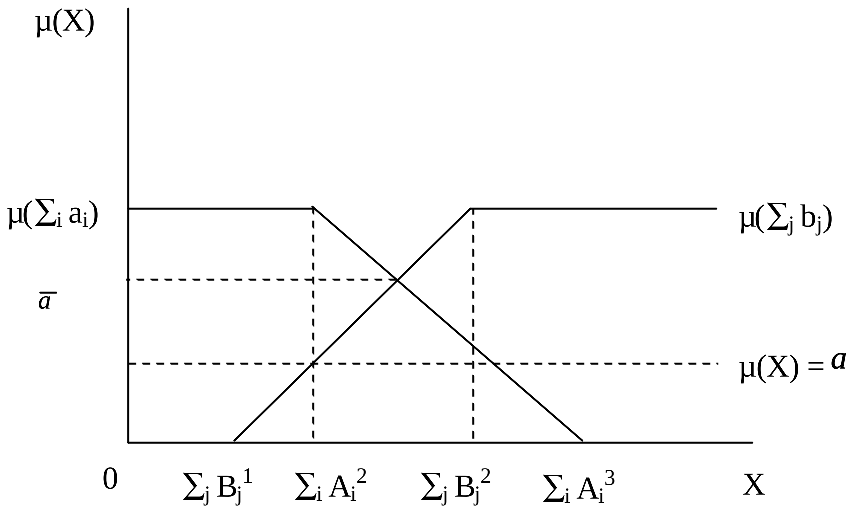
A_i ve B_j miktarlari gösterdiginden ayni a tatmin seviyesindeki kesin degerleri Sekil 5.1 ve Sekil 5.2' deki gibi olusmaktadir. Üyelik fonksiyonlari $0 < a < 1$ için monoton olduklarindan her $a \in (0,1)$ için bir tane $a_i = m_i^{-1}(a)$ ve bir tane $b_j = m_j^{-1}(a)$ kesin sayisi bulunmaktadir. Bu sayilari a türünden ifadesi,

$m_i(a_i) = a$ dan $a_i = m_i^{-1}(a) = A_i^3 - (A_i^3 - A_i^2)a$ ve

$m_j(b_j) = a$ dan $b_j = m_j^{-1}(a) = B_j^1 + (B_j^2 - B_j^1)a$ dir.

a tatmin seviyesinin artmasi, i. üretim merkezinde bulunan a_i miktarinin azalmasina ve j. tüketim merkezindeki talep miktari b_j' nin artmasina sebep olmaktadir. Üretim merkezlerinde bulunan toplam ürün miktari $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} [A_i^3 - (A_i^3 - A_i^2)a]$ ve talep merkezinin toplam talep miktari $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} [B_j^1 + (B_j^2 - B_j^1)a]$ dir.

Üretim merkezlerinde ve tüketim merkezlerinde bulunan bulanik toplam ürün miktarlarinin üyelik fonksiyonlari Sekil 5.4' deki gibi gösterilmektedir.



Sekil 5.4 Toplam bulanik ürün miktari üyelik fonksiyonu.

Buradan $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ esitligini saglayan $\bar{a}$ tatmin seviyesi,

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i^3 - \sum_{j=1}^{n} B_j^1}{\sum_{i=1}^{m} (A_i^3 - A_i^2) + \sum_{j=1}^{n} (B_j^2 - B_j^1)} \tag{5.44}$$

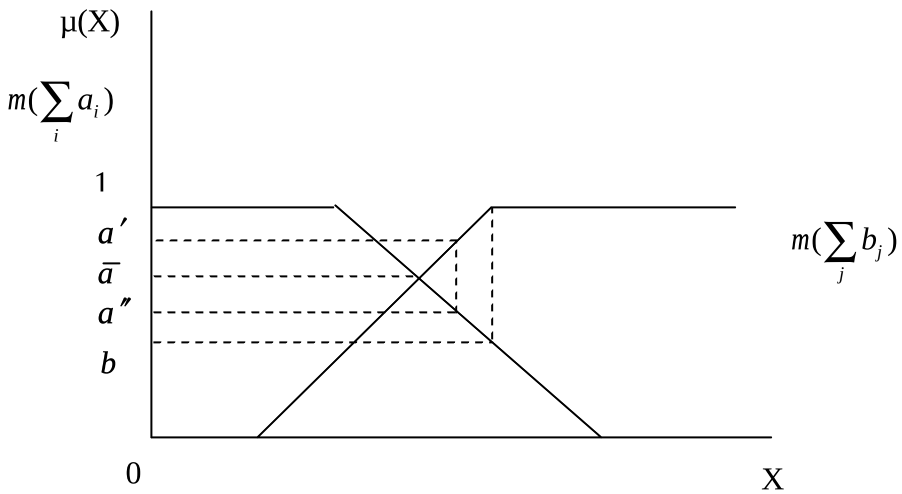
olarak yazilmaktadir. (5.44)' de $\sum_{i=1}^{m} (A_i^3 - A_i^2) + \sum_{j=1}^{n} (B_j^2 - B_j^1) > 0$ ve $\bar{a}$, payin isareti ve payin paydadan büyüklügüne bagli olarak $[0,1]$ araliginin disinda da deger almaktadir.

