YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

bazı diferansiyel denklemlerin hom.

Yüksek Lisans Tezi

gökhan yener

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Gökhan YENER

FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Jüriler : Pof.Dr. Mustafa Bayram

: Prof.Dr. Ömer Gök

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

L	Lineer diferansiyel operatorü
N	Lineer olmayan diferansiyel operatorü
Ω	Tanım kümesi
Γ	Tanım kümesi sınırı

KISALTMA LİSTESİ

HPM Homotopi Pertürbasyon Metot

YHPM Yenilenmiş Homotopi Pertürbasyon Metot

ÖNSÖZ

Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemleri içeren matematiksel modeller, fizik, mühendislik ve uygulamalı bilimlerde geniş bir yer tutar. Bu konuda yapılan nümerik çalışmalar özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle büyük bir hız kazanmıştır ve denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için bir çok yöntem geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, bazı birinci ve ikinci mertebe lineer ve lineer olmayan denklemler için nümerik çözüm metodu olan Homotopi pertürbasyon metodu incelendi. Homotopi pertürbasyon metodu ilk olarak 1999 yılında Ji-Huan He tarafından bulunmuş olup, bu metot üzerine birçok çalışma devam etmektedir .

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nuran Güzel, Araş.Gör. Muhammet Kurulay ve Araş.Gör. Adem Çevikel' e teşekkür ediyorum.

ÖZET

Mühendislik ve fen bilimlerinde ortaya çıkan diferensiyel denklem problemlerini çözmek için bir çok mevcut metot bulunmaktadır. Bu çalışmamızda da diferansiyel denklemler için yeni gelişmekte olan Homotopi pertürbasyon metodu sunuldu. İlk olarak metodun temel esasları gösterildi ve ardından metotla ilgili bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için Homotopi pertürbasyon metodunun nasıl uygulandığı örneklerle gösterildi. Bu örneklerden bazıları için elde edilen sonuçların kesin çözümlerle arasındaki fark incelendi.

Anahtar Kelimeler: Homotopi pertürbasyon metodu, lineer denklemler, lineer olmayan denklemler, pertürbasyon

ABSTRACT

There are so many available method for solution of differential equation. In this thesis, a method was presented to solve for some differential equation arising in science and engineering. Firstly the fundemental of method was showed and then Homotopy Perturbation Method was applied for linear and nonlinear equation. Finally, for every differential equations were solved illustrations which were compared between real and approach solution.

Keywords: Homotopy Perturbation method, linear and nonlinear equations, Perturbation

GİRİŞ

Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için, analitik ve yaklaşık çözüm yöntemlerinde en yaygın olarak kullanılan çözüm yöntemleri Homotopi Pertürbasyon, Varyasyon İterasyon, Ayrışım ve Diferansiyel Dönüşüm yöntemleridir. Bu nümerik yöntemlerden biri olan Homotopi pertürbasyon metodunun yapısı incelenmiştir.

Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ilk olarak Ji-Huan He tarafından ileri sürüldü. (Ji-Huan He, 1999) Bu yöntemi pertürbasyon metodu ile birleştirerek nonlineer problemler için denklemleri çözmüştür.(Ji-Huan He, 2000) Daha sonraki yıllarda homotopi analiz metodu ile homotopi pertürbasyon metodu arasındaki farkları incelemiştir.(Ji-Huan He, 2004)

Son zamanlarda Homotopi Pertürbasyon Metodu ile kesirli türevli kısmi diferensiyel denklemleri için nonlineer başlangıç değer problemlerini(Odibat, Momani, 2007), Biazar ve Ghazvini, (2008) ise Hiperbolik denklemler için Homotopy Pertürbasyon metodunun uygulanışını göstermiştir. Ayrıca bu zaman süresince Homotopy Pertürbasyon Metodunun çeşitli denklemlere uygulanma biçimi gösteren makaleler yayınlanmıştır. 2007 yılında Odibat, homotopi metoduna yeni bakış açısı getirerek Yenilenmiş Homotopy metodunu geliştirmiştir.

Bu çalışmada, bazı birinci ve ikinci mertebe lineer ve lineer olmayan denklemler için nümerik çözüm metodu olan Homotopi pertürbasyon metodu incelendi. Homotopi pertürbasyon metodunun denklemlere nasıl uygulandığı örneklerle gösterildi. Elde edilen sonuçlarla kesin sonuçlar karşılaştırıldı.

TEMEL BİLGİLER

Tanım 1: Genel olarak

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots\ldots\ldots, y^{n}(x)\right) = 0$$

şeklinde olan diferansiyel denklem, bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerine göre lineer ise, lineer diferansiyel denklem adını alır. Lineer diferansiyel denklem genel olarak

$$L(y) = y^{n} + p_1(x)y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + p_n(x)y = f(x)$$

biçiminde gösterilir. Eğer denklem, lineer değilse o zaman da lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Yukarıdaki ifadede yer alan L sembolüne n'inci mertebeden lineer diferansiyel operatör denir.

Tanım 2:

İkinci mertebe bir diferansiyel denklem

$$F(t, y, y', y''; \varepsilon) = 0 \qquad 0 \le x \le x_0,$$

$\varepsilon << 1$ küçük parametre olmak üzere çözüm

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \varepsilon^3 y_3(x) + \ldots\ldots$$

şeklinde olsun. Bu ifadede yeralan $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ .. terimlerini bulmak için yukarıdaki ifadedeki ilk birkaç terim

$$y_{ykl\c{s}}(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t)$$

şeklinde olup, bunun birinci ve ikinci mertebeden türevleri kullanılarak çözüm aranır. Bu metot, pertürbasyon metot olarak adlandırılır.

1. HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODUNUN TEMEL YAPISI

Nonlinear bir diferansiyel denklem;

$$A(u)-f(r)=0 \qquad r\in\Omega \tag{1.1}$$

Sınır koşulları

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0 \qquad r\in\Gamma \tag{1.2}$$

olsun. Burada A, genel bir diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon , Γ ise Ω tanım kümesinin sınırıdır.

A operatorü, lineer (L) ve nonlinear (N) olmak üzere iki parçaya bölündüğünde (1.1) ifadesi

$$L(u)+N(u)-f(r)=0 \tag{1.3}$$

şeklinde yazılır.

