**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MAKSİMAL BASKINLAŞTIRILMIŞ OPERATÖR YARIGRUPLARI

Matematikçi Dursun YILMAZ

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı:** Doç. Dr. Ömer GÖK

**İSTANBUL, 2007**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MAKSİMAL BASKINLAŞTIRILMIŞ OPERATÖR YARIGRUPLARI

Matematikçi Dursun YILMAZ

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı:** Doç. Dr. Ömer GÖK

**İSTANBUL, 2007**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# YÜKSEK LİSANS TEZİ

| | |
|---|---|
| **Konusu** | **:** Maksimal Baskınlaştırılmış Operatör Yarıgrupları |
| **Öğrenci No** | **:** |
| **Adı ve Soyadı** | **:** Dursun YILMAZ |
| **Yönetici** | **:** Doç. Dr. Ömer GÖK |
| **Teslim Tarihi** | **:** ..../...../2007 |

**İÇİNDEKİLER**

Sayfa

## SİMGE LİSTESİ

| | |
|---|---|
| X | Reel veya kompleks sayıların herhangi birinin cismi üzerinde bir vektör uzayı |
| L(X) | X üzerindeki tüm operatörlerin vektör uzayı |
| X' | X vektör uzayı üzerindeki tüm lineer fonksiyonellerin vektör uzayı |
| T' | T operatörünün adjointi |
| C | lineer dönüşümlerin bir koleksiyonu |
| $\otimes$ | Tensör çarpımı |
| $\lambda$ | Skaler (Sabit) |
| $\lvert\cdot\rvert$ | Mutlak değer |
| $\lVert\cdot\rVert$ | Norm |
| I | Birim operatör |
| İnf | İnfimum |
| Sup | Supremum |
| $\subseteq$ | Kapsama veya eşit |
| $\in$ | eleman |
| $\cap$ | Kesişim |
| IR | Reel Sayılar kümesi |
| | Kompleks Sayılar kümesi |
| $\sum_{i=1}^{n}$ | 1’den n’e kadar toplam |
| $L_b$ (E) | E üzerindeki bütün sıralı sınırlı operatörlerin kısmî sıralı vektör uzayı |
| $E^+$ | E nin pozitif konisi |
| $E^{\sim}$ | E nin sıralı duali |
| $x^+$ | x elemanının pozitif kısmı |
| $x^-$ | x elemanının negatif kısmı |
| $\infty$ | Sonsuz |
| $\leq$ | Küçük veya eşit |
| IN | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\mathcal{I}$ | İndeks Kümesi |
| $a_n \downarrow a$ | Azalan ve infimumu a olan dizi |
| $\ell^P$ | p.mertebeden toplanabilir dizi uzayı |

## ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında manevi desteklerinden dolayı aileme ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Ömer GÖK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**ÖZET**

Reel ve Kompleks vektör uzayları üzerinde belli bir anlamda sınırlı olan maksimal operatör yarıgrupları çalışıldı. X vektör uzayının dual uzayı X' olsun. X' nin bir sıfır olmayan altuzayını $\Phi$ ile gösterelim ve $n : X \to [0, \infty)$ ve $n' : \Phi \to [0, \infty)$ homojen fonksiyonları verilsin. Her $\psi \in \Phi$ ve her $x \in X$ için $|\psi(Tx)| \le n'(\psi)n(x)$ dir. Yani her $T \in \mathcal{C}$ operatörü (n, n') çifti ile baskınlaştırılmış olacak şekilde X üzerindeki $\mathcal{C}$ koleksiyonları çalışıldı. Bu tezde kanıtlanan neticelerden birisi; homojen fonksiyonların böyle bir çifti ile baskınlaştırılan operatörlerin herhangi bir maksimal semigrubu $M = \{T \in L(X) : \|T\| \le 1\}$ olacak şekilde bir operatör quasinormu $\|\cdot\|$ un var olmasıdır. O zaman bu genel neticelerin uygulamaları, sabit bir pozitif lineer operatör ile baskınlaştırılmış bir Riesz uzayı üzerinde regüler operatörlerin maksimal semigrupları ile verilir. Özellikle, verilen bir pozitif matris ile baskınlaştırılmış matrislerin maksimal semigrupları karakterize edilir.



**Anahtar Kelimeler:** Operatörler, vektör uzayları, semigruplar, sıkıştırma, baskınlaştırma, Riesz uzayları

**ABSTRACT**

Maksimal operator semigroups, bounded in a certain sense, on real or complex vector spaces are studied. Let X be a vector space with dual space X'. Denote by $\Phi$ a nonzero subspace of X' and let n : X $\rightarrow$ [0, $\infty$), n' : $\Phi \rightarrow$ [0, $\infty$) be given homogeneous functions. It is studied collections $\mathcal{C}$ of operators on X such that each operator T $\in \mathcal{C}$ is dominated by the pair (n, n'), i.e., $|\psi(Tx)| \leq n'(\psi)n(x)$ for all $x \in X$ and all $\psi \in \Phi$. One of the results proved in this work is that for any maximal semigroup M of operators dominated by such a pair of homogeneous functions there exists an operator quasi-norm $\|\cdot\|$ for which $M = \{T \in L(X) : \|T\| \leq 1\}$. Applications of these general results are then given to maximal semigroups of regular operators on a Riesz space dominated by a fixed positive linear operator. In particular, maximal semigroups of matrices dominated by a given positive matrix are characterized.

**Keywords:** Operators, vector spaces, semigroups, contractions, domination, Riesz spaces.

# 1. ÖN BİLGİLER

**Tanım 1.1:** Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ olduğunda $\mathrm{T}: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{F}$ iki sıralı vektör uzayı arasında tanımlı bir T operatörüne pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçiminde gösterilir.

**Tanım 1.2:** E sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{x} \vee \mathrm{y} = \sup\{x, y\} \in \mathrm{E}$ ve

$\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = \mathrm{İnf}\,\{x, y\} \in \mathrm{E}$ ise E ye Riesz uzayı (veya vektör latis) denir.

**Tanım 1.3:** $\mathrm{E}^{+} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{E} : 0 \leq \mathrm{x}\}$ kümesine E'nin pozitif kısmı denir. $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri sırasıyla,

$\mathrm{x}^{+} = \mathrm{x} \vee 0$, $\mathrm{x}^{-} = (-\mathrm{x}) \vee 0$, $|\mathrm{x}| = \mathrm{x} \vee (-\mathrm{x})$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.4:** Her $x \in \mathrm{E}^{+}$ için E de $\mathrm{n}^{-1}\mathrm{x} \downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına Archimedean denir. Fonksiyonel analizin tüm klasik uzayları (özellikle fonksiyon uzayları ve Lp-uzayları) Archimedean'dır.

**Tanım 1.5:** E Riesz uzayında, $x \leq y$ olmak üzere $[x, y] := \{z \in \mathrm{E} : x \leq z \leq y\}$ ile tanımlı her alt kümesine $[x, y]$ sıralı aralığı denir.

**Tanım 1.6:** E bir Riesz uzayı ve $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ olsun. Her $y \in \mathrm{A}$ için $y \leq x$ olan bir x varsa A kümesine yukarıdan sınırlı denir.

Benzer şekilde, her $y \in \mathrm{A}$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $x$ varsa A kümesine aşağıdan sınırlı denir. Sonuç olarak, hem aşağıdan hem de yukarıdan sınırlı bir A kümesine sıralı sınırlıdır denir veya A kümesi bir sıralı aralık içinde kapsanırsa A'ya sıralı sınırlıdır denir. Hem aşağıdan ve hem de yukarıdan sınırlı bir A kümesine sıralı sınırlıdır denir veya A kümesi bir sıralı aralık içinde kapsanırsa A'ya sıralı sınırlıdır denir.

**Tanım 1.7:** X boş olmayan kısmi sıralamalı bir küme ve $z \in X$ olsun. Eğer $x \in X$ ve $z \leq x$ olduğunda $z = x$ oluyorsa $z$ ye maksimal eleman denir.