1) $\bar{a} \leq 0$, bulunursa maksimum tatmin seviyesi $\bar{a} = 0$ olacaktir. Bu tatmin seviyesinde, yapay bir üretim merkezi kurularak tasima problemi dengeli hale getirilerek, problem çözülmektedir. $a > \bar{a}$ ise tasinacak miktar azalmaktadir.

2) $0 < \bar{a} \leq 1$ bulunursa $a \in [0, \bar{a}]$ için yapay talep merkezi kurularak problem dengeli hale getirilerek çözülmektedir. $a \in [0, \bar{a}]$ ayni zamanda miktarlar için tatmin seviyesini göstermektedir. Ancak, $\bar{a}$ ayni zamanda, $\bar{a} = MaksMin\{m(\sum_i a_i), m(\sum_j b_j)\}$ esitligini saglamak zorunda oldugundan $\bar{a} \in [0,1]$ dir. $a \in [\bar{a}, 1]$ degerlerine karsilik bir yapay üretim merkezi ilavesi ile problem dengeli hale getirilerek çözülmektedir.

Maksimum tatmin seviyesi $\bar{a}$ oldugundan $a \in [\bar{a}, 1]$ araligi tasimada tatmin seviyesini dogrudan göstermemektedir.

$\bar{a}$ tatmin seviyesi Sekil 5.5' de verilmektedir.



Sekil 5.5 $\bar{a}$ tatmin seviyesi grafigi.

Ancak, dogrusal $a' \in [\bar{a}, 1]$ degerine karsilik,

$$a'' = \frac{\sum_i A_i^3 - \sum_j B_j^1 - \sum_j (B_j^2 - B_j^1) a'}{\sum_i (A_i^3 - A_i^2)}$$

tatmin seviyesi bulunabilir. Bir baska ifadeyle a'' tatmin seviyesindeki bir çözüm a' degeri ile bulunmaktadir. $a' \in [\bar{a}, 1]$ araligina karsilik $0 \le b \le \bar{a}$ olmak üzere $a'' \in [b, \bar{a}]$ araliginda bulunmaktadir. Bu ifadede

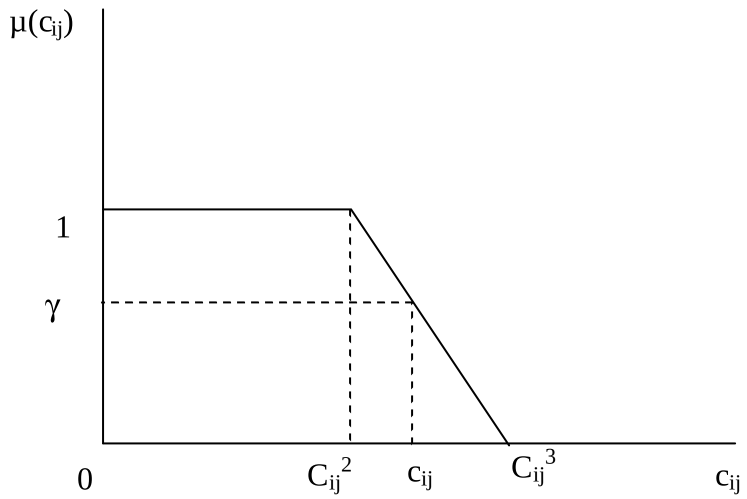
$$\sum_j B_j^2 < \sum_i A_i^3 \text{ ise } b = \frac{\sum_j B_j^2 - \sum_i A_i^3}{\sum_i (A_i^2 - A_i^3)}, \sum_j B_j^2 \ge \sum_i A_i^3 \text{ ise } b = 0 \text{ dir.}$$

3) $\bar{a} > 1$ ise $\sum_i a_i - \sum_j b_j = \sum_i [A_i^3 - (A_i^3 - A_i^2) a] - \sum_j [B_j^1 + (B_j^2 - B_j^1) a]$ miktarli bir talep merkezi kurarak problem dengeli hale getirilebilir. Bu problemin çözümünde tatmin seviyesi $a = 1$ degerine kadar yükselir. Yani, tasinacak miktar $[\sum_j B_j^2, \sum_i A_i^2]$ araliginda ise tatmin seviyesi $a = 1$ dir. Araligin disindaki miktarlari içeren çözümlerde $a < 1$ olur.