Metodun temeli olan homotopi yapısı, (1.3) ifadesi üzerinde aşağıdaki şekilde gösterilir;

$V(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$ olmak üzere

$$\mu(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L(u_0)\right]+p\left[A(v)-f(r)\right]=0 \qquad p\in[0,1], \qquad r\in\Omega \tag{1.4.1}$$

yada $A(u)=L(u)+N(u)$ ifadesini $(1.4.1)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu(v,p)=L(v)-L(u_0)+pL(u_0)+p\left[N(v)-f(r)\right]=0 \qquad p\in[0,1], \qquad r\in\Omega \tag{1.4.2}$$

$(1.4.1)$ ve $(1.4.2)$ ifadelerinde yer alan $p\in[0,1]$ olmak üzere p ye gömme parametresi (embedding parameter) denir.

u_0, denkleminin (1.1) in başlangıç değeri olduğu için sınır şartını sağlar. (1.4) de, p yerine sırasıyla 0 ve 1 konursa;

$$\mu(v,p)=L(v)-L(u_0)=0 \tag{1.5}$$

$$\mu(v,p)=A(v)-f(r)=0 \tag{1.6}$$

elde edilir. p nin 0 dan başlayarak birime doğru değişim süreci, aynı zamanda $V(r,p)$ nin de $u_0(r)$ den $u(r)$ ye olan değişim sürecini göstermektedir. Topolojide buna deformasyon denmektedir. $L(v)-L(u_0)$, $A(v)-f(r)$ çiftine de homotopik denmektedir.

Bu çalışmada gömme parametresi olan p yi, küçük parametre (small parameter) olarak kullanacağız. Denklem (1.4) ün çözümü, p nin kuvveti

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3......... \tag{1.7}$$

şeklinde olsun.

$p=1$ için (1.7) denklemi (1.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u=\lim_{p\to 1} v=v_0+v_1+v_2+v_3........ \tag{1.8}$$

olarak bulunur.

Pertürbasyon metodu ve homotopi metodunun birleşmiş haline homotopi pertürbasyon metod denir.

1.1 KÜÇÜK PARAMETRE SEÇİMİ

Pertürbasyon metotlar, mühendislik problemlerinin nonlinear analizinde karşılaşılan problemlerin çözümüne, çok yönlü faydalar sağlamaktadır ve sürekli olarak gelişime açık olmasına ve daha kompleks problemlere uygulanmasına, kendine has özellikler sayesinde, olanak sağlamaktadır.

1) Hemen hemen bütün pertürbasyon metotların temeli, varsayımdan yani bir denklemin içerisinde küçük bir parametrenin varlığını kabul gösterir. Buna da adından anlaşılacağı gibi küçük parametre varsayımı denir.

2) Özellikle nonlinear denklemlerde, küçük parametrelerin nasıl bir şekilde bilinebileceği ve gösterilebileceği önemlidir.

3) Dolayısıyla ideal sonuçlara ulaşmak için, uygun küçük bir parametrenin seçimi büyük önem arzetmektedir. Aksi takdirde, uygun olmayan bir parametre seçimi çok ciddi farklı sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Her ne kadar uygun parametre seçilmiş olsa bile geçerli pertürbasyon metotları tarafından sadece ve sadece parametrenin küçük değerleri için yaklaşım çözümü aranmaktadır.

Bazı alternatif, asimptotik yaklaşımlar vardır. Örneğin non-pertürbasyon metot, Varyasyonel iterasyon metot , δ-metot, Yapay parametreli pertürbasyon metot gibi. Son yıllardaki çalışmalar ortaya çıkardı ki, nümerik tekniklerin güçlü bir şekilde pertürbasyon metoduna da uygulanabilir. Bu gelişmekte olan teknikler, kaynaklar kısmından ref[4-8] de gösterilmektedir. Bu referanslarda çeşitli metodolojiler bulmak mümkündür.

2. TANIMLAYICI ÖRNEKLER

Aşağıdaki örneklerde parametre seçimlerinin modellenmesi ve tanımlanması açısından birkaç yöntemle aynı denklem incelenecektir. Denklem

$$x^5 + x - 1 = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde olsun. Bu denklemin kökü Newton metodu ile hesaplandığında,

$x = 0.75487767....$

elde edilmektedir. Denklemde küçük parametre açık bir şekilde olmadığından dolayı, ε parametresi keyfi seçilir. O halde, ε parametresine bağlı olarak, birkaç metotla, denklemde oluşan farklılıklar ve sonuçlar incelensin.

2.1. δ - METOT

δ -metodunun temel yapısı, yapay parametre δ nın nonlinear terimin açılımının içinde yer almasıdır.

$$x^{1+\delta} + x - 1 = 0 \tag{2.1.1}$$

Çözüm, bir kuvvet serisi şeklinde ve δ bağlı olmak üzere,

$x = c_0 + \delta c_1 + \delta^2 c_2 + \delta^3 c_3 + ...$

şeklinde olsun.

Bu serinin katsayıları, ilk birkaç terim için hesaplandığında

$c_0 = 0.5 \quad c_1 = 0.17328 \quad c_2 = -0.08664 \quad c_3 = 0.05139$

$c_4 = -0.03377 \quad c_5 = 0.02377 \quad c_6 = -0.01758$

elde edilir.

$\delta = 4$ için bu seri, hızlı bir şekilde ıraksar. İlk 6 terimin toplamı ise -54.3224 dır.*

2.2. ZAYIF EŞLEME YAKLAŞIMI

(2.1) denklemi parametreye bağlı olarak

$$\varepsilon x^5 + x - 1 = 0 \tag{2.2.1}$$

ve çözüm ise

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 ...... \tag{2.2.2}$$

şeklinde olsun. Çözüm ilk birkaç adım için hesaplandığında,

$x_0 = 1, \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 5$

Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 0,08192$ dir. $\varepsilon = 1$ için $(2.2.2)$ serisi hızlı bir şekilde ıraksamaktadır. *

2.3. GÜÇLÜ EŞLEME YAKLAŞIMI

Denklem (2.1)

$$x^5 + \varepsilon x - 1 = 0 \tag{2.3.1}$$

şeklinde ve çözüm ise ε bağlı olmak üzere $(2.2.2)$ deki kuvvet serisi şeklinde olsun. $(2.2.2)$ ifadesini $(2.3.1)$ de yerine konduğunda, yine birkaç terim için değerler

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = -\frac{1}{25}$$

şeklinde hesaplanır. Bu serinin oldukça yavaş yakınsadığı görülmektedir.

