YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN KONVEKS BANACH UZAYLARINDA DAUGAVET DENKLEMİ

Matematikçi Cem KUYUMCU

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer GÖK

Doç. Dr. ÖMER GÖK
Prof Dr. AKIN TAŞDİZEN
Prof Dr. MEHMET BAYRAMOĞLU

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

A^d	A'nın ayrık tümleyeni
AL	Soyut L
AM	Soyut M
B_x	x ile üretilen band
$C[0,1]$	$[0,1] \subset \mathbf{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi
$C(K)$	Kompakt Hausdorff topolojik uzaylarında tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
C_T	T'nin taşıyıcısı
E^+	E'nin pozitif konisi
$E^\sim$	E'nin sıralı duali
$E_n^\sim$	E'nin sıralı sürekli duali
E'	E'nin topolojik duali
E''	E'nin ikinci duali
$E \oplus F$	İki Riesz uzayının direkt toplamı
$\langle E, E' \rangle$	Riesz dual sistemi
$f \otimes g$	Rankı 1 olan operatör
$L(E)$	E'den E'ye lineer operatörlerin uzayı
$L_p(\mu)$	$1 \le p < \infty$ için $\mu-$ölçümüne göre integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$L_\infty(\mu)$	Esaslı sınırlı ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$L(E,F)$	E'den F'ye sürekli lineer operatörlerin uzayı
$\mathrm{L}(E,F)$	E'den F'ye lineer operatörlerin vektör uzayı
$\mathrm{L}_b(E,F)$	E'den F'ye sıralı sınırlı operatörlerin uzayı
N_T	T'nin sıfır ideali
$\|T\|$	T'nin normu
T'	T'nin adjointi
T''	T'nin ikinci adjointi
$\lvert T \rvert$	T'nin modülüsü
P_x	B_x üzerine izdüşüm
$\bar{V}$	V'nin kapanışı
$x_\alpha \downarrow x$	x'e doğru azalan ağ
$x_\alpha \xrightarrow{o} x$	Sıralı yakınsaklık
$[0,x]$	E'de x'in sıralı aralığı
$x \vee y$	x ve y'nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y'nin infimumu
$x \perp y$	Ayrık elemanlar
X^*	Cebirsel dual
X'	Topolojik dual
X''	İkinci dereceden dual

$\langle X, X' \rangle$	Dual sistem
$\chi_{\{q_0\}}$	q_0 'ın karakteristik fonksiyonu
δ_x	x 'de taşınan Dirac ölçüsü
$\lVert \cdot \rVert_r$	r-norm
$\sigma(T)$	T 'nin spektrumu
$\sigma(E, E')$	Zayıf topoloji

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen hocam Doç. Dr. Ömer GÖK'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tezde, düzgün konveks Banach uzaylarında tanımlı bir operatörün ne zaman Daugavet denklemini sağladığı üzerinde durulmuştur. Düzgün konveks bir Banach uzayında tanımlı sürekli bir $T: X \rightarrow X$ operatörünün $\|I+T\| = 1+\|T\|$ Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşulun; $\|T\|$ 'nin, T 'nin spekturumunda yer alması olduğu gösterilmiştir. Bu sonucu kompakt operatörlere özelleştirirsek; bir düzgün konveks Banach uzayındaki bir kompakt operatörün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşul; operatörün normunun bir özdeğer olmasıdır. Diğer bir netice de, $L_1(\mu)$ ve $L_\infty(\mu)$ uzayları için Daugavet denklemindeki standart gerçeklerle tam çelişkilidir. Daha başka uzaylardaki Daugavet özelliğinin bir tartışması da bu çalışma içinde yer almaktadır.

Anahtar kelimeler: Daugavet denklemi, Banach latis, düzgün konveks Banach uzayı, kompakt operatör, özdeğer

ABSTRACT

In this thesis, it is studied on when an operator, defined on the uniformly convex Banach spaces, satisfies Daugavet equation. It is shown thaa continuous operator $T : X \to Y$ on a uniformly convex Banach space satisfies the Daugavet equation $\|I+T\| = 1+\|T\|$ if and only if the norm $\|T\|$ of the operator lies in the spectrum of T. Specializing this result to compact operators, we see that a compact operator on a uniformly convex Banach space satisfies the Daugavet equation if and only if its norm is an eigenvalue. The latter conclusion is in sharp contrast with the standart facts on the Daugavet equation for the spaces $L_1(\mu)$ and $L_\infty(\mu)$. A discussion of the Daugavet property in the latter spaces is also included in the paper.

Keywords: Daugavet equation, Banach lattice, uniformly convex Banach space, compact operator, eigenvalue

1. GİRİŞ

Bir E reel vektör uzayı, cebirsel yapısıyla uyumlu olan bir $\geq$ sıralama bağıntısı ile donatılmış ($\geq$ yansımalı, antisimetrik, geçişmeli) ise ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa E'ye sıralı vektör uzayı denir.

(1) Her $z \in E$ için $x \geq y$ ise $x + z \geq y + z$ 'dir.

(2) Her $\alpha \geq 0$ için $x \geq y$ ise $\alpha x \geq \alpha y$ 'dir.

E, pozitif sıralı vektör uzayı olmak üzere, E'nin bütün pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir. Yani, $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ 'dir.

E ve F sınırlı vektör uzayları arasında bir $T : E \to F$ operatörü tanımlansın. Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T'ye pozitif operatör denir. $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ şeklinde gösterilir.

E, bir sıralı vektör uzayı olsun. $x, y \in E$ elemanlarının her sıralı ikilisi için E'de $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu mevcut ise E'ye bir Riesz Uzayı (veya vektör latis) denir.

$x \vee y := \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Bir Riesz uzayında $|x| \wedge |y| = 0$ şartını sağlayan x ve y elemanlarına ayrık denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Eğer A, bir E Riesz uzayının boş olmayan bir alt kümesi ise, A'nın A^d ayrık tümleyeni $A^d := \{x \in E : her\ y \in A\ için\ x \perp y\}$ ile tanımlanır.

$\alpha \geq \beta$ olduğunda $x_\alpha \leq x_\beta$ oluyorsa bir Riesz uzayındaki bir $\{x_\alpha\}$ ağına (netine) azalan denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \downarrow x$ notasyonu, $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf\{x_\alpha\} = x$ anlamındadır.

Arşimet özelliği, her $x>0$ reel sayısı için $\{nx\}$ dizisinin **R**'de yukarıdan sınırsızlığını ifade eder. Bu, her $x>0$ için **R**'de $n^{-1}x\downarrow 0$ olmasıyla eşdeğerdir. Her $x\in E^{+}$ için E'de $n^{-1}x\downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına Arşimet denir.

E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı bir $T:E\to F$ operatörü için, $|T|:=T\vee(-T)$ oluyorsa $|T|$'ye T'nin modülüsü denir ($|T|$, $\mathrm{L}(E,F)$'de $\{T,-T\}$ kümesinin supremumudur).

x ve y elemanları $x\le y$ olacak şekilde bir E Riesz uzayının elemanları ise, $[x,y]$ sıralı aralığı $[x,y]=\{z\in E\ :\ x\le z\le y\}$alt kümesiyle tanımlanır.

Her $y\in A$ için $y\le x$ eşitsizliğini sağlayan bir x varsa bir Riesz uzayının A alt kümesine yukarıdan sınırlıdır denir. Benzer şekilde, her $y\in A$ için $x\le y$ eşitsizliğini sağlayan bir x varsa bir Riesz uzayının A alt kümesine aşağıdan sınırlıdır denir. Bir A kümesi aşağıdan ve yukarıdan sınırlı (veya denk olarak, A bir sıralı aralıkta kapsanır) ise sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Bir $T:E\to F$ operatörü, E'nin sıralı sınırlı alt kümelerini F'nin sıralı sınırlı alt kümeleri üzerine gönderiyorsa sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

Yukarıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesi için bir supremumu olan (veya denk olarak, aşağıdan sınırlı her boş olmayan alt kümesi için bir infimumu olan) bir Riesz uzayı Dedekind Tam olarak adlandırılır.

E ve F, Dedekind tam Riesz uzayları olduğunda her $x\in E^{+}$ için her sıralı sınırlı $T:E\to F$ operatörü için aşağıdakiler sağlanır:

$|T|(x)=\sup\{|Ty|\ :\ |y|\le x\}$

$T^{+}(x)=\sup\{Ty:0\le y\le x\}$

$T^{-}(x)=\sup\{-Ty:0\le y\le x\}$

G, bir E Riesz uzayının bir vektör alt uzayı olsun. Eğer G, E'nin latis işlemlerinin altında kapalı yani, E'de alınan $x,y \in G$ elemanlarının her ikilisi için $x \vee y$ G'ye ait olduğunda G'ye Riesz alt uzayı denir.

