

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

139851

RASYONEL B SPLINE ile EĞRİ ve YÜZEY OLUŞTURMA

139851-

Özge İPEK

**F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd .Doç. Dr. Fatih Taşçı

Y. Doç. Dr. Fatih TAŞÇI 04.04.2003

Prof. Dr. Mehmet Bayraktaroglu 04.04.2003

Doç. Dr. N. Yılmaz 04.04.2003

İSTANBUL, 2003

**YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
REKORDANTASYON MERKEZİ**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. DÜZLEM EĞRİLERİ.....	2
2.1 Spline Fonksiyon.....	2
2.2 Spline Fonksiyonlarıyla İnterpolasyon.....	2
2.3 Kübik Spline İnterpolasyonu.....	3
3. UZAY EĞRİLERİ.....	5
3.1 Parametrik Kübik Spline.....	5
3.2 Kübik Spline Uç koşulları.....	13
4. B SPLINE BAZ FONKSİYONLARI ve EĞRİLERİ.....	17
4.1 B Spline Baz Fonksiyonları.....	17
4.2 B Spline Eğrileri.....	21
4.3 Rasyonel B Spline Baz Fonksiyonları ve Eğrileri	47
5. YÜZEYLER.....	52
5.1 Dönme Yüzeyleri.....	52
5.2 Parçalı Yüzey Temsili.....	53
5.3 Bilineer Yüzey.....	55
5.4 Ruled Yüzey.....	56
5.5 Lineer Coons Yüzey.....	57
5.6 Coons Bikübik Yüzey.....	59
5.7 B Spline Yüzeyleri.....	61
5.8 Rasyonel B Spline Yüzeyleri.....	65
6. SONUÇ.....	68
6.1 Uygulamalar.....	69
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGE LİSTESİ

B_i	Spline parçası için belirlenen sabit katsayılar
B_{ik}	Parametrik kübik spline parçası için sabit katsayılar
$B_{i,j}$	Poligon ağının köşeleri
C^{k-2} ve C^{l-2}	Sırasıyla u ve w yönlerindeki süreklilikler
F_{ik}	Blending veya weigting (ağırlık) fonksiyonları
k ve l	Sırasıyla u ve w yönlerindeki B Spline baz fonksiyonları mertebeleri
$N_{i,k}(t)$	k. mertebeden B Spline. baz fonksiyonu
$N_{i,k}(u)$ ve $M_{j,l}(w)$	B Spline yüzeyi için sırasıyla u ve w yönlerindeki B Spline baz fonksiyonları
P(t)	Parametrik kübik spline parçası üzerindeki herhangi bir noktanın yer vektörü
$P_k(t)$ ve $P_{k+1}(t)$	İki komşu kübik spline parçası
P_1 ve P_2	Spline parçasının uç noktalarındaki yer vektörleri
P_1' ve P_2'	Spline parçasının uç noktalarındaki teğet vektörleri
P_u ve P_w	Bir Coons Bikübik yüzey parçası için sırasıyla u ve w yönlerinde köşelerdeki teğet vektörler
P_{uw}	Burulma (twist) vektörü
$R_{i,k}(t)$	k. mertebeden Rasyonel B Spline baz fonksiyonu
S(x)	Parçalı polinom eğrisi (Kübik spline fonksiyonu)
$\{S_k(x)\}$	Kübik polinomlar kümesi
$\{S_{k,j}\}$	$S_k(x)$ kübik polinom parçasının katsayıları
$S_{i,j}(u, w)$	Rasyonel B Spline baz fonksiyonları
[X] ve [Y]	Düğüm (knot) vektörleri
x_i ve y_j	$x_i \leq x_{i+1}$ sırasını sağlayan düğüm vektörlerinin elemanları
$\{(x_k, y_k)\}$	n+1 tane noktadan oluşan küme
$Q(u, w)$	Spline yüzeyi (B Spline, Rasyonel B Spline)

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1	İki parçalı kübik spline parçası..... 7
Şekil 4.1	B Spline eğrilerinin konveks gövde özelliği.....21
Şekil 4.2	Katlı poligon köşeleri için konveks gövde, $k=3$22
Şekil 4.3	Düz parçalar arasına düzgün (C^{k-2}) geçiş.....23
Şekil 4.4	Periyodik uniform B Spline baz fonksiyonları.....23 [X]=[0 1 2 3 4 5 6], $n+1=4$, $k=3$
Şekil 4.5	Open uniform B Spline baz fonksiyonları.....24 [X]=[0 0 0 0 1 1 1 1], $n+1=4$, $k=4$
Şekil 4.6	Open uniform B Spline baz fonksiyonları.....25 [X]=[0 0 0 1 2 2 2], $k=3$, $n+1=4$
Şekil 4.7	Nonuniform baz fonksiyonları.....26 (a) [X]=[0 0 0 1 2 3 3 3] (b) [X]=[0 0 0 0.4 2.6 3 3 3] (c) [X]=[0 0 0 1.8 2.2 3 3 3] (d) [X]=[0 0 0 1 1 3 3 3] (e) [X]=[0 0 0 2 2 3 3 3]
Şekil 4.8	Periyodik baz fonksiyonları.....30 $n+1=4$, (a) $k=1$ (b) $k=2$ (c) $k=3$
Şekil 4.9	Open B Spline baz fonksiyonu kurma32 $n+1=4$, (a) $k=1$ (b) $k=2$ (c) $k=3$
Şekil 4.10	Farklı mertebelerin B Spline eğrisi üzerindeki etkisi35
Şekil 4.11	Katlı B_2 köşesinin B Spline eğrisi üzerindeki etkisi36
Şekil 4.12	B Spline eğrilerinin yerel kontrolü 36
Şekil 4.13	Farklı mertebelerin periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi..... 39
Şekil 4.14	Katlı köşelerin periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi39
Şekil 4.15	Kapalı periyodik B Spline eğrisi41
Şekil 4.16	Bir tek poligon köşesinin hareketinin kapalı periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi 42
Şekil 4.17	Katlı köşelerin kapalı periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi 42
Şekil 4.18	Nonuniform B Spline eğrileri $k=3$43 (a) [X]=[0 0 0 1 2 3 3 3] (b) [X]=[0 0 0 1 1 3 3 3]
Şekil 4.19	Open nonuniform B Spline eğrilerinin karşılaştırılması..... 47 (a)Uniform düğüm vektör (b)Nonuniform giriş uzaklığıyla orantılı düğüm vektör (c) B_2 'de iki katlı ve nonuniform giriş uzaklığıyla orantılı düğüm vektör
Şekil 4.20	Rasyonel B Spline baz fonksiyonları $n+1=5$, $k=3$ 49 [X]=[0 0 0 1 2 3 3 3]
Şekil 4.21	Rasyonel B Spline eğrileri $n+1=5$, $k=3$49 [X]=[0 0 0 1 2 3 3 3] ve [H]=[1 1 h_3 1 1]
Şekil 4.22	Rasyonel B Spline baz fonksiyonları $n+1=5$, $k=3$ 50 [X]=[0 1 2 3 4 5 6 7] ve [H]=[1 1 h_3 1 1]
Şekil 4.23	Rasyonel B Spline eğrileri $n+1=5$, $k=3$50 [X]=[0 1 2 3 4 5 6 7] ve [H]=[1 1 h_3 1 1]
Şekil 4.24	Tek bir poligon köşesinin hareketinin Rasyonel B Spline eğrisi51 üzerindeki etkisi $n+1=5$, $k=4$, [H]=[1 1 0.25 1 1]

Şekil 4.25	B_3 katlı köşesinin Rasyonel B Spline eğrisi üzerindeki etkisi $n+1=5, k=4$. 51 (a)tek köşe $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$ (b)iki katlı köşe $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 1]$ (c)üç katlı köşe $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 1]$
Şekil 5.1	Yüzey ile kürenin arakesiti 54
Şekil 5.2	Küresel yüzey parçası 54
Şekil 5.3	Parametrik uzayda bilineer interpolasyon..... 55
Şekil 5.4	Bir Ruled yüzeyin özellikleri 57
Şekil 5.5	Lineer Coons Yüzey.....58
Şekil 5.6	Bikübik Coons yüzey parçasının geometrisi59
Şekil 5.7	Bikübik Coons yüzey parçası60
Şekil 5.8	Katlı ağ doğruları ile 4.mertebeden B Spline yüzeyleri62
Şekil 5.9	B Spline yüzeylerinde yerel kontrol63
Şekil 5.10	Açık poligonlar için periyodik B Spline yüzeyleri63 (a)3. mertebeden düzgün Ruled yüzey (b) u doğrultusunda aynı doğru üzerinde bulunan 5 ağ noktasının oluşturduğu 3. mertebeden bölge
Şekil 5.11	(a)katlı ağ doğrularının 4. mertebeden yüzeyde neden olduğu sivrilik Kapalı periyodik B Spline yüzeyleri64 (a)düzgün silindirik yüzey (b)pertürbe edilmiş silindirik yüzey
Şekil 5.12	3. mertebeden birleştirilmiş B Spline yüzeyleri 65 (a)Açık poligon ağı (b)Kapalı poligon ağı
Şekil 5.13	Rasyonel B Spline yüzeyleri $n+1=5, m+1=4, k=1=4$ 67 (a)tüm iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j} = 0$ (b)tüm iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j} = 500$
Şekil 6.1	Rasyonel B Spline eğrisi(yunus) poligon köşe sayısı $n+1=44$, mertebe $k=4, h=0.25$ 69
Şekil 6.2	B Spline eğrisi(garfield) poligon köşe sayısı $n+1=223$, mertebe $k=3, h=1$70
Şekil 6.3	Rasyonel B Spline yüzeyi, poligon köşe sayısı 9×9 ($n+1=9, m+1=9$), u yönündeki mertebe $k=4$, w yönündeki mertebe $l=4, h=0,25$ 71
Şekil 6.4	Rasyonel B Spline yüzeyi (paraboloid), poligon köşe sayısı 9×2 ($n+1=9, m+1=2$) u yönündeki mertebe $k=3$, w yönündeki mertebe $l=2, h=0.5$ 72

ÖNSÖZ

Tezimi hazırlarken bana yardımcı olan ve destekleyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Fatih Taşçı'ya teşekkür ederim.

Beni her zaman destekleyip, en büyük emeği veren sevgili anne ve babama, bana sabırla yardımcı olmaya çalışan kardeşlerim Evrim ve Esra İpek değerli arkadaşlarım Fazilet Akdoğan, Sema Özkul İleri, A.Ebru Kansu, Araş. Gör. Temha Erkoç, Araş. Gör. Yonca Sezer, Araş. Gör. Ramazan Tekercioğlu'na teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Eğri ve yüzey oluşturulmasında, verilen data'lara uyan yeteri kadar esnekliğe sahip ve bilgisayarda kolayca hesaplanabilen fonksiyonlar tercih edilir. Bu amaçla kullanılan polinomların derecesinin arttırılması düzensiz sahnımlar sergileyen fonksiyonların elde edilmesine neden olur.

Spline fonksiyonlarının düzgün ve esnek olmaları, kolayca depo edilebilmeleri, hesaplama kolaylığı sağlamaları ve daha yüksek boyutlara kolayca genelleştirilebilmeleri nedeniyle eğri ve yüzey oluşturulmasında, kullanılması uygundur.

Bu çalışmada;

İkinci bölümde Spline fonksiyonlarının matematiksel temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde parametrik kübik spline'lar verilmiştir.

Dördüncü bölümde B Spline baz fonksiyonları ve eğrileri verilmiştir.

Beşinci bölümde bazı yüzeyler hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Ayrıca, en son bölümde C ile kodlanmış programlar kullanılarak eğri ve yüzeyler için bazı uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Spline fonksiyon, düğüm vektör, baz fonksiyonları, poligon köşeleri

ABSTRACT

In polynomial interpolation, for rapidly changing values of the function to be approximated the degree of the polynomial has to be increased and the result is often a function exhibiting wild oscillation.

The useful properties of the spline functions are; smooth and flexible, easy to store, manipulate, evaluate and generalize to higher dimensions.

In this study,

In the second chapter, mathematical foundation of splines are given.

In the third chapter, space curves are given.

In the fourth chapter, B Spline basis function and curves are introduced..

In the fifth chapter, a brief information is given for some surfaces.

Moreover, some practical applications on curves and surfaces are given at the end of the study by using programs coded in C.

Keywords: Spline, knot vector, B-spline basis, polygon vertices

1.GİRİŞ

Polinom interpolasyonunda yaklaşım yapılacak olan fonksiyonun değerleri hızlı bir şekilde değişiyorsa polinomun derecesi arttırılmalıdır. Bunun sonucunda sık sık düzensiz salınımlar yapan fonksiyonlar elde edilir. Bu durum, temel aralık alt aralıklara bölündüğünde ve istenen yaklaşım fonksiyonu bu aralıklarda tanımlanan düşük dereceli farklı polinomlarla gösterilen parçalı bir polinom alındığında değişir. Bu nedenle Spline fonksiyon adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfının kullanılması daha uygundur. Spline fonksiyon ilk defa 1946 yılında Schönberg tarafından öne sürülmüş ve 1960 yılından başlayarak teori ve pratikte büyük bir gelişme göstermiştir.

Özellikle, Spline fonksiyonu birçok alanda kullanılmaktadır. Yaklaşım teorisi, nümerik türev ve integrasyon, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, eğri ve yüzey (otomobil gövdeleri, uçak gövdeleri ve kanatları, şişe, mobilya, ayakkabı dizaynı vb.) oluşturulması ve kompleks geometrik şekilli nesnelerin matematik modellemesi gibi alanlarda sıkça kullanılır.

Tekercioğlu (2001), Spline ile eğri ve yüzey oluşturulması konusunu yüksek lisans tezinde incelemiş olup, bu çalışmada bahsedilen tezdten farklı olarak Rasyonel B Spline'lar ile eğri ve yüzey oluşturulması konusu incelenmiştir.

2. DÜZLEM EĞRİLERİ

2.1 Spline Fonksiyon

Bir Spline fonksiyon; alt aralıklar üzerinde tanımlanmış, kesin süreklilik şartıyla birbirine bağlanan polinomlardan meydana gelir.

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ koşulunu sağlayan $n+1$ nokta verilmiş olsun .Bu noktalara düğüm (knot) adı verilir.

$k \geq 0$ olmak üzere k . dereceden ve x_0, x_1, \dots, x_n düğüm değerlerine sahip bir S spline fonksiyonu aşağıdaki özellikler sahiptir :

i) Herbir $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralıklarında en fazla k . dereceden bir polinomdur.

ii)S, herbir alt aralıkta $(k-1)$. mertebeye kadar sürekli türevlere sahip polinomlardan oluşur. Böylece S spline fonksiyonu $[x_0, x_n]$ aralığında $(k-1)$. mertebeye kadar tüm türevleri sürekli bir polinomdur.

2.2 Spline Fonksiyonlarıyla İnterpolasyon

$\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ noktaları kümesi için polinom interpolasyonu genelde uygun değildir. Bunun için kullanılacak bir başka metot ; daha düşük dereceli $S_k(x)$ polinom parçalarını birleştirmek ve (x_k, y_k) ile (x_{k+1}, y_{k+1}) düğüm noktaları arasında interpolate etmektir. $y = S_k(x)$ ve $y = S_{k+1}(x)$ sırasıyla $[x_k, x_{k+1}]$ ve $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ aralıklarında değer alırlar. Grafiğin iki parçası (x_{k+1}, y_{k+1}) düğüm noktasında birleştirilir. $\{S_k(x)\}$ fonksiyonlar kümesi $S(x)$ ile gösterilen bir parçalı polinom oluşturur.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ S_{n-1}(x) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

x 'in sabit bir değeri için x 'i içeren $[x_k, x_{k+1}]$ aralığı $x-x_1, x-x_2, \dots, x-x_k, x-x_{k+1}$ farkları $k+1$ en küçük tamsayı oluncaya kadar $x-x_{k+1} < 0$ koşulu oluşturularak tespit edilir.

Data noktaları için bir polinom eğrisinin oluşturulması birçok uygulama alanına sahiptir. Matematiksel olarak kübik $S_k(x)$ polinomları her bir $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında kurulabilir ve böylece parçalı $y = S(x)$ eğrisinin 1. ve 2. mertebeden türevleri $[x_0, x_n]$ aralığında sürekli olur. $S'(x)$ 'in sürekliliği $y = S(x)$ grafiğinin keskin köşelere sahip olmaması ve $S''(x)$ 'in sürekliliği eğrilik yarıçapının her bir noktada tanımlanmış olması demektir.

2.3 Kübik Spline İnterpolasyonu

$\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ olan $n+1$ nokta gözönüne alalım. Aşağıdaki özellikleri sağlayan n tane kübik $S_k(x)$ polinomu varsa, $S(x)$ 'e kübik spline denir.

$$1.) S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1} \cdot (x-x_k) + s_{k,2} \cdot (x-x_k)^2 + s_{k,3} \cdot (x-x_k)^3 \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$2.) S(x_k) = y_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Spline verilen noktalardan geçer.

$$3.) S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

Spline sürekli bir fonksiyondur.

$$4.) S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$$

Spline birinci mertebeden türevi sürekli bir fonksiyondur.

$$5.) S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$$

Spline ikinci mertebeden türevi sürekli bir fonksiyondur.

n tane kübik polinomun her birinde 4 tane katsayı vardır. Böylece parçalı kübik polinomda $4n$ tane bilinmeyen katsayı olur. Ayrıca her bir aralık üzerinde iki tane interpolasyon şartı, örneğin $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı için

$$S(x_i) = y_i \quad \text{ve} \quad S(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

sağlanmalıdır. Böylece n tane aralık göz önünde bulundurulursa, $2n$ tane şart elde edilir.

$$S(x_i) = S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$$

şartı interpolasyon şartları arasında sayılmıştır.

S' 'nün sürekliliği için

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

koşulları sağlanması gerektiğinden $n-1$ tane şart ve benzer şekilde S'' 'nün sürekliliğinden de $n-1$ tane şart elde edilir. Hepsi beraber göz önüne alınırsa , $4n$ tane bilinmeyen katsayıyı hesaplayabilmek için

$$2n + n - 1 + n - 1 = 4n - 2$$

tane gerçekleşmesi gereken şart elde edilir. Böylece bir Spline'nın kurulabilmesi için iki tane daha şarta ihtiyaç olduğu görülür. Bu şartlara uç nokta şartları denir. Uç nokta şartlarına göre Spline özel isimler alır.



3. UZAY EĞRİLERİ

3.1 Parametrik Kübik Spline

$y = f(x)$ formunda her zaman temsil mümkün değildir. Bu yüzden eğrinin $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ parametrik temsilini kullanmak zorunda kalabiliriz. Burada t parametreyi göstermektedir.

t_0, t_1, \dots, t_n parametre değerleri verilen $n+1$ noktaya karşılık gelir; bu değerleri büyüklüklerine göre sıralı olduğunu farzedelim. Buradan (t_k, x_k) ve (t_k, y_k) $k = 0, 1, 2, \dots, n$ tablo değerlerini interpolate eden spline fonksiyonu belirleyebiliriz. Böylece parametrik temsille istenilen eğri tanımlanabilir.

Kübik spline parçası üzerindeki herhangi bir noktanın yer vektörü $P(t)$ olmak üzere tek bir parametrik kübik spline parçası için denklem

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.1)$$

$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ şeklinde vektör değerli bir fonksiyondur. $P(t)$ 'nin üç bileşeni yer vektörünün kartezyen koordinatlarıdır.

Her bir bileşen $P(t)$ 'ye benzer bir formüle sahiptir :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{i_x} t^{i-1} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ y(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{i_y} t^{i-1} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ z(t) &= \sum_{i=1}^4 B_{i_z} t^{i-1} & t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

B_i katsayıları her bir spline parçası için dört sınır şartı belirtilerek bulunur.

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3$$

olur.

P_1 ve P_2 spline parçasının uç kısımlarında tanımlanmış yer vektörleri, P_1' ve P_2' ise spline parçasının uç kısımlarındaki teğet vektörler olsunlar. (3.1) denklemi türetilirse

$$P'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i (i-1)t^{i-2} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.3)$$

(3.3) eşitlik açık olarak yazılırsa

$$P'(t) = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2 \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

elde edilir.

Genelliği bozmamak için $t_1 = 0$ alınır ve dört sınır koşulu

$$P(0) = P_1$$

$$P(t_2) = P_2$$

$$P'(0) = P_1'$$

$$P'(t_2) = P_2'$$

kullanılarak B_i katsayıları için dört eşitlik

$$P(0) = B_1 = P_1 \quad (3.4a)$$

$$P'(0) = \sum_{i=1}^4 (i-1)t^{i-2} B_i \Big|_{t=0} = B_2 = P_1' \quad (3.4b)$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \Big|_{t=t_2} = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3 = P_2 \quad (3.4c)$$

$$P'(t_2) = \sum_{i=1}^4 (i-1) B_i t^{i-2} \Big|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2 = P_2' \quad (3.4d)$$

elde edilir.

Bu eşitliklerden B_3 ve B_4 çözümlürse

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \quad (3.5a)$$

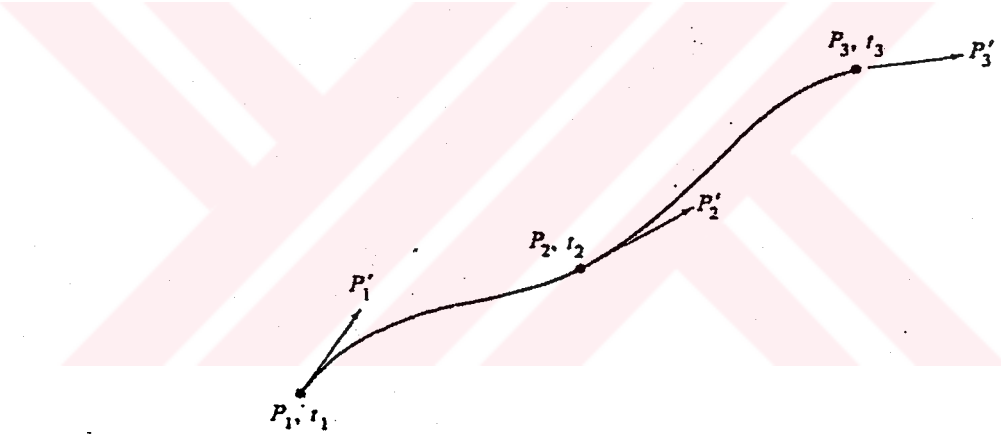
$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \quad (3.5b)$$

elde edilir.

B_1, B_2, B_3, B_4 değerleri kübik spline parçasını belirler. Parçanın şekli, parçanın uçlarındaki yer ve teğet vektörlerine bağlıdır. Her bir yer ve teğet vektörü üç tane bileşene sahip olduğundan bir kübik uzay eğrisi on iki vektör bileşene ve t_2 parametre değerine bağlıdır. (3.4) ve (3.5) eşitlikleri (3.1) denkleminde yerine koyulursa tek bir kübik spline parçası için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$P(t) = P_1 + P_1' t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] t^3 \quad (3.6)$$

(3.6) denklemi tek bir kübik spline parçası içindir. Eğriyi temsil etmek için birçok parça birleştirilir. Şekil 3.1'de iki komşu parça gösterilmiştir. Burada P_1, P_2, P_3 yer vektörleri P_1', P_2', P_3' teğet vektörleri ve t_2 ve t_3 parametre değerleri bilinmektedir.