**Tanım 1.8:** Yukarıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesinin bir supremumu varsa o zaman Riesz uzayına Dedekind tam denir veya sınırlı her boş olmayan alt kümesinin bir infimumu varsa o zaman da Riesz uzayına Dedekind tam denir.

Bir E Riesz uzayının Dedekind tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ olacak şekilde $\sup\{x_\alpha\}$ nın varolmasıdır. Benzer şekilde, yukarıdan sınırlı her sayılabilir alt kümesi olan bir supremumu varsa Riesz uzayına σ-Dedekind tam denir. (veya $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ olduğunda $\sup\{x_n\}$ in var olmasıdır.) $L_p$-uzayları, Dedekind tam Riesz uzaylarının örnekleridir.

**Tanım 1.9:** $(E, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve $(x_n)$ E içinde bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_o$ bulunduğunda her $n, m \geq n_o$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ oluyorsa $(x_n)$ dizisine E içinde bir Cauchy dizisi denir. Eğer E içindeki her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak ise E uzayına bir Banach uzayı (veya Tam uzay) denir. O halde bir normlu E uzayının Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul $x_n \in E$ ve verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $n_o$ sayısı bulunabilir ki her $n, m \geq n_o$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığında bir $x \in E$ ve bir $n_1$ sayısı bulunabilir ki her $n \geq n_1$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

**Tanım 1.10:** E ve F normlu uzaylar, $T : E \to F$ lineer bir operatör ve $x_o \in E$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $\|T_x - Tx_o\| < \varepsilon$ oluyorsa T lineer operatörüne $x_o$ da sürekli denir.

**Tanım 1.11:** E ve F normlu uzaylar ve $T : E \to F$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in E$ için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan bir M > 0 sayısı varsa T lineer operatörüne sınırlı adı verilir.

**Tanım 1.12:** E ve F normlu uzaylar ve $T : E \to F$ sınırlı bir lineer operatör olsun. O zaman T nin operatör normu $\|T\|$, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\}$ olarak tanımlanır. Tanımdan her $x \in E$ için $\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\|$ eşitsizliği geçerlidir.

**Tanım 1.13:** $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ iki Riesz uzayı arasında bir dönüşüm olsun. O zaman T nin modülü $|\mathrm{T}| := \mathrm{T} \vee (-\mathrm{T})$ varsa buna T nin modülü denir. $x \in E^+$ için

$|\mathrm{T}|(x) = \sup\{|\mathrm{T}y| : |y| \leq x\}$ dur. Burada F Dedekind tam Riesz uzayıdır.

**Tanım 1.14:** Bir Banach uzayı üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin bir $\mathcal{S}$ koleksiyonu eğer her S,T $\in \mathcal{S}$ çifti için ST $\in \mathcal{S}$ oluyorsa $\mathcal{S}$ ye bir çarpımsal yarıgrup ve

S + T $\in \mathcal{S}$ oluyorsa $\mathcal{S}$ ye toplamsal yarıgrup denir.

# 2. GİRİŞ

X, reel veya kompleks sayıların herhangi birinin cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Operatör tanımından, X vektör uzayından X e bir lineer dönüşümü kastediyoruz. X üzerindeki tüm operatörlerin vektör uzayı L(X) ile gösterilir. Bu, ayrıca çarpma olarak operatörlerin bileşkesi için bir semigrup (yarıgrup) tur. Bu çalışmada biz, sınırlı olan ve bu sınırlılığa göre maksimal olan L(X) in alt semigrupları ile ilgileniyoruz. Sonlu boyutlu X uzayları üzerinde maksimal sınırlı semigruplar yoğun olarak (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997 )) etraflıca çalışılmıştır. Herhangi bir matris çeşiti tarafından baskınlaştırılan semigrup modelleri olarak adlandırılır ve bunlar (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997 )) etraflıca çalışılmıştır. Bu çalışma değişmez altuzayların değişmeli latisi ile zenginleştirilmiş ve yakın ilgilidir. Aynı zamanda bu çalışmaların sonlu boyutlara hemen genellemeleri Riesz uzaylarına doğru gidecektir ve orada birimin doğal olarak bir operatörün koordinatsal baskınlaşmanın bir doğal genişleme durumu vardır. Bununla beraber burada sunulan sonuçlar ekseriyetle daha geneldir ve keyfi vektör uzaylarında sağlanır. Sonuçlarımızın hemen hemen tümü sonlu boyutların durumu için bile yeni kabul edilebilir.

Ana sonuçlar ve ispatları Bölüm 3 de sunulmuştur. Biz ilk defa fonksiyonların çifti tarafından bir operatörün baskınlaşmanın durumunu sunuyoruz. Bazı oldukça genel teknik şartlar altında verilen bir operatör quasinormunda bağlantı halindeki sıkıştırmaların bir semigrubu homojen fonksiyonların bir çifti ile baskınlaştırıldığını görmek zor değildir. Bir anlamda bunun tersi de şaşırtıcı şekilde doğrudur,yani belirli bir çift homojen fonksiyon tarafından baskınlaştırılmış maksimal semigrup M nin bütün olarak bu quasinorm semigrup ilişkilerine bağlı olan bir quasinorm operatörü vardır. Biz ayrıca, operatör quasinormu elde edilen normlar tarafından yapıldığında teknik şartlar altında sunabiliriz.

Bölüm 4’de Bölüm 3’deki bu sonuçların uygulamaları Riesz uzaylarına ayrılmıştır. Bir pozitif operatörle, sıralı sınırlı bir operatörün mutlak baskınlaştırmasının kullanışlı bir belirleyicisini veriyoruz ve bir pozitif operatör ile mutlak baskınlaştırılmış sıralı sınırlı operatörlerin bir maksimal grubunun belirleyicisini veriyoruz. Bu bölümün ana sonucu, belli bir operatör quasinormundaki sıkıştırmaların bir semigrubu olarak rank 1 li bir pozitif operatör ile baskınlaştırılmış sıralı sınırlı operatörlerin semigrubunu temsil eder. Bu genellikle, normlar ile yapılan bu quasinorm altındaki teknik şartları verir. Sonuçlarımızın bir sonlu boyutlu durumu,verilen bir pozitif matris ile baskınlaştırılan matrislerin maksimal semigruplarının tanıtımı hakkında (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997 )) de kapalı olarak sorulan soruya cevap verir.

# 3. GENEL VEKTÖR UZAYINDA MAKSİMAL BASKINLAŞTIRILMIŞ OPERATÖR SEMİGRUPLARI

X vektör uzayı üzerindeki tüm lineer fonksiyonellerin vektör uzayı, X in dual uzayı $X'$ ile gösterilsin. Bir $T \in L(X)$ operatörünün adjointi $T'$ ile gösterilir. X vektör uzayından Y vektör uzayına lineer dönüşümlerin bir kolleksiyonu C, bir $A \in C$ ile $0 \neq x \in X$ için $Ax \neq 0$ olan bir $A \in C$ varsa C ye X in noktalarını ayrıştırıyor denir.

Verilen $y \in X$ ve $\psi \in X'$ için;

$(y \otimes \psi)(x) = \psi(x)y$, $x \in X$ şeklinde tanımlanan X üzerindeki operatör $y \otimes \psi$ ile gösterilsin.

$n : X \to [0, \infty]$ fonksiyonu, eğer her $\lambda$ skaleri ve her $x \in X$ ile $n(x) < \infty$ olduğunda $n(0) = 0$ ve $n(\lambda x) = |\lambda| . n(x)$ ise n fonksiyonu homojen olarak adlandırılır. Bir homojen fonksiyon $\| . \| : X \to [0, \infty]$, her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ise X üzerindeki bir quasinorm olarak adlandırılır. Her $x \in X$ için eğer $\|x\| < \infty$ ise o zaman $\| . \|$ quasinormuna, X üzerindeki bir seminorm denir. Bunlara $\|x\| = 0$ olduğunda $x = 0$ şartını ilave edersek o zaman seminorm, bir norm olarak adlandırılır.