$|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ olduğunda $x \in A$ oluyorsa bir Riesz uzayının bir A alt kümesine solid denir.

Bir Riesz uzayının bir solid vektör alt uzayı sıralı ideal olarak adlandırılır.

$x \leq y$ olmakla birlikte her $x \in E$ için bir $y \in G$ var olduğunda bir E Riesz uzayının bir G vektör alt uzayına majorize E denir.

Bir Riesz uzayında bir $\{x_\alpha\}$ ağı olsun. Her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ olacak biçimde bir $\{y_\alpha\}$ ağı var ki, $y_\alpha \downarrow 0$ ise $\{x_\alpha\}$ ağı x'e sıralı yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir (Kısaca, $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$).

$\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğunda $x \in A$ ise bir Riesz uzayının bir A alt kümesine sıralı kapalıdır denir. Sıralı kapalı bir ideal, bir band olarak adlandırılır.

Genel olarak, $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ olduğunda bir vektör uzayında bir $P: E \to E$ operatörü izdüşüm (projeksiyon) olarak adlandırılır.

Eğer bir P izdüşümü bir Riesz uzayında tanımlı ve aynı zamanda pozitif operatör ise P' ye bir pozitif izdüşüm denir.

Bir E Riesz uzayındaki bir B bandı $E = B \oplus B^d$ şartını sağlıyorsa bir izdüşüm bandı olarak adlandırılır.

Bir E Riesz uzayında tanımlı bir B izdüşüm bandı olsun. Bunun için, $E = B \oplus B^d$ olur ve böylece $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olacak şekilde her $x \in E$ elemanı bir $x = x_1 + x_2$ tek türlü yazılışına sahiptir.

Bir $P_B : E \to E$ izdüşümü, $P_B(x) := x_1$ ile tanımlanır. Açıkça, P_B bir pozitif izdüşümdür. P_B formunun herhangi bir izdüşümü, bir band izdüşümü (sıralı izdüşüm) olarak adlandırılır.

E ve F Riesz uzayları arasında bir $T : E \to F$ operatörü tanımlansın. E'de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olduğunda F'de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T'ye sıralı sürekli denir.

F Dedekind tam olmakla birlikte E ve F Riesz uzayları arasında sıralı sınırlı bir $T : E \to F$ operatörünü düşünelim. T'nin sıfır ideali $N_T := \{x \in E : |T|(|x|) = 0\}$ ile tanımlanır.

N_T'nin ayrık tümleyeni, T'nin taşıyıcısı olarak adlandırılır ve $C_T := N_T^d := \{x \in E : x \perp N_T\}$ ile gösterilir.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve R, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $f : X \to R$ lineer operatörüne lineer fonksiyonel denir.

E bir Riesz uzayı olsun. Her $x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ şartını sağlayan bir $f : X \to R$ lineer fonksiyoneli pozitiftir denir.

Aynı zamanda; eğer f, E'nin sıralı sınırlı alt kümelerini R'nin sınırlı alt kümelerine gönderiyorsa f lineer fonksiyoneli sıralı sınırlı olarak adlandırılır.

$f : X \to R$ lineer fonksiyoneli sürekli ise f'ye sürekli lineer fonksiyonel denir. X'de tanımlı sürekli lineer fonksiyonellerin uzayına X'in topolojik duali denir.

E bir Riesz uzayı olsun. E'de bütün sıralı sınırlı lineer fonsiyonellerin $E^\sim$ vektör uzayı, E'nin sıralı duali olarak adlandırılır. Yani, $E^\sim = \mathcal{L}_b(E,R)$'dir.

Her $x \in E$ için $f \in E^{\sim}$ ve $u \in F$ olduğunda $L_b(E,F)$'nin sıralı sınırlı operatörü $f \otimes u$ sembolüyle gösterilerek $f \otimes u(x) := f(x)u$ ile tanımlanır. $f \otimes u$ formunun her operatörü rankı 1 olan operatör olarak adlandırılır.

Bir V vektör uzayının V^* cebirsel duali , V'de bütün lineer fonksiyonellerin vektör uzayıdır. V ve W vektör uzayları arasındaki bir $T : V \to W$ operatörü için T'nin $T^* : W^* \to V^*$ cebirsel adjointi (veya transpozesi) her $f \in W^*$ ve $v \in V$ için $T^* f(v) = f(Tv)$ operatörü ile tanımlanır. Standart ikilik terminolojide bu özdeşlik $\langle T^* f, v \rangle = \langle f, Tv \rangle$ şeklinde yazılır. Bir $T : E \to F$ sıralı sınırlı operatörü, E ve F Riesz uzayları arasında tanımlandığında T^*, $F^{\sim}$'yi $E^{\sim}$'ye taşır. Gerçekten A, E'nin sıralı sınırlı bir alt kümesi ve $f \in E^{\sim}$ ise $T^* f(v) = f(Tv)$ eşitliğinden dolayı $T^* f(A)$, R'nin bir sınırlı alt kümesidir ve böylece $T^* f \in E^{\sim}$'dir

T^*'nin $F^{\sim}$'ye kısıtlaması, T'nin adjointi olarak adlandırılır ve T' ile gösterilir. $T' : F^{\sim} \to E^{\sim}$ olmak üzere, her $f \in E^{\sim}$ ve $x \in E$ için $\langle T'f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$'dir.

Benzer biçimde topolojik adjoint de tanımlanır.

E ve F Riesz uzayları arasında bir $T : E \to F$ operatörü tanımlansın. Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ oluyorsa T'ye bir latis homomorfizması (veya Riesz homorfizması) denir.

Bir T latis homomorfizması ek olarak bire-bir ise latis izomorfizması olarak adlandırılır.

$(x, x') \mapsto (x, x')$ ikili doğrusal form ile birlikte X ve X' vektör uzaylarıyla tanımlı $\langle .,. \rangle : XxX' \to R$ fonksiyonu için bir $\langle X, X' \rangle$ ikilisi var ki,

(1) Her $x \in X$ için $< x, x' >= 0$ olduğunda $x' = 0$ oluyor ve

(2) Her $x' \in X$ için $< x, x' >= 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa

$\langle X, X' \rangle$'e bir dual sistem (ikili sistem) denir.

$\langle X,X'\rangle$ ve $\langle Y,Y'\rangle$ dual sistemlerin bir ikilisi olmak üzere, $T:(X,\sigma(X,X'))\to(Y,\sigma(Y,Y'))$ sürekli olduğunda $T:X\to Y$ operatörüne zayıf sürekli denir. Yani, $x_\alpha\to x$, $\sigma(X,X')$ topolojisinde yakınsak ise $Tx_\alpha\to Tx$, $\sigma(Y,Y')$ topolojisinde yakınsaktır.

X bir Banach uzayı ve $\wedge:X\to X''$, $x\mapsto\hat{x}$ dönüşümü örten yani, $x'\in X'$ ve her $x''\in X''$ için $\hat{x}(x')=x''(x')=x'(x)$ şartını sağlayan bir $x\in X$ varsa X, yansımalı(refleksif) Banach uzayı olarak adlandırılır.

$|x|\le|y|$ olduğunda $\|x\|\le\|y\|$ oluyorsa bir Riesz uzayındaki böyle bir $\|.\|$ normuna latis norm denir.

Bir latis norm ile donatılmış bir Riesz uzayı, normlu Riesz uzayı olarak bilinir. Bir normlu Riesz uzayı aynı zamanda tam normlu ise Banach latis olarak adlandırılır.

E ve F Dedekind tam olmak üzere iki Banach latis ve $T:E\to F$ bir sıralı sınırlı operatör olsun. $\mathrm{L}_b(E,F)$'de pozitif operatörlerin her dizisi $|T|\ge T_n\downarrow 0$ olmakla birlikte $\|T_n\|\downarrow 0$ şartını sağlıyorsa T operatörü sıralı sürekli norma sahiptir denir.

$\{X_n\}$, Banach uzayların bir dizisi olsun. O zaman $\{X_n\}$'in L_p-*toplamı* $(X_1\oplus X_2\oplus\ldots)_p:=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots):x_n\in X_n,\|x\|:=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{1/p}<\infty\right\}$, $(1\le p<\infty)$ ile ifade edilir.