Sonuç olarak, problemin dengeli hale getirilebilmesi için, üretim merkezlerindeki miktarlarin toplami $\sum_i [A_i^3 - (A_i^3 - A_i^2)a]$, tüketim merkezi miktarlarinin toplami, $\sum_j [B_j^i + (B_j^2 - B_j^1)a]$ olmak üzere $\bar{a}$ belirlenmektedir. Problemin yapisina uygun olacak sekilde, yapay üretim veya yapay tüketim merkezi kurulmaktadir. Böylece, problem dengeli hali gelmis olmaktadir.

5.2.2.1 Fiyatlardaki Kirilma Noktalarinin Bulunmasi ve Fiyatlarin Kesinlestirilmesi

c_{ij} ' nin üyelik fonksiyonu $m(c_{ij}) \in (0,1)$ araliginda monoton azalan oldugundan $m(c_{ij}) = g \Rightarrow c_{ij} = m^{-1}(g)$ olur. Bu durumda tasima fiyatlari g tatmin seviyesine bagli olarak belirlenebilir.



Sekil 5.6 Tasima fiyatlarinin g tatmin seviyesi.

Buradan $c_{ij} = C_{ij}^3 - g(C_{ij}^3 - C_{ij}^2)$ dir. $N = m.n$ tane $c_{ij} = C_{ij}^3 - g(C_{ij}^3 - C_{ij}^2)$ dogrularinin ikiserli kesisimleri ile bulunan $g(0 \le g \le 1)$ degerleri c_{ij} degerleri siralamalari degistiren degerlerdir. g ' larin bu degerlerine kirilma noktalari olmaktadir. Ardisik kirilma noktalari arasinda olusan her bir alt aralikta c_{ij} degerlerinin sirasi degismemektedir. Bu yüzden, araligin içerisinden herhangi bir nokta temsilci nokta olarak seçilebilmektedir. Seçilen bu temsilci nokta, araligin hangi noktasi olursa olsun tasima probleminin optimal çözümü degismez. Ancak, aralik degistiginde fiyatlar arasi siralama degiseceginden tasima probleminin optimal çözümü de degisebilmektedir. Bu nedenle, g degerinin ardisik kirilma noktalari ile olusturulan her bir aralik için ayri ayri optimal çözümü aranmaktadir. Böylece olasi bütün optimal çözümler incelenmis olur.

$[g_{l-1}, g_l]$, (1,2,...) araligi ardisik kirilma noktalarinin olusturdugu bir alt aralik olsun. $\hat{g}_l \in [g_{l-1}, g_l]$ seçerek, $c_{ij} = C_{ij}^3 - \hat{g}(C_{ij}^3 - C_{ij}^2)$ kesin fiyatlari ile tasima problemi çözülmektedir. Buradan i. üretim merkezinden, j. tüketim merkezine tasinacak ürün miktari X_{ij} olmak üzere, bulanik tasima problemi, asagidaki sekildedir.

$$Z = Min \sum_i \sum_j c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_i X_{ij} = a_i = A_i^3 - (A_i^3 - A_i^2)a$$