Şekil 3.1 İki parçalı kübik spline parçası

Bu takdirde (3.6) denklemi her iki parçaya da uygulanır. Bununla beraber iki parça arasındaki birleşme noktalarında P_2'' teğet vektörü bilinemez. Fakat bu vektör birleşme noktalarında süreklilik şartı kullanılarak belirlenir.

k. dereceden parçalı spline birleşme noktalarında (k-1). mertebeden sürekli türeve sahip olduğundan dolayı kübik spline iç birleşme noktalarında 2. mertebeden sürekli türeve sahiptir.

Yani, $P_2''(t)$ türevi birleşme noktaları boyunca süreklidir. (3.1) denklemi iki defa türetilirse

$$P''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2)B_i t^{i-3} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3.7)$$

elde edilir. İlk kübik spline parçası için parametre değişim aralığı $0 \leq t \leq t_2$ 'dir.

(3.7) denklemi parçanın uç noktasında ($t = t_2$) hesaplanırsa

$$P''(t_2) = 6B_4t_2 + 2B_3$$

olur.

İkinci kübik spline parçası için parametrenin değişim aralığı $0 \leq t \leq t_3$ 'tür.

İkinci parçanın başlangıcında ($t = 0$), (3.7) denklemi hesaplanırsa

$$P''(0) = 2B_3$$

elde edilir. Bu iki sonucu eşitleyip ve (3.4a, b), (3.5a) eşitlikleri kullanılırsa

$$6t_2 \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] + 2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] = 2 \left[\frac{3(P_3 - P_2)}{t_3^2} - \frac{2P_2'}{t_3} - \frac{P_3'}{t_3} \right]$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemin sol tarafı, ilk parçanın sonundaki eğriliği, sağ tarafı ise ikinci parçanın başındaki eğriliği göstermektedir. $t_2 t_3$ ile çarpılırsa ve düzenlenirse

$$t_3 P_1' + 2(t_3 + t_2) P_2' + t_2 P_3' = \frac{3}{t_2 t_3} [t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)] \quad (3.8)$$

elde edilir. Bu denklemden P_2' çözülebilir.

Bulunan sonuçlar herhangi iki komşu kübik parçası $P_k(t)$ ve $P_{k+1}(t)$ ile gösterilmek üzere genelleştirilebilir. Burada $P_k(t)$ ile P_k ve P_{k+1} yer vektörleri arasındaki parametrik eğriyi göstermekteyiz.

Herhangi iki komşu kübik spline parçası P_k ve P_{k+1} için denklemler

İlk parça için,

$$P_k(t) = P_k + P_k' t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P_k'}{t_{k+1}} - \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P_k'}{t_{k+1}^2} + \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}^2} \right] t^3 \quad (3.9)$$

ve ikinci parça için

$$P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P'_{k+1}t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P'_{k+1}}{t_{k+2}} - \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+2}^2} + \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}^2} \right] t^3 \quad (3.10)$$

elde edilir.

İlk parça için parametre değişim aralığı $0 \leq t \leq t_{k+1}$ ve ikinci parça için parametre değişim aralığı $0 \leq t \leq t_{k+2}$ 'dir.

Herhangi iki komşu spline parçası için ortak iç noktalarda ikinci türevler eşitlenirse

$$P_k''(t_{k+1}) = P_{k+1}''(0)$$

(3.8)'e denk sonuç elde edilir. Yani, herhangi iki kübik spline parçası P_k ve P_{k+1} 'in iç birleşim noktalarındaki teğet vektör

$$t_{k+2}P_k' + 2(t_{k+1} + t_{k+2})P_{k+1}' + t_{k+1}P_{k+2}' = \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}} [t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k)] \quad 1 \leq k \leq n-2$$

eşitliğinden elde edilir.

Bu denklem tüm spline parçalarına uygulanırsa P_k' $2 \leq k \leq n-1$ teğet vektörleri için $n-2$ tane denklem elde edilir. Sonuç matris formunda

$$\begin{bmatrix} t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1} & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{ t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2}) \} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde veya

$$[M^*][P'] = [R]$$

n tane teğet vektörü için n-2 tane denklem elde edildiğinden $[M^*]$ kare matris değildir ve bundan dolayı $[P']$ için çözüm elde etmek üzere tersi alınmaz.

P'_1 ve P'_n teğet vektörlerinin bilindiği varsayılarak, (3.11)'de belirtilen matris form aşağıdaki şekle getirilerek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5)t_4 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_n & 2(t_n+t_{n-1})t_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2}) \} \\ P'_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

veya

$$[M][P'] = [R]$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece $[M]$ tersi alınabilir bir kare matris olur. $[M]$ bant (tridiagonal) matris olduğundan tersini bulmak için yapılan hesaplamalar kolaylaşmaktadır. Ayrıca $[M]$ köşegen baskın bir matristir. Bu sebeplerle, $[M]$ 'nin tersi vardır ve tek çözüm verir.

$[P']$ için tek bir çözüm

$$[P'] = [M]^{-1} [R] \quad (3.13)$$

şeklinde bulunur.

P'_k teğet vektör değerleri belirlendikten sonra her bir spline parçası için B_i katsayıları belirlenebilir.

(3.4) ve (3.9) eşitlikleri genişletilirse

$$\begin{aligned} B_{1k} &= P_k \\ B_{2k} &= P'_k \\ B_{3k} &= \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \\ B_{4k} &= \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

P_k , P'_k vektör değerli olduklarından B_i katsayıları da vektör değerli olur. Herhangi bir spline parçası k için bu denklemlerin matris formu

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{t_{k+1}^2} & \frac{-2}{t_{k+1}} & \frac{3}{t_{k+1}^2} & \frac{-1}{t_{k+1}} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & \frac{-2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklindedir.

Verilen n yer vektörü, $1 \leq k \leq n$ P_k 'dan geçen uç teğet vektörleri P'_1 ve P'_n olan parçalı kübik spline elde etmek için (3.13) denklemi kullanılarak iç teğet vektörler P'_k , $2 \leq k \leq n-1$ elde edilir.

Daha sonra her bir parçalı kübik spline parçasının teğet ve yer vektörleri (3.14) denkleminde bu parça için B_{ik} , $1 \leq i \leq 4$ katsayılarını belirlemek üzere kullanılır. Spline parçası üzerindeki noktaları belirlemek için (3.1) denkleminin aşağıdaki genişletilmiş şekli kullanılır :

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^4 B_{ik} t^{i-1} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.15)$$

(3.15) denkleminin matris formu aşağıdaki şekilde verilir :

$$P_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1} \quad (3.16)$$

(3.14) denklemini yerine yazılır ve tekrar düzenlenirse

$$P_k(\tau) = \begin{bmatrix} F_{1k}(\tau) & F_{2k}(\tau) & F_{3k}(\tau) & F_{4k}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada $\tau = \left(\frac{t}{t_{k+1}} \right)$ dir.

$$\begin{aligned} F_{1k}(\tau) &= 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1 \\ F_{2k}(\tau) &= -2\tau^3 + 3\tau^2 \\ F_{3k}(\tau) &= \tau(\tau^2 - 2\tau + 1)t_{k+1} \\ F_{4k}(\tau) &= \tau(\tau^2 - \tau)t_{k+1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bu fonksiyonlar blending ve weighting (ağırlık) fonksiyonları olarak adlandırılır. Blending fonksiyonlarının tanımı kullanılarak (3.17) denklemini matris formunda

$$P_k(\tau) = [F] [G]$$

şeklinde yazılır. Burada blending fonksiyonlarının matris formu

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1(\tau) & F_2(\tau) & F_3(\tau) & F_4(\tau) \end{bmatrix}$$

ve

$$[G]^T = \begin{bmatrix} P_k & P_{k+1} & P'_k & P'_{k+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

(3.18)'de verilen blending fonksiyonlarının her biri kübiktir. Kübik spline parçası üzerindeki herhangi bir nokta , uç nokta yer ve teğet vektörlerinin ağırlıklı bir toplamıdır.

3.2 Kübik Spline Uç Koşulları

Bir önceki kısımda, P_1' ve P_n' teğet vektörlerinin parçalı kübik spline'nın uç noktalarında bulunduğu farz edilmiştir. Bu sınır şartı Clamped uç şartı olarak adlandırılır. Eğer az sayıda data noktası biliniyorsa veya fiziksel şartlar uç noktalarda eğrinin şeklinin kontrolünü gerektiriyorsa değişik sınır şartları istenebilir. Bir alternatif, spline'nın uç noktalarında eğriliğini belirtmektir. Eğer eğrilik sıfır ise Relaxed veya Natural uç şartları elde edilir.

İkinci türevle eğriliğe yaklaşırsak ve (3.7) denklemi kullanılarak

$$P''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2)B_i t^{i-3} \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}$$

elde edilir.

İlk spline parçasının başında $t = 0$ 'dir.

Burada yalnızca $i = 3$ değeri sonuca etki eder. (3.14) denklemi kullanılarak

$$P''(0) = 2B_3 = 2 \left(\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$P_1' + \frac{P_2'}{2} = \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1) \quad (3.19)$$

elde edilir.

[M] ve [R] matrislerindeki ilk satır

$$[1 \quad 1/2 \quad 0 \dots] [P_1'] = \left[\frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1) \right]$$

şeklinindedir. En son parçanın ucunda $k = n-1$, $t = t_n$ 'dir. Burada (3.7) denklemindeki hem $i = 3$ hem de $i = 4$ değerleri sonuca etki eder.

$$P''(t_n) = 2B_3 + 6B_4 t_n = 0$$

veya (3.14) denklemini kullanılarak

$$\frac{6}{t_n^2}(P_{n-1} - P_n) + \frac{2P_{n-1}'}{t_n} + \frac{4P_n'}{t_n} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$2P_{n-1}' + 4P_n' = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1})$$

bulunur.

[M] ve [R] matrislerinin son satırı

$$[\dots 0 \quad 2 \quad 4][P_n'] = \left[\frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \right]$$

halini alır.

Diğer iki sınır koşulları cyclic ve anticyclic uç koşullarıdır. Bir cyclic spline kapalı bir eğri veya aralıklarda tekrar eden bir eğri parçası yaratmak için kullanılır. Cyclic uç koşulu ; uç noktalarda teğet vektör ile eğriliğin eşit olmasıdır.

$$P_1'(0) = P_n'(t_n) \quad (3.20)$$

$$P_1''(0) = P_n''(t_n) \quad (3.21)$$

(3.3), (3.7) ve (3.14) eşitliklerini kullanılarak, (3.20) denklemini aşağıdaki şekli alır :

$$P_1' - P_{n-1}' = 2t_n \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P_{n-1}'}{t_n} - \frac{P_n'}{t_n} \right] + 3t_n^2 \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n^2} \right] \quad (3.22)$$

Benzer şekilde (3.21) denklemini aşağıdaki şekli alır.

$$2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2''}{t_2} \right] = 2 \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P_{n-1}'}{t_n} - \frac{P_n'}{t_n} \right] + 6t_n \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n^2} \right] \quad (3.23)$$

(3.23) eşitliği t_n ile çarpılır, (3.22) eşitliğinden çıkartılır ve (3.23) ile (3.24) birleştirilirse

$$P_1' - P_{n-1}' - 2t_n \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] = -3t_n^2 \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n} \right]$$

elde edilir.

$P_1' = P_n'$ alınarak, tekrar düzenlenirse

$$2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + \frac{t_n}{t_2}P_2' + P_{n-1}' = 3\frac{t_n}{t_2^2}(P_2 - P_1) - \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n) \quad (3.24)$$

elde edilir.

(3.12) denkleminde yararlanarak iç noktadaki teğet vektörleri elde edilir. Bununla birlikte tüm teğet vektörler bağımsız olmadıklarından dolayı $[M]$ matrisi $(n-1) \times (n-1)$ boyutundadır ve ilk satırı (3.24) denklemini katsayıları ile verilir. Yani,

$$\begin{bmatrix} 2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right) & \frac{t_n}{t_2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_1' \\ P_3 \\ \dots \\ \dots \\ P_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{t_n}{t_2^2}(P_2 - P_1) - \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n) \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)\} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{t_3^2(P_4 - P_3) + t_4^2(P_3 - P_2)\} \\ \dots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2})\} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Artık matrisimiz bant matris değildir.

Anticyclic spline

$$P_1'(0) = -P_n'(t_n) \quad (3.26)$$

$$P_1''(0) = -P_n''(t_n) \quad (3.27)$$

uç koşullarını gerçeklemektedir. Cyclic uç koşulları için uygulanan adımlardan yararlanarak aşağıdaki denklem elde edilir :

$$2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + \frac{t_n}{t_2}P_2' - P_{n-1}' = 3\frac{t_n}{t_2^2}(P_2 - P_1) + \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n) \quad (3.28)$$

(3.28) denklemi, anticyclic uç koşullarının uygulanması $[M]$ matrisinde $M(1, n-1)$ 'de bulunan 1'in işaretini ve (3.25) denklemi ile verilen $R(1,1)$ 'deki ikinci matris teriminin işaretinin değiştirir.

Kübik spline eğrileri herhangi bir uç koşulu ile 1. ve 2. mertebeden sürekli türevlere sahiptir. Bununla birlikte data noktalarının sayısı fazla ise teğet vektör matrisinin tersini hesaplamak fazla zaman alabilir.

Çizelge 3.1 Kübik spline uç koşulları

	M matrisinin	R matrisinin
Uç koşulları	ilk ve son satırındaki sıfırdan farklı elemanlar	ilk ve son satırları
Clamped	$M(1,1)=1$	$R(1,1)=P_1'$
	$M(n,n)=1$	$R(n,1)=P_n'$
Relaxed	$M(1,1)=1$	$R(1,1)=\frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1)$
	$M(1,2)=1/2$	
	$M(n,n-1)=2$	$R(n,1)=\frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1})$
	$M(n,n)=4$	
Cyclic	$M(1,1)=2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)$	$R(1,1)=3\left(\frac{t_n}{t_2^2}\right)(P_2 - P_1)$
	$M(1,2)=\frac{t_n}{t_2}$	$\frac{-3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$
	$M(1,n-1)=1$	$R(n,1)$ tanımsız
Anticyclic	$M(1,1)=2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)$	$R(1,1)=3\left(\frac{t_n}{t_2^2}\right)(P_2 - P_1)$
	$M(1,2)=\frac{t_n}{t_2}$	$+\frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$
	$M(1,n-1)=-1$	$R(n,1)$ tanımsız

4. B SPLINE BAZ FONKSİYONLARI ve B SPLINE EĞRİLERİ

4.1 B Spline Baz Fonksiyonları

B Spline fonksiyonları, spline uzayları için taban sağladıklarından Baz (basis) Spline fonksiyonları olarak adlandırılır. Bir başka deyişle, diğer Spline fonksiyonları B Spline fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu ile elde edilebilir.

Nümerik hesaplamalar için faydalı bir tanım Cox-de Boor tarafından Schönberg' ten bağımsız olarak bulunmuştur (De-Boor, 1978).

$P(t)$ eğri boyunca olan yer vektörü olsun. Bir B Spline eğrisi

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n+1$$

olarak tanımlanır.

Burada, B_i $n+1$ tane poligon köşesinin yer vektörünü göstermektedir, $N_{i,k}$ ise normalize edilmiş B Spline baz fonksiyonlarıdır.

Mertebe k (derecesi $k-1$) olan i . normalize edilmiş baz fonksiyonu için $N_{i,k}(t)$ baz fonksiyonları Cox- de Boor tarafından

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{(x_{i+k-1} - x_i)} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{(x_{i+k} - x_{i+1})} \quad (4.2)$$

formülü ile tanımlanır.

x_i değerleri $x_i \leq x_{i+1}$ koşulunu sağlayan bir düğüm vektörünün elemanlarıdır. t parametresi $P(t)$ eğrisi boyunca t_{\min} 'dan t_{\max} 'a değer alır. Burada, $0/0 = 0$ kabul edilmiştir.

Mathews'a (1992) göre derecesi sıfır olan Baz Spline fonksiyonlarının önemli bazı özellikleri şunlardır:

- 1.) $N_{i,1}(t)$ fonksiyonunun desteği, $N_{i,1}(t) \neq 0$ koşulunu sağlayan t 'lerin bir kümesi olarak tanımlanır. Bu tanıma göre bu koşulu sağlayan t 'ler $[x_i, x_{i+1})$ aralığının elemanıdır.
- 2.) Sıfırcı dereceden her bir baz fonksiyonu tüm parametre değerleri için $N_{i,1}(t) \geq 0$ 'dır.

3.) $N_{i,1}(t)$ t'nin tanım aralığı üzerinde sağdan süreklidir.

4.) Herhangi bir t parametre değeri için baz fonksiyonlarının toplamı ; t'nin içinde bulunduğu aralık $x_j \leq t < x_{j+1}$ belirlendikten sonra

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,1}(t) = N_{j,1}(t) \equiv 1 \quad (4.3)$$

olarak bulunur.

Baz Spline fonksiyonların tüm özellikleri yukarıdaki (4.1) ve (4.2) numaralı tanımlardan yararlanılarak gösterilir.

$N_{i,1}(t)$ derecesi sıfır olan parçalı bir polinom ve (4.2) numaralı tanımda parantez içerisinde verilen ifadeler lineer olduklarından $N_{i,2}(t)$ derecesi bir olan parçalı bir polinomdur. Buradan, genel olarak $N_{i,k}(t)$ derecesi k-1 olan parçalı bir polinomdur.

(4.2) formülünde $k = 2$ yazılırsa; 1. dereceden bir B Spline baz fonksiyonu elde edilir.

$$N_{i,2}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,1}(t)}{(x_{i+1} - x_i)} + \frac{(x_{i+2} - t)N_{i+1,1}(t)}{(x_{i+2} - x_{i+1})}$$

başka bir ifadeyle;

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i} & x_i \leq t < x_{i+1} \\ \frac{x_{i+2} - t}{x_{i+2} - x_{i+1}} & x_{i+1} \leq t < x_{i+2} \\ 0 & t < x_i \text{ veya } t \geq x_{i+2} \end{cases}$$

1. dereceden B Spline baz fonksiyonlarının bazı önemli özellikleri şunlardır :

1.) $N_{i,2}(t)$ 'nin sıfırdan farklı olduğu noktalar kümesi (x_i, x_{i+2}) 'dir.

2.) Birinci dereceden her bir baz fonksiyonu ve tüm parametre değerleri için $N_{i,2} \geq 0$ olur.

3.) $N_{i,2}(t)$ sürekli bir fonksiyondur.

4.) Herhangi bir parametre değeri için

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,2}(t) \equiv 1$$

Herhangi bir t reel sayısı alalım. t 'yi içeren aralık $x_j \leq t < x_{j+1}$ olmak üzere, $i=j$ ve $i+1=j$ dışında $N_{i,2}(t) = 0$ olur. Böylece,

$$\sum_{i=1}^{m+1} N_{i,2}(t) = N_{j-1,2}(t) + N_{j,2}(t) = \frac{x_{j+1} - t}{x_{j+1} - x_j} + \frac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j} = 1$$

4.1.1 Lemma : $k \geq 2$ ve $t \notin (x_i, x_{i+k})$ ise $N_{i,k}(t) = 0$ 'dır.

Bu lemma'nın ispatında matematik induksiyondan yararlanılırsa,

$k=2$ için yukarıda yazılan 1. dereceden B Spline baz fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak,

$$t \notin (x_i, x_{i+2}) \quad \text{için} \quad N_{i,2}(t) = 0$$

olduğu görülür.

$k > 2$ olmak üzere lemma'nın $k-1$ için doğru olduğunu kabul ederek, k için doğru olduğunu gösterelim.

$k-1$ için,

$$t \notin (x_i, x_{i+k-1}) \quad N_{i,k-1}(t) = 0$$

sağlanmalıdır.

$$t \notin (x_i, x_{i+k}) \text{ ise } t \notin (x_i, x_{i+k-1}) \text{ ve } t \notin (x_{i+1}, x_{i+k})$$

sağlanır.

İndüksiyon hipotezinden ;

$$N_{i,k-1}(t) = 0 \quad \text{ve} \quad N_{i+1,k-1}(t) = 0$$

sağlanır.

(4.2) eşitliği ve yukarıda bulunan sonuçlar kullanılarak

$$N_{i,k}(t) = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1.2 Lemma : $k \geq 1$ $t \in (x_i, x_{i+k})$ ise $N_{i,k}(t) > 0$ 'dır.

Lemma'nın ispatında matematik indüksiyondan yararlanılırsa;

$k=1$ için

$$t \in (x_i, x_{i+1}) \text{ ve } N_{i,1}(t) > 0$$

ve $k=2$ için

$$t \in (x_i, x_{i+2}) \text{ ve } N_{i,2}(t) > 0$$

olur.

$k \geq 3$ olmak üzere lemma'nın $k-1$ için doğru olduğunu kabul ederek, k için doğru olduğunu göstereyim.

İndüksiyon hipotezine göre;

$$t \in (x_i, x_{i+k-1}) \text{ için } N_{i,k-1}(t) > 0$$

$t \in (x_i, x_{i+k})$ olmak üzere (4.2) eşitliğindeki lineer çarpanlar pozitiftir. İndüksiyon hipoteziyle ile lemma (4.1.1) gözönünde bulundurularak

$$N_{i,k-1}(t) > 0 \quad t \in (x_i, x_{i+k-1}) \quad \text{ve} \quad N_{i,k-1}(t) = 0 \quad t \notin (x_i, x_{i+k-1})$$

$$N_{i+1,k-1}(t) > 0 \quad t \in (x_{i+1}, x_{i+k}) \quad \text{ve} \quad N_{i+1,k-1}(t) = 0 \quad t \notin (x_{i+1}, x_{i+k})$$

Bu iki aralık üst üste getirilirse;

$$N_{i,k}(t) > 0$$

olduğu görülür. İspat tamamlanmış olur.

4.2 B Spline Eğrileri

Mertebe k (derecesi $k-1$) olan B Spline fonksiyonu aşağıdaki iki şartı gerçeker:

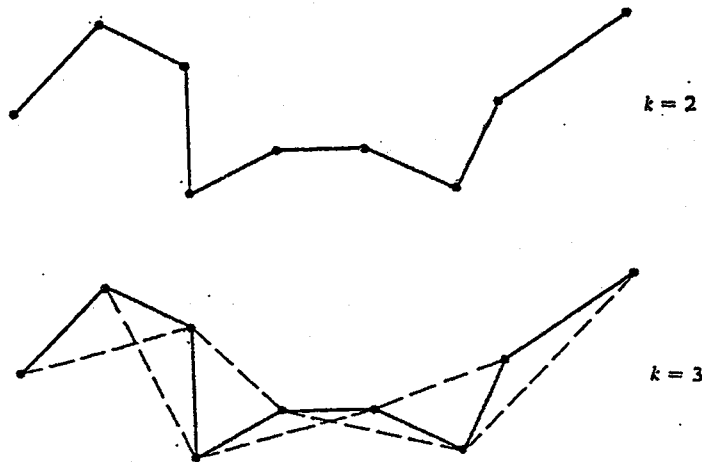
- 1.) $P(t)$ fonksiyonu her bir $x_i \leq t \leq x_{i+1}$ aralığı üzerinde derecesi $k-1$ olan bir fonksiyondur.
- 2.) $P(t)$ ve onun 1.,2.,3.,.....,($k-2$). mertebeden türevlerinin hepsi tüm eğri boyunca süreklidir.