E bir Banach latis olmak üzere;

1. Bir $1\le p<\infty$ değeri için E'nin normu $p-$toplamalı ve $x\wedge y=0$ olmakla beraber her $x,y\in E^+$ olduğunda $\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p$ oluyorsa E'ye bir soyut L_p-uzayı denir ve soyut L_1-uzayına AL uzayı denir.

2. E'nin normu bir $M-$norm yani, E'de $x \wedge y = 0$ olduğunda $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E'ye bir soyut $M-$uzayı denir ve AM uzayı olarak adlandırılır.

E ve F Banach latislerini düşünelim. Eğer $T : E \to F$, modülüsü olan bir operatör ise T'nin düzgün normu $r-$norm kısaltmasıyla ifade edilir ve $\|T\|_r := \||T|\| := \sup\{\||T|x\| : \|x\| \le 1\}$ ile tanımlanır. Açıkça, $\|T\| \le \|T\|_r$ 'dir.

E bir birimli $AM-$uzayı olmak üzere; her $x \in E$ elemanı, $M(y) = xy \ , y \in E$ formülü ile bir $M : E \to E$ çarpım operatörü tanımlar.

$T : X \to Y$, X ve Y normlu uzayları arasında tanımlı bir operatör olsun. T, X'in kapalı birim küresini Y'nin bir göreceli norm kompakt alt kümesi üzerine gönderiyorsa T'ye kompakt operatör denir.

X ve Y Banach uzayları arasında bir $T : X \to Y$ operatörü tanımlansın. Eğer T, X'in kapalı birim küresini Y'nin bir göreceli zayıf kompakt alt kümesi üzerine taşıyorsa T'ye zayıf kompakt denir. Yani, eğer $\{Tx : \|x\| \le 1, x \in X\}$ kümesinin kapanışı zayıf kompakt ise T'ye zayıf kompakt denir.

Daha ileri bilgi ve aşağıdaki teoremlerin ispatı için (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985)'i kaynak olarak verebiliriz.

$T : E \to F$ iki Riesz uzayı arasında tanımlı bir operatör olmak üzere; her $x \in E^+$ için F'de $\sup\{|Ty| : |y| \le x\}$ mevcut olsun. O zaman T'nin modülüsü vardır ve her $x \in E^+$ için $|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \le x\}$'dir.

F Dedekind tam olmak üzere E ve F iki Ries uzayı olsun. Eğer G, E'nin bir majorize vektör alt uzayı ve $T : G \to F$ bir pozitif operatör ise T, E'nin bir pozitif genişlemesine sahiptir.

Eğer $T: E \to F$, F Dedekind tam olmak üzere E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı sıralı sınırlı bir operatör ise her $f \in F_n^{\sim}$ için $|T'|f = |T|' f$ 'dir.

Eğer F Dedekind tam olmak üzere E ve F Banach latis ise $L_b(E,F)$, r-normu altında bir Dedekind Banach latistir.

E ve F Banach latisleri için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(1) E' veya F, sıralı sürekli norma sahiptir.

(2) Bir zayıf kompakt operatör ile kısıtlı E 'den F 'ye her pozitif operatör zayıf kompakttır.

Bir $AL-$uzayından bir $KB-$uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatör bir zayıf kompakt modülüse sahiptir.

Tanım 1.1. I, X üzerinde birim operatör olmak üzere,

$$\|I+T\| = 1 + \|T\| \tag{1.1}$$

eşitliğini sağlayan bir Banach uzayındaki sürekli bir $T: X \to X$ operatörüne Daugavet denklemini sağlar denir.

Bir operatörün bu özelliği, onun gerçek değerinden ayrı olarak, fonksiyon uzaylarında en iyi yaklaşımlarla beraber problemlerin çözümünü ortaya çıkarır. Eğer atomsuz bir $L_1(\mu)$ uzayında veya atomsuz bir $L_\infty(\mu)$ uzayında T kompakt bir operatör ise T operatörünün Daugavet denklemini sağladığı ilginçtir. Bu tezin amacı, Daugavet denklemini sağlayan düzgün konveks Banach uzaylarındaki (özellikle L_p – uzayları için, $1 < p < \infty$) operatörleri araştırmaktır. T 'nin yaklaşık nokta spektrumundaki operatörün $\|T\|$ normunun keyfi düzgün konveks Banach uzayındaki sürekli bir operatör için Daugavet denkleminin geçerliliğinin eşit olduğu gerçeği bizim esas sonucumuzdur (Teorem 2.2). Bu sonucun, Daugavet denklemindeki bütün sonuçlara tam zıt olduğu daha önce bilinmektedir.

$\|I+T\|=1+\|T\|$ denklemiyle ilgili çalışmaları yapan ilk kişi I.K. Daugavet'tir. Aslında O, 1963'te her kompakt $T:C[0,1]\to C[0,1]$ operatörünün $\|I+T\|=1+\|T\|$ denklemini sağladığını kanıtladı (Daugavet, 1963). 1965'te C. Foias ve I. Singer tarafından Daugavet'in sonucu keyfi atomsuz $C(K)-$uzayları ve operatörlerin çeşitli sınıfları için (zayıf kompakt operatörleri içeren) geliştirilirken, G.Y. Lozanovskii (1966) $L_1[0,1]$'deki kompakt operatörlerin Daugavet denklemini sağladığını saptadı. 1981'de V.F. Babenko ve S.A. Pichugov, Lozanovskii'nin sonucunu yeniden araştırdı ve onlar ve bu konuyla uğraşan diğer kişiler, bunun fonksiyon uzaylarında en iyi tahmini problem için nasıl uygulanacağını belirlediler. Özetle; Daugavet (1963), C. Foias ve I. Singer (1965), G.Y. Lazonovskii (1966), M.A. Krasnoselskii (1967), V.F. Babenko ve S.A. Pichugov (1981), J.R. Holub (1986, 1987), H. Kamowitz (1984), P. Chauveheid (1982), Y.A. Abramovich (1990) ve K. Schmidt (1990) çalışmaları sonucu şu teoreme ulaşmışlardır.

Teorem 1.2. Eğer E, keyfi bir atomsuz $AL-$ veya $AM-$uzayı ise, her zayıf kompakt $T:E\to E$ operatörü Daugavet denklemini sağlar.

Daugavet denkleminin gelişimi üzerindeki oldukça geniş bir araştırma Abramovich (1991) tarafından yapılmıştır. Teorem 1.2'deki bir zıtlıkta (kabaca söylersek atomsuz $L_1(\mu)$ ve $C(K)-$uzaylarının durumuyla ilgili) bizim esas sonucumuz; $1<p<\infty$ için L_p-uzaylarındaki Daugavet denkleminin esas ifadesinin, $p=1$ ve $p=\infty$ değerlerine uyan sınır durumlarından net bir farklılıkla ayrıldığını gösterir.

Diğer yandan, önemli bir nokta da Daugavet denklemini sağlayan her kompakt operatörün, atomsuz $AL-$ ve $AM-$uzaylarından başka Banach latislerinde de tanımlı olduğudur. Biz tezde (Abramovich, 1991)'e başvurarak, Daugavet denklemini sağlayan her kompakt (hatta her zayıf kompakt) operatörün Banach uzaylarının çeşitli yeni sınıflarının bulunabileceğini gösteriyoruz.

Daugavet denklemiyle oldukça yakın ilgili olan bir sonuçtan bahsedeceğiz. Bu sonuç, (Abramovich, 1990; Schmidt, 1990)'de ispatlanmıştır ve J.R. Holub'un (1986) $C[0,1]$ için ispatladığı uygun bir sonucun genişletilmiş bir halidir.

Teorem 1.3. Eğer E bir $AL-$ veya bir $AM-$uzayı ve $T:E \to E$ bir sürekli operatör ise

$$\|I+\theta T\| = 1+\|T\|$$

denklemini sağlayan bir *sign* θ $(\theta \in \{-1,1\})$ sayısı vardır.

Bu çalışmada baştan sona kadar I harfi uzayda düşünüldüğünde birim operatörü belirtmek için kullanılacak; "operatör" kelimesi "lineer operatör" ile eş anlamlı olacaktır.