$$\sum_j X_{ij} = b_j = B_j^1 + (B_j^2 - B_j^1)a$$

5.2.2.2 a Araliklarinin Belirlenmesi

a , [0,1] araliginda degisirse, üretim ve tüketim merkezlerindeki ürün miktarlari ve problemin optimal çözümleri degismektedir. Optimal çözümler $x_{ij}^* = x_{ij}^*(a)$ yapisinda olup dogrusaldir. Ancak, a ’ daki degisim tasinacak miktarlari sürekli degistirmesine karsin, optimal çözümün pozitiflik kisitini bozacaktir. Bu pozitiflik kisitini bozan noktalara a ’ nin kirilma noktalari denir. a ’ nin bu kirilma noktasindaki degerinden sonra optimal çözümün en az bir bileseni negatif olacaktir ki bu durum uygunluk sartini bozmaktadir. Dual problem ile uygunluk sarti yeniden kurulur ve dolayisiyla, yeni bir uygun optimal çözüm elde edilmektedir. a ’ nin pozitif yöndeki degisimi yeniden uygunluk sartini bozarsa ayni islemler tekrarlanmaktadir. [0,1] araliginda a ardisik kirilma noktalarinin belirledigi araliklarda degerler degismesine ragmen optimal çözümler degismez. Böylece, aralik sayisi kadar farkli optimal çözüm bulunabilmektedir. Fiyatlarin ve miktarlarin ayni anda bulanik verilmesi halinde ise, kirilma noktalari ile belirlenen [0,1] araligindaki, g ’ lerin olusturdugu aralik sayisi a ’ ya esit, a degerlerinin olusturdugu aralik sayisi ise b esit olmak üzere, ($a.b$) tane optimal çözüm bulunmaktadir. Ancak, bu çözümlerden bazilari ayni olabilir.

Örnek:

Tablo 5.3

				Arz
	C_{11} =(-8,3,5)	C_{12} =(-8,6,7)	C_{13} =(-8,6,11)	(-8,5,6)
	C_{21} =(-8,7,9)	C_{22} =(-8,9,15)	C_{23}=(-8,10,18)	(-8,15,17)
	C_{31} =(-8,9,13)	C_{32} =(-8,9,16)	C_{33} =(-8,9,10)	(-8,6,13)
Talep	(2,9,+8)	(3,8,+8)	(4,9,+8)	

Tablo (5.3)' de verilen bulanik fiyatli bulanik miktarli tasima problemini çözelim.

Tablo 5.4

					Arz
	C_{11} =5-2?	C_{12} =7-?	C_{13} =11-5?	C_{14}=0	a_{1}=6-a
	C_{21} =9-2?	C_{22} =15-6?	C_{23} =18-8?	C_{24}=0	a_{2}=17-2a
	C_{31}=13-4?	C_{32} =16-7?	C_{33} =10-?	C_{34}=0	a_{3}=13-7a
Talep	b_{1}=2+7a	b_{2}=3+5a	b_{3}=4+5a	b_{4}=27-27a	

Tablo 5.4' da yapay talep merkezindeki miktar, $\sum_{i=1}^{3} a_i = 36 - 10a$ ve $\sum_{j=1}^{3} b_j = 9 + 17a$ dir.

$36 - 10a = 9 + 17a$ ' dan $\bar{a} = 1$ bulunur. Tatmin seviyesi $a \in [0, \bar{a}] = [0,1]$ araliginda olacaktir.

Buna göre yapay talep merkezindeki miktar $b_4 = \sum_i a_i - \sum_j b_j = 27 - 27a$ olarak bulunmustur.

Böylece problem dengeli hale gelmistir. g ’ larin kirilma noktalarini $c_{ij} = c_{ij}(g)$ dogrularini kesistirerek bulunabilmektedir. [0,1] araligindaki g ’ nin kirilma degerleri sirasiyla $\{0,1/4,2/3,1\}$ dir. Ardisik degerler arasi araliklar ise [0,1/4], [1/4,2/3], [2/3,1] dir. Buradan, $g \in [0,1/4]$ araligi için bulanik miktarli tasima problemini çözelim. a ’ larin ilk aralik temsilcisini $a = 0$ seçilerek elde edilen optimal çözüm Tablo 5.5’ de verilmektedir.

$0 \le g \le \frac{1}{4}$ ve $0 \le a \le \frac{1}{13}$ araligindaki degerleri için;

Tablo 5.5

					Arz
	-t 2+7a 5-2?	3+5a 7-?	 11-5?	**+t** 1-13a 0	6-a
	t 9-2?	 15-6?	 18-8?	**-t** 17-2a 0	17-2a
	  13-4?	 16-7?	4+5a 10-?	9-12a 0	13-7a
Talep	2+7a	3+5a	4+5a	27-27a	

Arz ve talep merkezlerindeki a miktarlari optimal tasima yapilan gözlere dengeli bir sekilde dagitilmaktadir. Tablo 5.5’ deki optimal çözümün uygunluk (pozitiflik) sartini bozan ilk a degeri $x_{14} = 1 - 13a = 0$ esitligini saglayan degerdir. Böylece, mevcut optimal çözüm $a \in [0,1/13]$ araligi için geçerlidir.