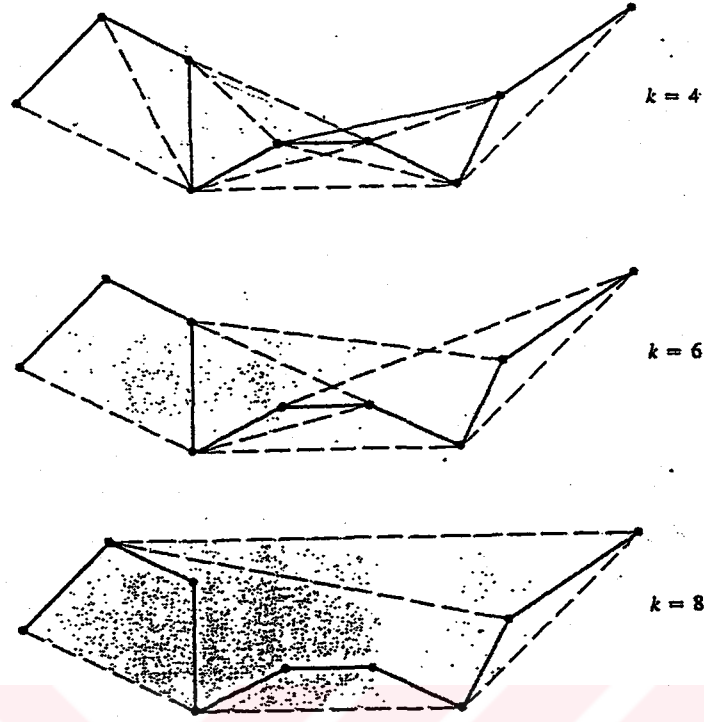
Böylece örneğin, 4. mertebeden bir B Spline eğrisi parçalı, kübik eğridir. B Spline eğrisi B Spline bazı kullanılarak tanımlandığından, yukarıda bahsedilenlere ek olarak bazı özellikleri de bilinmelidir:

- 1.) Eğrinin maksimum mertebesi, tanımlanan poligon köşelerinin sayısına eşittir. B Spline eğrilerinde tanımlanan poligon köşelerinin sayısı değiştirilmeksizin eğrinin derecesi değiştirilebilir.
- 2.) Genellikle eğri tanımlanan poligonun şeklini izler.
- 3.) Eğri onu tanımlayan poligonun konveks gövdesi (convex hull) içinde yer alır.

B Spline eğrisi üzerindeki bir nokta k tane komşu noktanın konveks gövdesi içerisinde yer alır. Böylece B Spline eğrisi üzerindeki tüm noktalar, k tane birbirini izleyen poligon köşeleriyle oluşturulan tüm konveks gövdelerin içerisinde yer almalıdır. B Spline fonksiyonlarının bu özelliğine Konveks Gövde özelliği denilmektedir.

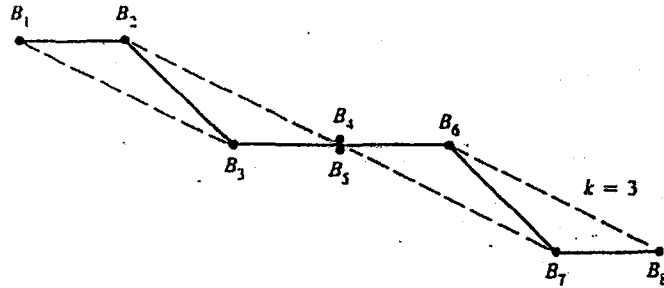
Şekil 4.1'de k 'nın farklı değerleri için konveks gövde özelliği gösterilmiştir. $k = 2$ için konveks gövde tanımlanan poligonun kendisidir. Ayrıca B Spline eğrisi de tanımlanan poligonun kendisi olur.





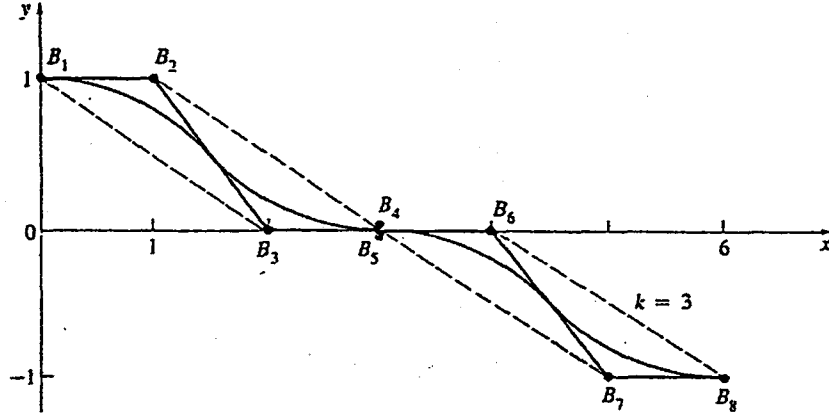
Şekil 4.1 B Spline eğrilerinin konveks gövde özelliği

Eğer $k-1$ poligon köşesi çakışırsa yani, $B_i = B_{i+1} = \dots = B_{i+k-2}$ ise bu takdirde B_i 'den B_{i+k-1} 'ye konveks gövde köşenin kendisidir. Böylece bulunan B Spline eğrisi B_i köşesinden geçmelidir. Şekil 4.2, $k=3$ için bu noktayı göstermektedir. Ayrıca bir B Spline eğrisi her yerde C^{k-2} sınıfından olduğundan, B_i noktasında da C^{k-2} sınıfındadır.



Şekil 4.2 Çakışan poligon köşeleri için konveks gövde , $k = 3$

Son olarak B Spline eğrilerinin süreklilik özelliklerinden dolayı, şekil 4.3'te gösterildiği gibi düz parçalar içerisine C^{k-2} sürekliliğiyle, düzgün bir geçişle yerleştirilebilir.



Şekil 4.3 Düz parçalar arasına düzgün (C^{k-2}) geçiş

(4.1) ve (4.2) denklemleri bize düğüm vektör seçiminin B Spline baz fonksiyonları $N_{i,k}(t)$ 'ler üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğundan, B Spline eğrileri üzerinde de önemli olduğunu gösterir. Bir düğüm vektör $x_i \leq x_{i+1}$ bağıntısını gerçekleştirmelidir, yani düğüm vektör reel sayıların monoton artan bir serisidir. Esas olarak üç tip düğüm vektör kullanılır. Bunlar; uniform, open uniform (veya open) ve nonuniform vektörleridir.

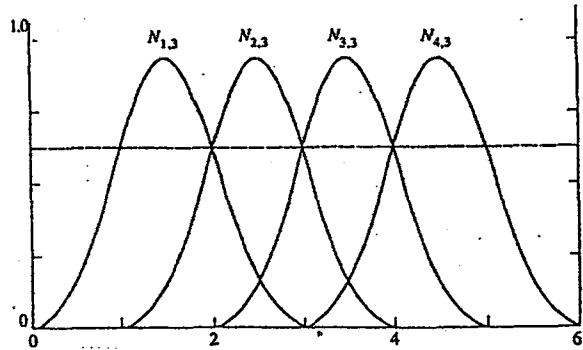
Bir uniform düğüm vektör içerisinde düğüm değerleri eşit uzaklıkları olarak yerleştirilir. Örnek olarak $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$ veya $[-0.2 \ -0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0.2]$ verilebilir.

Pratikte uniform düğüm vektörleri 0 ile başlar ve 1'er arttırılarak bir maksimum değere ulaşır veya 0 ile 1 arasındaki değişim aralığı içinde normalize edilir. Örneğin, eşit ondalık aralıklarla $[0 \ 0.25 \ 0.50 \ 0.75 \ 1.0]$

Verilen bir k mertebesi için uniform düğüm vektörlerinin meydana getirdiği periyodik uniform baz fonksiyonları

$$N_{i,k}(t) = N_{i-1,k}(t-1) = N_{i+1,k}(t+1)$$

şeklinde ifade edilebileceğinden her bir baz fonksiyonu diğeriyle açıklanabilir. Bu durum Şekil 4.4'te gösterilmiştir.



Şekil 4.4 Periyodik uniform B Spline baz fonksiyonları $[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$
 $n+1=4, k=3$

Bir open uniform düğüm vektör, sonda ve başta B Spline baz fonksiyonunun mertebesi k 'ya eşit katlı düğüm değerlerine sahiptir. İç düğüm değerleri eşit olarak yerleştirilir. Aşağıda tamsayı artışları kullanılarak bazı örnekler verilmiştir.

$$\begin{aligned} k=2 & \quad [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4] \\ k=3 & \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3] \\ k=4 & \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2] \end{aligned}$$

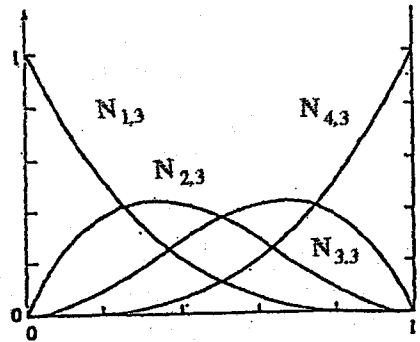
normalize edilmiş artışlar için;

$$\begin{aligned} k=2 & \quad [0 \ 0 \ 1/4 \ 2/4 \ 3/4 \ 1 \ 1] \\ k=3 & \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1] \\ k=4 & \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \end{aligned}$$

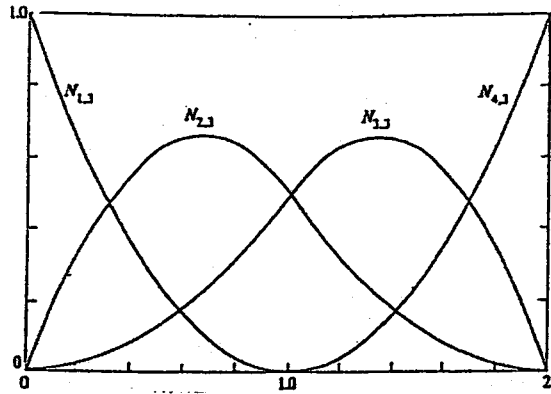
Bir open uniform düğüm vektör;

$$\begin{aligned} x_i &= 0 & 1 \leq i \leq k \\ x_i &= i-k & k+1 \leq i \leq n+1 \\ x_i &= n-k+2 & n+2 \leq i \leq n+k+1 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Örneğin, 4 poligon köşesiyle oluşturulan 4. mertebeden B Spline baz fonksiyonları için kullanılacak open uniform düğüm vektör, $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ 'dur ve bu baz fonksiyonları şekil 4.5'te gösterilmiştir. Şekil 4.6'da ise 4 poligon köşesiyle open uniform düğüm vektör kullanılarak oluşturulan 3. mertebeden B Spline baz fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 4.5 Open uniform B Spline baz fonksiyonları, $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $n+1=4$, $k=3$



Şekil 4.6 Open uniform B Spline baz fonksiyonları, $[X] = [0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2]$, $k=3$, $n+1 = 4$

Eğer poligon köşelerinin sayısı, B Spline baz fonksiyonlarının mertebesine eşit ise düğüm vektör k tane sıfır ve k tane sıfırı takip eden, k tane birden meydana gelir.

Nonuniform düğüm vektörleri ya eşit uzaklıklı olmayacak şekilde yerleştirilmiş ve/veya katlı iç düğüm değerlerine sahip olabilirler. Örnek olarak; $[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2]$, $[0\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4]$ $[0\ 0.28\ 0.5\ 0.72\ 1]$ verilebilir.

Şekil 4.7'de $k=3$ mertebesi için çeşitli nonuniform baz fonksiyonları gösterilmiştir. Düğüm vektörlerinin tümü uç noktalarda k katlılığa sahip eşit değerli baz fonksiyonları yaratmak için kullanılır. Şekil 4.7a'da bir open uniform düğüm vektörüyle tanımlanan baz fonksiyonları karşılaştırma için verilmiştir. a ve b şıklarındaki baz fonksiyonlarının simetrisi c'den, e'ye nonuniform baz fonksiyonlarıyla kaybedilir. Düğüm vektör içerisinde katlı düğüm değerleri için baz fonksiyonlarında sivrilik meydana gelir. Ayrıca şeklin d ve e şıklarında gösterildiği gibi sivrilğin yer değiştirmesi düğüm vektör içerisindeki tekrar eden düğüm değerlerinin değişimine bağlıdır. B Spline baz fonksiyonlarını hesaplamak için kullanılan Cox-de Boor formülü rekürsif bir bağıntı olduğundan verilen k .mertebeden bir baz fonksiyonu 1. mertebeye kadar daha düşük mertebeli baz fonksiyonlarına bağlıdır. $N_{i,k}$ baz fonksiyonu için bu bağıllık

$$N_{i,k}$$

$$N_{i,k-1} \quad N_{i+1,k-1}$$

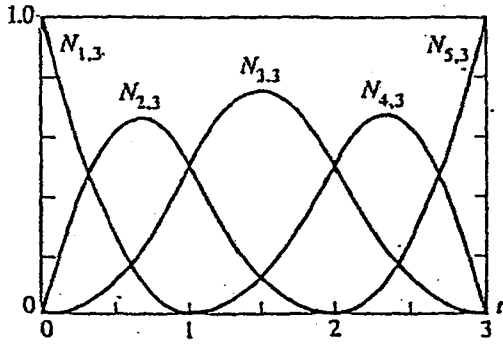
$$N_{i,k-2} \quad N_{i+1,k-2} \quad N_{i+2,k-2}$$

$$N_{i,k-3} \quad N_{i+1,k-3} \quad N_{i+2,k-3} \quad N_{i+3,k-3}$$

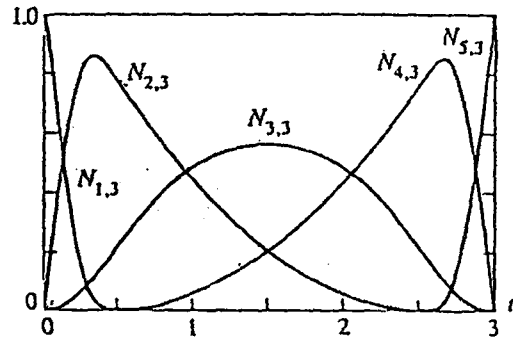
.....

$$N_{i,1} \quad N_{i+1,1} \quad N_{i+2,1} \quad N_{i+3,1} \quad \dots \quad N_{i+k-1,1}$$

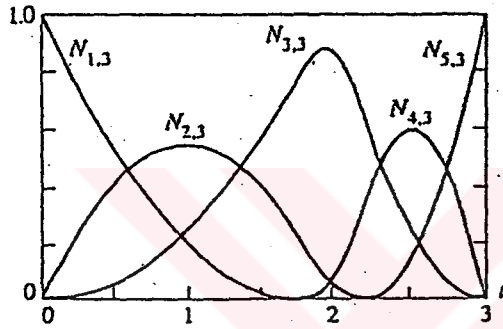
şeklinde verilir.



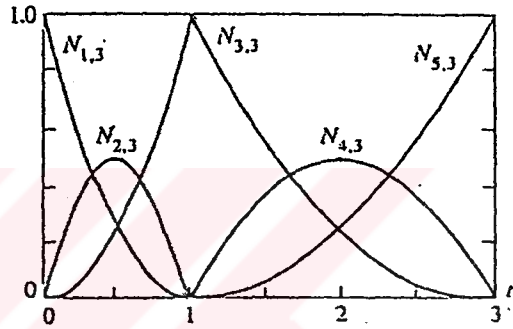
(a)



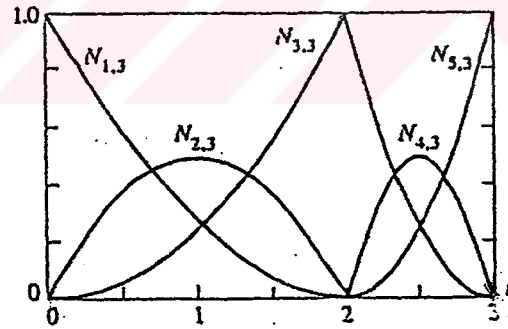
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 4.7 Nonuniform baz fonksiyonları $n+1=5$, $k=3$

$$(a) [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$(b) [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0.4 \ 2.6 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$(c) [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1.8 \ 2.2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$(d) [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$$

$$(e) [X] = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

4.1.1 Örnek : Periyodik baz fonksiyonlarının hesaplanması

3.mertebeden dört tane baz fonksiyonu $N_{i,3}(t)$ $i=1,2,3,4$ hesaplayalım. Burada $n+1$, baz fonksiyonlarının sayısı, 4'tür. $N_{i,3}$ baz fonksiyonlarının bağılıkları aşağıdaki diyagramla verilir :

$$\begin{array}{cccc} N_{1,3} & N_{2,3} & N_{3,3} & N_{4,3} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & N_{4,2} & N_{5,2} \\ N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & N_{4,1} & N_{5,1} & N_{6,1} \end{array}$$

Hesaplama için gereken düğüm vektörünü bulalım.(4.1) ve (4.2) denklemleri $N_{1,1}$ 'in hesaplanması için x_1 ve x_2 değerleri gerekliken $N_{6,1}$ 'in hesaplanması için x_6 ve x_7 değerlerinin bilinmesi gerektiğini gösterir. Yani, 0'dan $n+k$ 'ya düğüm değerleri gereklidir.

Düğüm değerlerinin sayısı $n+k+1$ olduğundan, periyodik düğüm vektörleri için düğüm vektör

$$[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$$

olur.

Burada; $x_1 = 0, \dots, x_7 = 6$ ve parametre değişim aralığı ise $0 \leq t \leq 6$ 'dır.

(4.1) ve (4.2) denklemleri ile yukarıdaki bağılık diyagramı kullanılarak çeşitli baz fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{1,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 1$$

$$N_{1,2}(t) = t \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 1$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{t^2}{2} \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 1$$

$$1 \leq t < 2$$

$$N_{2,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 2$$

$$N_{1,2}(t) = 2 - t \qquad N_{2,2}(t) = t - 1 \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 1,2$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{t}{2}(2-t) + \left(\frac{3-t}{2}\right)(t-1)$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$N_{i,3}(t) = 0 \quad i \neq 1, 2, 3$$

$$2 \leq t < 3$$

$$N_{3,1}(t) = 1 \quad N_{i,1}(t) = 0$$

$$i \neq 3$$

$$N_{2,2}(t) = 3 - t$$

$$N_{3,2}(t) = t - 2$$

$$N_{i,2}(t) = 0$$

$$i \neq 2, 3$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{2}$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{2} + \frac{(4-t)(t-2)}{2}$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(t-2)^2}{2}$$

$$N_{i,3}(t) = 0$$

$$i \neq 1, 2, 3$$

$$3 \leq t < 4$$

$$N_{4,1}(t) = 1$$

$$N_{i,1}(t) = 0$$

$$i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = 4 - t$$

$$N_{4,2}(t) = t - 3$$

$$N_{i,2}(t) = 0$$

$$i \neq 3, 4$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(4-t)^2}{2}$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2}$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-3)^2}{2}$$

$$N_{i,3}(t) = 0$$

$$i \neq 2, 3, 4$$

$$4 \leq t < 5$$

$$N_{5,1}(t) = 1$$

$$N_{i,1}(t) = 0$$

$$i \neq 5$$

$$N_{4,2}(t) = 5 - t$$

$$N_{5,2}(t) = t - 4$$

$$N_{i,2}(t) = 0$$

$$i \neq 4, 5$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(5-t)^2}{2}$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-3)(5-t)}{2} + \frac{(6-t)(t-4)}{2}$$

$$N_{i,3}(t) = 0$$

$$i \neq 3, 4$$

$$5 \leq t < 6$$

$$N_{6,1}(t) = 1$$

$$N_{i,1}(t) = 0$$

$$i \neq 6$$

$$N_{5,2}(t) = 6 - t;$$

$$N_{i,2}(t) = 0$$

$$i \neq 5$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(6-t)^2}{2}$$

$$N_{i,3}(t) = 0$$

$$i \neq 4$$

$N_{i,1}$ 'in tanımında “ < ” işaretinden dolayı $t = 6$ 'da tüm baz fonksiyonları sıfırdır. Baz fonksiyonlarının herbiri parçalı parabolik (kuadratik) eğridir.