$\| . \|_1$, bir X vektör uzayı üzerindeki bir quasinorm ve $\| . \|_2$, her $x \in X$ için $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ olacak şekilde X üzerindeki bir seminorm olsun. $\| . \|_1$ ve $\| . \|_2$ den yararlanılarak $T \in L(X)$ quasinorm operatörü,

$\|T\| := \sup \left\{ \|Tx\|_1 : x \in X, \|x\|_2 \leq 1 \right\}$ L(X) vektör uzayı üzerinde tanımlanır.

$\|x\|_2 = 0$ ile bir $x \in X$ ve $\|T\| < \infty$ iken bir $T \in L(X)$ için $\|Tx\|_1 = 0$ olduğu açıktır. Bundan dolayı $\|T\| < \infty$ olduğunda her $x \in X$ için $\|Tx\|_1 \leq \|T\| . \|x\|_2$ eşitsizliği vardır.

**Önerme 3.1.** $\|S\| < \infty$ olan X üzerinde operatörler S ve T olsun. O zaman

$$\|ST\| \leq \|S\| . \|T\| \text{ dir.}$$

**İspat:** Eğer $\|S\| = 0$ ise o zaman her $x \in X$ için $\|Sx\|_1 = 0$ dır. Çünkü her x için $\|ST_X\|_1 = 0$ dır. Böylece $\|ST\| = 0$ ve istenen eşitsizlik sağlanır. $\|T\| = 0$ ise o zaman her $x \in X$ için $\|Tx\|_1 = 0$ ve böylece her $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = 0$ olur. $\|S\| < \infty$ olduğundan her $x \in X$ için $\|STx\|_1 = \| S(Tx) \|_1 = 0$ sonucunu elde ederiz. Böylece iddia edildiği gibi $\|ST\| = 0$ dır. Eğer $0 < \|S\|$ ve $\|T\| = \infty$ ise, o zaman eşitsizlik açık bir şekilde doğrudur.

Böylece, $0 < \|S\| < \infty$ ve $0 < \|T\| < \infty$ olduğunu kabul edebiliriz. $\|S\| = \|T\| = 1$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan, her $\|x\|_2 \leq 1$ için $\|Tx\|_1 \leq 1$ olduğundan

$$\|ST\| = \sup \left\{ \|STx\|_1 : x \in X, \|x\|_2 \leq 1 \right\} \leq \sup \left\{ \|S(Tx)\|_1 : x \in X, \|Tx\|_1 \leq 1 \right\} \text{ dir.}$$

Buradan;

$$\|ST\| \leq \sup \left\{ \|Sy\|_1 : y \in X, \|y\|_1 \leq 1 \right\} \leq \sup \left\{ \|Sy\|_1 : y \in X, \|y\|_2 \leq 1 \right\} = 1 \quad \text{dir.}$$

Dolayısıyla ispat tamamlandı.

Bir T $\in$ L(X) operatörü, eğer $\|T\| \leq 1$ ise T $\in$ L(X) operatörüne $\| . \|$ operatör quasinormunda bir sıkıştırma denir. Önerme 3.1 den; $\| . \|$ operatör quasinormu içindeki tüm sıkıştırmaların kümesi bir çarpım semigrubudur.

Riesz uzaylarını neticelerimizin uygulamalarından dolayı ve X′ dual uzayının $0 \neq \Phi$ lineer alt uzayından $\phi$ yi seçerek alalım. Ayrıca, aynı zamanda aşağıdaki özellikleri sağlayan L(X) in $L_\Phi$(X) altcebirini alalım.

(a) X üzerindeki birim operatör I, $L_\Phi$(X) e aittir.

(b) $x \in X$ ve $\phi \in \Phi$ için $x \otimes \phi$ şeklindeki $L_\Phi(X)$ bütün operatörleri kapsar.

(c ) Herhangi bir $T \in L_\Phi(X)$ için $T'$ adjointi, $\Phi$ altuzayını değişmez bırakır.

**Tanım 3.2:** $n : X \to [0, \infty)$ ve $n' : \Phi \to [0, \infty)$ fonksiyonları verilsin. X üzerindeki bir T operatörü, her $x \in X$ ve her $\phi \in \Phi$ için $|\phi(Tx)| \le n'(\phi) n(x)$ olduğunda (n, n') çifti tarafından baskınlaştırılmıştır denir. X üzerindeki operatörlerin bir C koleksiyonuna, (n, n') ile baskınlaştırıldığı zaman C nin her elemanı (n, n') çifti tarafından baskınlaştırılmıştır denir.

İlk önce, genelliği bozmaksızın n ve n′ nün homojen kabul edilebildiğine dikkat edelim. Bu doğru değil ise,

$\bar{n}(x) := \underset{\lambda \ne 0}{İnf} \dfrac{n(\lambda x)}{|\lambda|}$ ve $\bar{n}'(\phi) := \underset{\lambda \ne 0}{İnf} \dfrac{n'(\lambda \phi)}{|\lambda|}$ şeklinde

$\bar{n} : X \to [0, \infty)$ ve $\bar{n}' : \Phi \to [0, \infty)$ tanımlarız. X üzerindeki bir T operatörünün (n, n') tarafından baskınlaştırıldığında, $(\bar{n}, \bar{n}')$ çifti tarafından da baskınlaştırıldığı kolayca görülür.

Bir quasinorm $\|\,.\,\|_1$ ve bir seminorm tarafından elde edilen $L_\Phi(X)$ üzerindeki bir operatör quasinormu $|||\,.\,|||$ olsun.

Ayrıca; her $x \in X$ için $\|x\|_1 = \sup\left\{ |\phi(x)| : \phi \in \Phi, \|\phi\|_1' \le 1 \right\}$ olacak şekilde $\Phi$ üzerindeki bir seminorm $\|\,.\,\|_1'$ in varolduğunu kabul edelim. O zaman $n(x) = \|x\|_2$ ve $n'(\phi) = \|\phi\|_1'$ ile tanımlı $n : X \to [0, \infty)$ ve $n' : \phi \to [0, \infty)$ fonksiyonları homojendir. $|||\,.\,|||$ içindeki tüm sıkıştırmaların semigrubu C ile gösterilsin. O zaman her $T \in C$, (n, n') ikilisi tarafından baskınlaştırılır. Gerçekten, her $x \in X$ ve her $\phi \in \Phi$ için,

$|\phi(Tx)| \le \|\phi\|_1' \, \|Tx\|_1 \le \|\phi\|_1' \, |||T|||\,.\,\|x\|_2 \le \|\phi\|_1' \, \|x\|_2 = n'(\phi) n(x)$ dir.

Diğer taraftan eğer T $\in$ $L_\Phi(X)$, (n, n') çifti tarafından baskınlaştırılırsa o zaman herhangi bir $x \in X$ için $\|T\| \leq 1$ olacak şekilde

$$\|Tx\|_1 = \sup\left\{|\phi(Tx)| : \phi \in \Phi, \|\phi\|_1^{'} \leq 1\right\} \leq n(x) = \|x\|_2 \text{ dir.}$$

Yani T $\in$ C dir. Böylece C nin (n, n') çifti ile baskınlaştırılanlar arasında $L_\Phi(X)$ in bir maksimal altsemigrup olduğu sonucunu çıkarırız.

Bu çalışmanın aşağıdaki ana sonucu; yukarıdaki tespitin tersinin doğru olduğunu gösterir.

**Teorem 3.3:** $n : X \to [0,\infty)$ ve $n^{'} : \Phi \to [0,\infty)$ fonksiyonlarının homojen olduğunu kabul edelim. (n, n') ile baskınlaştırılanlar arasında $L_\Phi(X)$ in bir maksimal altsemigrubu M olsun. O zaman

(i) Her $x \in X$ için $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ dir, burada

$$\|x\|_1 := \sup\left\{|\phi(x)| : \phi \in \Phi, \|\phi\|_1^{'} \leq 1\right\} \text{ X üzerinde bir quasinormdur.}$$

(ii) M = $\{T \in L_\Phi(X) : \|T\| \leq 1\}$ dir. Burada

$$\|T\| := \sup\left\{\|Tx\|_1 : \|x\|_2 \leq 1\right\} \text{ dir.}$$

olacak şekilde $\Phi$ üzerinde $\|\,.\,\|_1^{'}$ ve X üzerinde bir seminorm $\|\,.\,\|_2$ vardır.