Şimdi Banach uzayının düzgün konveks olmasını verelim:

X bir Banach uzayı olsun. $0<\varepsilon\le 2$ için $\|x\|\le 1$, $\|y\|\le 1$, $x,y\in X$ ve $\|x-y\|\ge\varepsilon$ olduğunda

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| < 1-\delta \tag{1.2}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0<\delta<1$ sayısı varsa, X'e düzgün konveks Banach uzayı denir. Bu tanımdan, bir düzgün konveks Banach uzayında her n için $\|x_n\|\le 1$, $\|y_n\|\le 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1$$

ise

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\| = 0$$

olduğu görülür (Dunford ve Schwartz, 1958).

2. DAUGAVET DENKLEMİ

Giriş bölümünde belirtildiği gibi, $L_1[0,1]$'deki her kompakt operatör Daugavet denklemini sağlar. Fakat görebileceğimiz gibi, L_p – uzayındaki $(1 < p < \infty)$ bir kompakt operatör Daugavet denklemini sağlamayabilir. Bu bölümde, bir yandan da $1 < p < \infty$ için Daugavet denklemini sağlayan L_p – uzaylarındaki kompakt operatörleri tanımlayacağız. Bir basit gözlemle tartışmamıza başlayalım.

Lemma 2.1. u ve v normlu bir uzayda iki vektör olmak üzere;

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \tag{2.1}$$

olması için gerek ve yeter şart; her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\| \tag{2.2}$$

olmasıdır.

Özel olarak, bir Banach uzayındaki sürekli bir $T : X \to X$ operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; her $\alpha \geq 0$ için αT operatörünün Daugavet denklemini sağlamasıdır.

İspat: u ve v, normlu bir vektör uzayında iki vektör olmak üzere (2.1) eşitliğini sağlasın ve her $\alpha, \beta \geq 0$ olsun. Simetriden $\alpha \geq \beta \geq 0$ kabul edebiliriz.

$$\begin{aligned}\|\alpha u + \beta v\| &= \|\alpha(u+v) - (\alpha-\beta)v\| \geq \alpha\|u+v\| - (\alpha-\beta)\|v\| \\ &= \alpha\left(\|u\| + \|v\|\right) - (\alpha-\beta)\|v\| \\ &= \alpha\|u\| + \beta\|v\|\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$$

elde edilir.

Her n için,

$$\|x_n\| = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\|Tx_n - \lambda x_n\| = 0$$

eşitliğini sağlayan vektörlerin bir $\{x_n\}$ dizisi var ise, bir T operatörünün yaklaşık nokta spektrumuna ait λ kompleks sayısı vardır. Spektrumun sınırı bir operatörün yaklaşık nokta spektrumunda kapsanır. Bu yüzden, bir karmaşık Banach uzayındaki sürekli bir operatörün yaklaşık nokta spektrumu her zaman boş değildir. Tezdeki temel sonucu şimdi yazıp ispatlayalım.

Teorem 2.2. X, düzgün konveks Banach uzayı ve $T : X \to X$ sürekli bir operatör ise T'nin Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; $\|T\|$ normunun, T'nin yaklaşık nokta spektrumunun içinde yer almasıdır.

İspat: X düzgün konveks olması gerekmeyen keyfi bir Banach uzayı olmak üzere bir $T : X \to X$ operatörünün nokta spektrumunda T'nin normu $\|T\|$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \big\| \|T\| x_n - Tx_n \big\| = 0$$

denklemini sağlayan birim vektörlerin bir $\{x_n\}$ dizisini düşünelim.

$$\begin{aligned}\|I+T\| &\geq \|(I+T)x_n\| \\ &\geq \big\|x_n + \|T\|x_n\big\| - \big\| \|T\|x_n - Tx_n \big\| \\ &= 1 + \|T\| - \big\| \|T\|x_n - Tx_n \big\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$1 + \|T\| \geq \|I+T\| \geq 1 + \|T\|$$

bulunur ve T'nin Daugavet denklemini sağladığı görülür.

Tersine, bir X düzgün konveks Banach uzayında Daugavet denklemini sağlayan, sıfır olmayan sürekli bir T operatörünü düşünelim. Lemma 2.1'den; $S = T/\|T\|$ (norm 1) operatörünün Daugavet denklemini sağladığını biliyoruz. Yani,

$$\|I+S\| = \sup_{\|x\|=1} \|x + Sx\| = 1 + \|S\| = 2$$

'dir. Böylece her n için $\|x_n\| = 1$ 'den vektörlerin bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ve öyle ki,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + Sx_n\| = 2$$

'dir. Bu da

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(Sx_n + x_n)\right\| = 1$$

olmasını gerektirir ve X Banach uzayı düzgün konveks olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|Sx_n - x_n\| = 0$$

sonucuna varırız. Yani,

$$\lim_{n\to\infty}\|(T/\|T\|)x_n - x_n\| = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{n\to\infty}\|Tx_n - \|T\|x_n\| = 0$$

dir. Bu da $\|T\|$ nin, T'nin yaklaşık nokta spektrumunun içinde olduğunu gösterir.

Düzgün konveksliğe dual bir kavram vardır. Şimdi onu tanımlayalım:
$\forall\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ var ki $\|x\| \geq 1$, $\|y\| \geq 1$ ve $\|x - y\| < \delta$ olduğunda
$\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\| - \varepsilon\|x - y\|$
sağlanıyorsa Banach uzayına düzgün pürüzsüz denir. Bir Banach uzayının düzgün pürüzsüz (düzgün konveks) olması için gerek ve yeter şart; norm dualinin düzgün konveks (düzgün pürüzsüz) olmasıdır. Aynı zamanda, bir Banach uzayının düzgün pürüzsüz olması için gerek ve yeter şart; normunun düzgün kuvvetli türevlenebilir olmasıdır (Köthe, 1969).

Eğer bir operatörün normu spektruma ait ise norm, spektrumun sınırına ait olmalıdır. Bununla birlikte, spektrumun sınırı yaklaşık nokta spektrumunun noktalarından oluşur. Bu yüzden, operatörün normunun spektrumun içinde yer alması için gerek ve yeter şart; yaklaşık nokta spektrumunda yer almasıdır. Diğer yandan, bir operatörün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; operatörün adjoint'inin de Daugavet denklemini sağlamasıdır. Bir operatörün spektrumu, onun adjointinin spektrumu ile aynıdır.

Teorem 2.3. Düzgün pürüzsüz bir Banach uzayındaki bir T operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; T'nin normu $\|T\|$'nin, T'nin yaklaşık nokta spektrumunda yer almasıdır.

Bir Banach uzayında tanımlı bir kompakt operatörün spektrumunun sıfırdan farklı noktalarının özdeğer olduğunu hatırlayalım. O halde, bir özdeğerin operatörün normu olması şartı Daugavet denklemini sağlayan kompakt operatörleri karakterize eder.

Sonuç 2.4. Bir düzgün konveks veya düzgün pürüzsüz Banach uzayında tanımlı kompakt bir T operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; $\|T\|$'nin, T'nin bir özdeğeri olmasıdır.

$1<p<\infty$ için her L_p-uzayının bir düzgün konveks Banach uzayı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $1<p<\infty$ için L_p $-$uzayında Daugavet denklemini sağlayan kompakt operatörlerin bir karakterizasyonuna sahibiz. Bu $p=1$ ve $p=\infty$ olduğu durumdan kesin bir şekilde farklıdır ki, atomsuz durumda her kompakt operatör Daugavet denklemini sağlar.

Sonuç 2.5. Bir $T: L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ $,(1<p<\infty)$ kompakt operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; $\|T\|$'nin, T'nin bir özdeğeri olmasıdır.

İnterpolasyona dayalı fikirlerin Daugavet denklemini sağlamadığına dikkat ediyoruz. En basit açık olmayan rankı 1 T operatörünü $L_p[0,1]$ uzaylarında, f ve g sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere $T=f\otimes g$ ile tanımlayalım. Rankı 1 olan bir T operatörü kompakttır ve dolayısıyla $L_1[0,1]$ ve $L_\infty[0,1]$ uzaylarında Daugavet denklemini sağlar. Yani,

$\|I+T\|_1 = 1+\|T\|_1$ ve $\|I+T\|_\infty = 1+\|T\|_\infty$

'dir. Eğer f ve g fonksiyonları,

$<f,g>=\int fg d\mu = 0$

eşitliğini sağlıyorsa T operatörü sıfırdan farklı özdeğere sahip değildir ve bundan dolayı, $1<p<\infty$ için T operatörü $L_p[0,1]$ uzayında Daugavet denklemini sağlamaz.

Şimdi Teorem 2.2'nin bir uygulamasını şu teoremle verebiliriz.