Örnek 4.1.1 için, şekil 4.8'in (a) şıkında 1.mertebeden baz fonksiyonları,(b) şıkında

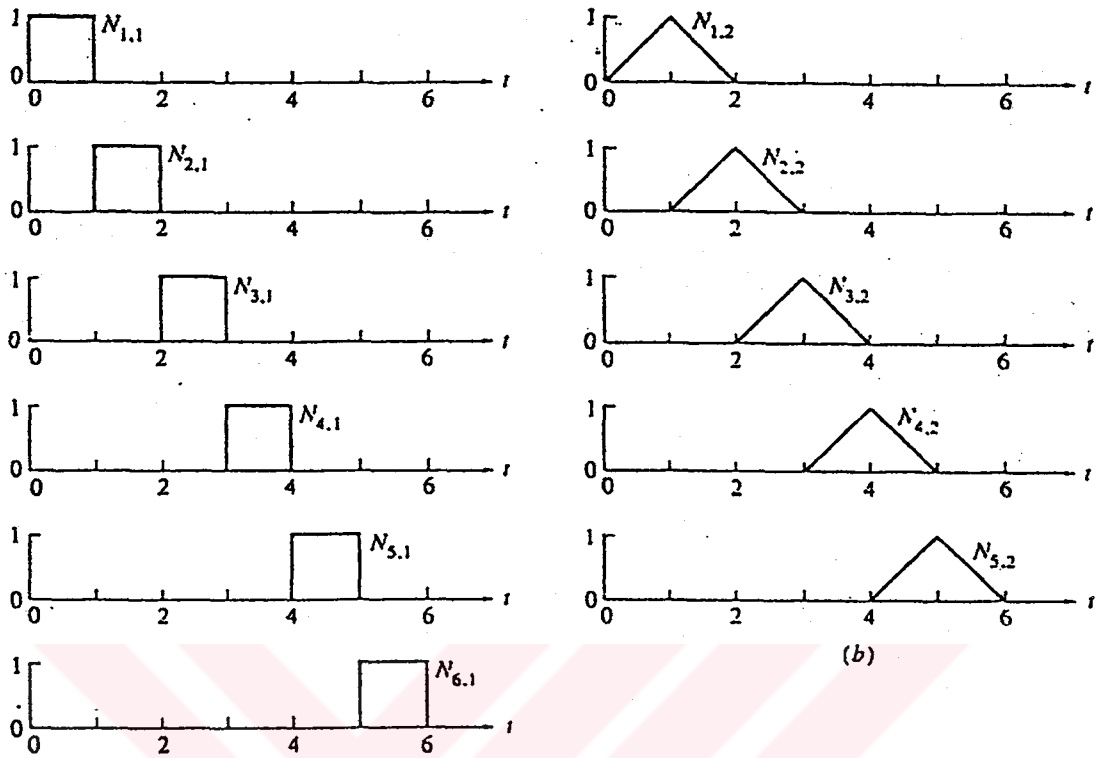
2.mertebeden baz fonksiyonları ve (c) şıkında ise 3.mertebeden baz fonksiyonları

belirtilmiştir. Sıfırdan farklı baz fonksiyon değerlerinin değişim aralığı artan mertebelerle

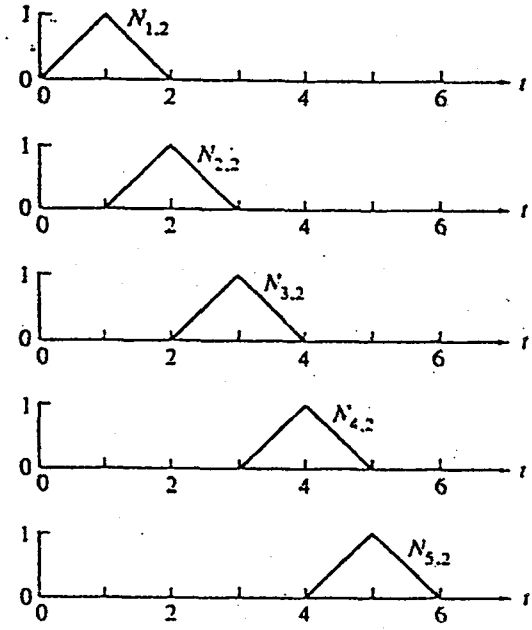
genişler. $\sum N_{i,k}(t) = 1$ olması $k = 3$ için periyodik baz fonksiyonlarının kümesinin $2 \leq t \leq 4$

aralığı için tanımlı olduğunu gösterir. Aralığın dışında $\sum N_{i,k}(t) \neq 1$ 'dir. Sıfır ile başlayan

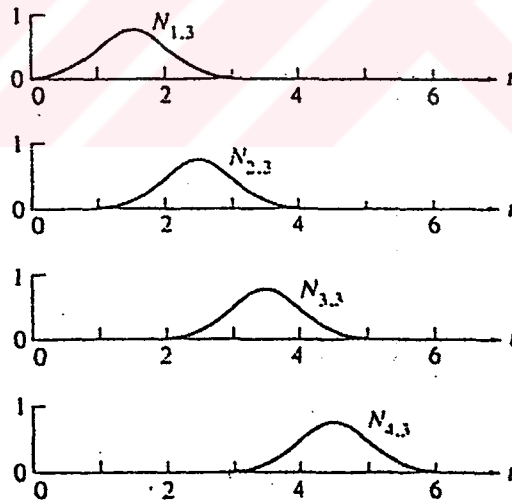
ve tamsayı düğüm değerlerine sahip bir uniform düğüm vektör için kullanılabilir parametre değişim aralığı $k-1 \leq t \leq (n+k)-(k-1) = n+1$ 'dir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.8 Periyodik baz fonksiyonları $n+1=4$ (a) $k=1$ (b) $k=2$ (c) $k=3$

4.1.2 Örnek : Open uniform baz fonksiyonlarının hesaplanması

Bir open düğüm vektör ile 3.mertebeden 4 tane $N_{i,3}(t)$ $i = 1,2,3,4$ baz fonksiyonunun hesaplayalım.

Tamsayı düğüm değerlerine sahip bir open düğüm vektör ,

$$\begin{aligned} x_i &= 0 & 1 \leq i \leq k \\ x_i &= 0 & k+1 \leq i \leq n+1 \\ x_i &= n-k+2 & n+2 \leq i \leq n+k+1 \end{aligned}$$

verilir.

Örnek 4.1.1'deki gibi düğüm değerlerinin sayısı $n+k+1$ 'dir. Tamsayı düğüm değerlerini kullanarak düğüm vektörü yazarsak;

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$$

olur. Burada $x_1 = 0, \dots, x_7 = 2$ ve parametre değişim aralığı $0 \leq t \leq 2$ 'dir.

(4.1) ve (4.2) denklemleri ,bağıllık diyagramları kullanılarak çeşitli parametre aralıkları için baz fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{3,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 3$$

$$N_{2,2}(t) = 1-t \qquad N_{3,2}(t) = t \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 2,3$$

$$N_{1,3}(t) = (1-t)^2 \qquad N_{2,3}(t) = t(1-t) + \frac{(2-t)}{2}t$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t^2}{2}; \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 1,2,3$$

$$1 \leq t < 2$$

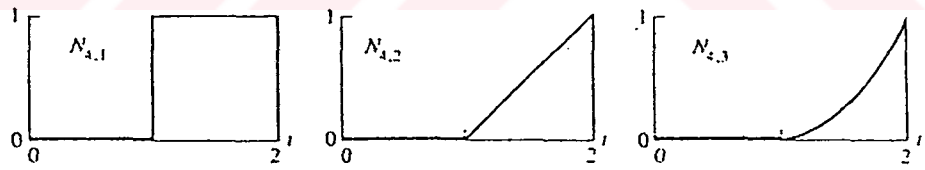
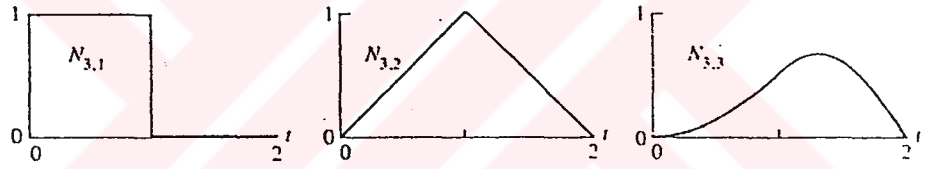
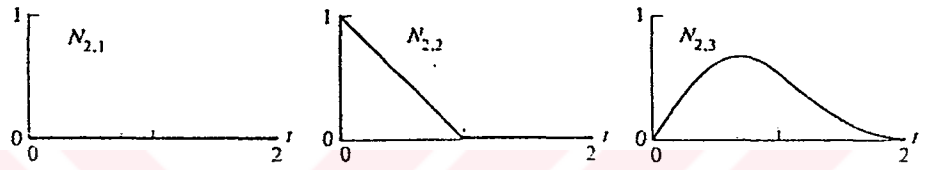
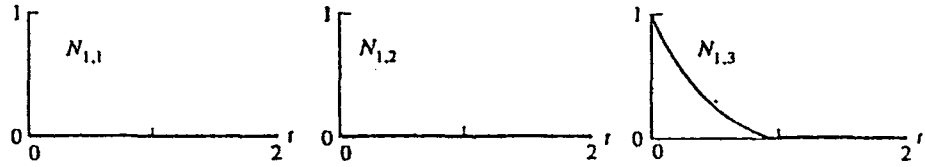
$$N_{4,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = 2-t \qquad N_{4,2}(t) = t-1 \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 3,4$$

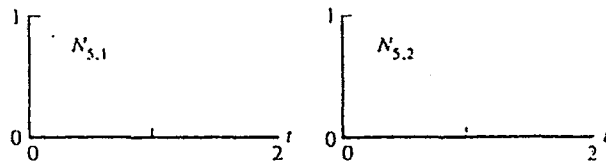
$$N_{2,3}(t) = \frac{(2-t)^2}{2} \qquad N_{3,3}(t) = \frac{t(2-t)}{2} + (2-t)(t-1)$$

$$N_{4,3}(t) = (t-1)^2 \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 2,3,4$$

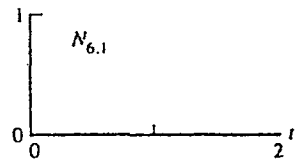
Bu sonuçlar şekil 4.9'da gösterilmiştir. Örnek 4.1.2 ve şekil 4.9'daki sonuçlar ile Örnek 4.1.1'deki ve şekil 4.8'deki sonuçlar karşılaştırılırsa periyodik uniform ya da open uniform düğüm vektörleri kullanıldığında birbirinden oldukça farklı sonuçlar elde edildiği görülür. Özellikle; open uniform vektörleri için baz fonksiyonlarının tüm kümesi ,parametre aralığının tümü için tanımlanır. Yani, $0 \leq t \leq n-k+2$ aralığındaki tüm t değerleri için $\sum N_{i,k}(t) = 1$ olur.



(c)



(b)



(a)

Şekil 4.9 Open baz fonksiyonu kurma $n+1=4$, (a) $k=1$ (b) $k=2$ (c) $k=3$

4.1.3 Örnek : Nonuniform baz fonksiyonlarının hesaplanması

3.mertebeden , 5 tane ($n+1=5$) $N_{i,3}(t)$ $i = 1,2,3,4,5$ baz fonksiyonlarını, tekrar eden iç noktalara sahip $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$ düğüm vektörünü , (3.1) , (3.2) eşitlikleri ve bağlılık diyagramlarını kullanarak hesaplayalım:

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{3,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 2$$

$$N_{2,2}(t) = 1-t \qquad N_{3,2}(t) = t; \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 2,3$$

$$N_{1,3}(t) = (1-t)^2 \qquad N_{2,3}(t) = t(1-t) + (1-t)t = 2t(1-t);$$

$$N_{3,3}(t) = t^2 \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 1,2,3$$

$$1 \leq t < 1$$

$$N_{i,1}(t) = 0, \text{ tüm } i \text{ değerleri için}$$

$$N_{i,2}(t) = 0, \text{ tüm } i \text{ değerleri için}$$

$$N_{i,3}(t) = 0, \text{ tüm } i \text{ değerleri için}$$

Özellikle katlı düğüm değerlerinden dolayı tüm t değerleri için $N_{4,1}(t) = 0$ olduğuna dikkat edelim.

$$1 \leq t < 3$$

$$N_{5,1}(t) = 1; \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 5$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{(3-t)}{2}; \qquad N_{5,2}(t) = \frac{(t-1)}{2}. \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 4,5$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{4}$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{4} + \frac{(3-t)(t-1)}{4} = \frac{(3-t)(t-1)}{2}$$

$$N_{5,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{4} \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 3,4,5$$

t 'nin her değeri için $\sum N_{i,k}(t) = 1$ olur.

Örneğin $0 \leq t < 1$ için;

$$\sum_{i=1}^5 N_{i,3}(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2 + t^2 = 1$$

Benzer şekilde $1 \leq t < 3$ için ;

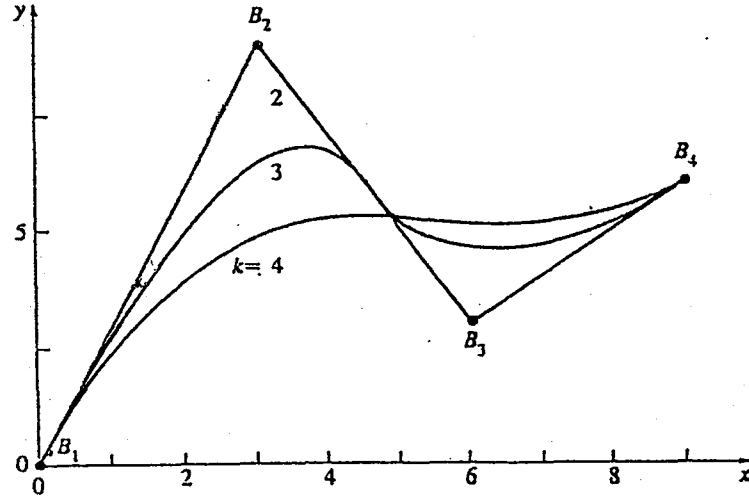
$$\sum_{i=1}^5 N_{i,3}(t) = \frac{1}{4}[(3-t)^2 + 2(3-t)(t-1) + (t-1)^2] = \frac{1}{4}[9 - 6t + t^2 - 6 + 8t - 2t^2 + 1 - 2t + t^2] = 1$$

Yukarıda bahsedilenler düğüm vektör seçiminin B Spline baz fonksiyonları, dolayısıyla bulunacak B Spline eğrisi üzerindeki önemli etkisini gösterir. Eğri şekli aşağıda yazılanlar göz önüne alınarak değiştirilir:

- 1.)Düğüm vektörün tipini ve dolayısıyla baz fonksiyonunu değiştirerek: periyodik uniform open uniform , nonuniform
- 2.)Baz fonksiyonlarının mertebesi k değiştirilerek
- 3.)Tanımlanan poligon köşelerinin sayısını ve pozisyonunu değiştirerek
- 4.)Katlı poligon köşeleri kullanarak
- 5.)Düğüm vektör içerisinde katlı düğüm değerleri kullanarak

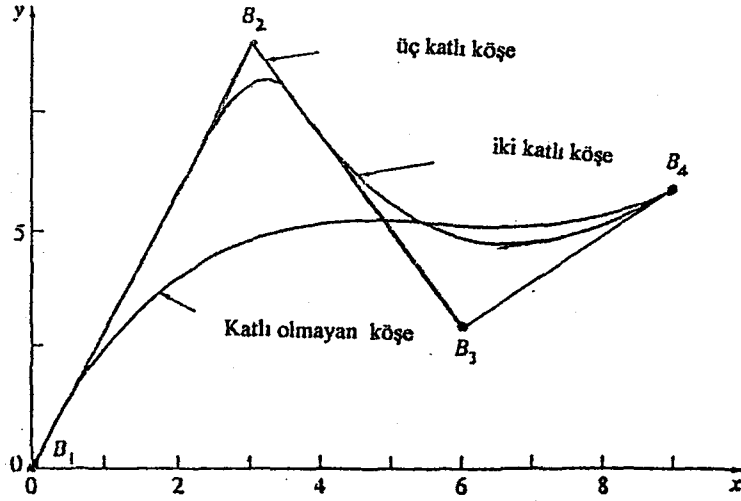
Herhangi $k \geq 2$ mertebeden bir open B Spline eğrisinin üzerindeki ilk ve son nokta ; ilk ve son poligon köşeleriyle çakışır. Ayrıca ilk ve son poligon köşelerinde eğrinin eğimi ,ilk ve son poligon parçalarının eğimine eşittir.

Şekil 4.10, farklı mertebelerde, aynı 4 poligon köşesiyle tanımlanan 3 tane open B Spline eğrisini göstermektedir. 4.mertebeden eğri tek bir kübik polinomdur. 3.mertebeden eğri, C^1 sürekliliğiyle iki parabolik eğri parçasından oluşturulur. 2.mertebeden eğri, C^0 sürekliliğiyle 3 tane lineer eğri parçasından meydana gelir. Dikkat edelim ki, üç eğrinin hepsi aynı uç nokta eğimine sahiptir.



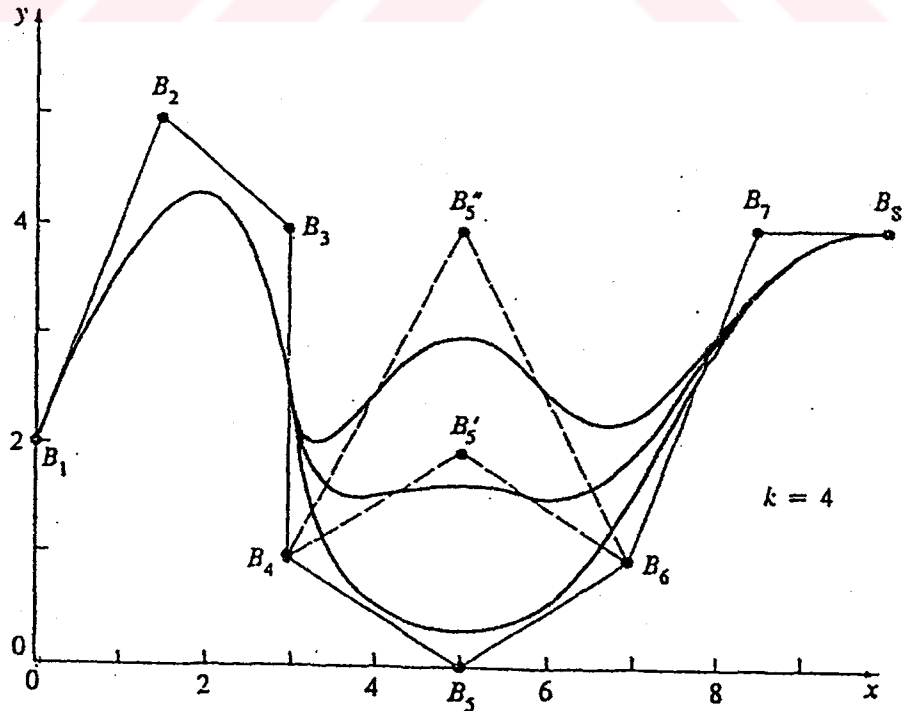
Şekil 4.10 Farklı mertebelerin B Spline eğrileri üzerindeki etkisi

Şekil 4.11 poligon üzerinde katlı köşelerin veya çakışık köşelerin etkisini göstermektedir. Şekildeki B Spline eğrilerinin tümü 4.mertebedendir. 4 poligon köşesiyle tanımlanan en alttaki eğri $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ düğüm vektörüyle tanımlanmıştır. Ortadaki eğri ise 2.poligon köşesi, 2 katlı olmak üzere 5 tane poligon köşesinden meydana gelmiştir. Buradaki düğüm vektör ise $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$ 'dir. Üsteki eğri ise $[3 \ 9]$ 'da 3 katlı, 6 poligon köşesinden meydana gelmiştir. Burada düğüm vektör $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$ 'dür. Böylece bu üç eğri için tanımlanan poligonlar sırasıyla B_1, B_2, B_3, B_4 ; B_1, B_2, B_2, B_3, B_4 ve $B_1, B_2, B_2, B_2, B_3, B_4$ 'tür. En alttaki eğri tek bir kübik eğri parçasıyla oluşturulur. Ortadaki eğri, B_2 ve B_3 parçası ile oluşturulur. Eğer katlı köşelerin sayısı $k-1$ ise sivri bir köşe oluşur. Bu sivrilik B Spline eğrilerinin konveks gövde özelliğiyle tahmin edilebilir. Şekil 4.11, katlı köşenin her iki tarafında bir lineer parça meydana geldiğini gösterir. $k-1$ katlı köşe varolduğunda eğri de bir sivri uç meydana gelmesine rağmen eğrinin C^{k-2} diferansiyellenebilmesi korunur. İlk bakışta bu bir çelişki gibi görünebilir. Bununla birlikte sivrilik bir sıfır tanjant vektörüyle tanımlanır. Sürekli olarak diferansiyellenebilen C^{k-2} eğrisinde keskin köşelerin veya uçların olması B Spline eğrilerinin önemli bir özelliğidir. Dikkat edilirse, eğrilerin her biri uçlarda aynı eğime sahiptir.



Şekil 4.11 Katlı B_2 köşesinin B Spline eğrisi üzerindeki etkisi

Şekil 4.12 4.mertebeden, 3 tane B Spline eğrisini göstermektedir. Tanımlanan poligonların her biri gösterildiği gibi 8 tane köşeye sahiptir. Şekilde gösterilen 3 eğri ,poligon köşesi B_5 'i sırasıyla B_5' ve B_5'' 'ne hareket ettirerek elde edilmiştir . B_5 'i hareket ettirmek eğriye yalnız sınırlı bir bölge içerisinde etki etmektedir. Özellikle B_3B_4 , B_4B_5 ve B_5B_6 , B_6B_7 poligonlarına ait olan eğri parçaları B_5 'in hareketi ile etkilenir. Genellikle, hareket ettirilen noktanın sağında ve solunda $k/2$ poligon parçasına ait olan eğri parçalarıyla eğriye etki edilir.



Şekil 4.12 B Spline eğrilerinin yerel kontrolü

4.2.1 Örnek : Open B Spline eğrisinin hesaplanması

$B_1[1 \ 1]$, $B_2[2 \ 3]$, $B_3[4 \ 3]$, $B_4[3 \ 1]$ poligon köşeleri olmak üzere 2. ve 3. mertebeden B Spline eğrilerini hesaplayalım:

$k=2$ için open düğüm vektör $[X] = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$ 'dir .Burada $x_1=0, \dots, x_6=3$ ve parametre aralığı $0 \leq t \leq 3$ 'tür. Bu eğri 3 tane lineer ($k-1=1$) parçayla oluşturulur. $0 \leq t < 3$ için baz fonksiyonları:

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{2,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 2$$

$$N_{1,2}(t) = 1-t \qquad N_{2,2}(t) = t \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 1,2$$

$$1 \leq t < 2$$

$$N_{3,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 3$$

$$N_{2,2}(t) = 2-t \qquad N_{3,2}(t) = t-1 \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 2,3$$

$$2 \leq t < 3$$

$$N_{4,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = 3-t \qquad N_{4,2}(t) = t-2 \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 3,4$$

Parametrik B Spline eğrisi ;

$$P(t) = B_1 N_{1,2}(t) + B_2 N_{2,2}(t) + B_3 N_{3,2}(t) + B_4 N_{4,2}(t)$$

Her bir aralık için eğri;

$$P(t) = (1-t)B_1 + t.B_2 = B_1 + (B_2 - B_1).t \qquad 0 \leq t < 1$$

$$P(t) = (2-t)B_2 + (t-1)B_3 \qquad 1 \leq t < 2$$

$$P(t) = (3-t)B_3 + (t-2)B_4 \qquad 2 \leq t < 3$$

Eğri üzerindeki, $t = t_{\max} = 3$ özel bir dikkat gerektirmektedir. Çünkü sağdan açık aralıklardan ötürü tüm baz fonksiyonları $N_{i,k}(t)$ $t = 3$ 'te sıfır olur .Bu sebeple teknik olarak son poligon noktası B Spline eğrisi üzerinde yer almaz. Ancak pratikte son poligon noktası B Spline eğrisi üzerinde yer almaktadır. $t = 3 - \epsilon$ olmak üzere $\epsilon \rightarrow 0$ limit değeri eğri üzerindeki son noktanın, son poligon noktasıyla çakıştığını gösterir.

$k=4$ için eğrinin mertebesi poligon köşelerinin sayısına eşittir. $t_{\max} = n-k+2 = 3-4+2 = 1$ ve düğüm vektör $[0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1]$ olur.

Böylece baz fonksiyonları :

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{4,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = 1-t \qquad N_{4,2}(t) = t ; \quad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 3,4$$

$$N_{2,3}(t) = (1-t)^2 \qquad N_{3,3}(t) = 2t(1-t)$$

$$N_{4,3}(t) = t^2 \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 2,3,4$$

$$N_{4,1}(t) = (1-t)^3 \qquad N_{2,4}(t) = t(1-t)^2 + 2t(1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$N_{3,4}(t) = 2t^2(1-t) + (1-t)t^2 = 3t^2(1-t) \qquad N_{4,4}(t) = t^3$$

Parametrik B Spline ;

$$P(t) = B_1 N_{1,4}(t) + B_2 N_{2,4}(t) + B_3 N_{3,4}(t) + B_4 N_{4,4}(t)$$

$$P(t) = (1-t)^3 B_1 + 3t(1-t)^2 B_2 + 3t^2(1-t) B_3 + t^3 B_4$$

$t=0$ için;

$$P(0) = B_1$$

ve $t=1/2$ için ;

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} B_1 + \frac{3}{8} B_2 + \frac{3}{8} B_3 + \frac{1}{8} B_4$$

$$P(1/2) = \frac{1}{8} [1\ 1] + \frac{3}{8} [2\ 3] + \frac{3}{8} [4\ 3] + \frac{1}{8} [3\ 1] = [11/4\ 5/2]$$

Şekil 4.13'te farklı mertebelerde, bir önceki örnekte verilen köşelerle tanımlanmış 3 tane periyodik B Spline fonksiyonu gösterilmiştir. $k=2$ değeri için poligonla B Spline eğrisi çakışır. Bununla birlikte $k>2$ olmak üzere periyodik B Spline eğrisi üzerindeki ilk ve son noktalar, ilk ve son poligon uçlarıyla çakışmamaktadır. İlk ve son poligon parçalarındaki eğim ile eğri üzerindeki ilk ve son noktadaki eğim de aynı değildir.