Eğer X üzerindeki I birimli operatörünün bir sıfır olmayan katı (n, n') ile baskınlaştırılırsa o zaman $\|\,.\,\|_2$ seminormuna denk olan bir $\|\,.\,\|_1$ seminormunu oluşturabiliriz. Eğer I, (n, n') ile baskınlaştırılırsa o zaman her x $\in$ X için $\|x\|_1 = \|x\|_2$ alabiliriz.

**İspat:** $\|\phi\|' := \sup\{|\phi(x)| : x \in X, n(x) \le 1\}$ ve

$$\|\phi\|_1' := \sup\{\|S'\phi\|' : S \in M\} = \sup\{|\phi(Sx)| : S \in M, n(x) \le 1\}$$

ile $\Phi$ üzerinde $\|\,.\,\|'$ ve $\|\,.\,\|_1'$ quasinormlarını tanımlayalım.

$\|\phi\|_1' \le n'(\phi)$ olduğundan her $\phi \in \Phi$ için $0 \le \|\phi\|_1 < \infty$ dur öyle ki $\|\,.\,\|_1'$, $\Phi$ üzerinde bir seminormdur. Sonra her S $\in$ M ve $\phi \in \Phi$ için $\|S'\phi\|_1' \le \|\phi\|_1'$ dir. Gerçekten, M bir semigrup olduğundan,

$$\|S'\phi\|_1' = \sup\{\|T'S'\phi\|' : T \in M\} = \sup\{\|(ST)'\phi\|' : T \in M\}$$

$$\le \sup\{\|T'\phi\|' : T \in M\} = \|\phi\|_1' \text{ dir.}$$

Her x $\in$ X için;

$\|x\|_1 := \sup\{|\phi(x)| : \phi \in \Phi, \|\phi\|_1' \le 1\}$ ve

$\|x\|_2 := \sup\{\|Sx\|_1 : S \in M\} = \sup\{|\phi(Sx)| : S \in M, \phi \in \Phi, \|\phi\|_1' \le 1\}$

tanımlayalım.

X üzerindeki $\|\,.\,\|_1$ ve $\|\,.\,\|_2$ quasinormlardır.

$\|\phi\|' < \infty$ olan her x $\in$ X ve her $\phi \in \Phi$ için;

$|\phi(x)| \le \|\phi\|'.n(x)$ olduğu görülür. Özellikle eğer $\|\phi\|_1' \le 1$, S $\in$ M ve x $\in$ X ise o zaman $|\phi(Sx)| = |(S'\phi)(x)| \le \|S'\phi\|'.n(x) \le n(x)$ dir. Çünkü

$\left\|S^{'}\phi\right\|^{'} \leq \|\phi\|_1^{'} \leq 1$ dir. Buradan, $\|x\|_2 \leq n(x)$ dir öyle ki her x∈X için $0 \leq \|x\|_2 < \infty$ dur. Bu, X üzerindeki $\|\,.\,\|_2$ nin bir seminorm olduğunu gösterir. $\|\phi\|_1^{'} \leq 1$, her S ∈ M için $\left\|S^{'}\phi\right\|_1^{'} \leq 1$ olmasını gerektirdiğinden

$$\|x\|_2 = \sup\left\{\left|\left(S^{'}\phi\right)(x)\right| : S \in M, \phi \in \Phi, \|\phi\|_1^{'} \leq 1\right\}$$

$\leq \sup\left\{|\psi(x)| : \psi \in \Phi, \|\psi\|_1^{'} \leq 1\right\} = \|x\|_1$ dır ki bu da (i) nin ispatı için yeterlidir.

Önerme 3.1 den sıkıştırmaların kümesi,

**C** : = {T ∈ $L_\Phi$ (X) : $\|T\| \leq 1$} bir semigruptur. Her x ∈ X için $\|x\|_2 \leq n(x)$ ve her $\phi \in \Phi$ için $\|\phi\|_1^{'} \leq n^{'}(\phi)$ olduğundan her T ∈ **C**, x ∈ X ve $\phi \in \Phi$ için,

$|\phi(Tx)| \leq \|\phi\|_1^{'} . \|Tx\|_1 \leq \|\phi\|_1^{'} . \|T\| . \|x\|_2 \leq n^{'}(\phi) . n(x)$ dir öyle ki, **C**, (n, n') ile baskınlaştırılır. $\|\,.\,\|_2$ seminormunun tanımı ile M ⊆ **C** olduğundan M nin maksimalliği M = **C** olmasını gerektirir. Böylece (ii) yi ispatlamış oluruz. Bir $\lambda \neq 0$ için X üzerindeki λI operatörünün (n,n') ile baskınlaştırıldığını kabul edelim. $0 < \lambda \leq 1$ i varsayabildiğimizden dolayı M nin maksimalliği ile $\lambda I \in M$ dir. O zaman, herhangi bir x ∈ X için,

$\|x\|_2 = \sup\left\{\|Sx\|_1 : S \in M\right\} \geq \lambda . \|x\|_1$ ki bu $\|\,.\,\|_2$ seminormuna denk olan $\|\,.\,\|_1$ in bir seminorm olmasını gerektirir.

Son düşüncedeki $\lambda = 1$ alınırsa (i) ile birlikte her x ∈ X için $\|x\|_1 = \|x\|_2$ yi elde ederiz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

n ve n' fonksiyonları üzerinde hangi şartlar altında $\|\,.\,\|_1^{'}$ ve $\|\,.\,\|_2$ seminormlarının gerçekten norm olduğu sorusunu sormak doğaldır.

**Tanım 3.4:** Her x $\in$ X için $|\psi(x)| \leq n(x)$ olacak şekilde eğer bir sıfır olmayan $\psi \in \Phi$ fonksiyonu varsa bir $n : X \to [0,\infty)$ homojen fonksiyonuna X üzerindeki zayıf fonksiyon denir. Benzer şekilde, her $\phi \in \Phi$ için $|\phi(y)| \leq n^{'}(\phi)$ olacak şekilde bir sıfır olmayan y $\in$ X vektörü varsa, bir $n^{'} : \Phi \to [0,\infty)$ homojen fonksiyonuna $\Phi$ üzerindeki bir zayıf fonksiyon denir.

**Yardımcı Teorem 3.5:** n : X $\to$ $[0,\infty)$ ve $n^{'} : \Phi \to [0,\infty)$ zayıf fonksiyonlar olsun ve tanım 3.4 deki gibi $\psi \in \Phi$ ve $y \in X$ olsun. Ayrıca, (n, n') çifti ile baskınlaştırılanlar arasında $L_\Phi$(X) in bir maksimal altsemigrubu M olsun.

O zaman M içindeki A : = $\lambda$y $\otimes$ $\psi$ operatörü olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı vardır.

**İspat:** $\lambda \leq 1$, $\lambda n^{'}(\psi) \leq 1$, $\lambda n(y) \leq 1$, $\lambda n(y) n^{'}(\psi) \leq 1$ şartlarını sağlayan $\lambda > 0$ seçelim.

M ile üretilen S semigrubu ve A operatörünün de (n,n') çifti ile baskınlaştırıldığını göstermek istiyoruz.