$0 \le g \le \frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{13} \le a \le \frac{1}{2}$ araligindaki degerler için;

Tablo 5.6

					Arz
	+t 3-6a 5-2?	**-t** 3+5a 7-?	 11-5?	 0	6-a
	-t -1+13a 9-2?	**t** 15-6?	 18-8?	18-15a 0	17-2a
	   13-4?	 16-7?	4+5a 10-?	9-12a 0	13-7a
Talep	2+7a	3+5a	4+5a	27-27a	

$a > 1/13$ için $x_{14} < 0$ olacagindan dual algoritma ile tabandan çikartilmaktadir. Yerine $x_{24} = -1 + 13a$ olarak girmektedir. Tablo 5.6' da optimal çözümün uygunluk sartini bozan ilk a degeri $x_{11} = 3 - 6a = 0$ esitligini saglayan degerdir. Böylece, mevcut optimal çözüm $a \in [1/13, 1/2]$ araliginda geçerlidir.

$0 \leq g \leq \frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$ araligindaki degerler için;

Tablo 5.7

					Arz
	5-2?	6-a 7-?	11-5?	0	6-a
	2+7a 9-2?	-3+6 a 15-6?	**t** 18-8?	**-t** 18-15a 0	17-2a
	13-4?	16-7?	**-t** 4+5a 10-?	**+t** 9-12a 0	13-7a
Talep	2+7a	3+5a	4+5a	27-27a	

$a > 1/2$ için x_{11} tabandan çikip, yerine $x_{22} = -3 + 6a$ degeriyle girmektedir. Tablo 5.7' de optimal çözümün uygunluk sartini bozan ilk a degeri $x_{34} = 9 - 12a = 0$ esitligini saglayan degerdir. Burada da mevcut optimal çözüm $a \in [1/2, 3/4]$ araliginda geçerlidir.

$a > 3/4$ için, $x_{14} = 9 - 12a$ tabandan çikar, yerine $x_{23} = -9 + 12a$ olarak girmektedir.

$0 \leq g \leq \frac{1}{4}$ ve $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ araligindaki degerler için;

Tablo 5.8

					Arz
	5-2?	6-a 7-?	11-5?	0	6-a
	2+7a 9-2?	-3+6 a 15-6?	-9+12a 18-8?	27-27a 0	17-2a
	13-4?	16-7?	13-7a 10-?	0	13-7a
Talep	2+7a	3+5a	4+5a	27-27a	

Tablo 5.8' de $a \in [3/4,1]$ araligi için uygun ve optimaldir. $g \in [1/4,2/3]$ ve $g \in [2/3,1]$ araliklari içinde elde edilen optimal çözümler Tablo 5.9' da verilmistir.

Tablo 5.9

a \ g	[0,1/4]	[1/4,2/3]	[2/3,1]
[0,1/13]	X_{11}=2+7a X_{12}=3+5a X_{14}=1-13a X_{24}=17-2a X_{33}=4+5a X_{34}=9-12a	X_{11}=2+7a X_{12}=3+5a X_{13}=1-13a X_{24}=17-2a X_{33}=3+18a X_{34}=10-25a	X_{11}=2+7a X_{12}=3+5a X_{13}=1-13a X_{24}=17-2a X_{33}=3+18a X_{34}=10-25a
[1/13,1/2]	X_{11}=3-6a X_{12}=3+5a X_{21}=-1+13a X_{24}=18-15a X_{33}=4+5a X_{34}=9-12a	X_{11}=3-6a X_{12}=3+5a X_{21}= -1+13a X_{24}=18-15a X_{33}=4+5a X_{34}=9-12a	X_{11}=2+7a X_{12}=4-8a X_{21}= -1+13a X_{24}=18-15a X_{33}= 4+5a X_{34}= 9-12a
[1/2,3/4]	X_{12}=6-a X_{21} =2+7a X_{22}= -3+6a X_{24} =18-15a X_{33}= 4+5a X_{34}=9-12a	X_{12}=6-a X_{21}=2+7a X_{22}= -3+6a X_{24}=18-15a X_{33}= 4+5a X_{34}=9-12a	X_{11}=6-a X_{21}= -4+8a X_{22}=3+5a X_{24}=18-15a X_{33}=4+5a X_{34}=9-12a
[3/4,1]	X_{12}=6-a X_{21}=2+7a X_{22}= -3+6a X_{23}= -9+12a X_{24}=27-27a X_{33}=13-7a	X_{12}=15-13a X_{13}= -9+12a X_{21}=2+7a X_{22}= -12+18a X_{24}=27-27a X_{33}=13-7a	X_{11}=15-13a X_{13}= -9+12a X_{21}= -13+20a X_{22}=3+5a X_{24}=27-27a X_{33}=13-7a

$a \in [3/4,1]$ ve $g \in [1/4,2/3]$ için alternatif çözüm $X_{11} = 6 - a$, $X_{21} = 2 + 7a$, $X_{22} = -3 + 6a$, $X_{23} = -9 + 12a$, $X_{24} = 27 - 27a$, $X_{33} = 13 - 7a$ ’ dir.