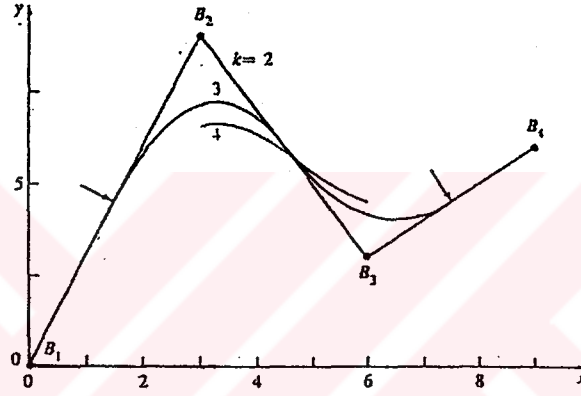
$k=3$ için B Spline eğrisi ilk poligon parçasının orta noktasından başlar ve son poligon parçasının orta noktasında sona erer. Bu etkiler periyodik baz fonksiyonları için parametre değişim aralığının azalmasının bir sonucudur.

$k=2$ için periyodik düğüm vektör : $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$ ve parametrenin değişim aralığı: $1 \leq t \leq 4$

$k=3$ için periyodik düğüm vektör : $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$

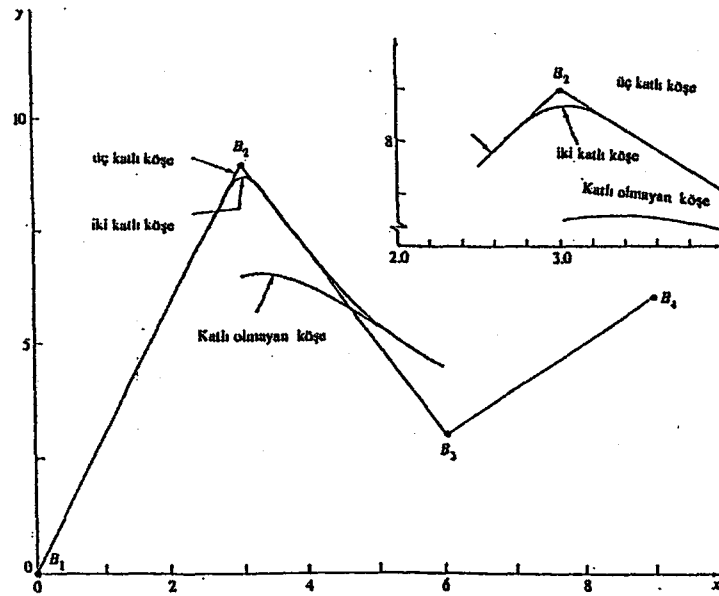
ve parametrenin değişim aralığı : $2 \leq t \leq 4$

$k=4$ için periyodik düğüm vektör: $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ ve parametrenin değişim aralığı: $3 \leq t \leq 4$



Şekil 4.13 Farklı mertebelerin periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi

Şekil 4.14 periyodik B Spline fonksiyonları için tanımlanan poligondaki katlı uçların etkisini göstermektedir.



Şekil 4.14 Katlı köşelerin periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi

4.2.2 Örnek : Periyodik B Spline eğrisinin hesaplanması

Poligon köşeleri $B_1[0 \ 0]$, $B_2[3 \ 9]$, $B_3[6 \ 3]$, $B_4[9 \ 6]$ 4.mertebeden periyodik B Spline eğrisini hesaplayalım.

4.mertebeden baz fonksiyonları için düğüm vektör $[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ ve parametre aralığı $3 \leq t < 4$ olur.

$3 \leq t < 4$

$$N_{4,1}(t) = 1 \qquad N_{i,1}(t) = 0 \qquad i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = 4 - t \qquad N_{4,2}(t) = t - 3 \qquad N_{i,2}(t) = 0 \qquad i \neq 3,4$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(4-t)^2}{2} \qquad N_{3,3}(t) = \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2}$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-3)^2}{2} \qquad N_{i,3}(t) = 0 \qquad i \neq 2,3,4$$

$$N_{1,4}(t) = \frac{(4-t)^3}{6}$$

$$N_{3,4}(t) = \frac{(t-2)^2(4-t)}{6} + \frac{(t-2)(t-3)(5-t)}{6} + \frac{(6-t)(t-3)^2}{6}$$

$$N_{4,4}(t) = \frac{(t-3)^3}{6}$$

$t=3$ için

$$N_{1,4}(t) = \frac{(4-3)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$N_{2,4}(t) = \frac{(3-1)(4-3)^2}{6} + \frac{(5-3)(4-3)(3-2)}{6} + \frac{(5-3)^2(3-3)}{6} = \frac{2}{3}$$

$$N_{3,4}(t) = \frac{(3-2)^2(4-3)}{6} + \frac{(3-2)(3-3)(5-3)}{6} + \frac{(6-3)(3-3)^2}{6} = \frac{1}{6}$$

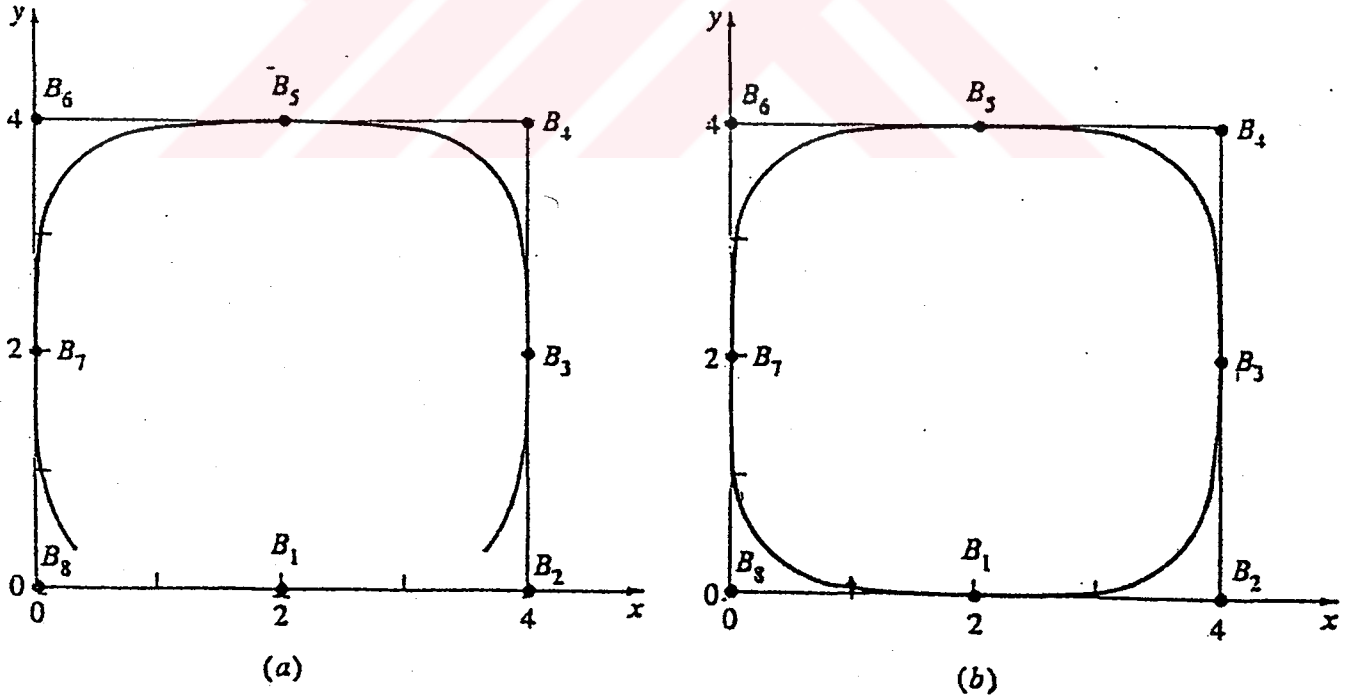
$$N_{4,4}(t) = \frac{(3-3)^3}{6} = 0$$

$t = 3$ için B Spline eğrisi üzerindeki nokta ,

$$P(3) = \frac{1}{6}B_1 + \frac{2}{3}B_2 + \frac{1}{6}B_3 + 0B_4$$

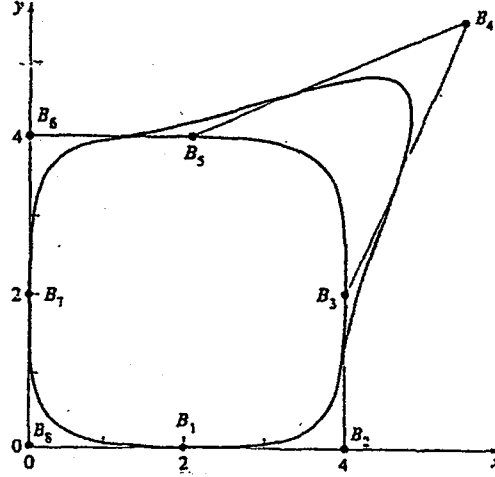
$$P(3) = \frac{1}{6}[0 \ 0] + \frac{2}{3}[3 \ 9] + \frac{1}{6}[6 \ 3] + 0[9 \ 6] = [3 \ 6.5]$$

Periyodik B Spline eğrileri ,kapalı eğriler oluşturmak için çok faydalıdır. Şekil 4.15a kapalı poligon $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1$ kullanılarak oluşturulan 4.mertebeden B Spline eğrisini gösterir .Burada ilk köşe, son köşe gibi poligonu kapamak için tekrarlanır. Periyodik baz fonksiyonlarında parametrenin değişim aralığı kısıtlandığından sonuç olarak bulunan B Spline eğrisi kapalı değildir. Burada periyodik uniform düğüm vektör $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 12]$ ve kullanılabilir parametre aralığı $3 \leq t \leq 9$ 'dur. Tanımlanan kapalı poligonun başlangıcında ve (veya) sonunda $k-2$ poligon köşesinin tekrarıyla bir kapalı periyodik B Spline eğrisi elde edilir. Şekil 4.15'in b şikkında poligon $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1B_2$, düğüm vektör $[0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 12 \ 13 \ 14]$ ve kullanılabilir parametre aralığı $3 \leq t \leq 11$ 'dir. Alternatif olarak tanımlanabilecek $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1B_2B_3$ veya $B_7B_8B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1$ gibi poligonlarla da aynı sonuçlar elde edilir.



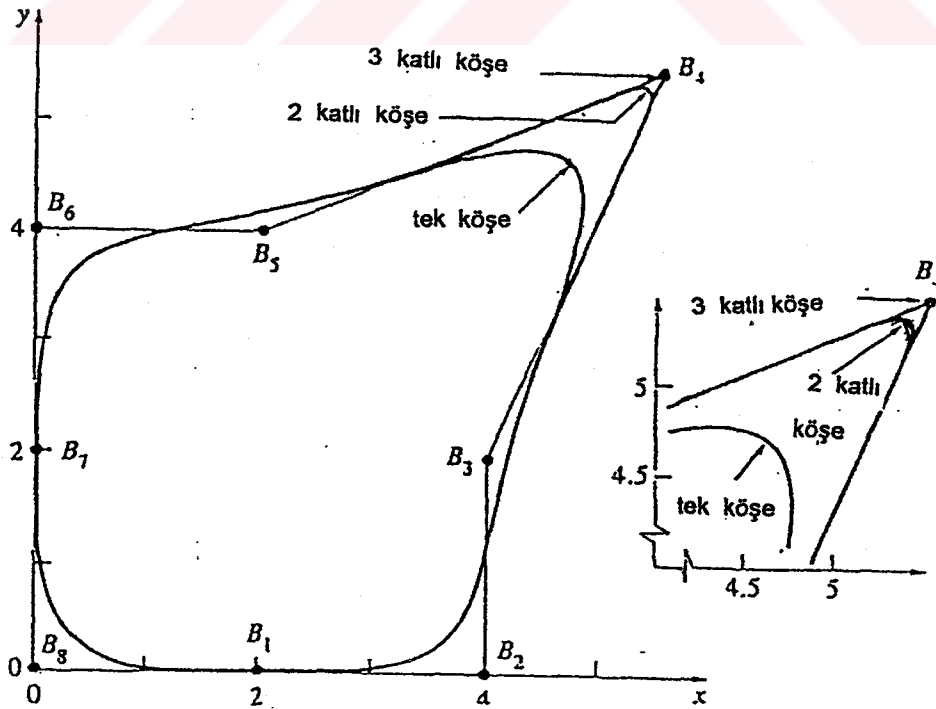
Şekil 4.15 Kapalı periyodik B Spline eğrisi
(a) $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1$ (b) $B_8B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1B_2$

Şekil 4.16 tek bir poligon köşesi B_4 'ün hareketinin kapalı periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisini göstermektedir. Etki, hareket ettirilen noktanın her iki tarafındaki $k/2$ poligon parçasına bağlı olan eğri parçalarıyla sınırlanmıştır.



Şekil 4.16 Bir tek poligon köşesinin hareketinin bir kapalı periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi

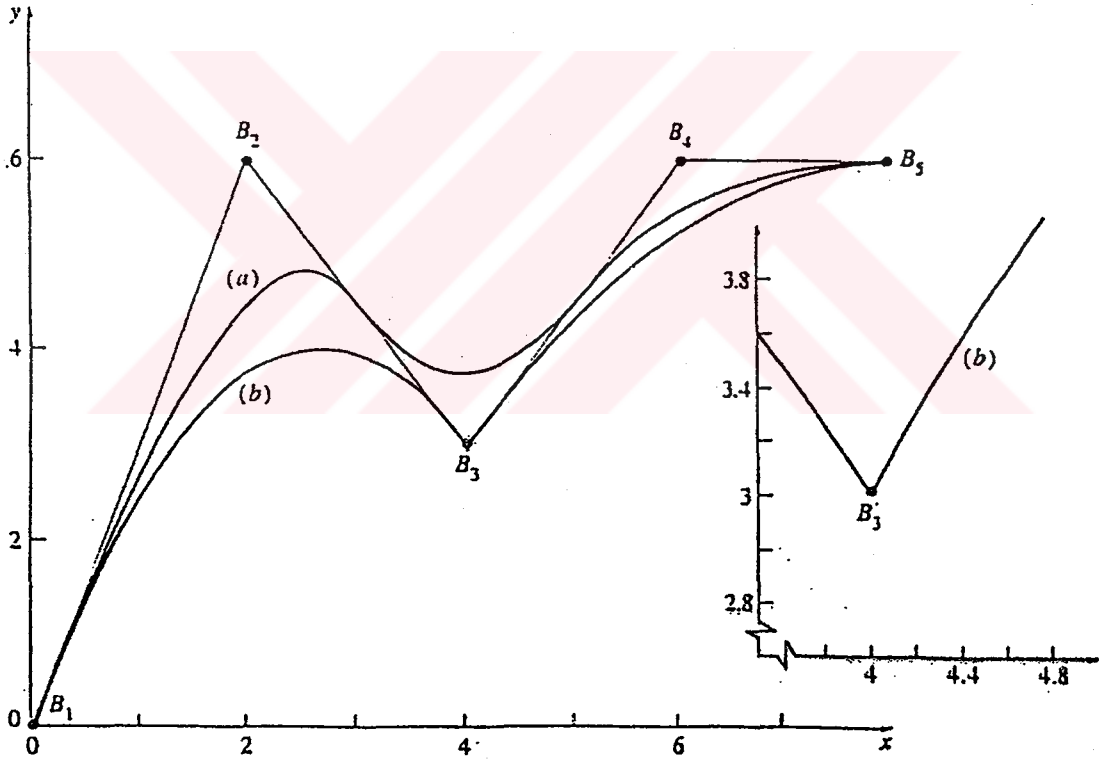
Şekil 4.17, B_4 'de katlı köşelerin etkisini gösterir. Detaylar B_4 'ün yanındaki ilave de gösterilir. B Spline eğrisinin üzerindeki etki, katlı köşelerin her iki tarafındaki $k/2$ tane poligon parçasına ait olan eğri parçalarıyla sınırlanmıştır.



Şekil 4.17 Katlı köşelerin kapalı periyodik B Spline eğrisi üzerindeki etkisi

Şekil 4.18 katlı iç düğüm değerlerinin nonuniform B Spline eğrisi üzerindeki etkisini gösterir. Şekil 4.18'deki 3. mertebeden üstteki eğri, open düğüm vektör $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ile ve alttaki 3.mertebeden eğri nonuniform düğüm vektör $[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ile oluşturuldu. Baz fonksiyonları şekil 4.7d'de gösterilmiştir. Bu eğriye özdeş olan bir başka eğri diğer bir nonuniform düğüm vektör $[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ile elde edilir. Baz fonksiyonları şekil 4.7e'de gösterilmiştir.

Şekil 4.18 katlı iç düğüm değerinin B_3 'de meydana getirdiği keskin köşeyi veya sivriliği gösterir. Bir katlı düğüm değeri sıfır uzunluğunda bir doğru parçasıdır. Sonuç olarak, baz fonksiyonlarının sıfırdan farklı olduğu aralık indirgenir. Ayrıca katlı iç düğüm değerleri, katlı poligon köşelerine zıt olarak, baz fonksiyonlarının x_i noktasında diferansiyellenebilirliğini C^{k-m-1} 'e indirger. Burada $m \leq k-1$ 'dir. Şekil 4.18'de gösterilen nonuniform eğri, B_3 'ün civarında C^0 ($k-m-1 = 3-2-1$) süreklidir. Böylece eğri de süreksizlik veya köşe meydana gelir.



Şekil 4.18 Nonuniform B Spline eğrileri $k=3$
 (a) $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ (b) $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$

Şekil 4.19 poligon köşeleri arasındaki giriş uzaklıkları ile orantılı olacak şekilde iç düğüm değerlerine sahip bir düğüm vektör kullanılarak yaratılan 3. mertebeden bir open nonuniform B Spline eğrilerini gösterir.

Özellikle düğüm vektör aşağıdaki şekilde verilir :

$$\begin{aligned}
 x_i &= 0 & 1 \leq i \leq k \\
 x_{i+k} &= \left(\frac{\left(\frac{i}{n-k+2} \right) c_{i+1} + \sum_{j=1}^i c_j}{\sum_{i=1}^n c_i} \right) (n-k+2) & 1 \leq i \leq n-k+1 \quad (4.4) \\
 x_i &= n-k+2 & n+1 \leq i \leq n+k
 \end{aligned}$$

Bu tanımda; $c_i = |B_{i+1} - B_i|$ şeklinde tanımlanmıştır. Eşit uzaklıklı olarak yerleştirilen poligon köşeleri için eşit uzaklıklı olarak yerleştirilmiş tamsayı iç düğüm değerleri (örneğin; bir open uniform düğüm vektör) elde edilir

Bu sonuçlar poligon köşeleri arasındaki uzaklıklar çok farklı olmadıkça uniform B Spline eğrilerinin nonuniform B Spline eğrilerinden çok farklı olmadığını gösterir.

4.2.3 Örnek : Nonuniform B Spline Eğrileri

$B_1[0 \ 0]$, $B_2[2 \ 6]$, $B_3[4 \ 3]$, $B_4[6 \ 6]$, $B_5[8 \ 6]$ poligon köşeleri arasındaki giriş uzaklıklarıyla orantılı düğüm değerlerine sahip bir nonuniform düğüm vektör kullanılarak oluşturulan 3.mertebeden bir open B Spline eğrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır

İlk olarak tanımlanan giriş uzunlukları :

$$c_1 = \sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2} = 40 = 6.325$$

$$c_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (3-6)^2} = 13 = 3.606$$

$$c_3 = \sqrt{(6-4)^2 + (6-3)^2} = 13 = 3.606$$

$$c_4 = \sqrt{(8-6)^2 + (6-6)^2} = 4 = 2.0$$

Toplam giriş uzunluğu :

$$\sum_{i=1}^4 c_i = 15.537$$

olur. (4.3) denklemini kullanılarak iç düğüm değerleri :

$$x_4 = \left[\frac{\frac{c_2}{3} + c_1}{15.537} \right] (3) = 1.453$$

$$x_5 = \left[\frac{\frac{2c_3}{3} + c_1 + c_2}{15.537} \right] (3) = 2.382$$

Böylece düğüm vektör

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1.45 \ 2.382 \ 3 \ 3 \ 3]$$

Burada $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_8 = 3$ 'dür.