O zaman M nin maksimalliği ile S = M ve böylece A $\in$ M dir. (n, n') çifti ile sınırlandırılan operatörler S, T $\in$ $L_\Phi$ (X) ise o zaman A, AT, SA ve SAT operatörlerinin de (n, n') çifti ile baskınlaştırıldığını göstermek yeterlidir. Bu durumun sonucu ile x$\in$X ve $\phi \in \Phi$ seçelim. O zaman

$$|\phi(Ax)| = \lambda |\phi(y)| |\psi(x)| \leq n^{'}(\phi) n(x) \text{ dir.}$$

(n, n') ile baskınlaştırılan S ve T operatörleri gerçeği kullanılarak

$$|\phi(ATx)| = \lambda |\phi(y)| |\psi(Tx)| \leq \lambda\, n^{'}(\phi) n^{'}(\psi) n(x) \leq n^{'}(\phi) n(x),$$

$$|\phi(SAx)| = \lambda |\phi(Sy)| . |\psi(x)| \leq \lambda\, n^{'}(\phi) n(y) n(x) \leq n^{'}(\phi) n(x) \text{ ve}$$

$$|\phi(SATx)| = \lambda |\phi(Sy)| |\psi(Tx)| \leq \lambda n^{'}(\phi) n(y) n^{'}(\psi) n(x) \leq n^{'}(\phi) n(x)$$

elde edilir.

Dolayısıyla Yardımcı teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Eğer bir Y vektör uzayının bir U kümesi eğer $y \in Y$ için $\lambda y \in U$ olacak şekilde $\lambda > 0$ varsa U ya emici denir.

**Tanım 3.6:** Her $x \in X$ ve her $\psi \in U'$ için $|\psi(x)| \leq n(x)$ olacak şekilde $\Phi$ nin bir emici alt kümesi U' varsa $n : X \to [0, \infty)$ homojen fonksiyonuna, X üzerindeki bir kuvvetli fonksiyon denir. Benzer şekilde, her $\phi \in \Phi$ ve her $y \in U$ için $|\phi(y)| \leq n'(\phi)$ olacak şekilde X in bir emici alt kümesi U varsa, $n' : \Phi \to [0, \infty)$ homojen fonksiyonuna $\Phi$ üzerindeki bir kuvvetli fonksiyon denir.

**Yardımcı Teorem 3.7:** $n : X \to [0,\infty)$ ve $n' : \Phi \to [0,\infty)$ zayıf fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. (n, n') çifti ile baskınlaştırılanlar arasında $L_\Phi(X)$ in bir maksimal altsemigrubu M olsun.

(a) Eğer n bir kuvvetli fonksiyon ve $\Phi$, X in noktalarını ayrıştırırsa M, X in noktalarını ayrıştırır.

(b) Eğer n' bir kuvvetli fonksiyon ise o zaman dual semigrubu $M' := \{S' : S \in M\}$ $\Phi$ nin noktalarını ayrıştırır.

**İspat:** Eğer n, X üzerinde bir kuvvetli fonksiyon ise o zaman her $x \in X$ ve her $\psi \in U'$ için $|\psi(x)| \leq n(x)$ olacak şekilde $\Phi$ nin bir emici alt kümesi U' vardır. Her $S \in M$ için $Sx = 0$ olacak şekilde bir sıfır olmayan $x \in X$ vektörü olduğunu kabul edelim. $\Phi$, X in noktalarını ayrıştırdığından $\psi(x) \neq 0$ ı sağlayan bir $\psi \in \Phi$ fonksiyoneli vardır. U' emici olduğundan kabulü bozmaksızın $\psi \in U'$ vardır. U', $\Phi$ üzerinde bir zayıf fonksiyon olduğundan, her $\phi \in \Phi$ için $|\phi(y)| \leq n'(\phi)$ olacak şekilde bir sıfır olmayan $y \in X$ vektörü vardır.

Yardımcı teorem 3.5 e göre, M içindeki operatör $A := \lambda y \otimes \psi$ operatörü olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır. Bununla beraber, $Ax = \lambda\ \psi(x)\ y \neq 0$ olduğundan yukarıdaki ile bir çelişki vardır. Bu (a) yı ispatlar.

(b) nin ispatı benzerdir. Eğer, Φ üzerindeki bir kuvvetli fonksiyon n' ise o zaman her $\phi \in \Phi$ ve her y∈U için $|\phi(y)| \leq n'(\phi)$ olacak şekilde X in bir emici alt kümesi U vardır. Her S∈M için S'ϕ = 0 olacak şekilde bir sıfır olmayan $\phi \in \Phi$ fonksiyonelinin var olduğunu kabul edelim. U emici olduğundan, $\phi(y) \neq 0$ olacak şekilde bir y∈U vektörü vardır. X üzerindeki zayıf fonksiyon n olduğundan her x∈X için $|\psi(x)| \leq n(x)$ olacak şekilde bir sıfır olmayan $\psi \in \Phi$ fonksiyoneli vardır. Yardımcı teorem 3.5 e göre, M içindeki operatör A := λy ⊗ ψ olacak şekilde λ > 0 sayısı vardır. Şimdi, her x ∈ X ve ψ bir sıfır olmayan fonksiyoneli için

$(A'\phi)(x) = \phi(Ax) = \lambda\, \phi(y)\psi(x)$ dir öyle ki $A'\phi \neq 0$ dır. Bu yukarıdakiyle çelişeceğinden ispat biter.

Şimdi, Teorem 3.3 ün aşağıdaki tümleyenlerini gösterebiliriz.

**Teorem 3.8:** Teorem 3.3 durumundaki, $n : X \to [0,\infty)$ ve $n' : \Phi \to [0,\infty)$ zayıf fonksiyonlarını göz önüne alalım.

(a) Eğer n bir kuvvetli fonksiyon ve eğer Φ, X in noktalarını ayrıştırırsa, o zaman $\|\,.\,\|_2$ seminormu bir norm olarak seçilebilir. Buna ilave olarak eğer, (n,n') ile baskınlaştırılan X üzerindeki I birim operatörünün bir sıfırdan farklı katı (n,n') ile baskınlaştırılırsa o zaman aynı zamanda $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ normuna denk bir normdur.

(b) Eğer n' bir kuvvetli fonksiyon ise, o zaman $\|\,.\,\|_1'$ seminormu bir norm olarak seçilebilir.

**İspat:**

(a) Teorem 3.3 ün ispatından $\|\,.\,\|_2$ seminormunun X üzerinde bir norm olduğunu ispatlayalım. Eğer $\|\,.\,\|_2 = 0$ ise o zaman her S∈M ve her $\phi \in \Phi$ için $\phi(Sx) = 0$ dır. Φ, X in noktalarını ayrıştırdığından, her S∈M için Sx = 0 sonucunu çıkarırız. Şimdi, yardımcı teorem 3.7(a) ile M, X in noktalarını ayrıştırır ve böylece x = 0 dır. İkinci iddiamız açıktır.

(b)Benzer şekilde, yardımcı teorem 3.7(b) nin bir uygulaması ile eğer n' bir kuvvetli fonksiyon ise teorem 3.3 ün ispatından $\| . \|_1^{'}$ seminormu Φ üzerinde bir normdur.

**Teorem 3.9:** Verilen bir indeks kümesi I dan her i için $n_i : X \to [0, \infty)$ ve $n_i^{'} : \Phi \to [0, \infty)$ homojen fonksiyonlar olsun. Her $i \in I$ için $(n_i, n_i^{'})$ ile baskınlaştırılanlar arasındaki $L_\Phi(X)$ in bir maksimal altsemigrubu M olsun. O zaman her $i \in I$ için $\|T\| := \sup\{\|T\|_i : i \in I\}$ olduğunda M = $\{T \in L_\Phi(X)$: $\|T\| \leq 1\}$ olacak şekilde $L_\Phi(X)$ üzerinde bir quasinorm operatörü $\| . \|_i$ vardır.

**İspat:** Zorn yardımcı teoremi'nden her $i \in I$ için $(n_i, n_i^{'})$ ile baskınlaştırılanlar arasında $L_\Phi$ (X) in bir maksimal altsemigrubu $M_i$ vardır. Teorem 3.3 e göre $M_i$, $L_\Phi(X)$ üzerindeki bir operatör quasinormunda bütün sıkıştırmaların $C_i$ semigrubuna eşittir. Her i için $M \subseteq C_i$ olduğundan $M \subseteq C := \bigcap_{i \in I} C_i$ dir. C = $\{T \in L_\Phi(X) : \|T\| \leq 1\}$ olduğu görülür. Ayrıca C, her $i \in I$ için $(n_i, n_i^{'})$ ile baskınlaştırılan $L_\Phi(X)$ in bir altsemigrubudur. Şimdi M nin maksimalliği, istenilen M = C yi verir.