(2.1) denklemine homotopi pertürbasyon metodu uygulandığında ise elde edilen sonuçlar,

$$x_0 = c_0 = 0.7, \qquad x_1 = c_0 + c_1 = 0.79235 \qquad x_2 = c_0 + c_1 + c_2 = 0.75999$$

Tam çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki fark %6 dır.

* J.H. He, (2002), A note on delta-perturbation expansion method, Applied Mathematics and Mechanics 23 (6), 634–638.

* I. Andrianov, L. Manevitch, (2003) Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications, Kluwer Academic Publishers.

Açıkça görülmektedir ki, parametreye bağlī olarak elde edilen sonuçlar içerisinde en sağlıklı sonuç homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilmektedir. Diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlar, parametrelerin denklemlere uygulanış biçiminin, doğru sonuçlar elde etmek için çok önemli olduğu göstermektedir.

3. HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU

İkinci mertebe lineer kısmı diferansiyel denklemi

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d=0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ nin türevleri olmamak şartıyla, a,b,c ve d x,y,u $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ nin bir fonksiyonu olabilir. (3.1) denkleminde, $b^2-4ac>0$ ise (3.1) denklemine hiperbolik denklem denir. Hiperbolik bir denklemin nümerik çözümü için homotopi pertürbasyon metodunun uygulanışı gösterilsin.

Başlangıç koşullları

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y}=g(x) \end{cases} \quad \text{yada} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(0,y)=f(y) \\ \dfrac{\partial u(0,y)}{\partial x}=g(y) \end{cases} \tag{3.3}$$

şeklinde verilsin. Denklem (3.1) çözümü için, başlangıç koşulu ve Homotopi Pertürbasyon Metot (HPM) ye göre Homotopi yapısı

$$(1-p)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right)+p\left(\frac{a}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{b}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{d}{c}\right)=0 \tag{3.4}$$

yada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = p\left(-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{d}{c} \right) \tag{3.5}$$

şeklinde kurulsun.

Başlangıç yaklaşımı $u_0 = f(x) + g(x)y$ olsun. Denklem (3.1) için yaklaşık çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 \ldots\ldots \tag{3.6}$$

olur. (3.6) denklemi (3.5) denklemin de yerine koyulduğunda ve p nin derecesine göre karşılaştırıldığında

$$v = u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 + \ldots\ldots$$

$$v' = u' = u_0' + pu_1' + p^2 u_2' + p^3 u_3' + \ldots\ldots$$

$$v'' = u'' = u_0'' + pu_1'' + p^2 u_2'' + p^3 u_3'' + \ldots\ldots$$

$$p^0: \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0$$

$$p^1: \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{d}{c} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \qquad v_1(x,0) = 0 \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

$$p^2: \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \qquad v_2(x,0) = 0 \quad \frac{\partial u^2(x,0)}{\partial x^2} = 0$$

.

.

bulunur. Şimdi $v_0 = u_0 = f(x) + g(x)y$ şeklinde olsun. Sonuç olarak ,

$$v_1 = \int_0^y \int_0^y \left(-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \varepsilon} - \frac{d}{c} \right) d\varepsilon dy$$

$$v_2 = \int_0^y \int_0^y \left(-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \varepsilon} - \frac{d}{c} \right) d\varepsilon dy \tag{3.8}$$

elde edilir. Dolayısıyla $p=1$ değeri yerine konursa

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 \ldots$$

bulunur. Benzer şekilde (3.3) ifadesi için düşünüldüğünde ve aynı işlemlere devam edildiğinde p nin kuvvetleri için ifadeler

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = p\left(-\frac{c}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{b}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{d}{a}\right)$$

$$p^0: \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$$

$$p^1: \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{d}{c} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \qquad v_1(0,y) = 0 \quad \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0 \tag{3.9}$$

$$p^2: \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \qquad v_2(0,y) = 0 \quad \frac{\partial u^2(0,y)}{\partial x^2} = 0$$

.

.

şeklinde olur. Sonuç itibariyle

$$v_1 = \int_0^x \int_0^x \left(-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial \varepsilon} - \frac{d}{c}\right) d\varepsilon dx$$

$$\tag{3.10}$$

$$v_2 = \int_0^x \int_0^x \left(-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial \varepsilon} - \frac{d}{c}\right) d\varepsilon dx$$

.

.

elde edilir. $p=1$ için (3.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$v = \lim\limits_{p \to 1} u = v_0 + v_1 + v_2$ şeklindedir.*

* J. Biazar, H. Ghazvini, (2008), Homotopy perturbation method for solving hyperbolic partial differential equations, Computers and Mathematics with Applications 56, 453–458

3.1. Örnek 1:

Hiperbolik denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+1=0$$

ve başlangıç koşulları

$$u(x,0)=x \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=x$$

şeklinde verilsin.

$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+......$ Denklem (3.5) e göre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=p\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right) \tag{3.11}$$

dır. Başlangıç koşulları göz önüne alınarak başlangıç yaklaşımı $u_0(x,y)=x+xy$ olsun. (3.6) denklemi (3.11) denkleminde yerine konursa,

$$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+......$$

$$u'=u_0'+pu_1'+p^2u_2'+p^3u_3'+.....$$

$$u''=u_0''+pu_1''+p^2u_2''+p^3u_3''+.....$$

$$(u_0)_{yy}+p(u_1)_{yy}+p^2(u_2)_{yy}+p^3(u_3)_{yy}+.........-(u_0)_{yy}=$$

$$p\left[\frac{1}{2}((u_0)_{xx}+p(u_1)_{xx}+p^2(u_2)_{xx}+p^3(u_3)_{xx}.......)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}((u_0)_{xy}+p(u_1)_{xy}+p^2(u_2)_{xy}+p^3(u_3)_{xy}+.........)+\frac{1}{2}-(u_0)_{yy}\ \right]$$

$$p^0: \qquad u_0(x,y)=x+xy$$

$$p^1: \qquad (u_1)_{yy}=\frac{1}{2}(u_0)_{xx}+\frac{1}{2}(u_0)_{xy}+\frac{1}{2}-(u_0)_{yy}$$

$$(u_0)_{xx}=0 \qquad (u_0)_{xy}=1 \qquad (u_0)_{yy}=0$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=1 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y}=y \qquad u_1=\frac{1}{2}y^2$$

$$p^2: \quad (u_2)_{yy}=\frac{1}{2}(u_1)_{xx}+\frac{1}{2}(u_1)_{xy}$$

$$u_2(x,y)=0$$

$$p^3: \quad (u_3)_{yy}=\frac{1}{2}(u_2)_{xx}+\frac{1}{2}(u_2)_{xy}$$

$$u_3(x,y)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0(x,y)=x+xy \\ u_1(x,y)=\frac{1}{2}y^2 \\ u_k(x,y)=0 \qquad k\geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u(x,y)=u_0(x,y)+u_1(x,y) \\ u(x,y)=x+xy+\frac{1}{2}y^2 \end{array}$$

elde edilir.