Teorem 2.6. Bir düzgün konveks (ya da düzgün pürüzsüz) Banach uzayında Daugavet denklemini sağlayan sürekli bir $T: X \to X$ operatörünü düşünelim ve her $n \geq 0$ için

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n \quad ,a_n\geq 0$$

bir seri olsun. Eğer, $f\left(\|T\|\right)<\infty$ ise sürekli $f(T)$ operatörü Daugavet denklemini sağlar ve

$$\|f(T)\|=f\left(\|T\|\right)$$

olur. Yani,

$$\|I+f(T)\|=1+\|f(T)\|=1+f\left(\|T\|\right)$$

elde edilir.

Özellikle aşağıdaki sonuçlara ulaşırız:

(1) Her $n=0,1,2,\ldots$ için sürekli T^n operatörü Daugavet denklemini sağlar ve

$$\left\|T^n\right\|=\|T\|^n$$

'dir. Yani,

$$\left\|I+T^n\right\|=1+\left\|T^n\right\|=1+\|T\|^n$$

'dir.

(2) Bir $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n$ polinomu her i $(0\leq i\leq n)$ için $a_i\geq 0$'i sağlıyorsa, $p(T)$ operatörü Daugavet denklemini sağlar ve

$$\|p(T)\|=p\left(\|T\|\right)$$

'dir.

(3) Her $\alpha\geq 0$ için sürekli $e^{\alpha T}$ operatörü Daugavet denklemini sağlar ve

$$\left\|e^{\alpha T}\right\|=e^{\alpha\|T\|}$$

'dir.

İspat: X Banach uzayı, $T:X\to X$ bir sürekli operatör ve $f(\lambda)$ fonksiyonunun, teoremin hipotezini sağlayan bir fonksiyon olduğunu düşünelim. Teorem 2.2 ve Teorem 2.3'ten X'in birim vektörlerinin bir $\{x_n\}$ dizisi var ki

$$\lim_{n\to\infty}\left\|Tx_n-\|T\|x_n\right\|=0$$

'dır.

$$T^{k+1}x_n - \|T\|^{k+1}x_n = T\left(T^k x_n - \|T\|^k x_n\right) + \|T\|^k\left(Tx_n - \|T\|x_n\right)$$

özdeşliği kullanılırsa ve tümevarım yöntemiyle görürüz ki her $k = 0, 1, \ldots$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^k x_n - \|T\|^k x_n\right\| = 0$$

elde edilir. Şimdi,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(T)x_n - f(\|T\|)x_n\right\| = 0$$

olduğunu ispatlayalım.

Bunu görmek için $\varepsilon > 0$ olsun. Sabit bir m için,

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i \|T\|^i < \varepsilon$$

olsun ve belli bir n_0 indisi için her $n \geq n_0$ olduğunda

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \left\|T^i x_n - \|T\|^i x_n\right\| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın. Dolayısıyla $n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned}
\left\|f(T)x_n - f(\|T\|)x_n\right\| &= \left\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i\left(T^i x_n - \|T\|^i x_n\right)\right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{m} a_i\left\|T^i x_n - \|T\|^i x_n\right\| + \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i\left\|T^i x_n - \|T\|^i x_n\right\| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i\|T\|^i + \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i\|T\|^i < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(T)x_n - f(\|T\|)x_n\right\| = 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, $f(\|T\|)$ reel sayısı $f(T)$'nin yaklaşık nokta spektrumunda yer alır. $\|f(T)\| \leq f(\|T\|)$ ve $f(T)$'nin spektrumu $\|f(T)\|$ yarıçaplı sıfır merkezli kapalı disk içinde yer aldığından

$$\|f(T)\| = f(\|T\|)$$

sonucunu elde ederiz. 2.2 ve 2.3 teoremlerinden $f(T)$ operatörünün Daugavet denklemini sağladığı sonucunu çıkarıyoruz.

Yerel düzgün konveks Banach uzaylarında tanımlı kompakt operatörler için Daugavet denkleminin bir özelliğiyle devam edelim:

Her $x \in X$ için $\|x\| = 1$ ve her $0 \leq \varepsilon \leq 2$ için bir $0 < \delta < 1$ vardır ki (ε ve x e bağlı olarak) $y \in X$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunda

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < 1 - \delta$$

oluyorsa, X Banach uzayına yerel düzgün konveks denir. Ayrıca, bir yerel düzgün konveks Banach uzayında her n için $\|x_n\| \leq 1$, $\|x\| = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + x) \right\| = 1$ olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

'dır.

Teorem 2.7. Bir yerel düzgün konveks Banach uzayında tanımlı kompakt bir $T : X \to X$ operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart; $\|T\|$nin, T nin bir özdeğeri olmasıdır.

İspat: $T : X \to X$, bir yerel düzgün konveks Banach uzayında tanımlı bir kompakt operatör olsun. $\|T\|$, T'nin özdeğeri olursa açık bir şekilde

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|$$

olur.

Tersine, T'nin Daugavet denklemini sağladığını farz edelim. Lemma 2.1'den $S = T / \|T\|$ kompakt operatörünün aynı zamanda Daugavet denklemini sağladığını biliyoruz. Yani,

$$\sup_{\|x\|=1} \|x + Sx\| = 1 + \|S\| = 2$$

'dir. X'in birim vektörlerinin bir $\{x_n\}$ dizisini

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + Sx_n\| = 2 \tag{2.3}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçelim. S'nin kompaktlığını kullanırsak (gerekirse bir alt dizisine geçerek); bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x\| = 0$$

olduğunu kabul edebiliriz.

$$\|x_n + Sx_n\| \leq \|x_n\| + \|Sx_n\| = 1 + \|Sx_n\| \leq 1 + 1 = 2$$

ve (2.3) eşitliğini de kullanarak buradan,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|Sx_n\| = 1$$

sonucunu çıkarırız. Aynı zamanda,

$$\|x_n + Sx_n\| - \|Sx_n - x\| \leq \|x_n + x\| \leq 2$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2 \quad \text{veya} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + x) \right\| = 1$$

olduğunu görüyoruz. Böylece, X'in yerel düzgün konveksliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

sonucunu çıkarırız. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - Sx\| = 0$$

ve böylece

$$Sx = x \quad \text{veya} \quad (T/\|T\|)x = x$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$Tx = \|T\|x$$

olur. Bu da $\|T\|$'nin, T'nin bir özdeğeri olduğunu gösterir.

Sonuç olarak, burada bizim asıl neticemizin (Teorem 2.2) yerel düzgün konveks Banach uzayları için geçerli olmadığını gösteren bir örnekle bu bölümü kapatalım.

Örnek 2.8. Reel sayıların $2 \geq p_1 > p_2 > \ldots > 1$ gibi bir $\{p_n\}$ dizisini düşünelim. Örneğin, $p_n = 1 + \frac{1}{n}$ alındığında $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ olur. Her n için $X_n = l_{p_n}^2$ olsun. Yani, l_{p_n} – normu

$$\|(x,y)\|_{p_n} = \left(|x|^{p_n} + |y|^{p_n}\right)^{1/p_n}$$

ile donatılmış $X_n = \Re^2$ olsun. X_n bir düzgün konveks (ve dolayısıla yansımalı) Banach latistir. Her n için $u_n = (1,0)$ ve $v_n = (0,1)$ olsun. Buradan,

$$\|u_n\|_{p_n} = \|v_n\|_{p_n} = 1 \quad \text{ve} \quad \|u_n + v_n\|_{p_n} = 2^{1/p_n}$$

elde edilir. Aynı zamanda her n için $T_n(x,y) = (y,0)$ ile tanımlı $T_n : X_n \to X_n$ pozitif operatörünü düşünelim. Her n için

$$T_n(u_n) = 0, \quad T_n(v_n) = u_n \quad \text{ve} \quad \|T_n\| = 1$$

olduğuna dikkat edelim.

Sonra $X = (X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots)_2$ Banach latisini düşünelim. Yani X, $\{X_n\}$ Banach latislerinin dizisinin l_2 – toplamıdır ve $T : X \to X$ pozitif operatörü,

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (T_1 x_1, T_2 x_2, \ldots)$$

ile tanımlanır.