Parametre değişim aralığı $0 \leq t \leq 3$ 'dür. Eğri 3 tane parabolik ($k-1 = 2$) parçayla oluşturulur. $0 \leq t < 1.453$ için baz fonksiyonları:

$$N_{3,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0 \quad i \neq 3$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{(1.453-t)}{1.453} \quad N_{3,2}(t) = \frac{t}{1.453}; \quad N_{i,2}(t) = 0 \quad i \neq 2,3$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{(1.453-t)^2}{(1.453)^2} \quad N_{2,3}(t) = \frac{t}{(1.453)^2}(1.453-t) + \frac{(2.382-t)t}{(2.382)(1.453)}$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t^2}{(2.382)(1.453)} \quad N_{i,3}(t) = 0 \quad i \neq 1,2,3$$

$1.453 \leq t < 2.382$ için baz fonksiyonları :

$$N_{4,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0 \quad i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{(2.382-t)}{(2.382-1.453)}$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{(t-1.453)}{(2.382)(1.453)} \quad N_{i,2}(t) = 0 \quad i \neq 3,4$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(2.382-t)^2}{2.382(2.382-1.453)}$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t}{2.382} \frac{(2.382-t)}{(2.382-1.453)} + \frac{(3-t)}{(3-1.453)} \frac{(t-1.453)}{(2.382-1.453)}$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1.453)^2}{(3-1.453)(2.382-1.453)} \quad N_{i,3}(t) = 0 \quad i \neq 2,3,4$$

$2.382 \leq t < 3$ için baz fonksiyonları :

$$N_{5,1}(t) = 1, \quad N_{i,1}(t) = 0 \quad i \neq 5$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{3-t}{(3-2.382)}$$

$$N_{5,2}(t) = \frac{(t-2.382)}{(3-2.382)} \quad N_{i,2}(t) = 0 \quad i \neq 4,5$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{(3-1.453)(3-2.382)}$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1.453)(3-t)}{(3-1.453)(3-2.382)} + \frac{(3-t)(t-2.382)}{(3-2.382)^2}$$

$$N_{5,3}(t) = \frac{(t-2.382)^2}{(3-2.382)^2} \quad N_{i,3}(t) = 0 \quad i \neq 3,4,5$$

B Spline eğrisi

$$P(t) = N_{1,3}(t)B_1 + N_{2,3}(t)B_2 + N_{3,3}(t)B_3 + N_{4,3}(t)B_4 + N_{5,3}(t)B_5$$

$t = 1/2$ için;

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0.430B_1 + 0.498B_2 + 0.072B_3 + (0)B_4 + (0)B_5$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0.430[0 \ 0] + 0.498[2 \ 6] + 0.072[4 \ 3]$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = [1.284 \ 3.202]$$

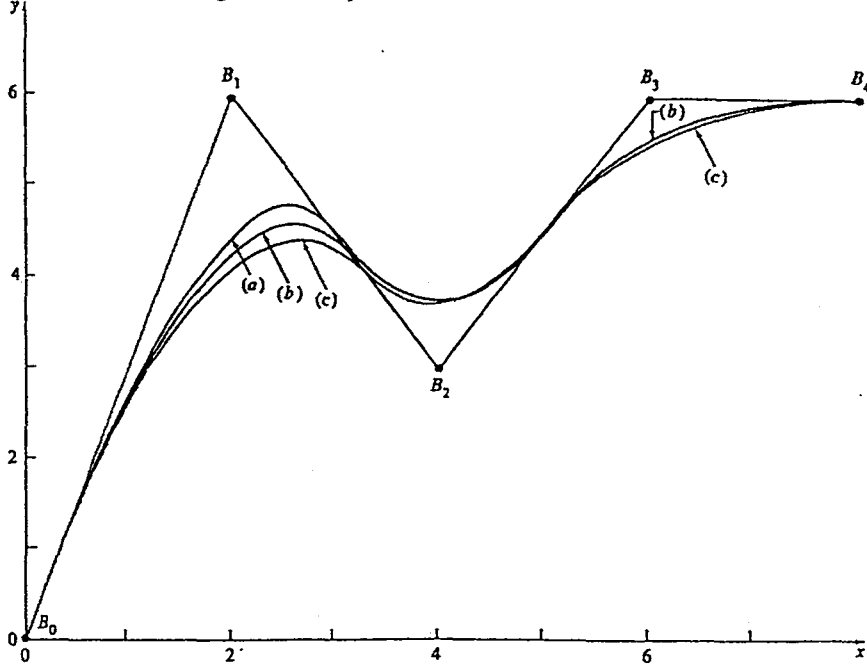
ve $t = 2$ için;

$$P(2) = (0)B_1 + 0.066B_2 + 0.726B_3 + 0.208B_4 + (0)B_5$$

$$P(2) = 0.066[2 \ 6] + 0.726[4 \ 3] + 0.208[6 \ 6]$$

$$P(2) = [4.284 \ 3.822]$$

Sonuçlar şekil 4.19'da gösterilmiştir.



Şekil 4.19 Open nonuniform B Spline eğrilerini karşılaştırılması (a) uniform düğüm vektör (b) nonuniform giriş uzaklığı ile orantılı düğüm vektör (c) B_2 'de iki katlı ve nonuniform giriş uzaklığıyla orantılı düğüm vektör

4.3 Rasyonel B Spline Eğrileri

Rasyonel B Spline eğrileri doğrular, düzlemler gibi analitiksel şekilleri temsil edebilmeyi sağlar.

Bir rasyonel B Spline eğrisi

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır (Rogers ve Adams, 1990; Piegl ve Tiller, 1997). Bu tanımda B_i 'ler rasyonel B Spline eğrileri için poligon köşeleridir ve

$$R_{i,k}(t) = \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} \quad (4.6)$$

rasyonel B Spline baz fonksiyonlarıdır. Burada tüm i değerleri için $h_i \geq 0$ kabul edilir.

Her bir rasyonel baz fonksiyonu tüm parametre değerleri için $R_{i,k} \geq 0$ 'dır.

(4.3) ve (4.6) eşitliklerinden tüm h_i değerleri için $h_i = 1$ ise $R_{i,k}(t) = N_{i,k}(t)$ gerçekleşeceği açıktır. Böylece rasyonel olmayan B Spline baz fonksiyonları ve eğrileri, rasyonel B Spline baz fonksiyonları ve eğrilerinin özel bir halidir.

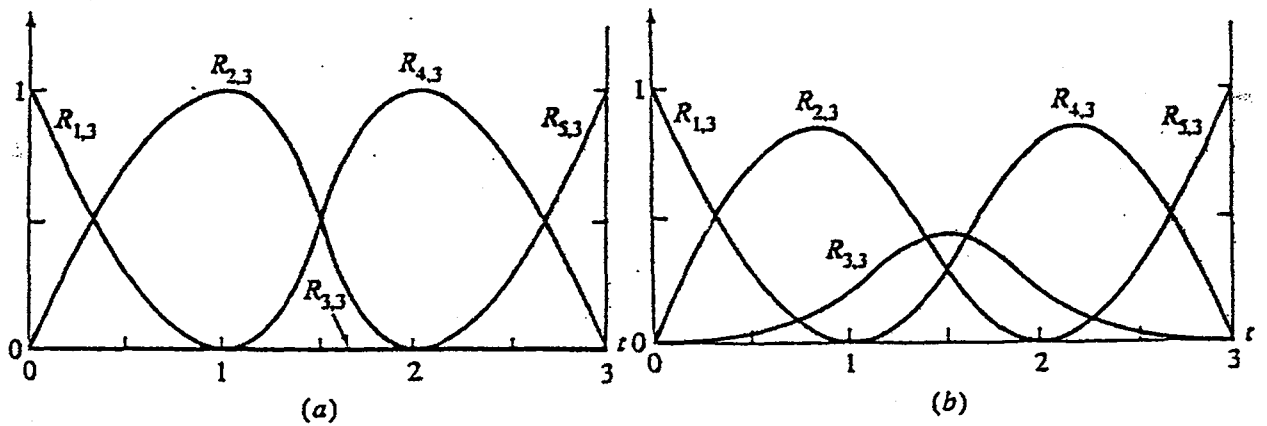
Open uniform , periyodik uniform ve nonuniform düğüm vektörleri rasyonel B Spline baz fonksiyonları ve rasyonel B Spline eğrileri elde etmek için kullanılır.

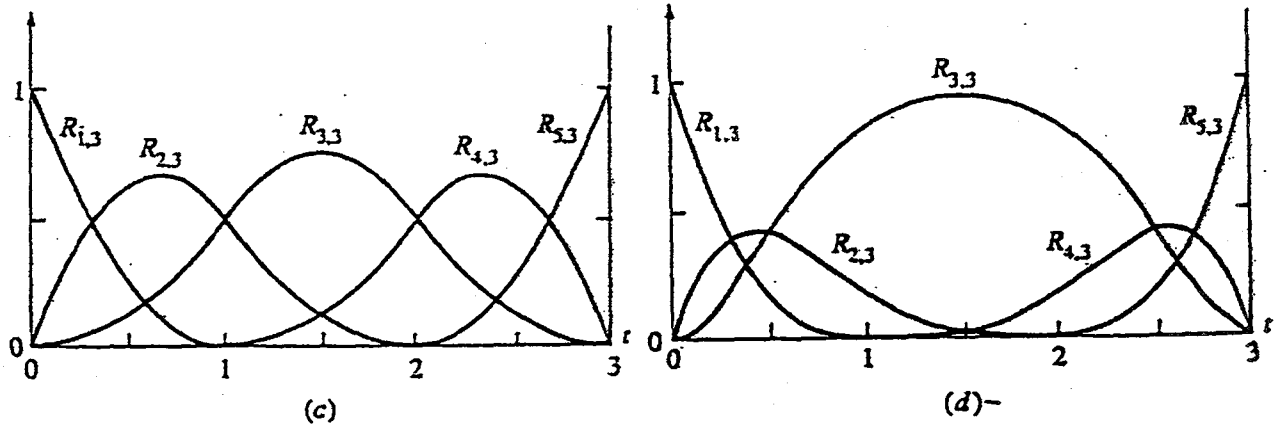
(4.5) ve (4.6) eşitliklerindeki h_i koordinatları ağırlıklar olarak adlandırılır.

h_i koordinatlarının rasyonel B Spline baz fonksiyonları üzerindeki etkisi şekil 4.20'de gösterilmiştir. Burada open uniform düğüm vektör $[0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3]$ ($n+1=5, k=3$)

$h_i = 1$ $i \neq 3$ şeklinde verilen koordinat vektörü ile birlikte kullanılmıştır. h_3 değeri 0'dan 5'e değişir. Şekil 4.20c'de gösterilen rasyonel B Spline baz fonksiyonları ve eğrileri $h_3 = 1$ için $n+1=5, k=3$ değerleri ile oluşturulan rasyonel olmayan B Spline baz fonksiyonları ve eğrileri ile özdeştir. Şekil 4.20a'da gösterildiği gibi $h_3 = 0$ ise her yerde $R_{3,3} = 0$ 'dır. Böylece B_3 köşesi B Spline eğrisinin şekli üzerinde etkili değildir. Bu etki B_2 ile B_4 'ün düz bir çizgi ile bağlandığı yerde şekil 4.21'de gösterilmiştir.

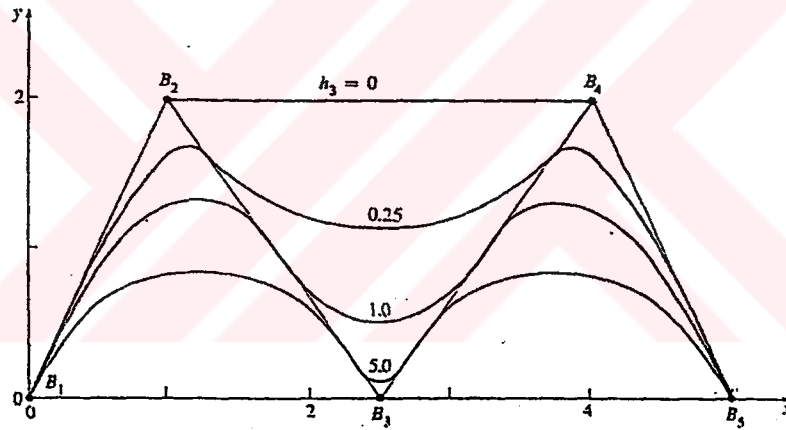
Şekil 4.20 h_3 değeri arttığında $R_{3,3}$ rasyonel baz fonksiyonunun arttığını, fakat (4.3) eşitliğinden $R_{2,3}$ ve $R_{4,3}$ rasyonel baz fonksiyonlarının azaldığını gösterir.





Şekil 4.20 Rasyonel B Spline baz fonksiyonları $n+1=5, k=3$ $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$
 $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ (a) $h_3=0$ (b) $h_3=0.25$ (c) $h_3=1.0$ (d) $h_3=5.0$

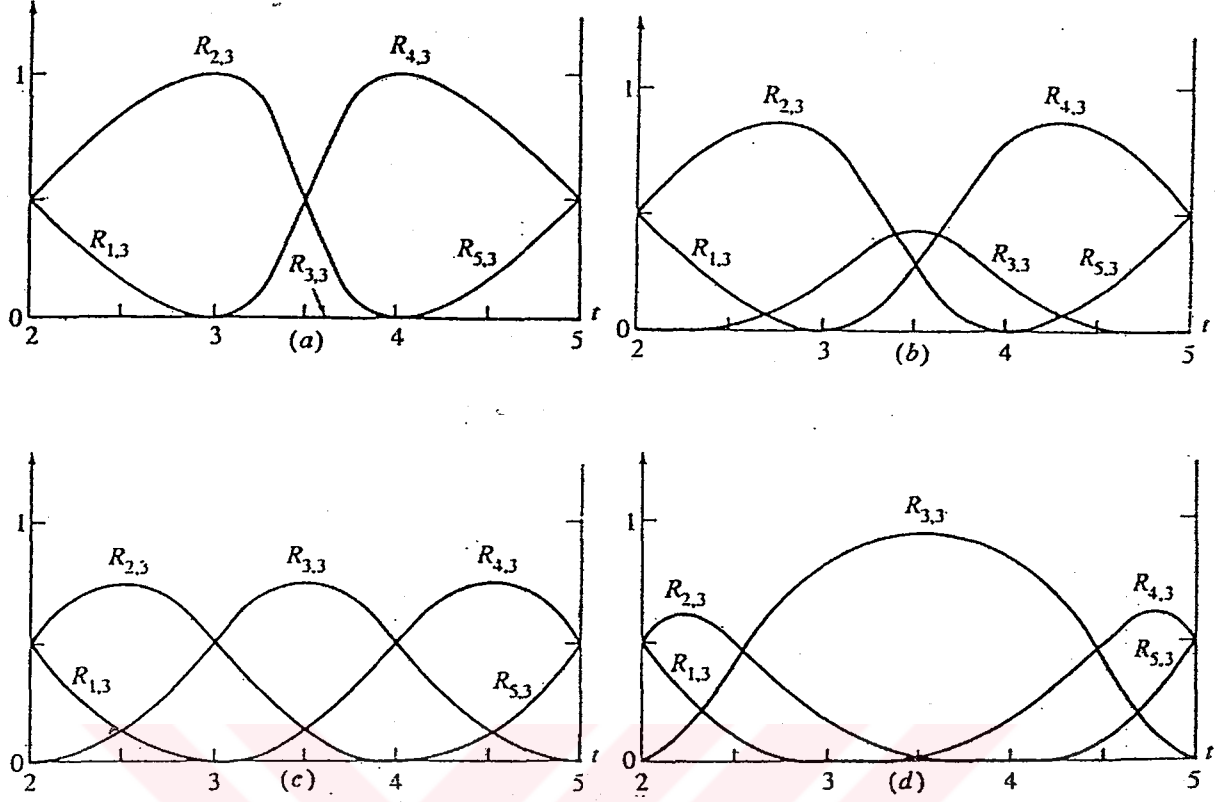
h_3 değerinin artırılmasıyla eğri B_3 köşesine doğru çekilir. Eğri üzerindeki bu etki şekil 4.21'de gösterilmiştir.



Şekil 4.21 $n+1=5, k=3$, open düğüm vektör $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ve $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$
 için Rasyonel B Spline eğrileri

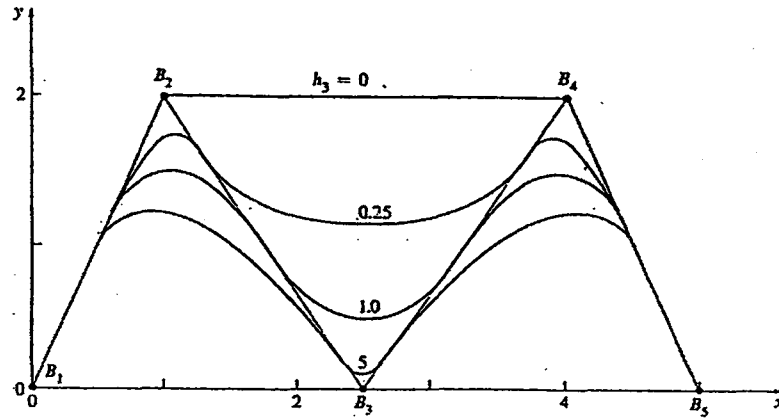
Open rasyonel B Spline eğrilerindeki ilk ve son noktalar poligon köşelerinin ilk ve son noktalarıyla çakışır, yani $P(0) = B_1$ $P(t_{\max}) = P(n-k+2) = B_{n+1}$ gerçekleşir.

Şekil 4.22, $n+1=5, k=3$, $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ düğüm vektörü ve $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$
 $0 \leq h_3 \leq 5$ koordinat vektörü ile tanımlanan periyodik uniform baz fonksiyonlarını göstermektedir. Rasyonel olmayan baz fonksiyonlarında olduğu gibi kullanılabilir parametre aralığı $2 \leq t \leq 5$ 'dir.



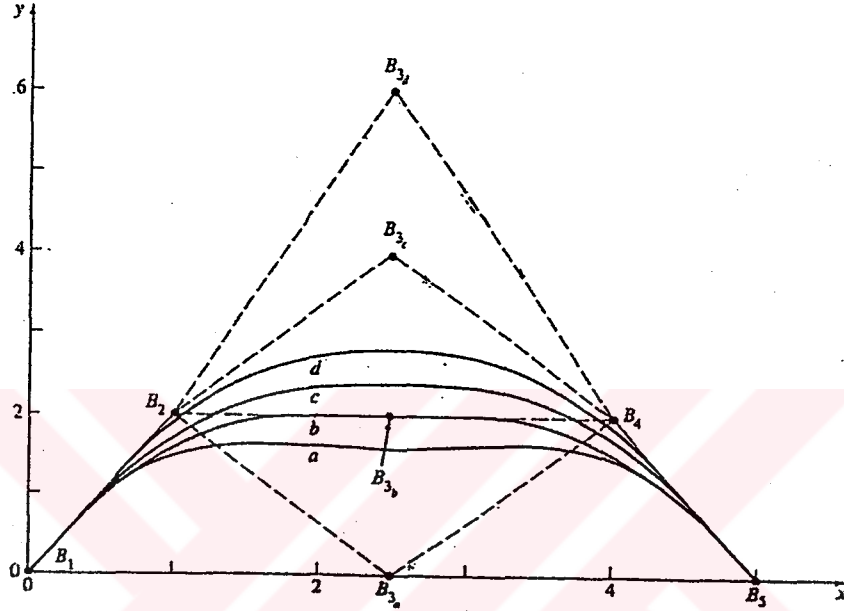
Şekil 4.22 Rasyonel B Spline baz fonksiyonları $n+1=5, k=3$, periyodik düğüm vektör $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ ve $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ için
 (a) $h_3=0$ (b) $h_3=0.25$ (c) $h_3=1.0$ (d) $h_3=5.0$

$h_3=1$ için rasyonel B Spline baz fonksiyonlarıyla $n+1=5$, $k=3$ değerleriyle oluşturulan rasyonel olmayan baz fonksiyonları özdeştir. Şekil 4.23, şekil 4.22'de gösterilmiş olan rasyonel B Spline baz fonksiyonlarıyla oluşturulmuş rasyonel B Spline fonksiyonlarıdır.



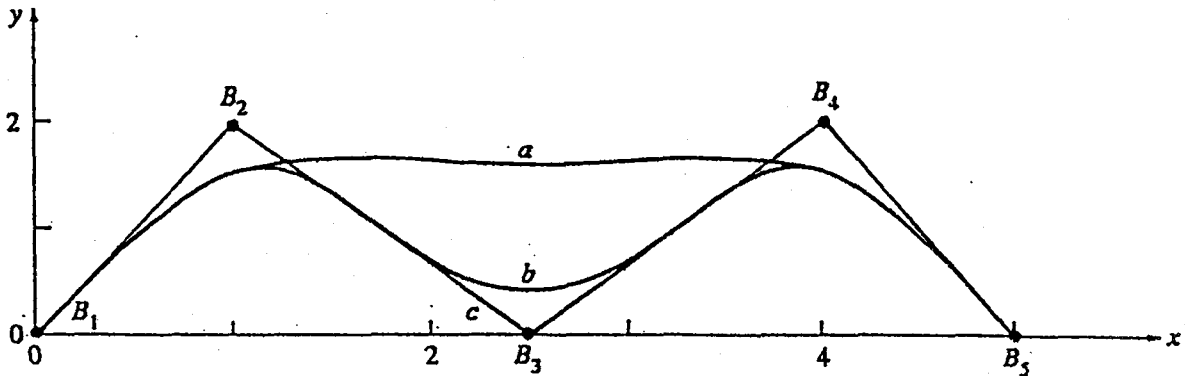
Şekil 4.23 $n+1=5, k=3$, periyodik düğüm vektör $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ ve $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ için Rasyonel B Spline eğrileri

Şekil 4.24 rasyonel olmayan B spline eğrilerine benzer olarak bir tek poligon köşesinin hareketinin etkisini göstermektedir. Burada, $[H] = [1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$ 'dir. Eğer $h_3 = 0$ ise B_3 köşesinin hareketi eğri üzerinde etkili değildir. h_3 arttıkça B_3 köşesinin hareketinin eğri üzerindeki etkisi artar.



Şekil 4.24 Tek bir poligon köşesinin hareketinin Rasyonel B Spline eğrisi üzerindeki etkisi
 $n+1=5, k=4, [H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$

Şekil 4.25'de 4. mertebeden rasyonel B Spline eğrisi üzerinde B_3 köşesindeki katlılığın etkisi gösterilmektedir. Rasyonel B Spline eğrilerinde olduğu gibi köşenin $k-1$ katlı olması eğri de keskin bir köşe veya sivrilik meydana getirir.



Şekil 4.25 B_3 katlı köşesinin Rasyonel B Spline eğrisi üzerindeki etkisi, $n+1=5, k=4$
a) tek köşe $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$ (b) iki katlı köşe $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 1]$ (c) üç katlı köşe $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 1]$

5.YÜZEYLER

Yüzeyler ve tanımları otomobil gövdeleri, geminin temel bölümleri ,uçak gövdeleri ve kanatları, türbin ve fan bıçakları, şişe,mobilya ve ayakkabıların dizaynı ve üretiminde kullanılır. Bilgisayar grafiklerinde ve bilgisayar destekli dizaynda bir yüzeyin üç boyutlu doğru matematik modelinin geliştirilmesi avantajlıdır. Böyle bir model eğrilik veya fiziksel özellikler (yüzey alanı, hacim, eylemsizlik momenti vs.) gibi yüzey karakteristiklerinin analizinde kolaylık sağlar.

5.1 Dönel Yüzeyler

3 boyutlu yüzey oluşturmak için en basit metotlardan biri 2 boyutlu bir doğru ya da düzlem eğrisini uzayda bir eksen etrafında döndürmektir. Böyle yüzeylere, dönme yüzeyleri denir. Basitlik için dönme eksenini pozitif yönde ve x eksenini ile çakıştığı kabul edilir. Döndürülen nokta, doğru ya da düzlem eğrisinin xy düzleminde yer aldığı varsayılır. Örneğin; dönme eksenini üzerinde olmayan bir noktanın 360° açıyla dönmesinin sonucunda bir çember meydana gelir. 360°'den küçük bir açıyla dönme ile bir dairesel yay elde edilir. Doğru parçası dönme eksenine paralel ve bu eksenle çakışmıyorsa 360°'lik bir dönme ile dairesel silindir elde edilir.

Dönme yüzeyi üzerindeki herhangi bir noktanın parametrik denklemi, döndürülen noktanın

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] \quad 0 \leq t \leq t_{\max}$$

şeklinde tek parametrelili bir fonksiyon olduğu hatırlanarak geliştirilir.

Eksen etrafında döndürme noktanın yerinin de dönme açısı θ 'nın bir fonksiyonu olmasına neden olur. Böylece dönme yüzeyi üzerindeki bir nokta t ve θ gibi iki parametreyle belirtilir. Örneğin xy düzleminde yer alan bir nesnenin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey denklemi

$$\phi(t, \theta) = [x(t) \quad y(t). \cos \theta \quad y(t). \sin \theta]$$

şeklinde dir.

Düzlem eğrilerinin döndürülmesiyle de dönme yüzeyleri elde edilir. Örneğin xy düzleminde orijin merkezli bir yarı çemberin x eksenini etrafında döndürülmesiyle küre elde edilir.