# 4. RİESZ UZAYI DURUMUNDA KONUNUN İNCELENMESİ

E, bir reel Riesz uzayı olsun, yani, elemanların her çiftinin supremum ve infimumu var olan kısmî sıralı reel vektör uzayıdır. $x \in E$ nin pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri (veya modülü) sırasıyla,

$x^+ = \sup\{x, 0\}$, $x^- = \sup\{-x, 0\}$ ve $|x| = \sup\{x, -x\}$ olarak tanımlanır. E nin pozitif konisi $E^+$ ile gösterilir, yani $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ dır. Her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda u$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı var ise bir $u \in E^+$ elemanına bir kuvvetli sıralı birim denir. Her $n \in IN$ için $nx \leq y$ ve $x, y \in E^+$ olduğu zaman x = 0 ise E Riesz uzayına Archimedean denir. Eğer her boş olmayan alt kümenin bir supremumu varsa E ye Dedekind tam denir. Her Dedekind tam Riesz uzayı aynı zamanda Archimedean dır. Bir $x, y \in E$ için $x \leq y$ ile $\{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesi x ile y arasında sıralı aralık olarak adlandırılır. E üzerindeki bir T operatörü her $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ ise pozitif olarak adlandırılır. Eğer operatör sıralı aralığı sıralı aralığa gönderiyorsa sıralı sınırlı denir.

E üzerindeki bütün sıralı sınırlı operatörlerin kısmî sıralı vektör uzayını $L_b(E)$ ile gösteriyoruz. E Dedekind tam olduğu zaman $L_b(E)$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır. E üzerindeki bütün sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin Riesz uzayı $E^\sim$ ile gösterilir ve bu E nin sıralı duali olarak adlandırılır. Riesz uzayı teorisi içinde kompleks Riesz uzayları da çalışılır. Bir kompleks Riesz uzayı altında E reel Riesz uzayının kompleksleştirilmesini E+iE olarak anlarız. $x \in E+iE$ nin mutlak değeri supremum varsa

$|x| = \sup\left(\operatorname{Re}\left(x\, e^{i\theta}\right) : \theta \in [0, 2\pi)\right)$ olarak tanımlanır.

( Zaanen, A.C. , (1983), Teorem 91.2 ) ile eğer E Archimedean ve düzgün tam ise bu doğrudur. Özellikle, E üzerindeki son varsayım E Dedekind tam ise sağlanır.

Bundan sonraki kısımda tezimizde E'nin aşikar olmayan sıralı sınırlı duali olan $E^\sim$ nın reel veya kompleks Riesz uzayı olduğunu kabul ediyoruz. Bir kompleks Riesz uzayı durumunda $x \in E$ için $|x|$ in tanımındaki supremumun var olduğunu kabul ediyoruz. Yukarıda açıklanamayan Riesz uzayları hakkındaki ayrıntılı bilgiler için

( W.A.J. ve A.C. Zaanen, (1971), Zaanen, A.C., (1983), Schaefer, H.H. ve Springer, (1974), Aliprantis, C.D. ve O. Burkinshaw, (1985), Meyer-Nieberg, P., Springer – Verlag, (1991) ) kitaplarına kaynak olarak verebiliriz.

**Tanım:** T, $0 \leq K$ bir E Riesz uzayında sıralı sınırlı operatörler olsun. Eğer modül $|T|$ var ve $|T| \leq K$ ise T ye K ile mutlak baskınlaştırılmıştır denir. Ayrıca, her x ∈ E ve $\phi \in E^{\sim}$ için $|\phi(Tx)| \leq |\phi|.(K|x|)$ olduğunda T ye K ile baskınlaştırılmıştır denir.

**Önerme 4.1:** K pozitif olmak üzere, E üzerindeki sıralı sınırlı operatörler T ve K olsun. Aşağıdaki iddiaları gözönüne alalım.

(a) T, K ile mutlak baskınlaştırılmıştır.

(b) Her x ∈ E için $|Tx| \leq K.|x|$ dir.

(c) T, K ile baskınlaştırılmıştır.

(d) Her x ∈ E ve $\phi \in (E^{\sim})^{+}$ için $|\phi(Tx)| \leq \phi(K|x|)$ dir.

O zaman $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ dir. Eğer $E^{\sim}$, E nin noktalarını ayrıştırırsa, o zaman (d), (b) yi gerektirir. Eğer E Dedekind tam ise, o zaman (b), (a) yı gerektirir. Özellikle, eğer E Dedekind tam ve $E^{\sim}$, E nin noktalarını ayrıştırırsa o zaman bütün dört iddia denktir.

**İspat:** Eğer, (a) sağlanırsa o zaman her x ∈ E için $|Tx| \leq |T|.|x| \leq K.|x|$ ve bu nedenle (b) doğrudur.Eğer (b) sağlanırsa o zaman her x∈E ve $\phi \in E^{\sim}$ için $|\phi(Tx)| \leq |\phi|(|Tx|) \leq |\phi|(K|x|)$ dir öyle ki (c) sağlanır. (c) ⇒ (d) gerektirmesi açıktır.

Şimdi $E^{\sim}$ nın E nin noktalarını ayrıştırdığını kabul edelim. (d) nin (b) yi gerektirdiğini göstermek için x∈E olsun. O zaman, herhangi bir $\phi \in (E^{\sim})^{+}$ için kompleks durumda herhangi bir $\theta \in [0, 2\pi]$ için ve reel durumda $\theta \in \{0, \pi\}$ için $\phi(K|x|) \geq \mathrm{Re}(\phi(Tx)e^{i\theta})$ dır. Bu, her bir $\phi \in (E^{\sim})^{+}$ için $\phi(K|x| - \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}Tx)) \geq 0$ olmasını gerektirir. $E^{\sim}$, E nin noktalarını ayrıştırdığından (Aliprantis, C.D. ve O. Burkinshaw, (1985), Teorem 5.1) in bir uygulaması (kompleks durumda açıkça sağlanır.)

$K|x| \geq \sup_{\theta} \left(\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}Tx\right)\right) = |Tx|$ elde edildiğinde her θ için

$K|x| - \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}Tx\right) \geq 0$ ı verir.

Son olarak, E Dedekind tam ise (b) nin (a) yı gerektirdiğini ispatlayalım. Bu durumda $|T|$ modülü, $L_b(E)$ içinde vardır. $|y| \leq x$ olan her bir x ∈ $E^+$ için ve her bir y∈E için $|Ty| \leq K|y| \leq Kx$ dir. Her bir x∈$E^+$ için $|T|\, x = \sup\{|Ty| : y \in E, |y| \leq x\}$ sağlandığından reel durumda (Zaanen, A.C., (1983), Teorem 83.6) ile ve kompleks durumda (Zaanen, A.C., (1983), Teorem 92.6) ya göre x ∈ $E^+$ için $|T|\, x \leq Kx$ sonucunu çıkarırız. Yani $|T| \leq K$ dır. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır.

E üzerindeki lineer operatörlerin bir koleksiyonu C ye, her T ∈ C (mutlak) K ile baskınlaştırıldığı zaman E üzerindeki bir pozitif operatör K ile (mutlak) baskınlaştırılmıştır denir.

**Teorem 4.2:** E, bir Dedekind tam Riesz uzayı olsun ve bir pozitif K operatörü ile $L_b(E)$ nin operatörlerinin bir maksimal semigrubu M olsun. O zaman

(i) Her S, T ∈ $\mathcal{S}$ için $\|ST\| \leq \|S\| . \|T\|$

(ii) M = {S ∈ $\mathcal{S}$: $\|S\| \leq 1$ }

olacak şekilde $\mathcal{S}$ üzerinde bir norm $\| . \|$ vardır.