6. SONUÇLAR ve ÖNERILER

Bu çalisma, tasima problemleri için literatürde yer alan çözüm önerilerini içermektedir. Baslangiç uygun çözümün hesaplanmasindan sonra bulunan bu degerin optimal oldugu da kontrol edilmektedir.

Özellikle bulanik tasima problemlerini içeren bölümde, üretim merkezi miktari, tüketim merkezi miktari ve birim ürün tasima maliyetlerinden herhangi birinin veya hepsinin bulanik sayi olmasi durumunda toplam tasima maliyeti de bulanik sayi olmaktadir. Bu durumlari içeren tasima problemlerinde, toplam tasima maliyeti kesin degerler degildir. Bu durumlarda karar vericinin uygunluk fonksiyonu göz önüne alinmak sartiyla alternatif sonuçlar hesaplanmalidir. Bu sonuçlar karar vericiye sunularak etkilesim içerisinde karar verici için uygun çözüm belirlenmelidir.

Güncel hayatta degisik alanlarda karsilasilan bulanik modellerin çözümleri için bilgisayar uygulamalari gelistirilmeli mevcut olanlar ise güncellenmelidir. Bilisimin kullanilmasiyla güncel olan ve degiskenlik gösteren bu sorunlara hizli ve kolay çözümler bulunacaktir.

KAYNAKLAR

Abd El-Wahed, W.F., (2001), “A Multi-Objective Transportation Problem Under Fuzziness”, Fuzzy Sets and Systems 117:27-33.

Aksoy, Y., Özkan, M. ve Karanfil, S., (2003), Bulanik Mantiga Giris, Yildiz Teknik Üniversitesi Vakfi, Istanbul.

Cerit, C., (1996), Lineer Programlama, Istanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Istanbul.

Dogan, I., (1995), Yöneylem Arastirmasi Teknikleri ve Isletme Uygulamalari, Bilim Teknik Yayinevi, Ankara.

Esin, A., (1983), Yöneylem Arastirmasinda Yararlanilan Karar Yöntemleri, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara.

Halaç, O., (1978), Kantitatif Karar Verme Teknikleri, Arpaz Matbaacilik, Istanbul.

Karayalçin, I., (1979), Kantitatif Planlama ve Karar Verme Yöntemleri, Mentes Kitabevi, Istanbul.

Kwak N.K., (1973), Mathematical Programming with Business Applications, Mc Graw-Hill Book Company, New York.

Lai J.Y., and Hwang C.L., (1994), Fuzzy Mathematical Programming, Springer – Verlag, New York.

Liu, S.T. and Kao, C., (2004), “Solving Fuzzy Transportation Problems Based on Extension Principle”, European Journal of Operational Research 153:661-674.

Öztürk, A., (2002), Yöneylem Arastirmasi, Ekin Kitapevi, Bursa.

Ringuest, J. L. and Rinks, D. B., (1987), “Interactive Solutions for The Linear Multiobjective Transportation Problem”, European Journal of Operational Research 32:96-106.

Sakawa, M., (1993), Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, New York and London.

Sariaslan, H., (1986), Kaynak Dagiliminda Dogrusal Programlama, Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayinlari, Ankara.

Serper, Ö. ve Gürsakal, N., (1982), Dogrusal Programlama, BITIA Isletme Fakültesi Yayinlari, Bursa.

Sen, Z., (2004), Mühendislikte Bulanik Mantik Ile Modelleme Prensipleri, Su Vakfi Yayinlari, Istanbul.

Taha, H. A., (2002), Yöneylem Arastirmasi, (Çev. Baray, S. A. ve Esnaf, S.), Literatür Yayincilik, Istanbul.

Tulunay, Y., (1980), Matematik Programlama ve Isletme Uygulamalari, Istanbul.

Ünsal, F. M., Rüzgar,B. ve Rüzgar, N., (2000), Isletme ve Ekonomi için Bilgisayar Uygulamali Sayisal Yöntemler, Türkmen Kitapevi, Istanbul.