3.2. Örnek 2:

Denklem ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(x^2-x-2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3.12}$$

Başlangıç koşulları

$$u(0,y)=y \qquad \frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=1$$

şeklinde verilsin.

Bu kez, homotopi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=p\left((1-2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(x^2-x-2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right) \tag{3.13}$$

şeklinde kurulsun. Bu koşullar altında başlangıç yaklaşımı $u_0(x,y)=x+y$ şeklinde olsun. (3.6) denklemini (3.7) ifadesinde yerine konulduğunda,

$$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+......$$

$$u'=u_0'+pu_1'+p^2u_2'+p^3u_3'+.....$$

$$u''=u_0''+pu_1''+p^2u_2''+p^3u_3''+.....$$

$$(u_0)_{xx}+p(u_1)_{xx}+p^2(u_2)_{xx}+p^3(u_3)_{xx}+.........-(u_0)_{xx}=$$

$$p\Big[(2x-1)\big((u_0)_{xy}+p(u_1)_{xy}+p^2(u_2)_{xy}+p^3(u_3)_{xy}.......\big)$$

$$-(x^2-x-2)\big((u_0)_{yy}+p(u_1)_{yy}+p^2(u_2)_{yy}+p^3(u_3)_{yy}+.........\big)-(u_0)_{yy}\quad\Big]$$

$p^0:\qquad u_0(x,y)=x+y$

$p^1:\qquad (u_1)_{xx}=(2x-1)(u_0)_{xy}-(x^2-x-2)(u_0)_{yy}-(u_0)_{xx}$

$(u_0)_{xy}=0 \qquad (u_0)_{yy}=0 \qquad (u_0)_{xx}=0$

$(u_1)_{xx}=0 \quad\Rightarrow\quad u_1(x,y)=0$

$p^2:\qquad (u_2)_{xx}=(2x-1)(u_1)_{xy}-(x^2-x-2)(u_1)_{yy}$

$(u_2)_{xx}=0 \quad\Rightarrow\quad u_2(x,y)=0$

.

.

$u_0(x,y)=x+y$

$u_k(x,y)=0 \qquad k\geq 1$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\left.\begin{array}{ll} u_0(x,y) = x+y & \\ u_k(x,y) = 0 & k \geq 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} u = u_0 + u_1 \\ u(x,y) = x+y \end{array}$$ dır.

4. KLEIN GORDON DENKLEMLER İÇİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU

Klein-Gordon denklemleri, matematiksel fizikte önemli yeri olan denklemlerden biridir.

Nonlinear Klein-Gordon denklemi genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \qquad t > 0 \tag{4.1}$$

Başlangıç koşulu

$$u(x,0) = g_1(x)$$

$$u_t(x,0) = g_2(x)$$

Şeklinde ifade edilir. Burada $f(u)$ nonlineer fonksiyonu,

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i$$

kuvvet seri açılımına sahip bir analitik fonksiyondur.

Klein- Gordon denklemleri için genel homotopi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = pq(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{\infty} p^i a_i u^i \qquad p \in [0,1] \tag{4.2}$$

şeklinde kurulsun.

Homotopi parametresi p, sıfırdan 1 e doğru sürekli değişmektedir. Dolayısıyla

$p = 0$ durumunda, denklem (4.2), lineer bir denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0$$

olur ve $p=1$ için (4.1) denklemi elde edilir. Temel varsayım olan (4.2) denkleminin çözümü, p nin kuvvet serisi

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 \ldots$$

şeklinde olsun. (1.6) denklemi, (1.4) denkleminde yerine konursa p nin kuvvetlerine karşılık gelen ifade

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \ldots$$

$$u' = u_0' + pu_1' + p^2u_2' + p^3u_3' + \ldots$$

$$u'' = u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + \ldots$$

$$p^0 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = a_0 \qquad u_0(x,0) = g_1(x), \ \ (u_0)_t(x,0) = g_2(x)$$

$$p^1 : \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = q(x)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + a_1u_0 \qquad u_1(x,0) = 0, \ \ (u_1)_t(x,0) = 0$$

$$p^2 : \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = q(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + a_1u_1 + a_2{u_0}^2 \qquad u_2(x,0) = 0 \quad (u_2)_t(x,0) = 0$$

$$p^3 : \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = q(x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_1u_2 + 2a_2u_0u_1 + a_3{u_0}^3 \qquad u_3(x,0) = 0 \quad (u_3)_t(x,0) = 0$$

$$p^4 : \quad \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = q(x)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + a_1u_3 + a_2\left(2u_0u_1 + {u_1}^2\right) + 3a_3{u_0}^2u_1 + a_4{u_0}^4 \qquad u_4(x,0) = 0 \quad (u_4)_t(x,0) = 0$$

$$p^5 : \quad \frac{\partial^2 u_5}{\partial t^2} = q(x)\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + a_1u_4 + a_2\left(2u_0u_3 + 2u_1u_2\right) + a_3\left(3{u_0}^2u_2 + 3{u_1}^2u_0\right) + 4a_4{u_0}^3u_1 + a_5{u_0}^5$$

$$u_5(x,0) = 0 \quad (u_5)_t(x,0) = 0$$

.

.

şeklinde oluşur.