İstenen sonuçlar aşağıdaki özelliklerden çıkar:

1. X Banach latisi, yansımalı, düzgün konveks değil fakat yerel düzgün konvekstir.

X 'in yansımalılığı,

$$X'' = (X_1'' \oplus X_2'' \oplus \ldots)_2 = (X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots)_2$$

özdeşliğinden ortaya çıkar (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

X 'in düzgün konveks olmadığını gösterelim. Eğer,

$$\mathbf{x}_n = (0,\ldots,0,u_n,0,\ldots) \quad \text{ve} \quad \mathbf{y}_n = (0,\ldots,0,v_n,0,\ldots) \tag{2.4}$$

için u_n ve v_n vektörleri n. pozisyonda yer alıyorsa her n için

$$\|\mathbf{x}_n\|_2 = \|\mathbf{y}_n\|_2 = 1$$

olur. Buradan,

$$\left\|\frac{1}{2}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n)_2\right\| = \frac{1}{2}\|u_n + v_n\|_{p_n} = 2^{1/p_n - 1} \to 1$$

ve

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\|_2 = \|u_n - v_n\|_{p_n} = 2^{1/p_n} \to 2$$

elde edilir. Dolayısıyla X düzgün konveks değildir.

X'in yerel düzgün konveksliği, yerel düzgün konveks Banach uzaylarının bir dizisinin l_2 – toplamının yerel düzgün konveks olmasından çıkar (Lovaglia, 1955).

2. T operatörü Daugavet denklemini sağlar.

Eğer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in X$ alındığında $\|\mathbf{x}\|_2 \le 1$ oluyorsa

$$\|T\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x_n\|_{p_n}^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|^2 \|x_n\|_{p_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{p_n}^2 \le 1$$

ve böylece

$$\|T\| \le 1$$

elde edilir. Diğer yandan, $\mathbf{y}_n$ (2.4)'te tanımlanan vektör ise,

$$\|T\|^2 \ge \|T\mathbf{y}_n\|_2^2 = \|T_n v_n\|_{p_n}^2 = \|u_n\|_{p_n}^2 = 1$$

ve

$$\|T\| \ge 1$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|T\| = 1$$

olur.

Benzer şekilde $I_n : X_n \to X_n$, X_n de birim operatörü belirtirse,

$$\|I + T\| \ge \|(I + T)\mathbf{y}_n\|_2 = \|(I_n + T_n)v_n\|_{p_n}$$

$$= \|v_n + Tv_n\|_{p_n} = \|v_n + u_n\|_{p_n} = 2^{1/p_n}$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1/p_n} = 2 \quad \text{den,}$$

$$\|I + T\| = 2$$

sonucunu çıkarırız ve böylece T Daugavet denklemini sağlar.

3. $\|T\| = 1$ normu, T'nin yaklaşık nokta spektrumuna ait değildir.

$T^2 = 0$ olduğundan T operatörü nilpotenttir ve bundan dolayı $\sigma(T) = \{0\}$ dır. Bu yüzden $\|T\|$, T 'nin yaklaşık nokta spektrumuna ait değildir. İspatı şöyle yapabiliriz:

Her $1 \le p \le 2$ ve her $\alpha, \beta \ge 0$ için,

$$(\alpha + \beta)^p + \beta^p \le 5\left(\alpha^p + \beta^p\right)$$

eşitsizliğimizin var olduğunu gözlemleyerek başlayalım.

Şimdi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ (burada $x_i = (\alpha_i, \beta_i) \in X_i$) alındığında $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ olsun. Açıkça,

$$T\mathbf{x} = (T_1 x_1, T_2 x_2, \ldots) = ((\beta_1, 0), (\beta_2, 0), \ldots)$$

ve böylece

$$\|T\mathbf{x} - \mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\alpha_i - \beta_i|^{p_i} + |\beta_i|^{p_i} \right)^{2/p_i}$$

olur.

$$1 = \|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\alpha_i|^{p_i} + |\beta_i|^{p_i} \right)^{2/p_i}$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(|\alpha_i - \beta_i| + |\beta_i| \right)^{p_i} + |\beta_i|^{p_i} \right]^{2/p_i}$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} 5^{2/p_i} \left(|\alpha_i - \beta_i|^{p_i} + |\beta_i|^{p_i} \right)^{2/p_i}$$

$$\le 25 \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\alpha_i - \beta_i|^{p_i} + |\beta_i|^{p_i} \right)^{2/p_i} = 25 \|T\mathbf{x} - \mathbf{x}\|_2^2$$

eşitsizliklerinden her $\mathbf{x} \in X$ için $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ olduğunda

$$\|T\mathbf{x} - \mathbf{x}\|_2 \ge \frac{1}{5}$$

olduğunu görürüz. Sonuç olarak, $\|T\| = 1$ normu T operatörünün yaklaşık nokta spektrumuna ait değildir.

3. DAUGAVET ÖZELLİĞİ

Bazı Banach uzaylarında tanımlı her zayıf kompakt operatörün Daugavet denklemini sağladığı hakkında Teorem 1.2 bize bilgi vermektedir. Bu özelliği sağlayan Banach uzayları Daugavet özellikli Banach uzayları olarak belirtilecektir. Aşağıdaki tanım, bu özelliği taşıyan Banach uzaylarının sınıfını sunar.

Tanım 3.1. Bir Banach uzayı, kendi üzerinde tanımlı her zayıf kompakt operatör Daugavet denklemini sağlıyorsa, Daugavet özelliğini sağlar denir.

Açıkça, bir Banach uzayının Daugavet özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart; norm dualinin Daugavet özelliğini sağlamasıdır. Sonuç 2.5'ten; $1<p<\infty$ için L_p – uzaylarının Daugavet özelliğini sağlamadığı görülür. Bununla beraber $p=1$ veya $p=\infty$ için atomsuz $L_1(\mu)$ ve atomsuz $L_\infty(\mu)$ uzayları Daugavet özelliğini sağlarlar. Bu sonuç, $1<p<\infty$ durumunda oldukça farklı olduğundan uzayların latis yapılarını temel alan bu sonucu detaylı bir şekilde sunan bir ispatın olmasının yararlı olacağına inanıyoruz. Bu yüzden bizim tartışmamız, Teorem 1.2. nin az farklı bir durumu olan aşağıdaki sonucu ispatlamaya odaklanacaktır.

Teorem 3.2. Birimli atomsuz AL – uzayları ve atomsuz Dedekind tam AM – uzayları Daugavet özelliğini sağlar.

Q bir kompakt Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir birimli AM – uzayının, $C(Q)$ biçimindeki bir somut Banach latise latis izometrik olduğunu hatırlayalım. Yani, bir AL – uzayı somut $L_1(\mu)$ uzayında latis izometriktir ki bu her AL – uzayının sıralı sürekli normu olduğunu belirtir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 3.2'yi ispatlamak için Banach latislerin teorisinden bazı saçılmış sonuçları toplamamız gerekmektedir. Bu sonuçlar, lemmalar biçiminde sunulacaktır.

Tartışmamıza sıralı sınırlı bir operatörün mutlak değeriyle başlayalım. F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $T : E \to F$, E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı sıralı sınırlı bir operatör ise

$$|T|(x) = \sup\{|Ty| \ : \ y \in E, |y| \le x\}, \qquad x \in E^+$$

formülü bir pozitif operatör tanımlar ve buna T'nin modülüsü denir. E'den F'ye bütün sıralı sınırlı operatörlerin $L_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayında $|T| = T \vee (-T)$ sağlanır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). Eğer E ve F aynı zamanda Banach latis ise $\|T\|_r = \||T|\|$ ile tanımlı $r-$normu altında $L_b(E,F)$ bir Banach latistir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). Genel olarak, bir T operatörünün operatör normu ve r-normu eşit değildir. Bununla birlikte, biz daima

$$\|T\| \le \|T\|_r = \||T|\|$$

eşitsizliğine sahibiz.

Şunu unutmamak önemli; eğer E bir $AL-$uzayı veya F bir birimli Dedekind tam $AM-$uzayı ise, her sürekli $T : E \to F$ operatörü sıralı sınırlıdır ve dolayısıyla modülüsü mevcuttur (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Başlama noktamız, bir $AL-$ veya $AM-$uzayında tanımlı bir sürekli operatörün operatör ve $r-$normlarının eşitliğidir (Schaefer, 1974).

Lemma 3.3. E bir $AL-$uzayı veya birimli bir Dedekind tam $AM-$uzayı ise keyfi bir sürekli $T : E \to E$ operatörünün operatör normu ve $r-$normu birbirine eşittir. Yani,

$$\|T\| = \||T|\|$$

'dir.