**İspat:** Önce M nin $L_b(E)$ nin bir konveks altkümesi olduğunu gösteririz. Konveks kabuğun

$$\mathrm{C_o}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i : S_i \in M, \lambda_i \geq 0, \text{ve} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

K ile mutlak baskınlaştırılmış bir semigruptur.

M $\subseteq$ co(M) olduğundan, M nin maksimalliği M = co(M) yi gerektirir ve böylece M bir konveks kümedir. (Yani S$\in$M ve $|\lambda| \leq 1$ iken $\lambda S \in M$ olmasını gerektirir). M dengeli olduğundan $\mathcal{S}$ semigrubunun $L_b(E)$ nin bir altuzayı olduğu çıkar. Aşağıdaki

$$\|S\| := \dot{I}nf\{\lambda > 0 : S \in \lambda M\},\ S \in \mathcal{S}$$

Minkowski fonksiyoneli bir seminormdur ve M $\subseteq$ C, burada C = $\{S \in \mathcal{S} : \|S\| \leq 1\}$ dir.

Eğer $\|S\| = 0$ ise o zaman her n için $|S| \leq \lambda_n K$ olacak şekilde bir $\lambda_n \downarrow 0$ dizisi vardır. $L_b(E)$ Dedekind tam olduğundan böylece Archimedean dır. $|S| = 0$ elde ederiz. Böylece $\|\,.\,\|$, $\mathcal{S}$ üzerinde gerçekten bir normdur.

(i) nin ispatı için S ve T, $\mathcal{S}$ de operatörler olsun. Genelliği bozmadan $\|S\| = \|T\| = 1$ kabul edebiliriz. O zaman her n için S $\in \lambda_n$M ve T $\in \lambda_n$M olacak şekilde bir $\lambda_n \downarrow 1$ dizisi vardır. Buradan her n için ST $\in (\lambda_n)^2$M dir öyle ki $\|ST\| \leq 1$ dir.

(ii) nin ispatı için S $\in$ C olsun. O zaman $|S| \leq \lambda_n K$ olacak şekilde bir $\lambda_n \downarrow 1$ olan dizisi vardır. $L_b(E)$, Archimedean olduğundan $|S| \leq K$ dır. Bu da gösterir ki C semigrubu K ile mutlak baskınlaştırılmıştır. M $\subseteq$ C olduğundan M nin maksimalliği ile M = C dir ve böylece (ii) sağlanır. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır.

u$\in E^+$ ve f$\in (E^\sim)^+$ olsun. O zaman bir T$\in L_b(E)$ operatörünün u$\otimes$f operatörü ile baskınlaştırılabilmesi için gerek ve yeter koşul her x$\in$E ve $\phi \in E^\sim$ için $|\,\phi(Tx)\,| \leq |\phi|(u)\, f(|x|)$ dir. Bu, n : E $\to [0,\infty)$ ve n' : $E^\sim \to [0,\infty)$ homojen fonksiyonları $n(x) = f(|x|)$ ve $n'(\phi) = |\phi|(u)$ ile tanımlandığında T nin (n, n') çifti ile baskınlaştırılması anlamına gelir (Tanım 3.2 ).

Ayrıca, aşağıdaki önerme n ve n' fonksiyonları için sağlanır.

**Önerme 4.3:** $0 \neq u \in E^{+}$ ve $0 \neq f \in (E^{\sim})^{+}$ kabul edelim. O zaman $n(x) = f(|x|)$ ve $n'(\phi) = |\phi|(u)$ ile tanımlı n:E $\rightarrow [0, \infty)$ ve n':E$^{\sim}$ $\rightarrow$ $[0, \infty)$ homojen fonksiyonları sırasıyla E ve E$^{\sim}$ üzerinde zayıf fonksiyonlardır. Eğer u, E nin bir kuvvetli sıralı birimi ise o zaman n', E$^{\sim}$ üzerindeki bir kuvvetli fonksiyondur. Eğer f, E$^{\sim}$ nin bir kuvvetli sıralı birimi ise o zaman n, E üzerindeki bir kuvvetli fonksiyondur.

**İspat:** Her x$\in$E için $|f(x)| \leq f(|x|)$ ve her $\phi \in$E$^{\sim}$ için $|\phi(u)| \leq |\phi|(u)$ olduğunu dikkate alalım. Böylece, zayıf fonksiyonların tanımı içinde $\psi$ : = f ve y : = u alınarak birinci şart gösterildi.

U := $\{y \in E : |y| \leq u\}$, E nin bir kuvvetli sıralı birimi olduğunu kabul edelim. O zaman her y $\in$ U için

$|\phi(y)| \leq |\phi|(|y|) \leq |\phi|(u) = n'(\phi)$ dir.

x $\in$ U sabit alalım. u bir kuvvetli sıralı birim olduğundan, $|x| \leq tu$ olacak şekilde t > 0 sayısı vardır. $\lambda := 1/t$ alınırsa $\lambda$x $\in$ U olur. Bu, U nun emici olduğunu ispatlar. Dolayısıyla bu ikinci iddianın ispatını tamamlar.

Son iddianın ispatını bir önceki ile benzer olduğundan yapmadan geçebiliriz.

Her T $\in$ $L_b(E)$ için E$^{\sim}$ sıralı duali, T' altında değişmez olduğundan $\Phi$ : = E$^{\sim}$ ve $L_\Phi(E)$ : = $L_b(E)$ durumunda teorem 3.3, teorem 3.8 ve teorem 3.9 u uygulayabiliriz. Bunlar önerme 4.3 ile birlikte aşağıdaki sonuçları verir.

**Teorem 4.4:** 0 $\neq$ u $\in$ E$^{+}$ ve 0 $\neq$ f $\in$ (E$^{\sim}$)$^{+}$ kabul edelim. M, u $\otimes$ f operatörü ile baskınlaştırılanlar arasında E üzerindeki sıralı sınırlı operatörlerin bir maksimal semigrubu olsun. O zaman

(i) E üzerindeki bir quasinorm, $\|x\|_1 := \sup\{|\phi(x)| : \phi \in E^{\sim}, \|\phi\|_1^{'} \leq 1\}$ olduğunda, her x $\in$ E için $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ dir.

(ii) $|||T||| := \sup\{\|Tx\|_1 : \|x\|_2 \leq 1\}$ olduğunda, M = {T $\in$ $L_b(E)$ : $\|T\| \le 1$} olacak şekilde $E^{\sim}$ üzerinde bir $\|\,.\,\|_1^{'}$ seminormu ve E üzerinde bir $\|\,.\,\|_2$ seminormu vardır.

Eğer X üzerindeki I birim operatörünün bir katı u $\otimes$ f ile baskınlaştırılırsa, o zaman $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ seminormuna denk olan bir seminormdur. Eğer I, u $\otimes$ f ile baskınlaştırılmış ise, o zaman her x $\in$ E için $\|x\|_1 = \|x\|_2$ olarak alabiliriz. Ayrıca, eğer u, E nin bir kuvvetli sıralı birimi ise, o zaman $\|\,.\,\|_1^{'}$ bir norm olarak seçilebilir.

Benzer şekilde, eğer f, $E^{\sim}$ nin bir kuvvetli sıralı birimi ve $E^{\sim}$, E nin noktalarını ayrıştırıyorsa, o zaman $\|\,.\,\|_2$ bir norm olarak seçilebilir.

**Teorem 4.5:** Verilen bir I indeks kümesinden her i için, $0 \neq u_i \in E^+$ ve $0 \neq f_i \in (E^{\sim})^+$ olsun. M, her i$\in$I için $u_i \otimes f_i$ ile baskınlaştırılanlar arasında $L_b(E)$ nin bir maksimal altsemigrubu olduğunu kabul edelim. O zaman her i$\in$I için $\|T\| := \sup\left\{ \|\|T\|\|_i : i \in I \right\}$ olduğunda M=$\{T \in L_b(E) : \|T\| \le 1\}$ olacak şekilde $L_b(E)$ üzerinde bir quasinorm operatörü $\|\|\,.\,\|\|_i$ vardır.