$p = 1$ için (4.3) denklemi (4.1) ın çözümünü sağlamaktadır. *

4.1. Örnek: 3

Nonlineer bir Sine-Gordon denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\sin(\lambda u) \qquad t > 0 \tag{4.4}$$

Başlangıç koşullarıyla

$$u(x,0) = g_1(x) \qquad u_t(x,0) = g_2(x) \tag{4.5}$$

verilsin. Burada a ve b sabitler olmak üzere (4.4) denklemi homotopiye göre düzenlenirse,

$$\sin(\lambda u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (\lambda u)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

elde edilir. Bu denklem (4.4) denkleminde yerine konursa lineer bir denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = pa\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\sum_{i=0}^{\infty} p^{2i+1} \frac{(-1)^i (\lambda u)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

elde edilir. Buradan,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 + ...$$

$$u' = u_0' + pu_1' + p^2 u_2' + p^3 u_3' + ...$$

$$u'' = u_0'' + pu_1'' + p^2 u_2'' + p^3 u_3'' + ...$$

$$(u_0)_{tt} + p(u_1)_{tt} + p^2(u_2)_{tt} + p^3(u_3)_{tt} + ... = pa\left((u_0)_{xx} + p(u_1)_{xx} + p^2(u_2)_{xx} + p^3(u_3)_{xx} ...\right)$$

$$+b\left(p\lambda u - p^3\frac{(\lambda u)^3}{3!} + p^5\frac{(\lambda u)^5}{5!} - \ ...\right)$$

*Zaid M. Odibata, Shaher Momani, (2007), A reliable treatment of homotopy perturbation method for Klein–Gordon equations, Physics Letters A 365 , 351–357

$$p^0: \quad (u_0)_{tt}=0 \quad u_0(x,0)=g_1(x) \quad (u_0)_t(x,0)=g_2(x)$$

$$p^1: \quad (u_1)_{tt}=a(u_0)_{xx}+b\lambda u_0 \quad u_1(x,0)=0 \quad (u_1)_t(x,0)=0$$

$$p^2: \quad (u_1)_{tt}=a(u_1)_{xx}+b\lambda u_1 \quad u_2(x,0)=0 \quad (u_2)_t(x,0)=0$$

$$p^3: \quad (u_3)_{tt}=a(u_2)_{xx}+b\lambda u_2-\frac{b\lambda^3}{3!}u_0{}^3 \quad u_3(x,0)=0 \quad (u_3)_t(x,0)=0$$

Sonuç olarak, (4.4) denkleminin ilk birkaç bileşenin alınmasıyla

$$u_0(x,0)=g_1(x)+g_2(x)t$$

$$u_1(x,t)=\left(ag_1''(x)+b\lambda g_1(x)\right)\frac{t^2}{2!}+\left(ag_2''(x)+b\lambda g_2(x)\right)\frac{t^3}{3!}$$

$$u_2(x,t)=\left(a^2g_1^{(4)}(x)+2ab\lambda g_1''(x)+b^2\lambda^2g_1(x)\right)\frac{t^4}{4!}+\left(a_2g_2^{(4)}(x)+2ab\lambda g_2''(x)+b^2\lambda^2g_2(x)\right)\frac{t^5}{5!}$$

$$\begin{aligned}u_3(x,t)=&\left(a^3g_1^{(6)}(x)+3a^2b\lambda g_1^{(4)}(x)+3ab^2\lambda^2g_1''(x)+b^3\lambda^3g_1(x)\right)\frac{t^6}{6!}\\&+\left(a_3g_2^{(6)}(x)+3a^2b\lambda g_1^{(4)}(x)+3ab^2\lambda^2g_2''(x)+b^3\lambda^3g_2(x)\right)\frac{t^7}{7!}\\&-\left(g_1^{(3)}\frac{t^2}{2!}+3g_1^{(2)}(x)g_2(x)\frac{t^3}{3!}+3g_1(x)g_2^{(2)}\frac{t^4}{12}+g_2{}^3(x)\frac{t^5}{20}\right)\frac{b\lambda^3}{3!}\end{aligned}$$

hesaplanır. Buradan yaklaşık çözüm denklemi;

$$\begin{aligned}u(x,t)=&g_1(x)+g_2(x)t\\&+\left(ag_1''(x)+b\lambda g_1(x)-\frac{b\lambda^3}{3!}g_1^{(3)}(x)\right)\frac{t^2}{2!}\\&+\left(ag_2''(x)+b\lambda g_2(x)-\frac{b\lambda^3}{2}g_1^{(2)}(x)g_2(x)\right)\frac{t^3}{3!}\\&+\left(a^2g_1^{(4)}(x)+2ab\lambda g_1''(x)+b^2\lambda^2g_1(x)-b\lambda^3g_1(x)g_2{}^2(x)\right)\frac{t^4}{4!}\\&+\left(a_2g_2^{(4)}(x)+2ab\lambda g_2''(x)-b\lambda^3g_2{}^3(x)\right)\frac{t^5}{5!}\\&+\left(a^3g_1^{(6)}(x)+3a^2b\lambda g_1^{(4)}(x)+3ab^2\lambda^2g_1''(x)+b^3\lambda^3g_1(x)\right)\frac{t^6}{6!}\\&+\left(a^3g_2^{(6)}(x)+3a^2b\lambda g_2^{(4)}(x)+3ab^2\lambda^2g_2''(x)+b^3\lambda^3g_2(x)\right)\frac{t^7}{7!}\end{aligned}$$

dır.

5. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN YENİLENMİŞ HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METOT

Homotopi Pertürbasyon Metodunun yenilenmiş formunda, $f(r)$ fonksiyonu

$$f(r)=f_0(r)+f_1(r)+... \tag{5.1}$$

şeklinde kısımlara ayrılır.

İlk varsayım $f(r)=f_0(r)+f_1(r)$ şeklinde ve dolayısıyla homotopi

$$V(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$$

$$\mu(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L(u_0)\right]+p\left[L(v)+N(v)-f_1(r)\right]=f_0(r) \tag{5.2}$$

yada

$$\mu(v,p)=L(v)-L(u_0)+pL(u_0)+p\left[N(v)-f_1(r)\right]=f_0(r) \tag{5.3}$$

dır.

Burada u_0 ve u_1 bileşenleri için küçük değişiklikler oluşturan varsayımlar önerilmelidir.

Yani, sıfırıncı bileşen u_0 a $f_0(r)$ a, $f_1(r)$ yede, u_1 bileşeni karşılık gelecek şekilde $f(r)$ oluşturulmaktadır. Eğer $f_1(r)=f(r)$ ve $f_0=0$ olursa, standart HPM ye indirgendiği açıkça görülmektedir. Ancak bu metodun başarısı, f_0 ve f_1 fonksiyonlarının uygun seçimine bağlıdır.

İkinci varsayım ise, $f(r)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)$ şeklindedir. Bu kez homotopi

$$V(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$$

$$\mu(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L(u_0)\right]+p\left[L(v)+N(v)\right]=\sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r) \tag{5.4}$$

yada

$$\mu(v,p)=L(v)-L(u_0)+pL(u_0)+pN(v)=\sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n(r) \tag{5.5}$$

şeklinde kurulur.