Daugavet özelliğinin geçerliliği, söz konusu uzaylarda atomların yokluğuna bağlıdır. Q bir kompakt Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere $E = C(Q)$ olsun ve Q'nun izole bir q_o noktasına sahip olduğunu düşünelim. $Tf = -\chi_{\{q_0\}} f$ ile tanımlı $T : C(Q) \to C(Q)$ çarpım operatörü zayıf kompakttır ve

$\|I+T\| = 1 < 2 = 1 + \|T\|$

sağlanır. Dolayısıyla bu durumda $C(Q)$, Daugavet özelliği sağlamaz. Görüldüğü gibi bu başarısızlık, Riesz uzaylarında atomların varlığı ile ilgilidir.

Tanım 3.4. $0 \le x \le u$, $0 \le y \le u$ ve $x \wedge y = 0$ olduğunda $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa bir Riesz uzayındaki bir u pozitif elemanına bir atom denir. Arşimet Riesz uzaylarında bir u pozitif elemanın bir atom olması için gerek ve yeter şart; u ile üretilen ideal ile u ile üretilen vektör alt uzayının uyuşmasıdır (Luxemburg ve Zaanen, 1971).

$AM-$ ve $AL-$ uzaylarındaki atomlarla ilgili bilgiyi şu lemmada sunuyoruz.

Lemma 3.5. Q bir kompakt Hausdorff topolojik uzay olmak üzere $C(Q)$ Riesz uzayının bir atomunun olması için gerek ve yeter şart; Q'nun bir izole noktasına sahip olmasıdır. Benzer şekilde; $L_1(\mu)$ Riesz uzayının bir atoma sahip olması için gerek ve yeter şart; μ ölçüsünün atomlara sahip olmasıdır.

Diğer lemmamız, atomsuz Banach latislerinin dualite özelliklerini belirtir.

Lemma 3.6. Bir E Banach latisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. E'nin sıralı sürekli normu var ve E atomsuz ise, E'nin E' norm duali de atomsuz bir Banach latistir.

2. E' atomsuz ise E'de atomsuzdur.

İspat: (1) E sıralı sürekli normlu atomsuz bir Banach latis olsun ve çelişkiyle E''nün bir atomu olduğunu farz edelim ve bu atoma da $0 < \phi \in E'$ diyelim. Böylece bir $\psi \in E'$ için, $0 \le \phi \le \psi$ olduğunda bir $\lambda \ge 0$ vardır ki

$\psi = \lambda\phi$

sağlanır.

E'nin normunun sıralı sürekliliğinden ϕ lineer fonksiyonu sıralı süreklidir ve bu yüzden ϕ'nin sıfır ideali $N_\phi = \{x \in E : \phi(|x|) = 0\}$ bir banddır ve

$$E = N_\phi \oplus N_\phi^d = N_\phi \oplus C_\phi$$

eşitliği elde edilir. $\phi > 0$ kabulü $C_\phi \neq \{0\}$ olmasını gerektirir. Bu yüzden bir $0 < u \in C_\phi$ vardır. u'nun E'nin bir atomu olduğunu iddia ediyoruz.

Bunu görmek için, $0 < x \leq u$ ve $0 \leq y \leq u$ alındığında $x \wedge y = 0$ olsun. $y = 0$ olduğunu göstereceğiz. E'de x ile üretilen B_x bandı üzerine E'nin band izdüşümü P_x olsun. Açıkça,

$$\phi \circ P_x \in E' \text{ ve } 0 \leq \phi \circ P_x \leq \phi$$

sağlanır. Bu yüzden, bir $\lambda \geq 0$ var ki,

$$\phi \circ P_x = \lambda \phi$$

'dir. $0 < \phi(x) = \phi \circ P_x(x) = \lambda \phi(x)$'dan $\lambda = 1$ çıkar ve böylece

$$\phi = \phi \circ P_x$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\phi(y) = \phi \circ P_x(y) = \phi(0) = 0$$

ve C_ϕ taşıyıcısında ϕ'nin kesin pozitifliği ile

$$y = 0$$

eşitliğini görürüz. Bu yüzden u, E'nin bir atomudur ki bu bizim hipotezimizle çelişir. Yukarıda görüldüğü üzere iddia edildiği gibi E', atomsuz bir Banach latistir.

(2) Şimdi E' atomsuz olsun ve bir $0 < u \in E$ vektörünün bir atom olduğunu çelişkiyle kabul edelim. Buradan $B = \{\lambda u : \lambda \in R\} = \Re u$ vektör alt uzayı, E'nin bir izdüşüm bandıdır (Luxemburg ve Zaanen, 1971). Dolayısıyla, $A = B^d$ ise, $E = A \oplus B$ olur (A ve B bandlarının her ikisi de elbette kapalı vektör alt uzaylardır). Kolayca anlaşılır ki; E, $A \oplus \Re$ Banach latisine topolojik ve latis izomorfiktir ve böylece E', $A' \oplus \Re$'ye latis izomorfiktir. $A' \oplus \Re$'nin atomları olduğundan E''nde de atomların var olduğunu görüyoruz ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla E, atomsuz Banach latis olmalıdır.

Bir önceki lemmanın (1) bölümündeki bağıntıda, keyfi bir atomsuz Banach latisin norm dualinin atomsuz olmasına gerek olmadığı not edilmişti. $E = C[0,1]$ Banach latisi atomsuzdur halbuki onun dual normunun atomları vardır. Örneğin, her δ_x Dirac ölçüsü E''nün bir atomudur.

Şimdiki lemma birimli bir $AM-$uzayındaki zayıf kompakt çarpım operatörleriyle ilgilidir.

Lemma 3.7. Q bir kompakt Hausdorff topolojik uzayı ve $\alpha \in C(Q)$ olsun. $T_\alpha(x) = \alpha x$ ile tanımlanan $T_\alpha : C(Q) \to C(Q)$ çarpım operatörü zayıf kompakt ise Q'nun her yığılma noktasında α fonksiyonu sıfıra eşittir.

Özellikle Q'nun izole noktaları yoksa, sadece $C(Q)$ üzerindeki zayıf kompakt çarpım operatörü sıfır operatördür.

İspat: Q'nun bir kompakt Hausdorff topolojik uzayı olduğunu kabul edelim ve $\alpha \in C(Q)$ olmak üzere, $T_\alpha(x) = \alpha x$ ile tanımlı $T_\alpha : C(Q) \to C(Q)$ çarpım operatörü zayıf kompakt olsun. Aynı zamanda q_o, Q'nun bir yığılma noktası olsun.

Çelişkiyle $\alpha(q_o) \neq 0$ olsun. Buradan her $q \in V$ için $|\alpha(q)| \geq \varepsilon$ olacak şekilde q_o'ın bir V açık komşuluğu ve bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\Omega = \overline{V}$ koyalım ve T_α'yı $C(\Omega)$'den $C(\Omega)$'ye bir çarpım operatörü olarak alalım. Tietze Genişleme Teoreminden, $C(\Omega)$'nin fonksiyonları $C(Q)$'nun fonksiyonlarının Ω'ya kısıtlamalarıdır. Buradan, $T_\alpha : C(Q) \to C(Q)$'nın aynı zamanda zayıf kompakt operatör olduğu görülür ($T_\alpha : C(Q) \to C(Q)$ operatörünün zayıf kompaktlığı ile $C(Q)$'nun her norm sıralı $\{f_n\}$ dizisinin $\{g_n\}$ gibi bir alt dizisi ve bir $g \in C(Q)$ var ki, her $q \in Q$ için $\alpha(q): g_n(q) \to g(q)$ olması eşdeğerdir).

Ω' nun hiçbir noktasında α fonksiyonu sıfır olmadığından $I : C(Q) \to C(Q)$ birim operatörü bir zayıf kompakt operatör olmalıdır ve böylece $C(\Omega)$ bir yansımalı(refleksif) Banach latistir. Diğer bir ifadeyle, Ω bir sonlu kümedir. Sonuç olarak çelişkiyle q_o, bir yığılma noktası değildir. Bu yüzden $\alpha(q_o) = 0$'dır.

Daugavet denklemini sağlayan iki operatör sınıfını şu lemmada veriyoruz.

Lemma 3.8. E bir $AL-$uzayı veya birimli Dedekind tam bir $AM-$uzayı ve $T:E\to E$ bir sürekli operatör olsun. Eğer T,

(a) Pozitif, veya

(b) Birimden ayrık

ise Daugavet denklemini sağlar.