Bu bölümün sonuçları $1 \le p \le \infty$ için $\ell^P$ Riesz uzayına uygulanabilir. Sıralama ve latis işlemleri bileşenler olarak sunulur. Bu uzayda en ilginç operatörler sonsuz matrislerdir.

T = $[t_{ij}]$ matrisi ile temsil edilen operatör K = $[k_{ij}]$ matrisi ile temsil edileni ile mutlak baskınlaştırılmasının gerçeği her i, j indisleri için $|t_{ij}| \le k_{ij}$ anlamına gelir. Bu örnek, Riesz uzayına genişletilebilir ki o hemen hemen reel veya kompleks ölçülebilir fonksiyonlara eşit bütün denklik sınıflarının Riesz uzayı M(x, $\mu$) nin bir sıralı idealidir. Burada $\mu$, bir boş olmayan X kümesi üzerinde $\sigma$-sonlu ölçümüdür. L üzerindeki bir mutlak çekirdek operatörü T için ve L üzerindeki bir pozitif çekirdek operatörü K için sırasıyla çekirdekleri t(x,y) ve k(x,y) dir. (Zaanen, A.C., (1983), Teorem 94.3) ile $|T|$ nin çekirdeği $|t(x,y)|$ ye eşit olduğundan hemen hemen her yerde $|t(x,y)| \le k(x,y)$ olduğunda T, K ile mutlak baskınlaştırılmıştır.

Diğer yandan, yukarıdaki örnek, sonlu boyutlu Riesz uzayı $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ nin durumuna özelleştirilebilir. Sırasıyla tüm satır ve sütunların bütün girdileri 1 e eşit olan satır ve sütun olarak u ve f vektörlerini seçersek o zaman (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997 )) içindeki teorem 4.3 ün ana sonucu bu tezdeki teorem 4.4 ün basit bir sonucu olur.

Sonuçlarımız, verilen bir pozitif matris ile baskınlaştırılmış matrislerin maksimal semigruplarının karakterizasyonu hakkında (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997 )) içindeki dolaylı olarak sorulan) soruya ayrıca bir cevap verir.

**Teorem 4.6:** K, pozitif girdili n.mertebeden bir matris ve M, K ile baskınlaştırılanlar arasında n. mertebeden reel (veya kompleks) matrislerinin bir maksimal semigrubu olsun. O zaman $\|T\| := \max\left\{\|T\|_i : 1 \le i \le r\right\}$ normuna göre bütün sıkıştırmaların semigrubuna eşiti olan M olacak şekilde $\mathbb{R}^{nxn}$ (veya $\mathbb{C}^{nxn}$) üzerinde bir pozitif tamsayı r ≤ n ve operatör quasinormu $\|\,.\,\|_i$ (i = 1, 2, ..., r) vardır.

Ayrıca, her i = 1, 2, ..., r için $\|\,.\,\|_i$ operatör quasinormu denk normlar ile bir norm üretir. Eğer, ilave edilirse I, K ile baskınlaştırılmış ise, o zaman bütün normlar eşit olarak seçilebilir.

**İspat:** K = İnf $\{u_1 \otimes f_1, ..., u_r \otimes f_r\}$ olacak şekilde $u_1, u_2, ..., u_r$ pozitif vektörleri ve $f_1, f_2, ..., f_r$ pozitif lineer fonksiyonlarının $r \le n$ için mevcut olduğunu iddia ediyoruz.

Eğer $u_i$, K nın i inci sütunu, $f_i$ nin i inci girdisi 1 ve $f_i$ nin diğer girdileri yeterince büyük ise r = n alınır. O zaman teorem 4.5 ve 4.4 ün bir uygulaması olarak ispat biter.

Aşağıda (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997 )) tüm girdileri 1 e eşit sıralı n. mertebeden matrisi J ile gösterelim. Ayrıca negatif olmayan bir K = $[k_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisi için $k_{ij} = 0$ olduğunda $a_{ij} = 0$ olacak şekilde bütün A = $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrislerinin vektör uzayını $S_K$ ile gösterelim. (Kosir, T., M. Omladic ve H. Radjavi, (1997)) deki teorem 5.1 in aşağıdaki genişlemesi ile tezimizi sonuçlandırıyoruz.

**Teorem 4.7:** K, $S_K$ bir semigrup olacak şekilde sıralı n. mertebeden bir sıfırdan farklı negatif olmayan bir matris olsun, M, K ile baskınlaştırılanlar arasında n. mertebeden reel (veya kompleks) matrislerinin bir maksimal semigrubu olsun. O zaman, teorem 4.6 daki gibi, $\|.\|$ ile ilgili olarak tüm sıkıştırmaların semigrubu C olduğunda, M = C $\cap$ $S_K$ olacak şekilde $|^{nxn}$ (veya $|^{nxn}$) üzerinde bir norm vardır. Ayrıca, teorem 4.6 daki gibi, $\left\{ \|\!| . \|\!|_i : 1 \le i \le r \right\}$ operatör quasinormları için aynı iddialar sağlanır.

**İspat:** $\lambda > 0$, K nın tüm sıfır olmayan girdilerinin minimumu olsun. Teorem 4.6 ya göre, M yi içeren $\|.\|$ normuna göre tüm sıkıştırmaların semigrubu C olacak şekilde ve $\sup\{K, \lambda J\}$ ile baskınlaştırılanlar arasında maksimaldir. $|^{nxn}$ (veya $|^{nxn}$) üzerinde bir norm $\|.\|$ vardır. M $\subseteq$ C $\cap$ $S_K$ ve C $\cap$ $S_K$, K ile baskınlaştırılan semigrup olduğundan M nin maksimalliği ile M = C $\cap$ $S_K$ elde edilir.

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada homojen fonksiyonların bir çifti ile baskınlaştırılmış operatörlerin bir maksimal M yarıgrubu için kapalı birim yuvardaki operatör kümesi için bir operatörler quasinormunun varolduğu gösterilmiştir.Bununla ilgili uygulamalar verilmiştir.

## KAYNAKLAR


Aliprantis, C.D. and O. Burkinshaw, (1985), “Positive Operators”, Academic Press, London.

R. Drnovsek and M.Omladic, (2002), Maximal dominated operator semigroups, Semigroup Forum Vol.64, 376 – 390.

Kosir, T., M. Omladic and H. Radjavi, (1997), Maximal Semigroups dominated by 0-1 matrices, Semigroup Forum 54, 175-189.

Luxemburg, W.A.J. and A.C. Zaanen, (1971) , “Riesz Spaces I”, North Holland, Amsterdam,.

Meyer – Nieberg, P., (1991), “Banach Lattices”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,.

Schaefer, H.H., (1974), “Banach Lattices and Positive Operators”, Springer, Berlin Heidelberg New York,.

Zaanen, A.C., (1983), “Riesz Spaces II”, North Holland, Amsterdam,.

**ÖZGEÇMİŞ**

| | | |
|---|---|---|
| Doğum Tarihi | : 17/10/1972 | |
| Doğum Yeri | : İstanbul | |
| Lise | : 1986-1989 | Kabataş Erkek Lisesi |
| Lisans | : 1991-1997 | Yıldız Teknik Üniversitesi |
| | | Fen Edebiyat Fakültesi |
| | | Matematik Bölümü |
| Yüksek Lisans | : 2005-2007 | Yıldız Teknik Üniversitesi |
| | | Fen Bilimleri Enstitüsü |
| | | Analiz ve Fonksiyonlar |
| | | Teorisi Anabilim dalı |
| Çalıştığı Kurumlar | : 1995-1996 | Asrın Dersanesi |
| | 1997-1998 | Fatih Dersanesi |
| | 1998-1999 | Fatih Dersanesi – Vali Hayri Kozakçıoğlu |
| | | Ticaret Meslek Lisesi |
| | 1999-2004 | İTO Anadolu Ticaret Meslek Lisesi |
| | 2004- | Devam ediyor. Otakçılar Lisesi |
| | | Matematik Öğretmeni |