Çemberin parametrik denklemi

$$x = r \cdot \cos \theta \quad y = r \cdot \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

olmak üzere kürenin parametrik denklemi

$$\phi(\theta, \varphi) = [r \cdot \cos \theta \quad r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \quad r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi] \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

olarak elde edilir.

Kübik Spline ve B Spline eğrileri gibi parametrik eğriler bir dönme yüzeyi yaratmak için kullanılır.

5.2 Parçalı Yüzey Temsili

Otomobil gövdeleri, uçak kanatları, şişe, ayakkabı, gemi gövdeleri, heykel gibi yüzeylerin analitik tanımları mevcut değildir. Bu yüzeyler parçalı tarzda temsil edilir. Burada amaç, parçalı yüzeyleri birleştirerek bir yüzey elde etmektir.

Yüzey tanımı için faydalı bazı eğri özellikleri bir küresel yüzey dikkate alınarak gösterilmiştir. Bir birim küre ile yüzey denklemi $z = \cos \phi_1 = a_1 = \text{sabit}$ ile tanımlanan düzlemin kesişimi şekil 5.1a'da gösterilmiştir. Elde edilen kesişim eğrisi iki yüzey denkleminin ortak çözümüyle

$$x^2 + y^2 = 1 - a_1^2$$

şeklinde elde edilir.

$\theta = \theta_0 = \text{sabit}$ düzlemi

$$x \cdot \sin \theta_0 - y \cdot \cos \theta_0 = 0$$

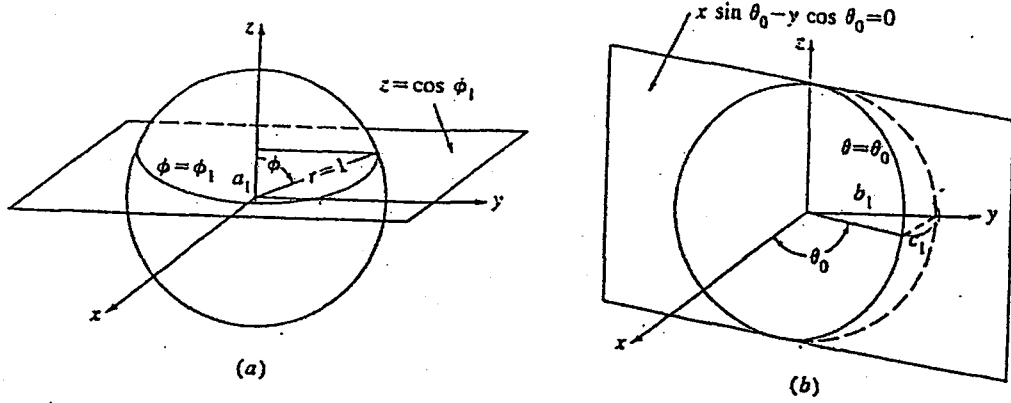
veya

$$c_1 \cdot x - b_1 \cdot y = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu düzlemlerle kürenin kesişimi şekil 5.1 b'de gösterilmiştir ve elde edilen eğri

$$y^2 \cdot \left[\left(\frac{b_1}{c_1} \right)^2 + 1 \right] + z^2 = 1$$

denklemlerle belirlenir.

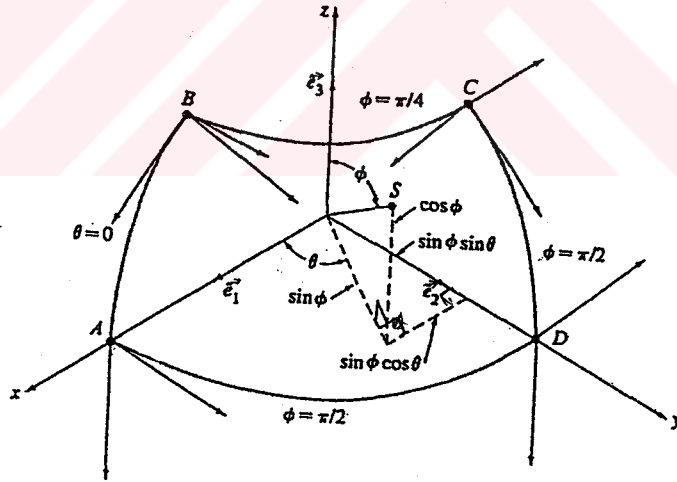


Şekil 5.1 Bir düzlem ile kürenin arakesitleri

Bir birim küre üzerindeki küresel yüzey parçasının sınırları dört düzlemle oluşturulur. $\varphi(\theta, \phi)$ yüzey parçası için vektör değerli parametrik denklem,

$$\varphi(\theta, \phi) = [\cos \theta \cdot \sin \phi \quad \sin \theta \cdot \sin \phi \quad \cos \phi] \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \quad (5.1)$$

şeklindedir.



Şekil 5.2 Küresel yüzey parçası

Şekil 5.2'de gösterildiği gibi parça $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ için tanımlanmıştır. Yüzey parçasının sınırları AB, BC, CD, DA eğrileriyle tanımlanmıştır. Dört tane sınır eğrisi köşelerde 4 tane yer vektörü ve her bir köşede ikişer tane olmak üzere 8 tane tanjant vektörüyle tanımlanır.

Şekil 5.2'de verilen küresel parçanın her köşesinde gösterilen tanjant vektörleri $\varphi(\theta, \phi)$ 'nin

$$\varphi_{\theta}(\theta, \phi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, \phi)$$

ve

$$\varphi_{\phi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}(\theta, \phi)$$

parametrik türevleriyle verilir.

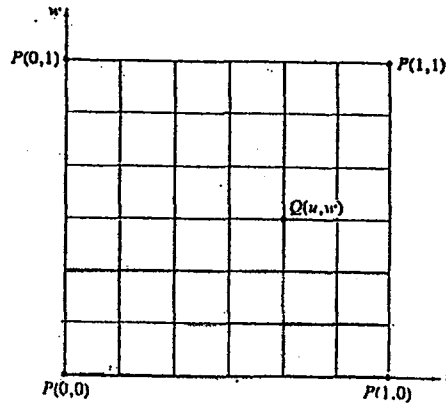
Yüzeyin iç bölgesinin şekli burulma (twist) vektör ile kontrol edilir. Şekil 5.2'de verilen küresel yüzey için burulma vektörü

$$\varphi_{\theta, \phi}(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \phi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi \partial \theta}$$

ile hesaplanır. Söylenenler dikkate alındığında bir dörtgen yüzey, köşelerde 4 tane yer vektörü, her bir köşede ikişer tane tanjant vektörü, köşelerde 4 tane burulma vektörü ve (5.1) denklemi dikkate alınarak tanımlanabilir.

5.3 Bilineer Yüzey

En basit yüzeylerden biri bilineer yüzeydir. Herhangi bir bilineer yüzey parametrik uzayda birim karenin $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,0)$, $P(1,1)$ şeklinde ifade edilen dört köşesinden elde edilir. Şekil 5.3'te gösterildiği gibi yüzeyin iç bölgesindeki herhangi bir nokta birim karenin karşılıklı sınırları arasında lineer interpolasyonla belirtilir.



Şekil 5.3 Parametrik uzayda bilineer interpolasyon

Parametrik karenin herhangi bir iç noktası

$$Q(u, w) = P(0,0).(1-u).(1-w) + P(0,1).(1-u).w + P(1,0).u.(1-w) + P(1,1).u.w$$

şeklinde verilir. Eğer bir bilineer yüzeyin dört tane tanımlanmış noktasının yer vektörleri 3 boyutlu uzayda verilmişse, bilineer yüzey parametrik uzayı 3 boyutlu uzaya tasvir ederek elde edilir.

5.4 Ruled Yüzey

Ruled yüzeyler genellikle uçak ve gemi endüstrilerinde kullanılır. Örneğin birçok uçak kanadı silindirik ruled yüzeydir. Teknik olarak bir ruled yüzey bir yol boyunca tek serbestlik derecesiyle hareket eden doğru ile verilir.

Alternatif olarak, şekil 5.4' de gösterilmiş olan, bir ruled yüzey, yüzey üzerindeki herhangi bir noktada yüzey normalini içeren düzlemin normal etrafında döndürülmesiyle belirtilebilir. Eğer en az bir yönde düzlemin sınırındaki her nokta yüzeye değerse yüzey bu yönde ruled yüzeydir. Eğer döndürülen düzlemin sınırı bir yönden daha fazla yüzeye tamamiyle değerse yüzey bu noktada katlı ruled yüzeydir.

En basit ruled yüzey bir düzlemdir. u, w parametrik uzayından 3 boyutlu uzaya bir tasvir sözü konusu olduğunda bir ruled yüzey, parametrik uzayda birim karenin $P(u,0)$ ve $P(u,1)$ kenarlarına karşılık gelen iki sınır eğrisi arasında lineer interpolasyonla elde edilir.

Yüzey,

$$Q(u, w) = P(u,0).(1-w) + P(u,1).w$$

veya

$$[Q] = [x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)] = [1-w \quad w] \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. $Q(0,0) = P(0,0)$ 'dir.

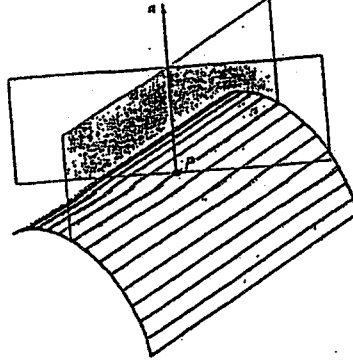
$P(0, w)$ ve $P(1, w)$ 'ye karşılık gelen eğrilerinin bilindiği varsayılırsa yüzey,

$$Q(u, w) = P(0, w).(1-u) + P(1, w).u$$

veya

$$[Q] = [x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)] = [1-u \quad u] \begin{bmatrix} P(0, w) \\ P(1, w) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.



Şekil 5.4 Bir ruled yüzeyin özellikleri

5.5 Linear Coons Yüzey

$P(u,0), P(u,1), P(0,w), P(1,w)$ ile gösterilen 4 tane sınır eğrisi biliniyorsa, blending fonksiyonları adı verilen $(1-u), u, (1-w), w$ fonksiyonları kullanılarak oluşturulan Linear Coons yüzey,

$$Q(u, w) = P(u,0).(1-w) + P(u,1).w + P(0,w).(1-u) + P(1,w)u$$

şeklinde ifade edilir.

Yukarıdaki ifade yüzey parçalarının köşelerinde göz önüne alındığında, örneğin $Q(0,0)$ köşesi için

$$Q(0,0) = P(0,0) + P(0,0) = 2.P(0,0)$$

ve kenarlarında göz önüne alındığında örneğin, $Q(0, w)$ sınır eğrisi için

$$Q(0, w) = P(0,0).(1-w) + P(0,1).w + P(0,w)$$

sonuçları elde edilir.

$P(0,0)$ noktasını göz önüne alalım. Bu nokta hem $P(u,0)$ hem de $P(0,w)$ sınır eğrilerinden elde edilebileceğinden köşe noktaları ikişer defa sayılmış olur. Dolayısıyla problem oluşur.

Doğru sonuç köşe noktalarının iki defa sayılmasıyla gelen katkının yüzey denkleminde çıkarılmasıyla gibi elde edilir; yani

$$\begin{aligned} Q(u, w) = & P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)w \\ & - P(0, 0)(1 - u)(1 - w) - P(0, 1)(1 - u)w \\ & - P(1, 0)u(1 - w) - P(1, 1)uw \end{aligned}$$

Böylece köşelerde,

$$Q(0, 0) = P(0, 0)$$

ve sınırlarda,

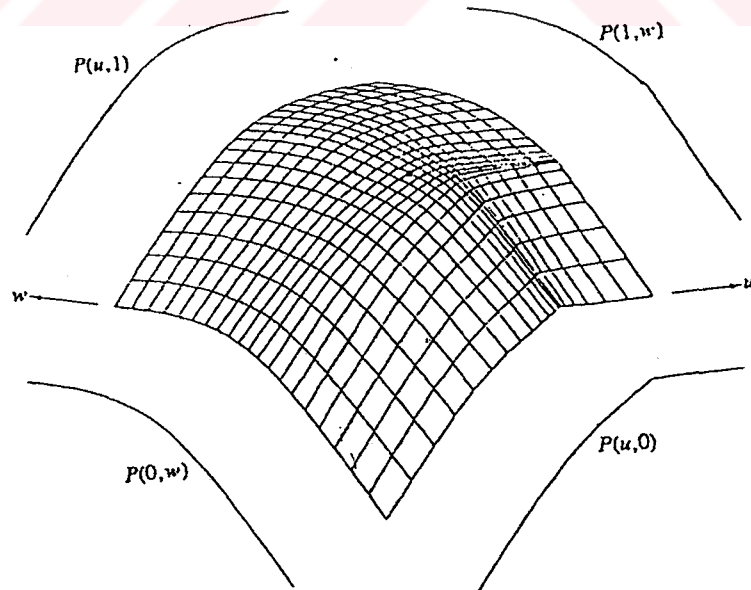
$$Q(0, w) = P(0, w)$$

$$Q(u, 1) = P(u, 1)$$

elde edilir.

$(1 - u), u, (1 - w), w$ fonksiyonları yüzeyin iç bölgesinin şeklini sınır eğrilerini birbirine karıştırarak belirlediği için bu fonksiyonlara blending fonksiyonları denilir.

Şekil 5.5'te bir Linear Coons yüzey gösterilmiştir .En basit Coons yüzey Linear Coons yüzeydir.



Şekil 5.5 Linear Coons yüzey

5.6 Coons Bikübik Yüzey

Coons Bikübik yüzeyler 4 tane sınır eğrisi için normalize edilmiş kübik spline eğrilerini kullanır. Yüzey parçasının iç bölgesini tanımlamak için kübik blending fonksiyonları kullanılır. Böylece her bir sınır eğrisinin genel formu

$$P(t) = B_1 + B_2.t + B_3.t^2 + B_4.t^3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

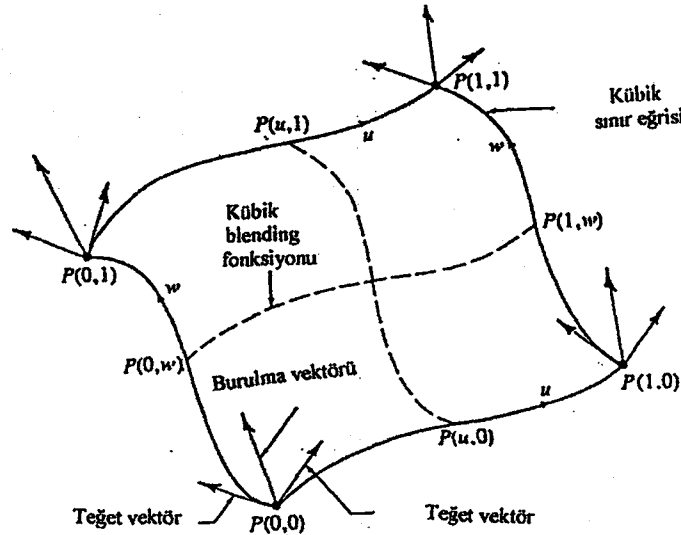
şeklindedir.

Uçlarda bilinen tanjant ve yer vektörleriyle oluşturulan bir tek kübik spline parçası için $P(u,0), P(u,1), P(0,w), P(1,w)$ sınır eğrilerinin her biri

$$P(t) = [T].[N].[G] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_1' \\ P_2' \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

ile verilir.

Burada t parametresi u veya w parametresini, P_1, P_2, P_1', P_2' ise şekil 5.6'da gösterildiği gibi sınır eğrisinin uçlarındaki tanjant ve yer vektörlerini göstermektedir.



Şekil 5.6 Bir Bikübik Coons yüzey parçasının geometrisi

Her iki yön için kullanılan kübik blending fonksiyonu, normalize edilmiş bir kübik spline eğrisi için kullanılan blending fonksiyonudur

Yani,

$$[F] = [F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t) \ F_4(t)] = [T][N]$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadeden blending fonksiyonları yazılırsa,

$$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_2(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$F_4(t) = t^3 - t^2$$

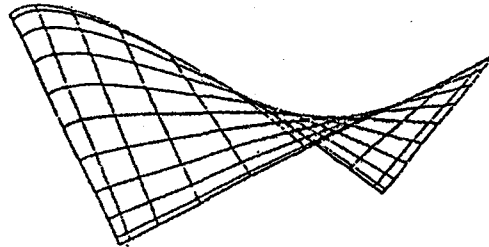
elde edilir.

Bir Coons bikübik yüzey parçası. $0 \leq u \leq 1$ ve $0 \leq w \leq 1$ olmak üzere

$$Q(u, w) = [F_1(u) \ F_2(u) \ F_3(u) \ F_4(u)] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_w(0,0) & P_w(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_w(1,0) & P_w(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uw}(0,0) & P_{uw}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uw}(1,0) & P_{uw}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım göz önüne alındığında bir bikübik yüzey parçası köşelerde 4 tane yer vektörü, her bir köşede ikişer tane olmak üzere 8 tanjant vektörü, her köşede 4 burulma vektörü ve F_1, F_2, F_3, F_4 blending fonksiyonlarıyla elde edilir. Şekil 5.7'de bir bikübik yüzey parçası gösterilmiştir.



Şekil 5.7 Coons Bikübik yüzey parçası

5.7 B Spline Yüzeyleri

B Spline yüzeyi

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w) \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N_{i,k}(u)$ ve $M_{j,l}(w)$ sırasıyla u ve w yönlerinde baz fonksiyonlarıdır.

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1; x_i \leq u < x_{i+1} \\ 0; \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i) \cdot N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) \cdot N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

$$M_{j,1}(w) = \begin{cases} 1; y_j \leq w < y_{j+1} \\ 0; \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$M_{j,l}(w) = \frac{(w - y_j) \cdot M_{j,l-1}(w)}{y_{j+l-1} - y_j} + \frac{(y_{j+l} - w) \cdot M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+l} - y_{j+1}}$$

Burada x_i ve y_j düğüm vektör elemanlarıdır. $B_{i,j}$ 'ler poligon ağının köşeleridir. B Spline eğrilerinde olduğu gibi bir B Spline yüzeyinin şekli ve karakteri düğüm vektörler $[X]$ ve $[Y]$ 'nin seçiminden önemli olarak etkilenir. Open, periyodik, nonuniform düğüm vektörleri kullanılır. Her iki parametrik yönde de aynı tip düğüm vektör kullanılması yaygın olmasına rağmen farklı yönlerde farklı düğüm vektörler kullanılması tercih edilebilir. B Spline yüzeyleri aşağıdaki özelliklere sahiptir :

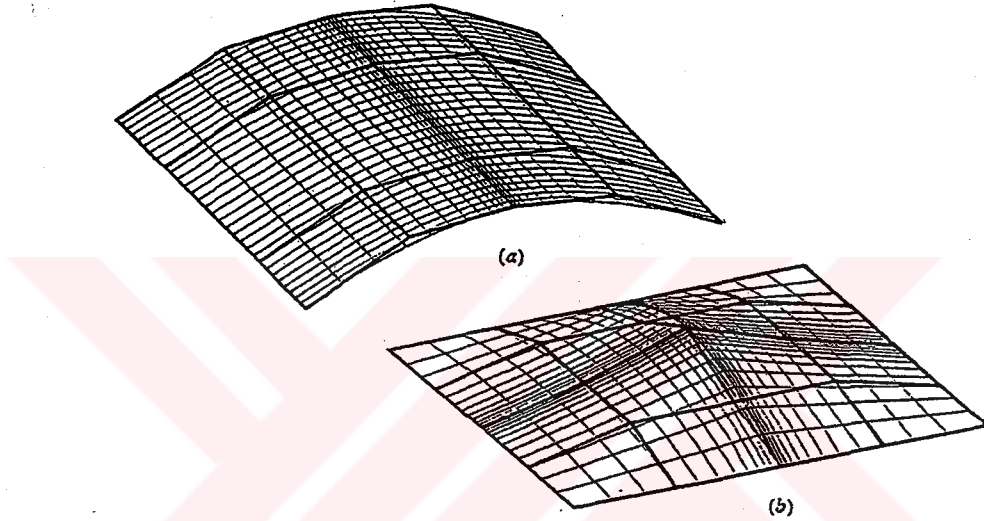
Her parametrik yönde yüzeyin maksimum mertebesi, bu yönde tanımlanmış poligon köşelerinin sayısına eşittir.

Yüzey u ve w yönlerinde sırasıyla C^{k-2} ve C^{l-2} sürekliliğine sahiptir.

Bir tek poligon köşesinin etkisi her bir parametrik yönde $\mp \frac{k}{2}, \mp \frac{l}{2}$ ile sınırlandırılmıştır.

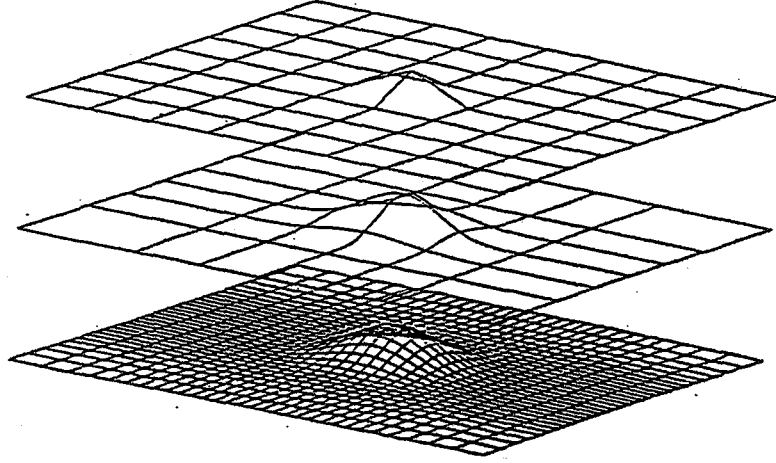
Yüzey k ve l tane komşu poligon ağ köşesinin konveks gövdelerinin birleşimi alınarak oluşturulan poligon ağının konveks gövdesinde yer alır.

Şekil 5.8 çakışan ağ doğrularının etkisini göstermektedir. (a) şıkında 3 tane çakışan ağ doğruları 4. mertebeden B Spline yüzeyinin merkezinde bir "hard line" ya da "knuckle" elde etmek için kullanılır. (b) şıkı her iki parametrik yönde 3 tane çakışan ağ doğruları kullanıldığında meydana gelen şekli göstermektedir. Burada 4. mertebeden B Spline yüzeyi yüzey merkezinde bir noktaya dönüşen iki sırtı içermektedir. B Spline eğrilerinde olduğu gibi bir boğum(knuckle) $k-1$ veya $l-1$ tane ağ doğrusu çakışığında oluşur. Bir B Spline yüzeyi her yerde C^{k-2} / C^{l-2} sürekli olduğundan boğum için de sürekli dir.