İspat: Öncelikle $E=C(Q)$'nin birimi e olan bir Dedekind tam $AM-$uzayı olduğunu farz edelim. Eğer T pozitif ise,

$$\|I+T\|=\big\||I+T|e\big\|=\|e+Te\|$$

$$=\sup_{q\in Q}[1+Te(q)]=1+\sup_{q\in Q}Te(q)=1+\|Te\|=1+\|T\|$$

'dir. Eğer T birimden ayrık ise Lemma 3.5'ten;

$$\|I+T\|=\big\||I+T|\big\|=\big\|I+|T|\big\|=1+\big\||T|\big\|=1+\|T\|$$

elde edilir.

Eğer E bir $AL-$uzayı ise E' birimli Dedekind tam bir $AM-$uzayıdır. T pozitif ise $T':E'\to E'$ adjoint operatörü pozitif ve T, E'de birim operatörden ayrık ise T', E''nde birim operatörden ayrıktır (Bu $L(E)$'den $L(E')$'ne $S\mapsto S'$ lineer izometrisinin bir latis izometri olmasından elde edilir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).). Bu yüzden, bir önceki durum

$$\|I+T\|=\|I'+T'\|=1+\|T'\|=1+\|T\|$$

sonucunu verir.

Lemma 3.8, atomik olmayan $1<p<\infty$ L_p-uzayları için geçersizdir. Örneğin, eğer rankı 1 olan $T:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ operatörü e sabit bir fonksiyon olmak üzere

$$Tf=\left(\int_0^1\sqrt{2x}\,f(x)dx\right)e$$

şeklinde tanımlanmış ise T pozitif, kompakt ve birimden ayrıktır ($\|T\| = 1$ bir özdeğer değildir) ve Daugavet denklemini sağlamaz (Sonuç 2.5).

Şimdi vereceğimiz lemma, Teorem 3.2'nin ispatını tamamlar.

Lemma 3.9. Eğer E atomsuz bir $AL-$uzayı ya da atomsuz birimli Dedekind tam bir $AM-$uzayı ve $T : E \to E$ bir zayıf kompakt operatör ise T, birimden ayrık operatördür ve dolayısıyla Daugavet denklemini sağlar.

İspat: $T : E \to E$ bir zayıf kompakt operatör olsun. Öncelikle E'yi atomsuz birimli Dedekind tam bir $AM-$uzayı olarak alalım. T'nin $|T|$ modülüsünün bir zayıf kompakt operatör olduğu biliniyor (Schmidt, 1988).

K. D. Schmidt'in (1988) ispatını kullanarak S bir zayıf pozitif kompakt operatör ve P bir pozitif izdüşüm olmak üzere T'nin $|T|$ modülüsü,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "|T|"] \arrow[dr, "S"'] & & E \\ & E'' \arrow[ur, "P"'] & \end{tikzcd}$$

biçimindeki çarpım olarak yazılır.

$P : E'' \to E$ izdüşümü, $I : E \to E$ birim operatörünün bir keyfi pozitif genişlemesidir (E, E'''nü majorize ettiğinden en az bir pozitif genişleme daima vardır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).). $S : E \to E''$ operatörü, $|T''| : E'' \to E''$ zayıf kompakt operatörünün E'ye kısıtlamasıdır. $|T''|$'nin zayıf kompaktlığı şu şekilde kurulur: E' bir $AL-$uzayı ve $T' : E' \to E'$ operatörü zayıf kompakt olduğundan T''nün $|T'| : E' \to E'$ modülüs operatörü de zayıf kompakttır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). Buradan

$$|T''| = |T'|'$$

olur ve böylece $|T''|$ zayıf kompakttır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

$|T| = P|T''|$ olduğunu görmek için $x \in E^+$ alalım. Spektrum E'de alındığında $y \in E$ için $|y| \leq x$ sağlanırsa

$Ty = T''y \leq |T''|x$

olur ve

$Ty = PTy \leq P|T''|x \in E$

'dir ve böylece

$|T|x = \sup\{Ty : y \in E, |y| \leq x\} \leq P|T''|x$

elde edilir. Diğer yandan, $x'' \in E''$ için $|x''| \leq x$ sağlanırsa $[-x, x]$'de bir $\{x_\alpha\}$ ağı var ki, $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E'', E')} x''$'dir ($x_\alpha \to x''$, $\sigma(E'', E')$ topolojisinde yakınsar) (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). O halde, spektrum E'''nde alındığında $T''x_\alpha = Tx_\alpha \leq |T|x$'den $T''x'' \leq |T|x$ ve böylece

$|T''|x = \sup\{T''x'' : x'' \in E'', |x''| \leq x\} \leq |T|x$

elde edilir. Bu sonuçla,

$P|T''|x \leq P|T|x = |T|x$

'dir ve

$|T|x = P|T''|x$

olur.

$0 \leq I \wedge |T| \leq |T|$ eşitsizliğinden $I \wedge |T|$'nin bir zayıf kompakt çarpım operatörü olduğunu görüyoruz (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). Lemma 3.7'den,

$I \wedge |T| = 0$

sonucu çıkar.

Şimdi de E'yi atomsuz bir $AL-$uzayı olarak alalım. E sıralı sürekli norma sahip olduğu için Lemma 3.6'dan, E' norm duali, atomsuz birimli Dedekind tam bir $AM-$uzayıdır. Bununla birlikte, $T' : E' \to E'$ bir zayıf kompakt operatördür ve dolayısıyla önceki durumdan

$I' \wedge |T'| = 0$

olur. Şimdi $S \mapsto S'$ adjoint dönüşümünün bir latis izometri olduğu kullanıldığında,

$$(I \wedge |T|)' = I' \wedge |T|' = I' \wedge |T'| = 0$$

olduğunu görürüz ve dolayısıyla bu durumda da

$$I \wedge |T| = 0$$

olur (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

4. SONUÇLAR

Daugavet denkleminde operatör veya uzay üzerindeki değişikliklerle yeni neticeler alınmaktadır. Bu denklem, başka yapıdaki uzaylara da benzer şekilde genişletilmektedir.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y.A., (1990), A generalization of a theorem J. Holub, Proc. Amer. Math. Soc. 108, 937-939.

Abramovich, Y.A., Some new classes of Banach spaces on which compact operators satisfy the daugavet equation, J. Operator Theory, to appear.

Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985), "Positive Operators", Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 119, Academic Press, New York/London.

Babenko, V.F. ve Pichugov, S.A., (1981), A property of compact operators in Banach spaces, Ukranian Math, J. 33, 374-376.

Chauveheid, P., (1982), On a property of compact operators in Banach spaces, Bull. Soc. Roy.Sci. Lege 51, 371-378.

Daugavet, I.K., (1963), On a property of compact operators in the space C, Uspekhi Mat. Nauk 18, No.5, 157-158. [In Russian]

Dunford, N. ve Schwartz, J.T., (1958) "Linear Operators I,", Wiley-Intercience, New York/London.

Foias, C. ve Singer, I., (1965), Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions, Math. Z. 87, 434-450.

Holub, J.R., (1986), A property of weakly compact operators on C[0,1], Proc. Amer. Math. Soc. 97, 396-398.

Holub, J.R., (1987), Daugavet's equation and operators on $L^1(\mu)$, Proc. Amer. Math. Soc. 100, 295-300.

Kamowitz, H., (1984), A property of a compact operators, Proc. Amer. Math. Soc. 91, 231-236.

Köthe, G., (1969), "Topological Vector Spaces I,", Springer-Verlag, New York/Heidelberg.

Krasnoselskii, M.A., (1967), A class of linear operators in the space of abstract continuous functions, Math. Notes 2, 856-858.

Lovaglia, A.R., (1955), Locally uniformly convex Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 78, 225-238.

Lozanovskii, L.Y., (1966), On almost integral operators in KB-spaces, Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astronom. No. 7, 35-44.

Luxemburg, W.A.J. ve Zaanen, A.C., (1971), "Riesz spaces I,", North-Holland, Amsterdam.

Schaefer, H.H., (1974), "Banach Lattice and Positive Operators", Springer-Verlag, New York/Berlin.

Schmidt, K.D., (1988), On the modulus of weakly compact operators and strongly addivite vector measures, Proc. Amer. Math. Soc. 102, 862-866.

Schmidt, K.D., (1990), Daugavet's equation and orthomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 108, 905-911.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	03.01.1978	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1995	İnönü Teknik Lisesi
Lisans	1995-2000	Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

1999-2000 Toprak Bilgisayar
2000-Devam ediyor Halis Kutmangil İ.Ö.O.-Matematik Öğretmeni