Eğer $f(r)$ iki terimden meydana geliyorsa, o halde homotopii (5.2) ve (5.3) denklemlerine indirgenir. Bu durumda f_0 terimi u_0 ile, f_1 de u_1 bileşeniyle özdeşleşir. Daha sonra işlemlere devam edilerek $u_2, u_3, ...$ çözümleri bulunur. Bu öneriler $u_0, u_1, u_2, u_3, ...$ çözümlerini hesaplamakta kolaylıklar sağlar ve dolayısıyla seri çözümünün yakınsama hızının, hızlı bir şekilde olduğu gözlemlenebilir.*

5.1. Örnek 4:

Nonlineer diferansiyel denklem

$$u'' + \frac{2}{t}u' + u^3 = 6 + t^6 \tag{5.6}$$

Başlangıç koşulları

$$u(0) = 0$$
$$u'(0) = 0$$

şeklinde verilsin.

Şimdi standart HPM kullanarak, Homotopi;

$$u'' + \frac{2}{t}u' + p\left[u^3 - t^6 - 6\right] = 0 \tag{5.7}$$

oluşturulur. Buradan $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + ...$ çözümü (5.7) denkleminde yerine konur ve p nin kuvvetleri birbirine eşitlenirse

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + ...$$

$$u' = u_0' + pu_1' + p^2u_2' + p^3u_3' + ...$$

$$u'' = u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + ...$$

*Zaid M. Odibat, (2007), A new modification of the homotopy perturbation method for linear and nonlinear operators, Applied Mathematics and Computation 189 , 746–753

$$u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + ... + \frac{2}{t}(u_0' + pu_1' + p^2u_2' + p^3u_3' + ...) - pt^6 - 6p +$$

$$p\left[(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + ...)^3 - t^6 - 6\right] = 0$$

$$u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + ... + \frac{2}{t}\left[u_0' + pu_1' + p^2u_2' + p^3u_3' + ...\right] +$$

$$\begin{aligned} p[\ & 3u_0^2u_1p + (3u_0u_1^2 + 3u_0^2u_2)p^2 \\ & + (3u_0^2u_3 + u_1^3 + 6u_0u_1u_2)p^3 \\ & + (3u_1^2u_2 + 3u_0u^2{}_2 + 3u_0^2u_4 + 6u_0u_1u_3)p^4 \\ & + (3u_0^2u_5 + 3u_1u_2^2 + 3u_1^2u_3 + 6u_0u_1u_4 + 6u_0u_2u_3)p^5 + ...\ ] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + ... + \\ & \frac{2}{t}u_0' + \frac{2}{t}pu_1' + \frac{2}{t}p^2u_2' + \frac{2}{t}p^3u_3' + ... + \\ & 3u_0^2u_1p^2 + 3u_0u_1^2p^3 + 3u_0^2u_2p^3 \\ & + 3u_0^2u_3p^4 + u_1^3p^4 + 6u_0u_1u_2p^4 \\ & + 3u_1^5u_2p^5 + 3u_0u^5{}_2p^5 + 3u_0^2u_4p^5 + 6u_0u_1u_3p^5 \\ & + 3u_0^2u_5p^6 + 3u_1u_2^2p^6 + 3u_1^2u_3p^6 + 6u_0u_1u_4p^6 + 6u_0u_2u_3p^6 + ... \\ & 6u_0u_2u_3p^6 = 0 \end{aligned}$$

$p^0: \quad u_0'' + \frac{2}{t}u_0' = 0 \qquad\qquad u_0(0) = 0 \qquad u_0'(0) = 0$

$p^1: \quad u_1'' + \frac{2}{t}u_1' + u_0^3 + t^6 - 6 = 0 \qquad\qquad u_1(0) = 0 \qquad u_1'(0) = 0$

$p^2: \quad u_2'' + \frac{2}{t}u_2' + 3u_0^2u_1 = 0 \qquad\qquad u_2(0) = 0 \qquad u_2'(0) = 0$

$p^3: \quad u_3'' + \frac{2}{t}u_3' + 3u_0u_1^2 + 3u_0^2u_2 = 0 \qquad\qquad u_3(0) = 0 \qquad u_3'(0) = 0$

$p^4: \quad u_4'' + \frac{2}{t}u_4' + 3u_0^2u_3 + u_1^3 + 6u_0u_1u_2 = 0 \qquad\qquad u_4(0) = 0 \qquad u_4'(0) = 0$

$p^5: \quad u_5'' + \frac{2}{t}u_5' + 3u_0u_2^2 + u_0^2u_4 + 6u_0u_1u_3 = 0 \qquad\qquad u_5(0) = 0 \qquad u_5'(0) = 0$

$p^6: \quad u_6'' + \frac{2}{t}u_6' + 3u_0^2u_5 + 3u_1u_2^2 + 3u_1^2u_3 + 6u_0u_1u_4 + 6u_0u_2u_3 = 0 \qquad u_6(0) = 0 \qquad u_6'(0) = 0$

.

.

bulunur.

Başlangıç koşulları gözönüne aldığında $u_0 = 0$ dır. Buna göre u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 denklemlerini bulmak için;

p^1 : için

$$u_1'' + \frac{2}{t} u_1' = -u_0{}^3 + t^6 + 6$$

$$u_1'' + \frac{2}{t} u_1' = t^6 + 6$$

$$u' = p \qquad u'' = p'$$

$$p' + \frac{2}{t} p = t^6 + 6$$

$$p' + \frac{2}{t} p = 0$$

$$\frac{p'}{p} + \frac{2}{t} = 0$$

$$\ln p + 2\ln t = \ln c$$

$$p = \frac{c}{t^2}$$

$$p' = \frac{c' t^2 - 2ct}{t^4}$$

$$\frac{c'}{t^2} - \frac{2c}{t^3} + \frac{2}{t}\left(\frac{c}{t^2}\right) = t^6 + 6$$

$$c' = t^8 + 6t^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{t^9}{9} + 2\frac{t^3}{3}$$

$$u' = p = \frac{t^7}{9} + 2t \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{t^8}{72} + t^2$$

p^2 : için

$$u_2'' + \frac{2}{t}u_2' = -3u_0^2 u_1$$

$$u_2'' + \frac{2}{t}u_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u_2(t) = 0 \\ u_2(0) = 0 \quad u_2'(0) = 0 \end{array}$$