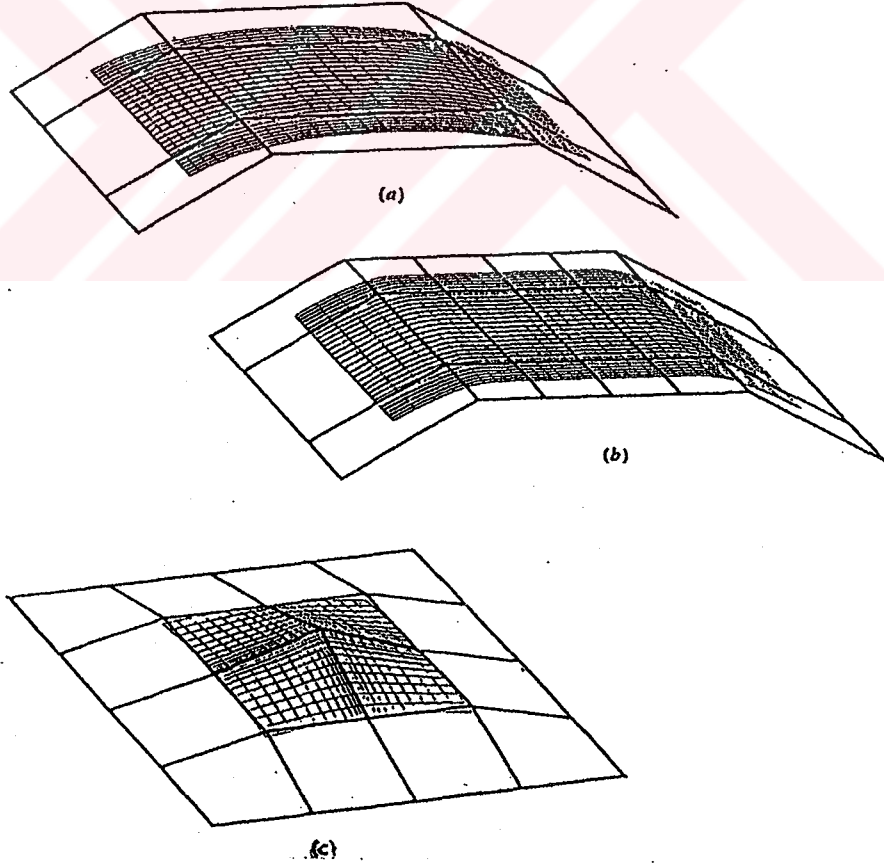
Şekil 5.8 Katlı ağ doğruları ile 4. mertebeden B Spline yüzeyleri

Şekil 5.9'da gösterilen open bikübik ($k=l=4$) B Spline yüzeyi 9×9 ($m=n=8$) poligon ağıyla tanımlanmıştır. Şekilde gösterilen en üstteki yüzey merkez noktası haricinde düzdür. Her iki parametrik yöndeki open düğüm vektör $[0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 6\ 6\ 6]$ 'dır. Her bir $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$ bir B Spline yüzeyinin alt parçasını oluşturur. Şekil 5.9'da gösterilen ortadaki yüzey her parametrik aralığın uç noktalarındaki yani $u, w=0,1,2,3,4,5,6$ değerleriyle belirlenen parametrik doğrulardan oluşturulmuştur. Her bir dörtgen bir yüzey alt parçasını gösterir.



Şekil 5.9 B Spline yüzeylerinde yerel kontrol

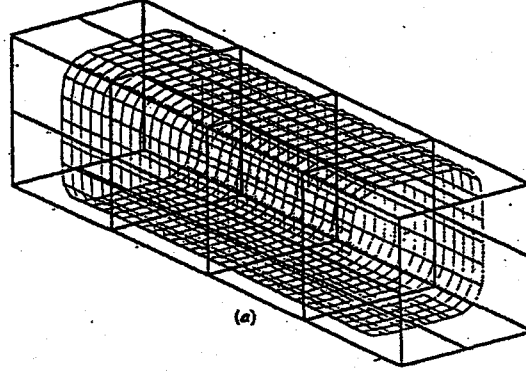
Şekil 5.10 açık poligon ağıyla tanımlanmış çeşitli periyodik B Spline yüzeylerini göstermektedir. Periyodik B Spline eğrilerinde olduğu gibi periyodik baz fonksiyonlarının kullanılabilir parametre aralığı azaltıldığından yüzey sınırı ile poligon sınırı çakışmaz .



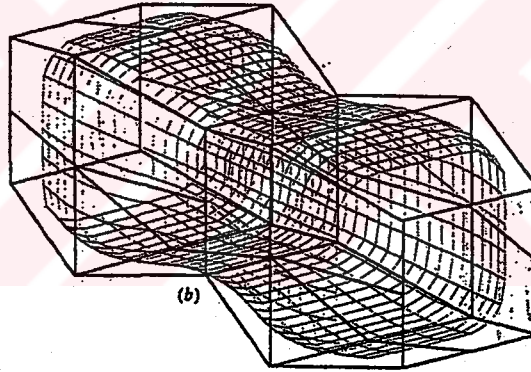
Şekil 5.10 Açık poligonlar için periyodik B Spline yüzeyleri (a) 3.mertebeden düzgün ruled yüzey (b) u doğrultusunda aynı doğru üzerinde bulunan 5 ağ noktasının oluşturduğu 3.mertebeden bölge (c) katlı ağ doğrularının 4.mertebeden yüzeyde sebep olduğu sivrilik

Şekil 5.11'de 3. mertebeden 2 tane yüzey örneği gösterilmiştir. Şekil 5.11a'daki poligon ağı

Şekil 4.15b'deki kapalı B Spline eğrisinin z eksenini boyunca $z = -8$ 'den $z = 8$ 'e kadar eşit uzaklıklarla yerleştirilmesiyle oluşur. Sonuç bir silindirik yüzeydir. (b) şıkki için tanımlanmış poligon (a) şıkında tanımlanmış 2. ve 4. poligonların x ve y boyutlarının artırılmasıyla elde edilir.

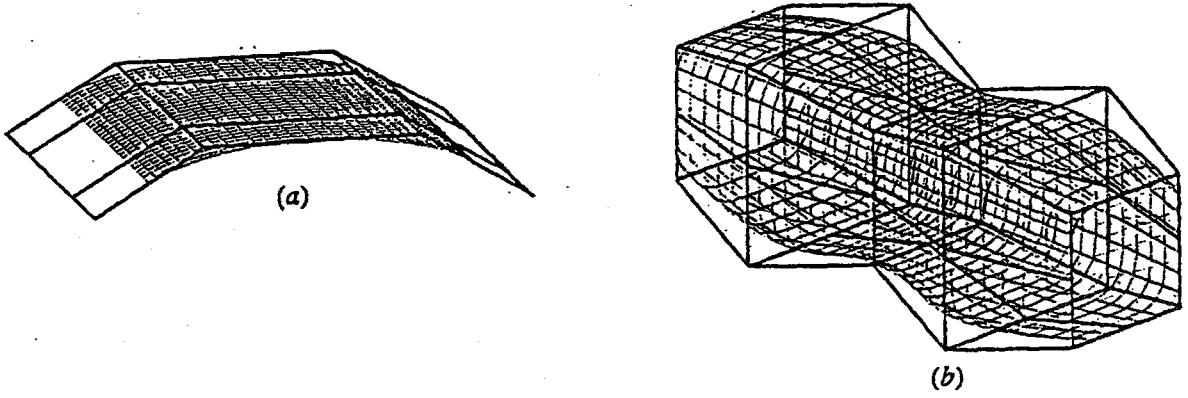


Şekil 5.11a Düzgün silindirik yüzey



Şekil 5.11 b Pertürbe edilmiş silindirik yüzey

Şekil 5.12 open düğüm vektör ve baz fonksiyonları bir parametrik doğrultuda, diğer parametrik doğrultuda ise periyodik düğüm vektör ve baz fonksiyonları kullanılmıştır. Şekil 5.12b'ye dikkat edilirse, u yönünde son poligon ağı doğrularıyla yüzeyin çakıştığı görülür.



Şekil 5.12 3.mertebeden birleştirilmiş B Spline yüzeyleri
(a) açık poligon ağı (b) kapalı poligon ağı

4.8 Rasyonel B Spline Yüzeyleri

Rasyonel B Spline yüzeyleri

$$Q(u, w) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} \cdot B_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} \cdot S_{i,j}(u, w)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B_{i,j}$ 'ler 3 boyutlu poligon ağı köşeleri, $h_{i,j}$ 'ler koordinatlar ve $S_{i,j}(u, w)$ fonksiyonları,

$$S_{i,j}(u, w) = \frac{h_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w)}$$

şeklinde tanımlanan rasyonel B Spline baz fonksiyonlarıdır.

Burada tüm i ve j indisleri için $h_{i,j} \geq 0$ kabul edilmiştir. Eğer tüm i ve j indisleri için

$$h_{i,j} = 1 \text{ ise}$$

$$S_{i,j}(u, w) = N_{i,k}(u) \cdot M_{j,l}(w)$$

gerçeklenir.

Bu sonuçtan da anlaşılacağı gibi rasyonel B Spline yüzeylerinin özel bir hali rasyonel olmayan B Spline yüzeyleridir. Bu sebeple rasyonel B Spline yüzeyleri onların rasyonel olmayan karşılığı ile benzer analitik ve geometrik özelliklere sahiptir.

Böylece rasyonel olmayan B Spline yüzeylerinin özelliği olarak verilen özellikler rasyonel B Spline yüzeyler içinde geçerlidir.

Her rasyonel yüzey baz fonksiyonu tüm u ve w parametre değerleri için $S_{i,j}(u, w) \geq 0$ 'dır .

Herhangi u ve w parametre değerleri için

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} S_{i,j}(u, w) \equiv 1$$

sağlanır.

Her bir parametrik yönde rasyonel B Spline yüzeylerinin maksimum mertebesi, o yönde tanımlanmış poligon köşelerinin sayısına eşittir.

Mertebesi k, l (derecesi $k-1, l-1$) olan bir rasyonel B Spline yüzeyi u ve w yönlerinde C^{k-2}, C^{l-2} sürekliliğine sahiptir.

Yüzey, k ve l tane komşu poligon ağ köşesinin bir bileşimi alınarak oluşturulan poligon ağının konveks gövdesi içerisinde yer alır.

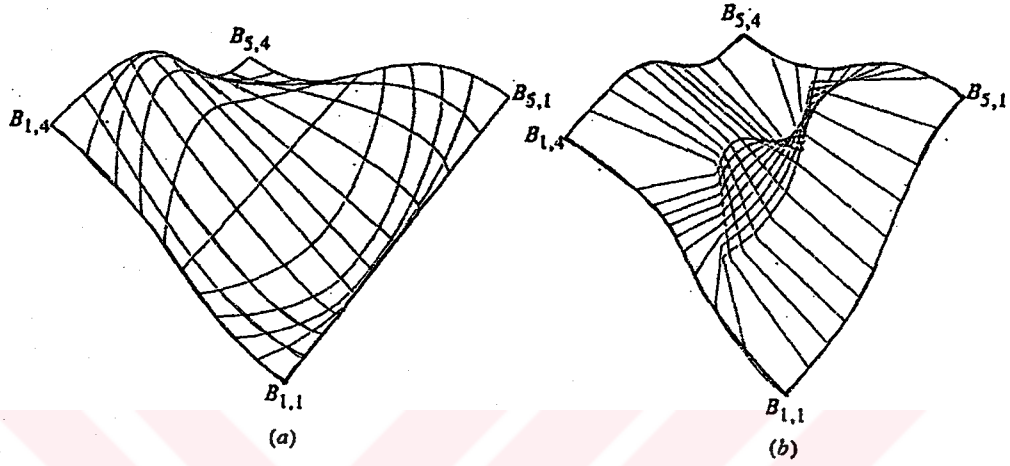
Bir tek poligon köşesinin etkisi her bir parametrik yönde $\mp \frac{k}{2}, \mp \frac{l}{2}$ ile sınırlandırılmıştır.

Open ,periyodik ve nonuniform knot vektörleri Rasyonel B Spline yüzeyleri elde etmek için kullanılır. Farklı yönlerde , farklı knot vektörler kullanılabilir.

Şekil 5.13 a ve b tüm iç $h_{i,j}$ 'lerin sırasıyla 0 ve 500 değerlerini almasıyla elde edilen etkiyi göstermektedir; yani $h_{2,2} = h_{2,3} = h_{3,2} = h_{3,3} = h_{4,2} = h_{4,3} = 0,500$ ve tüm diğer $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j} = 1$ 'dir.

Tüm iç $h_{i,j}$ değerlerini $h_{i,j} = 0$ olarak almak poligon iç ağ köşelerinin etkisini yok eder. Sadece sınır köşeleri interpolate edilir. Tersine iç $h_{i,j}$ değerlerini $h_{i,j} = 500$ olacak şekilde belirlemek sınır köşelerinin etkisini minimuma indirir. $h_{i,j}$ değerlerini değiştirilmesi yüzey parametrizasyonuna etki eder. Bu etki, iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j} = 0$ alındığında parametrik

parametrizasyonuna etki eder. Bu etki, iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j} = 0$ alındığında parametrik eğrilerin yüzey sınırına yaklaşır, iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j} = 500$ alındığında parametrik eğriler yüzeyin iç bölgesinde toplanır. Bu durum sırasıyla şekil 5.13a ve 5.13b'de gösterilmiştir.

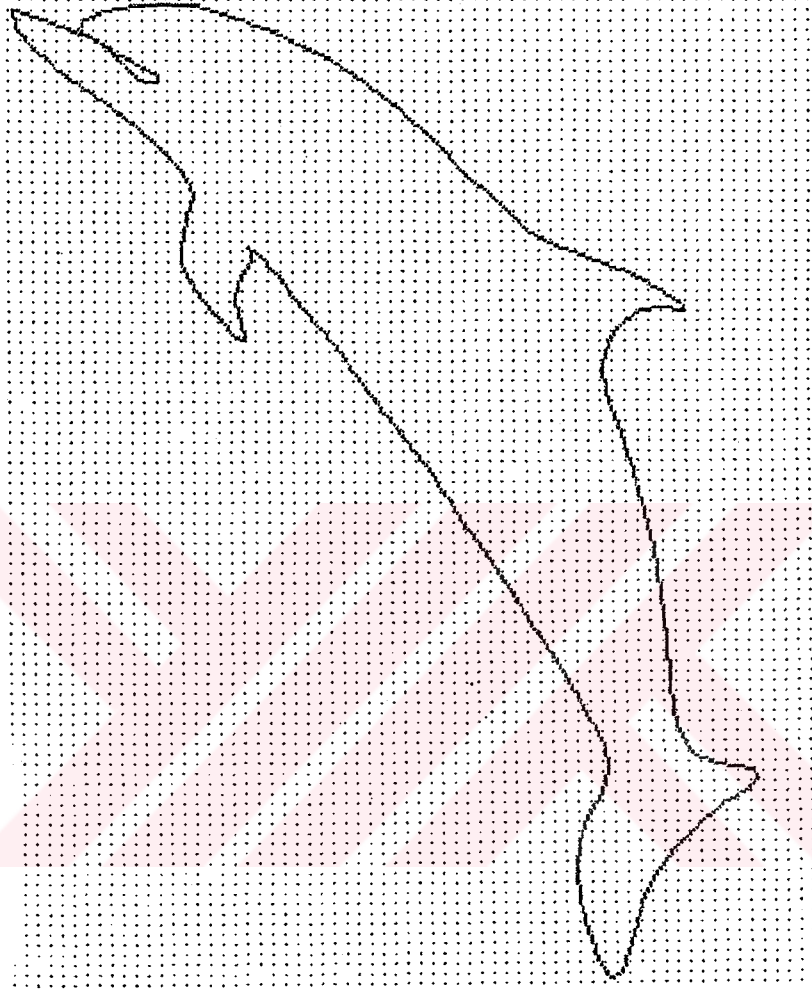


Şekil 5.13 $n+1=5$, $m+1=4$, $k=1=4$ için Rasyonel B Spline yüzeyleri
 (a) tüm iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j}=0$ 'dır. (b) tüm iç $h_{i,j}$ değerleri için $h_{i,j}=500$ 'dır.

SONUÇ

Rasyonel B spline'lar kullanılarak bazı eğri ve yüzey çizimleri için uygulamalar yapılmıştır. Kompleks şekilli nesnelerin matematiksel modellemesinde bu tipteki spline'lar hem matematiksel hem de bilgisayardaki hesaplamalar açısından avantajlara sahiptir (Angel, 2000). Dolayısıyla pratikte kullanılması uygundur.

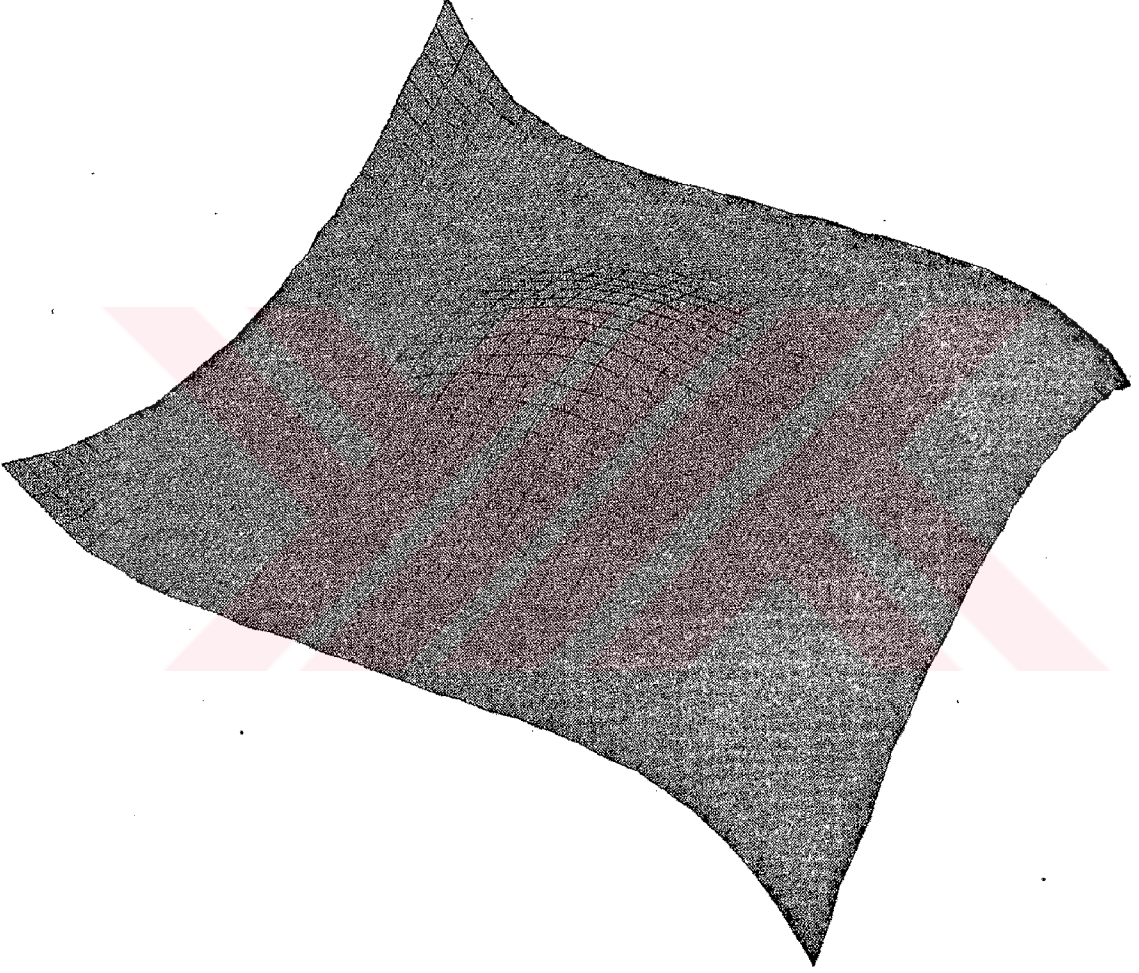




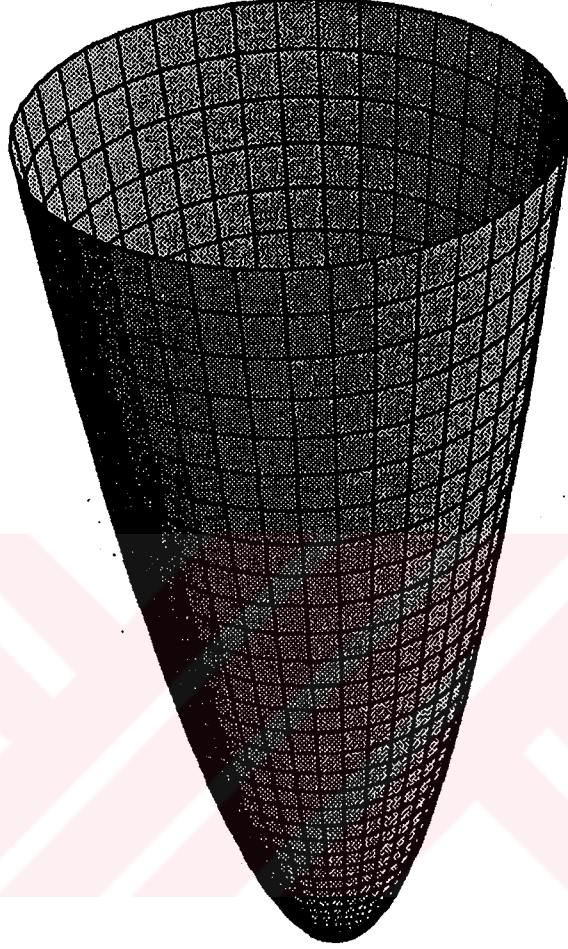
Şekil 6.1 Rasyonel B Spline Eğrisi (yunus) poligon köşeleri $n+1=44$, mertebe $k=4$, $h=0.25$



Şekil 6.2 B Spline Eğrisi (garfield), poligon köşeleri $n+1= 223$, mertebe $k=3$, $h=1$



Şekil 6.3 Rasyonel B Spline Yüzeyi poligon köşeleri 9×9 ($n+1=9, m+1=9$), u yönünde merteye $k=4$, w yönünde merteye $l=4, h=0,25$



Şekil 6.4 Rasyonel B Spline Yüzeyi(paraboloid) poligon köşeleri 9×2 ($n+1=9$, $m+1=2$), u yönünde merteye $k=3$, w yönündeki merteye $l=2$, $h=1$

KAYNAKLAR

Angel, E., (2000), Interactive Computer Graphics, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

De Boor, C., (1978), A Practical Guide To Splines, Springer-Verlag, New York.

Mathews, J. H.,(1992), Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Piegl, L. and Tiller, W.,(1997), The Nurbs Book, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Rogers, D. F. and Adams, J. A., (1990), Mathematical Elements For Computer Graphics, McGraw-Hill Publishing Company, New York.

Tekercioğlu,R.,(2001), “ Spline ile Eğri ve Yüzey Oluşturma” Yıldız Teknik Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	03.09.1978	
Doğum Yeri	İSTANBUL	
Lise	1991-1994	Kadıköy Kız Lisesi
Lisans	1994-1998	İstanbul Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Y.Lisans	2000-	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Programı

Çalıştığı Kurumlar

1998-1999	Onur Dershanesi
1999-2000	Kültür Üniversitesi
2001-Devam ediyor	Anadoluhisarı Ticaret Meslek Lisesi Matematik Öğretmeni