p^3 : için

$$u_3'' + \frac{2}{t}u_3' = -3u_0 u_1^2 - 3u_0^2 u_2$$

$$u_3'' + \frac{2}{t}u_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u_3(t) = 0 \\ u_3(0) = 0 \quad u_3'(0) = 0 \end{array}$$

p^4 : için

$$u_4'' + \frac{2}{t}u_4' = -3u_0^2 u_3 - u_1^3 - 6u_0 u_1 u_2$$

$$u_4'' + \frac{2}{t}u_4' = -u_1^3 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{t^8}{72} + t^2 \qquad u_4'' + \frac{2}{t}u_4' = \left(-\frac{t^8}{72} - t^2\right)^3$$

$$u_4' = p \qquad u_4'' = p'$$

$$p' + \frac{2}{t}p = \left(-\frac{t^8}{72} - t^2\right)^3$$

$$p' + \frac{2}{t}p = 0$$

$$p = \frac{c}{t^2} \;\Rightarrow\; p' = \frac{c't^2 - 2ct}{t^4} \Rightarrow \; \frac{c'}{t^2} - \frac{2c}{t^3} + \frac{2}{t}\left(\frac{c}{t^2}\right) = -\left(t^6 + \frac{3}{72}t^{12} + \frac{3}{72^2}t^{18} + \frac{t^{24}}{72^3}\right)$$

$$c' = -\left(t^8 + \frac{3}{72}t^{14} + \frac{3}{72^2}t^{20} + \frac{t^{26}}{72^3}\right)$$

$$c = -\left(\frac{t^9}{9} + \frac{3}{15.72}t^{15} + \frac{3}{21.72^2}t^{21} + \frac{t^{27}}{27.72^3}\right)$$

$$u_4{}' = -\left(\frac{t^7}{9} + \frac{3}{15.72}t^{13} + \frac{3}{21.72^2}t^{19} + \frac{t^{25}}{27.72^3}\right)$$

$$u_4 = -\left(\frac{t^8}{72} + \frac{3}{14.15.72}t^{14} + \frac{3}{20.21.72^2}t^{20} + \frac{t^{26}}{26.27.72^3}\right) \qquad u_4(0)=0 \quad u_4{}'(0)=0$$

p^5 : için

$u_5(t) = 0$

p^6 : için

$u_6(t) = 0$

.

.

şeklinde, denklemin çözümleri elde edilir. Dolayısıyla

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + ...$

$p = 1$ değeri için

$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ...$

$u = t^2$ dir.

(5.6) problemi şimdi MHPM kullanılarak hesaplanırsa

$$u'' + \frac{2}{t}u' + p\left[u^3 - t^6\right] = 6 \tag{5.8}$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + ...$

$u' = u_0' + pu_1' + p^2u_2' + p^3u_3' + ...$

$$u'' = u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + ...$$

hesaplanır. Hesaplanan bu türevler (5.8) denkleminde yerine konursa

$$u_0'' + pu_1'' + p^2u_2'' + p^3u_3'' + ... + \frac{2}{t}(u_0' + pu_1' + p^2u_2' + p^3u_3' + ...) - pt^6 - 6p +$$
$$p\left[(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + ...)^3 - t^6\right] = 6$$

$$p^0: \quad u_0'' + \frac{2}{t}u_0' = 6$$

$$u_0' = p \qquad u_0'' = p'$$

$$p' + \frac{2}{t}p = 6$$

$$p' + \frac{2}{t}p = 0 \qquad\qquad p' = \frac{c't^2 - 2ct}{t^4}$$

$$\frac{p'}{p} + \frac{2}{t} = 0 \qquad\qquad \frac{c'}{t^2} - \frac{2c}{t^3} + \frac{2}{t}\left(\frac{c}{t^2}\right) = 6$$

$$\ln p + 2\ln t = \ln c \qquad\qquad c' = 6t^2$$

$$p = \frac{c}{t^2} \qquad\qquad c = 2t^3$$

$$u' = p = 2t$$

$$u_0(t) = t^2$$

$$p^1: \quad u_1'' + \frac{2}{t}u_1' = -u_0^{\,3} + t^6$$

$$u_1'' + \frac{2}{t}u_1' = -t^6 + t^6$$

$$u_1(t) = 0$$

$$p^2: \quad u_2'' + \frac{2}{t}u_2' = -3u_0^{\,2}u_1$$

$$u_2'' + \frac{2}{t}u_2' = 0$$

$$u_2(t) = 0$$

$$p^3: \quad u_3'' + \frac{2}{t}u_3' = -3u_0u_1^2 - u_0u_2$$

$$u_3'' + \frac{2}{t}u_3' = 0$$

$$u_3(t) = 0$$

.

.

bulunur. Sonuç olarak

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \ldots\ldots$$

$p = 1$ için

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

$$u(t) = t^2$$

$u_k(t) = 0 \quad k \geq 1 \quad u(t) = t^2$ dır.

5.2. Örnek 5:

Şimdi de, Yenilenmiş HPM yi lineer bir integral denkleme

$$u_t = 1 + \sinh(t) - \cosh(t) + \int_0^t u(x)dx \tag{5.9}$$

uygulansın. (5.9) denkleminde bulunan, $\sinh(t)$ ve $\cosh(t)$ nin açılımları

$$\sinh(t) - \cosh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2} = -e^{-t}$$

$$1 + \sinh(t) - \cosh(t) = 1 - e^{-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n!}$$

dır. Burdan homotopi;

$$u(t)=p\int_0^t u(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n!} \tag{5.10}$$

olarak kurulur.

$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+......$ ifadesini (5.10) denkleminde yerine koyup ve p nin kuvvetlerine göre açılırsa,

$$u_0(t)+pu_1(t)+p^2u_2(t)+p^3u_3(t)+......=$$

$$p\int_0^t u_0(x)\,dx+p^2\int_0^t u_1(x)\,dx+p^3\int_0^t u_2(x)\,dx+p^4\int_0^t u_3(x)\,dx+....$$

$$+pt-p^2\frac{t^2}{2!}+p^3\frac{t^3}{3!}-p^4\frac{t^4}{4!}+p^5\frac{t^5}{5!}-......$$

$$p^0:\qquad u_0(t)=0$$

$$p^1:\qquad u_1(t)=\int_0^t u_0(x)dx+t \qquad u_1(t)=t$$

$$p^2:\qquad u_2(t)=\int_0^t u_1(x)dx-\frac{t^2}{2}$$

$$=\int_0^t xdx-\frac{t^2}{2}$$

$$=\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}=0 \qquad u_2(t)=0$$

$$p^3:\qquad u_3(t)=\int_0^t u_2(x)dx+\frac{t^3}{3}$$

$$u_3(t)=\frac{t^3}{3!}$$

$$p^4: \qquad u_4(t) = \int_0^t u_3(x)dx - \frac{t^4}{4!}$$

$$u_4(t) = 0$$

$$p^5: \qquad u_5(t) = \int_0^t u_4(x)dx - \frac{t^5}{5!}$$

$$u_5(t) = \frac{t^5}{5!}$$

.

.

elde edilir. Çözüm ise

$$u(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5!} + \dots$$

şeklindedir. Kapalı formda ise $u(t) = \sinh t$ dir.

5.3. Örnek 6:

Bu kez de nonlineer kısmi diferansiyel denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x\cos t + x^2\cos^2 t \tag{5.11}$$

Başlangıç koşulu

$$u(x,0) = x \qquad u_t(x,0) = 0$$

verilsin. Yenilenmiş HPM uygulandığında, (5.11) denklemi

$$u_{tt} + p\left[-u_{xx} + u^2 - x^2\cos^2 t\right] = -x\cos t \tag{5.12}$$

şeklinde düzenlenir. $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots\dots$ ifadesi (5.12) denkleminde yerine konur ve p nin kuvvetlerine göre sıralanırsa

$$(u_0)_{tt} + p(u_1)_{tt} + p^2(u_2)_{tt} + p^3(u_3)_{tt} + \dots\dots + p\left[-(u_0)_{xx} - p(u_1)_{xx} - p^2(u_2)_{xx} - p^3(u_3)_{xx} - \dots\right.$$

$$u_0^{\,2}+2pu_0u_1+p^2\left(2u_0u_2+u_1^{\,2}\right)+p^3\left(2u_1u_2+2u_0u_3\right)+p^4\left(2u_0u_4+u_2^{\,2}+2u_1u_3\right)+p^4\left(2u_0u_4+u_2^{\,2}+2u_1u_3\right)$$

$$p^5\left(2u_0u_5+2u_1u_4+2u_2u_3\right)-x^2\cos^2 t\big]=-x\cos t$$

p^0 : için

$$\left(u_0\right)_{tt}=-x\cos t$$

$$\left(u_0\right)_t=-x\sin t$$

$$u_0\left(x,t\right)=x\cos t \qquad u_0\left(x,0\right)=x \qquad \left(u_0\right)_t\left(x,0\right)=0$$

p^1 : için

$$\left(u_1\right)_{tt}-\left(u_0\right)_{xx}+u_0^{\,2}=x^2\cos^2 t$$

$$\left(u_1\right)_{tt}+x^2\cos^2 t=x^2\cos^2 t$$

$$u_1\left(x,t\right)=0$$

p^2 : için

$$\left(u_2\right)_{tt}-\left(u_1\right)_{xx}+2u_0u_1=0$$

$$u_2\left(x,t\right)=0$$

p^3 : için

$$\left(u_3\right)_{tt}-\left(u_2\right)_{xx}+2u_0u_2+u_1^{\,2}=0$$

$$u_3\left(x,t\right)=0$$

Sonuç olarak (5.11) denkleminin HPM için ilk birkaç bileşenin çözümü

$$u=u_0=x\cos t$$

$$u_k=0 \qquad k\geq 1$$

dır.Bu denklemin kesin çözümü ise $u\left(x,t\right)=x\cos t$ dır.

6. SONUÇ

Nümerik metotlardan biri olan Homotopi perturbasyon metodu, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot, farklı denklem ve problemlere uygulanmaktadır.

Öncelikle metodun temelinde yer alan parametrelerin birkaç değisik şekilde kullanıldığında ne kadar farklı sonuçlar ortaya çıktığı incelendi ve bu farklılıklar içerisinde, en tutarlı sonuçlar ise Homotopi Pertürbasyon Metodu ile elde edildi. Daha sonra özel bazı denklemler için HPM nin uygulanış biçimlerindeki farklılıklar gösterildi ve örneklerde de bu metodun ne kadar sağlıklı sonuçlar verdiği ve hatta bulunan sonuçların bazen kesin çözümlerle aynı olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

[1] J.H. He, (1999), Homotopy perturbation technique, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 178 257–262

[2] J.H. He, (2003), Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique, Applied Mathematics and Computation 135 73–79.

[3] J.H. He, (2004), Asymptotology by homotopy perturbation method, Applied Mathematics and Computation 156 591–596

[4] J.H. He, (2000), A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation 1 (1), 51–70.

[5] J.H. He, (2001), Bookkeeping parameter in perturbation methods, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation 2 (3), 257–264.

[6] J.H. He, (2001), Modified Lindstedt–Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations. Part III: Double series expansion, International Journal of Nonlinear Science and NumericalSimulation 2 (4) ,317–320.

[7] J.H. He, (2001), Iteration perturbation method for strongly nonlinear oscillations, Journal of Vibration and Control 7 (5) ,631–642.

[8] J.H. He, (2002), A note on delta-perturbation expansion method, Applied Mathematics and Mechanics 23 (6), 634–638.

[9] I. Andrianov, L. Manevitch, (2003) Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications, Kluwer Academic Publishers.

[10] C.M. Bender, K.S. Pinsky, L.M. Simmons, (1989), A new perturbative approach to nonlinear problems, Journal of Mathematical Physics 30 (7) ,1447–1455.

[11] J. Biazar, H. Ghazvini, (2008), Homotopy perturbation method for solving hyperbolic partial differential equations, Computers and Mathematics with Applications 56, 453–458

[12] Zaid M. Odibata, Shaher Momani, (2007), A reliable treatment of homotopy perturbation method for Klein–Gordon equations, Physics Letters A 365 , 351–357

[13] Zaid M. Odibat, (2007), A new modification of the homotopy perturbation method for linear and nonlinear operators, Applied Mathematics and Computation 189 , 746–753

İNTERNET KAYNAKLARI

[1] http://mathworld.wolfram.com/

[2] http://en.wikipedia.org/

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	27.10.1982	
Doğum yeri	Kayseri	
Lise	1997-2000	Kayseri Fevzi Çakmak Lisesi
Lisans	2002-2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2007-2009	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü