T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POSET METRİK İLE KODLARIN YAPISI

SEDA AKBIYIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İRFAN ŞİAP

İSTANBUL, 2012

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POSET METRİK İLE KODLARIN YAPISI

Seda AKBIYIK tarafından hazırlanan tez çalışması 30/01/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Bahattin YILDIZ

Fatih Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez poset adı verilen kısmi sıralı kümelere cebirsel kodlama teorisi perspektifi ile bakılabilmesi konusunda matematikçilere yardımcı olması amacıyla hazırlanmıştır.

Bu zorlu yolda her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. İrfan ŞİAP'a; manevi güç kaynaklarım olan anneme, babama, ablam ve kardeşime; yeri doldurulamayacak yardım ve fedakârlıklarıyla katkıda bulunan ve aynı zamanda meslektaşım olan eşim Sayın Arş. Gör. Mücahit AKBIYIK'a en içten şükranlarımı sunarım.

Ocak, 2012

Seda AKBIYIK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM 5

BÖLÜM 6

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{F}_q$	$\{0,1,...,q-1\}$ elemanlarından oluşan sonlu cisim
$\mathbb{F}_q^{\,n}$	Bileşenleri $\mathbb{F}_q$ cisminden alınmış n uzunluklu vektörlerin uzayı
$\varnothing$	Boş küme
$boy(V)$	V vektör uzayının boyutu
$S^{\perp}$	S kümesinin dikey tümleyeni, ortogonali
$(n,M)_q$ – kod	Kodsözlerinin bileşenleri $\mathbb{F}_q$ cisminden alınmış n uzunluklu M tane kodsözden oluşan (lineer olmak zorunda değil) kod
$[n,k]_q$ – kod	Kodsözlerinin bileşenleri $\mathbb{F}_q$ cisminden alınmış n uzunluklu k boyutlu lineer kod
$\lvert C\rvert$	C kodun eleman sayısı
$\langle S\rangle$	S kümesi tarafından üretilen alt uzay
$\langle u,v\rangle$	u ile v vektörünün iç çarpımı
A^T	A matrisinin satırlarını sütun kabul eden matris, transpoze
$d(x,y)$	x ile y vektörleri arasındaki Hamming uzaklık
$w(x)$	x vektörünün Hamming ağırlığı
$Çekf$	f fonksiyonu altında görüntüsü 0 olan elemanların kümesi, çekirdek
$P=([n],\leq)$	$\{1,2,...,n\}$ elemanları ile oluşturulmuş, üzerinde $\leq$ bağıntısı tanımlanan poset
I	İdeal
supp (x)	x vektörünün sıfırdan farklı bileşenlerinin kümesi, support kümesi
$w_P(x)$	x vektörünün poset ağırlığı

$d_P(x,y)$	x ile y vektörleri arasındaki poset uzaklık
$S_P(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı $P-$küre
$\Omega_j(i)$	j tane maksimal elemana sahip i tane eleman içeren ideallerin sayısı
A_i	Hamming ağırlığı i olan vektörlerin sayısı
$A_i(P)$	Poset ağırlığı i olan vektörlerin sayısı
$W_{C,P}(x)$	C kodun P posetine göre poset ağırlık polinomu, ağırlık sayacı
$\overline{P}$	Dual poset
$P=\mathrm{H}(n:n_1,...,n_s)$	n eleman ve s seviyeden oluşan hiyerarşik poset
$x*y$	x ile y vektörlerinin bileşensel (componentwise) çarpımı
$d(C)$	C kodun herhangi iki vektörü arasındaki sıfırdan farklı uzaklıkların en küçüğü
$w(C)$	C kodun sıfırdan farklı kodsözlerinin ağırlıklarının en küçüğü
$w_{RT}(x)$	x vektörünün Rosenbloom- Tsfasman ağırlığı
$d_{RT}(x,y)$	x ile y vektörlerinin arasındaki Rosenbloom- Tsfasman uzaklığı
G	Üreteç matris
H	Kontrol matrisi
I_n	n satır ve n sütundan oluşan birim matris
$W_C(x)$	C kodun Hamming metriğine göre ağırlık polinomu

KISALTMA LİSTESİ

RT-metrik Rosenbloom-Tsfasman metriği

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

POSET METRİK İLE KODLARIN YAPISI

Seda AKBIYIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Kodlama Teorisi mesajların (bilgilerin) depolanması ve ya iletilmesi açısından, çalışma alanı olarak çok önemli yere sahiptir. Mesajlar bir kanaldan aktarılırken birçok hataya maruz kalabilirler. Bu durumda alıcı, gönderilenden farklı bir mesaj almış olur. Bu hataları tespit etmek ve düzeltmek için alıcı Hata Düzelten Kodlar Teorisini kullanır.

Bilgilerin kodlanması ile birlikte hataların meydana geliş şekillerine paralel olarak ağırlık ve uzaklık fonksiyonları tanımlanır. Bu uzaklık fonksiyonları yardımıyla gönderilen orijinal kodlanmış bilgi (kodsözler) ile alınan mesajlar arasındaki uzaklığa bağlı olarak dekodlama yapılmaktadır. Bu fonksiyonların metrik olması cebirsel yaklaşım açısından hataların düzeltilmesini sağlar.

En eski ve en çok uygulanan uzaklık fonksiyonlarından biri Hamming metriğidir. Bununla birlikte, bilgi gönderimlerinde oluşan hataların farklılığına bağlı olarak farklı uzaklık fonksiyonları tanımlanır.

Lineer kodlar ile duallerinin ağırlık sayaçları arasında bir ilişki veren MacWilliams özdeşliği ilk olarak Hamming metriğine göre ispatlanmıştır. MacWilliams özdeşlikleri kodlama teorisinde önemli bir yere sahiptirler.

Poset metriği özel halde iyi bilinen Hamming ile Rosenbloom-Tsfasman metriklerini içerdiğinden son zamanlarda kodlama teorisinde birçok çalışamaya kaynak oluşturmuştur.

Bu tezde poset metriği incelenmiş, literatürde tanımlanan hiyerarşik posetler için ağırlık sayacı yerine P-tam ağırlık sayacı adını verdiğimiz posetin seviye detaylarını daha iyi bir şekilde kullanarak ayrık zincirli posetler üzerinde bir ağırlık sayacı tanımlanmış ve bundan faydalanarak dual poset kullanımına başvurulmadan MacWilliams özdeşliği aynı poset üzerinde ispatlanmıştır. Ayrıca, tanımlanan bu yeni tam ağırlık sayacı sayesinde özel durumlarda çok iyi bilinen Hamming ile Rosenbloom-Tsfasman metriklerini de içerdiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Poset, Kısmi Sıralı Küme, $P-$kod, $P-$ağırlık, MacWilliams Özdeşliği, Lineer Kodlar, Ağırlık Sayaçları

ABSTRACT

STRUCTURE OF CODES WITH POSET METRIC

Seda AKBIYIK

Department of Mathematics
MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Coding Theory has been a very important field of study in terms of transmission and storage of messages. While transmitting the messages through a noisy channel, there may be many errors which the messages incur. In this situation, the receiver gets the incorrect message. In order to detect and correct the error, the receiver applies the Theory of Error Correcting Codes.

During the encoding of the messages, weight and distance functions are defined according to the type of errors. By means of these functions, decoding is done depending on the distance between the original sent message and the received erroneous word. The distance function being a metric, facilitates detecting and correcting the errors.

One of the oldest and the most applied distance functions is the Hamming distance. However, several distance functions are defined since the type of errors may be different.

The MacWilliams identity, which gives the relation between the weight enumerators of the linear codes and their duals was first proved for the Hamming metric. This identity has a significant role in Algebraic Coding Theory. Hence, some new MacWilliams type identities have been introduced for new metrics since then.

Recently, the poset metric has been a reference for many works in Coding Theory since as a special case it gives the well known Hamming and Rosenbloom-Tsfasmann metrics.

In this work, poset metric has been studied, a new weight enumerator is defined which is called P- complete weight enumerator and uses only level details of the poset comprehensively instead of weight enumerator which is defined for hierarchical posets. According to this weight enumerator, MacWilliams type identity has been proved. We obtain the well known weight enumerators of Hamming and RT- metrics, as a special case of the newly defined weight enumerator.

Key words: Poset, Partially Ordered Set, $P-$code, $P-$weight, MacWilliams Identitiy, Linear Codes, Weight Enumerators

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kodlama teorisinin klasik problemi verilen bir sonlu cisim üzerinde mümkün olan en büyük minimum uzaklığa sahip lineer kodu bulmaktır. H. Niederreiter [1] 1980' lerde bu problemi Hamming metrikten farklı bir metrik bularak genelleştirmiştir. Richard Brualdi [2] ve arkadaşları ise 1995 yılında yaptıkları çalışma ile bu problemi kısmi sıralı kümelere (posetlere) genelleştirmiş ve poset kod kavramının temellerini atmışlardır. Bu çalışmalarında ayrıca mükemmel poset kodu tanımlayıp bunun için bazı sınırlar ve koşullar elde etmişlerdir. Hyun Kwang Kim [3], 2003' de "taç poset yapısı" adını verdiği yapı ile lineer mükemmel poset kodları sınıflandırmıştır. 2003' de Youngho Jang ve Jeanam Park [4] poset kodların özel bir ailesi olan n elemana ve $n-1$ maksimal elemana sahip ikili lineer poset kodlar için MacWilliams özdeşliğini ispatlamış ve bu kodların mükemmelliği için parametreleri belirlemişlerdir. 2005' de Hyun Kwang Kim, posetleri MacWilliams özdeşliği uygulanabilirliklerine göre, 2008' de ise hata düzeltme kabiliyetlerine göre sınıflandırmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez, Kodlama Teorisi alanında çalışan veya yeni çalışmaya başlayan herkesin yararlanabilmesi amacıyla hazırlanmıştır. Bu çalışmada lineer kodlar, Hamming Kodlar gibi Kodlama Teorisinin temel kavramları anlaşılır şekilde anlatılmış ve çok sayıda örnek verilmiştir. Ayrıca son zamanlarda üzerinde çokça durulan poset metriğine dikkat çekmek ve bu konu ile ilgilenenlerin tek kaynakta gerekli tüm temel bilgileri bulabilmeleri amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Verilen bir kodun dualinin ağırlık dağılımını, dual kodun kodsözlerini belirlemeye gerek duymadan bulmamıza yarayan MacWilliams özdeşliğinin Poset kodlara uygulanması üzerinde çalışılmıştır. Bu konuda yapılmış çalışmalara göre posetlerin hepsine bu özdeşlik uygulanamaz. Posetin MacWilliams özdeşliği uygulanabilir olması için gerek ve yeter koşulun hiyerarşik poset olması gerektiği ya da dual poset kod için dual poset kavramına ihtiyaç duyulduğu gösterilmişti. Oysa seviyeler yardımıyla tanımlanan tam ağırlık sayacı sayesinde ayrık zincirli poset adı verilen poset ailesine MacWilliams özdeşliği uygulanabilir.

Öte yandan bu tezde tanımlanan ağırlık sayacı sayesinde ayrık zincirli posetlerin geometrisini elde edebiliyoruz. Ancak seviyelerle işaretli elemanın yerleşimi göz ardı ediliyor. Dolayısıyla poset şema geometrisinin rol oynadığı uygulamalarda bu ağırlık sayacı çözüm sunmaktadır.

BÖLÜM 2

LİNEER KODLAR

$\mathbb{F}_q = \{0,1,...,q-1\}$, q elemanlı sonlu cismi üzerinde n uzunluklu bir kod $\mathbb{F}_q^{\,n}$ uzayının bir alt kümesi, lineer kod ise $\mathbb{F}_q^{\,n}$ vektör uzayının bir alt uzayıdır. Lineer kodlar vektör uzay olduklarından cebirsel yapıları nedeniyle tanımlanmaları, betimlenmeleri ve kullanılmaları daha kolaydır.

Lineer kodların lineer olmayanlara göre bazı avantajlarını şu şekilde sıralayabiliriz:

i. Lineer kod aynı zamanda bir vektör uzayı olduğundan bir taban kullanılarak daha basit ifade edilebilir.

ii. Bir lineer kodun uzaklığı, sıfırdan faklı kodsözlerin en küçük ağırlıklısının ağırlığına eşittir.

iii. Lineer kodlar için geliştirilen kodlama ve dekodlama algoritmaları daha hızlı ve kolaydır.

Bu nedenle burada lineer olmayan kodlar yerine sonlu cisimler üzerinde tanımlı lineer kodlara yoğunlaşacağız.

2.1 Sonlu Cisimler Üzerinde Vektör Uzayları

Tanım 2.1 $\mathbb{F}_q$, eleman sayısı (mertebesi) q olan bir sonlu cisim olsun ve her $v, w \in \mathbb{F}_q^{\,n}$ için vektör toplamı,

$$\begin{aligned} +:\mathbb{F}_q^{\,n}\times\mathbb{F}_q^{\,n} &\to \mathbb{F}_q^{\,n} \\ v+w &\mapsto (v_1+w_1,\dots,v_n+w_n) \end{aligned}$$

ve her $\lambda\in\mathbb{F}_q, v\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için skaler çarpım,

$$\begin{aligned} \cdot:\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q^{\,n} &\to \mathbb{F}_q^{\,n} \\ \lambda v &\mapsto (\lambda v_1,\dots,\lambda v_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre boştan farklı bir V kümesi + ve $\cdot$ işlemleri ile aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V ye $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı (ya da lineer uzay) denir [6].

Her $u,v,w\in V$ ve her $\lambda,\mu\in\mathbb{F}_q$ için;

i. $u+v\in V$;

ii. $(u+v)+w=u+(v+w)$;

iii. Her $v\in V$ için $0+v=v+0=v$ olacak şekilde bir $0\in V$ vardır;

iv. Her $u\in V$ için $u+(-u)=0=(-u)+u$ olacak şekilde $-u\in V$ vardır;

v. $u+v=v+u$;

vi. $\lambda v\in V$;

vii. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ ve $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$;

viii. $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$;

ix. 1, $\mathbb{F}_q$ nin çarmaya göre etkisiz elemanı ise $1u=u$.

Örnek 2.1

i. $C_1=\{0000,1010,0101,1111\}$ **,** $\mathbb{F}_2$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

ii. Her q için $C_2=\{(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)\,|\,\lambda\in\mathbb{F}_q\}$ kümesi $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.2 V vektör uzayının boştan farklı bir C alt kümesi aynı vektör toplamı ve skalerle çarpım altında bir vektör uzayı ise C ye V nin bir alt vektör uzayı denir [6].

Örnek 2.2 Örnek 2.1 deki C_1 ve C_2 alt kümeleri sırasıyla $\mathbb{F}_2^{\,n}$ nin ve $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin alt vektör uzaylarıdır.

Önerme 2.1 $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir V vektör uzayının boştan farklı bir C alt kümesinin bir alt uzay olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$ için $\lambda x + \mu y \in C$ olmasıdır [6].

Tanım 2.3 V, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $v_1, ..., v_r \in V$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu, $\lambda_1, ..., \lambda_r$, $\mathbb{F}_q$ nin bazı skaler elemanları olmak üzere $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$ şeklinde bir vektördür [6].

Tanım 2.4 V, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0$ için tek çözüm $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$ oluyorsa $\{v_1, ..., v_r\}$ vektörler kümesi V de lineer bağımsızdır.

Lineer bağımsız olmayan kümeye lineer bağımlıdır denir.

Örnek 2.3

i. 0 vektörünü içeren her S kümesi lineer bağımlıdır.

ii. Herhangi $\mathbb{F}_q$ cismi için $\{0001, 0010, 0100\}$ lineer bağımsızdır.

Tanım 2.5 V, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S nin (lineer) üreteci $\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in \mathbb{F}_q\}$ şeklinde tanımlıdır [6].

Eğer $S = \emptyset$ ise $\langle S \rangle = \{0\}$ dir.

Eğer $C = \langle S \rangle$ ise C nin S alt kümesine üreteç küme denir.

Önerme 2.2 S, V nin bir alt uzayı ise $\langle S \rangle = S$ dir [6].

Örnek 2.4

i. $q = 2$ ve $S = \{0001, 0010, 0100\}$ ise

$\langle S \rangle = \{0000, 0001, 0010, 0100, 0011, 0101, 0110, 0111\}$ dir.

ii. $q = 3$ ve $S = \{0001, 1000, 1001\}$ ise

$\langle S \rangle = \{0000, 0001, 0002, 1000, 2000, 1001, 1002, 2001, 2002\}$ dir.

Tanım 2.6 V , $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı olsun.

i. $V=\langle B\rangle$ ise B lineer bağımsız alt kümesine V için bir taban denir.

ii. V nin B tabanının eleman sayısına V nin boyutu denir ve $boy(V)$ ile gösterilir. B sonsuz elemanlı ise $boy(V)=\infty$ ile gösterilir [6] .

Not 2.1 Bir sonlu uzayın herhangi bir alt uzayı için birden fazla taban olabilir ancak bu tabanların tümü aynı sayıda elemana sahiptir.

Teorem 2.1 V , $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $boy(V)=k$ ise

i. V nin q^k tane elemanı vardır;

ii. V nin $\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(q^k-q^i\right)$ tane farklı tabanı vardır [6].

Tanım 2.7 $v=(v_1,...,v_n)$ ve $w=(w_1,...,w_n)\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ olsun.

i. v ile w nin skaler çarpımı $v\cdot w=v_1w_1+...+v_nw_n\in\mathbb{F}_q$ şeklinde tanımlanır.

ii. $v\cdot w=0$ ise v ile w vektörleri diktir denir.

iii. S, $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin bir alt kümesi olmak üzere S nin dikey tümleyeni (ortogonali) $S^{\perp}=\left\{v\in\mathbb{F}_q^{\,n}\mid v\cdot s=0,\forall s\in S\right\}$ şeklinde tanımlanır [6].

Sonuç 2.1 Eğer $S=\varnothing$ ise $S^{\perp}=\mathbb{F}_q^{\,n}$ dir.

Not 2.2

i. $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin her S alt kümesi için $\mathbb{F}_q^{\,n}$ vektör uzayının alt uzayı olan $S^{\perp}$ her zaman bulunabilir. Üstelik $\langle S\rangle^{\perp}=S^{\perp}$ dir.

ii. Yukarıda tanımlanan (Tanım 2.7.i) skaler çarpım $\mathbb{F}_q^{\,n}$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Teorem 2.2 $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin her S alt kümesi için $boy(\langle S\rangle)+boy\left(\langle S\rangle^{\perp}\right)=n$ dir [6].

Örnek 2.5 $q=2$, $n=4$ ve $S=\{0100,0101\}$ olsun. Bu durumda

$\langle S\rangle=\{0000,0100,0001,0101\}$ dir. S lineer bağımsız olduğundan $boy(\langle S\rangle)=|S|=2$ dir. Buradan $S^{\perp}=\{0000,0010,1000,1010\}$ olarak bulunur. $S^{\perp}$ için bir taban $\{0010,1000\}$ dir. Bu nedenle $boy(S^{\perp})=2$ dir. Böylece $boy(\langle S\rangle)+boy(\langle S\rangle^{\perp})=2+2=4=n$ bulunur.

2.2 Lineer Kodlar

Tanım 2.8 $\mathbb{F}_q=\{0,1,\ldots,q-1\}$, q elemanlı sonlu bir cisim olsun. $\mathbb{F}_q$ üzerinde uzunluğu n, eleman sayısı M olan bir C kodu, $\mathbb{F}_q^n$ uzayının bir alt kümesidir. Böyle bir kod kısaca $(n,M)_q-$ kod şeklinde gösterilir [7].

Tanım 2.9 $\mathbb{F}_q$ üzerinde uzunluğu n, boyutu k olan bir C lineer kodu, $\mathbb{F}_q^n$ uzayının bir alt uzayıdır. Böyle bir kod $[n,k]_q-$ kod şeklinde gösterilir. Özel olarak, $q=2$ iken $\mathbb{F}_2$ üzerinde bir koda ikili kod; $q=3$ iken $\mathbb{F}_3$ üzerinde bir koda üçlü kod denir [6].

Örnek 2.6

i. $q=2$ için $C=\{0000,0001,0100,0101\}$ kodu $\mathbb{F}_2^{\,n}$ nin bir alt uzayı olduğundan bir ikili lineer koddur.

ii. $q=3$ için $C=\{000,110,220,102,201,212,121,022,011\}$ kodu $\mathbb{F}_3^{\,n}$ nin bir alt uzayı olduğundan bir üçlü lineer koddur.

Tanım 2.10 C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir lineer kod olsun.

i. C nin dual kodu $C^{\perp}$, $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin alt uzayı olan C nin dikey tümleyenidir. $C^{\perp}=\left\{x\in\mathbb{F}_q^n:\langle x,c\rangle=x_1c_1+\ldots x_nc_n=0,\forall c\in C\right\}$ şeklinde tanımlanır [7].

ii. C lineer kodunun boyutu, C nin $\mathbb{F}_q$ üzerinde vektör uzayı olarak boyutudur, yani tabanının eleman sayısıdır ve $boy(C)$ ile gösterilir [6].

Not 2.3 C kodu $\mathbb{F}_q$ üzerinde tanımlandığı biliniyorsa n uzunluklu, M elemanlı bir kod $(n,M)-$ kod olarak; n uzunluklu, k boyutlu lineer bir kod $[n,k]-$ kod olarak gösterilir.

Teorem 2.3 C , $\mathbb{F}_q^{\,n}$ üzerinde boyutu k olan bir lineer kod olsun.

i. $|C| = q^{boy(C)}$ $\left(M = q^k\right)$, diğer bir ifadeyle $boy(C) = \log_q |C|$ dir.

ii. $C^{\perp}$ bir lineer koddur ve $boy(C) + boy\left(C^{\perp}\right) = n$,

iii. $\left(C^{\perp}\right)^{\perp} = C$ [6] .

İspat:

i. C kodun vektör uzayı olarak bir tabanı $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ olsun. O halde, $C = \left\{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_k c_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{F}_q\right\}$ yazılır. $\left|\mathbb{F}_q\right| = q$ olduğundan her bir λ_i için q seçenek vardır. O halde C nin q^k elemanı vardır.

ii. $C^{\perp} = \left\{x \in \mathbb{F}_q^n \mid \langle x, c\rangle = 0, \forall c \in C\right\}$ nin lineer kod olduğunu göstermek için $\mathbb{F}_q^n$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğu gösterilmelidir.

- $x, y \in C^{\perp}$ olsun. Yani, $\forall c \in C$ için $\langle x, c\rangle = 0$ ve $\forall c \in C$ için $\langle y, c\rangle = 0$ dir. $\forall c \in C$ için $\langle x + y, c\rangle = \langle x, c\rangle + \langle y, c\rangle = 0 \Rightarrow x + y \in C^{\perp}$ dir.

- $x \in C^{\perp}$ olsun. Yani, $\forall c \in C$ için $\langle x, c\rangle = 0$ dir. $\forall c \in C$ ve $\alpha \in \mathbb{F}_q$ için $\langle \alpha x, c\rangle = \alpha \langle x, c\rangle = 0$ olduğundan $\alpha x \in C^{\perp}$ dir.

O halde $C^{\perp}$, $\mathbb{F}_q^n$ vektör uzayının bir alt uzayıdır, yani bir lineer koddur.

$C = \{0\}$ ise $\mathbb{F}_q^n$ deki tüm vektörler C ye diktir. Dolayısıyla $\mathbb{F}_q^n = C^{\perp}$ elde edilir. Böylece $boy(C) + boy\left(C^{\perp}\right) = 0 + n = n$ elde edilir.

$boy(C) = k \geq 1$ olduğunu ve C nin bir tabanı $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in C^{\perp}$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle c_1, x\rangle = \langle c_2, x\rangle = \ldots = \langle c_k, x\rangle = 0$ olmasıdır. $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ tabanının elemanlarını satır kabul eden matris A olsun.

$A=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$ ise $Ax^T=0$ dir. Burada n bilinmeyenli k lineer bağımsız denklem olduğundan bu sistemin $n-k$ tane çözümü vardır. Dolayısıyla $C^{\perp}$ uzayının boyutu $n-k$ dir. Böylece $boy(C)+boy(C^{\perp})=k+(n-k)=n$ elde edilir.

iii. $c\in C$ olsun. Bu durumda $\forall d\in C^{\perp}$ için $\langle c,d\rangle=0$ dir. Buradan $\langle d,c\rangle=0$ yazabiliriz. Bu ise $c\in(C^{\perp})^{\perp}$ demektir.

Öte yandan C bir $[n,k]-$kod olduğundan $C^{\perp}$, $[n,n-k]-$koddur. $\left|(C^{\perp})^{\perp}\right|=q^k=|C|$ dir. Buradan, $(C^{\perp})^{\perp}=C$ elde edilir.

Örnek 2.7 $C=\{000000,000001,000010,000011,000100,000101,000110,000111\}$ kodu için $M=8=2^k$ olduğundan $k=3$ olur. $C^{\perp}=\{x\in\mathbb{F}_2^6 \mid \langle x,c\rangle=0,\forall c\in C\}$ dir.

$$\left.\begin{aligned}&\langle x,000000\rangle=0,\ \langle x,000011\rangle=0\\&\langle x,000001\rangle=0,\ \langle x,000010\rangle=0\\&\langle x,000100\rangle=0,\ \langle x,000111\rangle=0\\&\langle x,000101\rangle=0,\ \langle x,000110\rangle=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{gathered}x_6=0,\ x_5=0,\ x_5+x_6=0\\x_4=0,\ x_4+x_6=0\\x_4+x_5=0,\ x_4+x_5+x_6=0\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}C^{\perp}&=\{(r,s,t,0,0,0):r,s,t\in\mathbb{Z}_2\}\\&=\{r(1,0,0,0,0,0)+s(0,1,0,0,0,0)+t(0,0,1,0,0,0)\mid r,s,t\in\mathbb{Z}_2\}\end{aligned}$$

ise $C^{\perp}=\{000000,100000,010000,110000,001000,101000,011000,111000\}$ dir.

Tanım 2.11 C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir lineer kod olsun. $C\subseteq C^{\perp}$ ise C ye kendine dik (ortogonal) kod; $C=C^{\perp}$ ise C ye kendine dual kod denir [7].

Önerme 2.3 Kendine dual bir kodun uzunluğu çifttir ve boyutu $k=\dfrac{n}{2}$ dir [6].

İspat: Teorem 2.3 ii' nin bir sonucu olarak ve kendine dual kodun tanımından faydalanarak $C=C^{\perp}$ ise $k=n-k$ olmalıdır. Buradan $2k=n$ ve $k=\dfrac{n}{2}$ elde edilir.

Örnek 2.8 $C=\{0000,1010,0101,1111\}$ kodu $\mathbb{F}_2^4$ üzerinde bir lineer koddur. $boy(C)=\log_2 4=2$ dir. ($S=\{1010,0101\}$, C için bir tabandır ve lineer bağımsızdır. Bu nedenle $boy(C)=2$ dir.) Öte yandan $C^{\perp}=\{0000,1010,0101,1111\}=C$ olduğundan kendine dual bir koddur.

Önerme 2.4 C, $\mathbb{F}_q^n$ üzerinde bir $[n,k]_q-$ kod olsun. C nin kendine dual olması için gerek ve yeter şart C nin kendine dik ve $k=\frac{n}{2}$ olmasıdır [6] .

Önerme 2.5 C üçlü bir kod olsun. Bu kodun kendine dik bir kod olması için gerek ve yeter koşul her bir kodsözünün ağırlığının 3 ile bölünmesidir [7].

2.3 Hamming Ağırlık ve Hamming Uzaklık

Tanım 2.12 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{F}_q^n$ için x ile y arasındaki Hamming uzaklık $d(x,y)=d(x_1,y_1)+d(x_2,y_2)+\ldots+d(x_n,y_n)$ dir. Burada,

$d(x_i,y_i)=\begin{cases}1, & x_i\neq y_i\\ 0, & x_i=y_i\end{cases}$ şeklinde tanımlanır. Diğer bir ifadeyle, $d(x,y)=\left|\{i:x_i\neq y_i\}\right|$ dir [6].

Örnek 2.9

i. $\mathbb{F}_2$ üzerinde $x=(10011101)$ ve $y=(00111001)$ için $d(x,y)=3$ dir.

ii. $\mathbb{F}_3$ üzerinde $x=(10221101)$ ve $y=(11212100)$ için $d(x,y)=4$ dir.

Tanım 2.13 $\mathbb{F}_q^n$ deki bir x sözünün Hamming ağırlığı sıfırdan farklı koordinatlarının (bileşenlerinin) sayısı $w(x)=\left|\{i\mid x_i\neq 0\}\right|$ olarak tanımlanır [6].

Örnek 2.10 $\mathbb{F}_2$ üzerinde $x=(10011101)$ için $w(x)=5$ iken $\mathbb{F}_3$ üzerinde $x=(10221101)$ için $w(x)=6$ dir.

Not 2.4 $\mathbb{F}_q$ sonlu cismindeki her a elemanı için Hamming ağırlık, $w(a) = d(a,0) = \begin{cases} 1, a \neq 0 \\ 0, a = 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanabilir [6].

Bundan yararlanarak $\mathbb{F}_q^{\,n}$ deki bir $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sözünün Hamming ağırlığı $w(x) = w(x_1) + ... + w(x_n)$ olarak hesaplanabilir.

Teorem 2.4 $d(.,.)$, $\mathbb{F}_q^n$ üzerinde bir metriktir [7].

Teorem 2.5 Her $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ için $d(x,y) = w(x-y)$ dir [7].

İspat: $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2) + \ldots + d(x_n,y_n) \\ &= d(x_1 - y_1, 0) + d(x_2 - y_2, 0) + \ldots + d(x_n - y_n, 0) \\ &= w(x_1 - y_1) + w(x_2 - y_2) + \ldots + w(x_n - y_n) \\ &= w(x-y). \end{aligned}$$

Sonuç 2.2 q bir çift sayı ise her $x, y \in \mathbb{F}_q^{\,n}$ için $d(x,y) = w(x+y)$ dir.

Tanım 2.14 Her $x, y \in \mathbb{F}_2^n$ için bileşensel (componentwise) çarpım $(x * y) = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n)$ dir.

Örnek 2.11 $x = (11101011), y = (10100110)$ ise $x * y = (10100010)$ bulunur.

Not 2.5 Bileşensel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar:

$\forall x, y \in \mathbb{F}_q^{\,n}$ için $1 = \left(\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ tane}} \right) \in \mathbb{F}^n$ ve $0 = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n \text{ tane}} \right) \in \mathbb{F}^n$ olmak üzere;

- $x * x = x$,
- $x * y = y * x$,
- $x * 1 = x$,
- $x * 0 = 0$.

Önerme 2.6 $x, y \in \mathbb{F}_2^n$ ve $(x * y)$ bileşensel çarpım olmak üzere;

$w(x+y)=w(x)+w(y)-2w(x*y)$ dir.

Sonuç 2.3 Her $x,y\in\mathbb{F}_2^n$ için $w(x)+w(y)\geq w(x+y)$ dir.

Önerme 2.7 q herhangi bir asal sayının bir kuvveti olmak üzere her $x,y\in\mathbb{F}_q^n$ için $w(x)+w(y)\geq w(x+y)\geq w(x)-w(y)$ dir [6].

Teorem 2.6 C bir ikili lineer kod olsun.

i. C kendine dik ve C nin üreteç matrisinin satırlarının ağırlıkları 4 ile bölünebiliyorsa C deki tüm kod sözlerin ağırlığı 4 ile bölünür.

ii. Eğer C deki her kodsöz 4 ile bölünebiliyorsa, C kendine diktir [7].

İspat:

i. $\mathbb{F}_2$ de C kodun üreteç matrisi $G=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ ise her $i=1,2,...k$ için $w_H(x_i)\equiv 0(\operatorname{mod}4)$ dir. Tümevarımdan, $w_H(x_i+x_j)$ yi incelemek yeterlidir.

$w_H(x_i+x_j)=w_H(x_i)+w_H(x_j)-2w_H(x_i*x_j)\equiv 0(\operatorname{mod}4)$ elde edilir.

ii. $x,y\in C$;

$$0=w_H(x+y)=w_H(x)+w_H(y)-2w_H(x*y)\Rightarrow 2w_H(x*y)\equiv 0(\operatorname{mod}4)$$
$$\Rightarrow w_H(x*y)\equiv 0(\operatorname{mod}2)$$
$$\Rightarrow x.y\equiv 0(\operatorname{mod}2).$$

Böylece C kendine diktir.

Tanım 2.15 C bir kod olsun (lineer olması zorunlu değil). C nin minimum (Hamming) ağırlığı sıfırdan farklı tüm kodsözlerinin ağırlıklarının en küçüğüdür ve $w(C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.16 $\mathbb{F}_q^{\,n}$ üzerinde bir C kodun minimum uzaklığı,

$d_{\min}\left(C\right)=d\left(C\right)=\min\left\{d\left(x,y\right)\mid x\neq y,\forall x,y\in C\right\}$ şeklinde tanımlanır. Minimum uzaklığı d olan bir $\left[n,k\right]_q$ – kod, $\left[n,k,d\right]_q$ – kod ile gösterilir [7].

Teorem 2.7 C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir lineer kod ise $d\left(C\right)=w\left(C\right)$ dir.

İspat: Minimum uzaklık tanımından $d\left(C\right)=d\left(x',y'\right)$ olacak şekilde en az bir $x',y'\in C$ vardır. Buradan $d\left(C\right)=d\left(x',y'\right)=w\left(x'-y'\right)\geq w\left(C\right)$ elde edilir.

Tersine, $w\left(C\right)=w\left(z\right)$ olacak şekilde $\exists z\in C-\left\{0\right\}$ vardır. Buradan $w\left(C\right)=w\left(z\right)=d\left(z,0\right)\geq d\left(C\right)$ elde edilir.

Lineer kodlar üzerinde birçok ağırlık ve bunlara paralel olarak metrik koşullarını sağlayan birçok uzaklık tanımlanmıştır. Bunların içinde en bilinen ve kullanışlı olanı Hamming ağırlık ve Hamming uzaklıktır. Ancak onun kadar iyi bilinen bir diğer ağırlık ise Rosenbloom ve Tsfasman tarafından tanımlanan RT- ağırlık ve buna bağlı olarak tanımlanan RT-uzaklıktır.

Tanım 2.17 Her $x=\left(x_1,...,x_n\right)\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için Rosenbloom- Tsfasman ağırlık, kısaca RT-ağırlık $w_{RT}\left(x\right)=\begin{cases}0, x=0\\ \max\left\{i\mid x_i\neq 0\right\}, x\neq 0\end{cases}$ şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.18 Her $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, $y=\left(y_1,...,y_n\right)\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için Rosenbloom- Tsfasman uzaklık, kısaca RT-uzaklık $d_{RT}\left(x,y\right)=w_{RT}\left(x-y\right)$ şeklinde tanımlanır [8].

Önerme 2.8 $d_{RT}\left(.,.\right)$, $\mathbb{F}_q^{\,n}$ üzerinde bir metriktir.

2.4 Üreteç Matrisi ve Kontrol Matrisi

Tanım 2.19

i. Bir C lineer kodu, $\mathbb{F}_q^n$ uzayının bir alt uzayı olduğundan bir bazı vardır. C nin bir $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ bazındaki vektörleri satır kabul eden G matrisine, C kodunun üreteç matrisi denir ve $G = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}_{k \times n}$ ile gösterilir.

Dolayısıyla C deki her kodsöz G nin satırlarının bir $\mathbb{F}_q$ lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

ii. C lineer kodun kontrol matrisi H, $C^{\perp}$ dual kodun üreteç matrisidir. H ile gösterilen bu matris $\forall x \in C$ için $H \cdot x^T = 0$ eşitliğini sağlar [6].

Not 2.6

i. C bir $[n,k]-$ lineer kod ise G üreteç matrisi $k \times n$, H kontrol matrisi $(n-k) \times n$ formundadır.

ii. G ve H nin satırları lineer bağımsızdır.

Örnek 2.12 $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ matrisinin ürettiği C kodu $2^2 = 4$ elemanlıdır. C bir $[4,2]_2-$koddur. $C = \{\alpha c_1 + \beta c_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\} = \{0000, 1001, 0110, 1111\}$ dir.

Örnek 2.13 $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ matrisinin ürettiği C kodu $3^3 = 27$ elemanlıdır. C bir $[3,3]_3 -$ koddur. $C = \{\alpha_1(102) + \alpha_2(200) + \alpha_3(010) : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}_2\}$ dir.

Örnek 2.14 $H=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}_{3\times 4}$ matrisinin kontrol matrisi olduğu C kodu;

$\forall x\in C$ için $H\cdot x^T=0$ olduğundan $C=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_2^4 \mid H\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r}x_1+\quad +x_3+x_4=0\\ x_2+\quad +x_4=0\\ x_3+x_4=0\end{array}\right\} x_1=0,\ x_2=x_3=r,\ x_4=-r\Rightarrow C=\{(0rrr):r\in\mathbb{Z}_2\}=\{0000,1111\}$$

dir.

Not 2.7 Bir C lineer kodun kendine ortogonal olduğunu ispat etmek için, C nin üreteç matrisindeki satırların ikişerli dik olduğunu göstermek yeterlidir.

Gerçekten; C den c,d keyfi kodsözlerini alalım. Bu durumda; $c_1,c_2,\ldots,c_k$, G üreteç matrisinin satırları olmak üzere,

$c=\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\ldots+\alpha_kc_k$, $d=\beta_1c_1+\beta_2c_2+\ldots+\beta_kc_k$ şeklinde yazılır. Buradan,

$\langle c,d\rangle=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\langle c_i,c_j\rangle$. Eğer her bir $\langle c_i,c_j\rangle=0$ ise o zaman $\langle c,d\rangle=0$ dır.

Örnek 2.15 $G=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$ matrisi ile elde edilen $C=\{0000,1001,0110,1111\}$ kodu 4 uzunluklu kendine dual bir koddur.

Önerme 2.9 Herhangi $n\in\mathbb{N}$ için $2n$ uzunluğunda kendine dual bir ikili kod vardır.

İspat: $G=[I_n \mid I_n]$ üreteç matrisine sahip bir kod $[2n,n,2]_2-$ koddur. e_i, i. bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan vektör olmak üzere $i\neq j$ ise $[e_i\mid e_i][e_j\mid e_j]=0$ ve $i=j$ ise $[e_i\mid e_i][e_j\mid e_j]=e_i.e_j+e_i.e_j=1+1=0$ dir. C aynı zamanda kendine dualdir, çünkü $|C|=2^n$ dir.

Not 2.8 Yukarıdaki önerme $q \neq 2$ için doğru değildir.

Örnek 2.16 $S = \{20212, 01020, 10121\}$ ve $\langle S \rangle = C$ ise $2(10121) = (20212)$ olduğundan S lineer bağımlıdır. Bu nedenle C kodu $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ üreteç matrisi ile üretilen $[5,2]_3$ parametrelerine sahip ve kodsözleri açık olarak

$C = \{00000, 01020, 02010, 10121, 11111, 12101, 20212, 21202, 22222\}$ şeklinde olan bir koddur.

Tanım 2.20 C üreteç matrisi G olan bir $[n,k]_q -$ kod olsun. Bu durumda;

i. $G = [I_k \mid A]_{k \times n}$ ise G nin standart formda olduğu söylenir. Burada, I_k, $k \times k$ tipinde birim matris; A ise $k \times (n-k)$ tipinde bir matristir [6].

ii. $H = \left[-A^T \mid I_{n-k}\right]_{(n-k) \times n}$ ise H standart formdadır [6].

Önerme 2.10 C, G tarafından üretilen $\mathbb{F}_q^n$ üzerinde bir $[n,k]-$ lineer kod olsun. Bu durumda her $v \in \mathbb{F}_q^n$ için $v \in C^\perp$ olması için gerek ve yeter koşul $vG^T = 0$ olmasıdır [7].

Özel olarak verilen bir $(n-k) \times n$ tipinde H matrisinin C kodun kontrol matrisi olması için gerek ve yeter koşul H nin satırlarının lineer bağımsız olması ve $HG^T = 0$ olmasıdır [6].

Teorem 2.8 C bir lineer kod ve H, C nin bir kontrol matrisi olsun.

i. C nin mimimum uzaklığının $\geq d$ olması için gerek ve yeter koşul H nin herhangi $d-1$ sütununun lineer bağımsız olmasıdır [6].

ii. C nin minimum uzaklığının $\leq d$ olması için gerek ve yeter koşul H nin en az bir d sütununun lineer bağımlı olmasıdır [6].

Örnek 2.17 C bir $[5,2]_2-$ kodunun kontrol matrisi $H=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}$ olsun.

$H_1+H_3=0$, yani 1. ve 3. sütunlar lineer bağımlıdır. Bu nedenle $d(C)\le 2$ dir. Her bir sütun lineer bağımsız olduğundan $d(C)\ge 2$ dir. O halde $d(C)=w(C)=2$ bulunur.

Örnek 2.18 Bir C**,** $[4,2]_3-$ kodu $G=\begin{bmatrix}1&0&2&2\\0&1&2&1\end{bmatrix}$ üreteç matris ile üretilsin.

$G=\begin{bmatrix}1&0&2&2\\0&1&2&1\end{bmatrix}$ olduğundan $-A^T=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ olur. Bu durumda C kodun H kontrol matrisi $H=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}$ bulunur. Bu durumda $C=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{F}_3^4 \mid Hx^T=0\right\}$ dir.

Buradan elde edilen denklem sistemi 4 bilinmeyenli 2 denklemden oluştuğundan 2 tane keyfi sabit olacaktır. Bu sabitler r,s olmak üzere,

$\begin{matrix}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_4=0\end{matrix}$ için $x_3=r,\ x_4=s,\ x_1=r+s,\ x_2=r-s$ bulunur. Bu durumda $C=\left\{(r+s,r+2s,r,s)\mid r,s\in\mathbb{F}_3\right\}$ dir.

Not 2.9 Bir kodun üreteç matrisi tek değildir. Örnek 2.18 'deki C kodu için başka bir üreteç matrisi $G'=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$ dir.

Örnek 2.19

Bir C kodun üreteç matrisi olarak verilen $G=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&2\\0&0&1&2&1&2\\2&0&0&2&1&0\\1&0&1&0&0&2\end{bmatrix}$ matrisi

$$G=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&2\\0&0&1&2&1&2\\2&0&0&2&1&0\\1&0&1&0&0&2\end{bmatrix}\underset{H_{12}(1),\,H_{32}(1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1&2&1&2\\0&0&1&2&1&2\\2&0&0&2&1&0\\0&0&1&2&1&2\end{bmatrix}\underset{H_{12},\,H_1\left(\frac{1}{2}\right)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&0&1&2&1&2\\1&1&1&2&1&2\\0&0&1&2&1&2\end{bmatrix}\underset{H_{21}(2),\,H_{23}(2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&0\\1&1&1&2&1&2\\0&0&1&2&1&2\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ şeklinde standart hale getirilir. Buradan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olur. O halde $-A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dir. Bu C kodu için bir kontrol matrisi, $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Not 2.10 $H_{ij}(a)$ ile j. Satırın a ile çarpılıp i. satıra eklenmesi işlemi gösterilmiştir.

Örnek 2.20 $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 7}$ kontrol matrisi ile verilen C kodu bir $[7,4]_2 -$ koddur. Bu durumda $C = \{x \in \mathbb{F}_2^7 \mid Hx^T = 0\}$ dir. Buradan elde edilen denklem sistemi 7 bilinmeyenli 3 denklemden oluştuğundan 4 tane keyfi sabit olacaktır. Bu sabitler k, r, s, t olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 + x_7 &= 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_7 &= 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 + x_7 &= 0 \end{aligned} \quad \text{için} \quad \begin{matrix} x_4 = k & x_1 = k + t + r \\ x_5 = t & x_2 = k + s + r \\ x_6 = s & x_3 = r + s + t \\ & x_7 = r \end{matrix} \quad \text{dir.}$$

Bu durumda $C = \{(k+t+r, k+s+r, r+s+t, k, t, s, r) \mid k, t, s, r \in \mathbb{F}_2\}$ dir.

Öte yandan, $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi C için bir üreteç matrisidir. Bu nedenle C, $[7,4,3]_2$ parametrelerine sahip ikili Hamming koddur.

Tanım 2.21 n uzunluğunda tekrarlı ikili kod bir $[n,1]_2 -$koddur.

Gerçekten; üreteç matrisi $G=\begin{bmatrix} \underbrace{1}_{I_1} & \underbrace{1\ldots1}_{A} \end{bmatrix}_{1\times n}$ olarak verilen bir kodun kontrol matrisi

$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ olur. $C=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right) \mid Hx^T=0\right\}$ olduğundan $\begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_3=0 \\ \vdots \\ x_1+x_n=0 \end{matrix}$ dir.

Buradan $C=\left\{\left(rr\ldots r\right) \mid r\in\mathbb{F}_2\right\}$ elde edilir. Bu ise tekrarlı koddur.

2.5 Lineer Kodların Denkliği

Tanım 2.22 $\mathbb{F}_q$ üzerinde iki $\left(n,M\right)-$koddan biri diğerinin "kodsözlerin n bileşeninin permütasyonu" ya da "belli yerdeki bileşenlerin sıfırdan farklı bir skalerle çarpımı" işlemlerinden herhangi biri veya ikisiyle elde edilebiliyorsa o zaman bu kodlara denk kodlar denir [6].

Örnek 2.21 $C_1=\{0000,0011,0110,0101\}$ kodu, $C_2=\{0000,0011,1001,1010\}$ koduna $\left(2,1,4,3\right)$ permütasyonu uygulanarak elde edildiğinden bu iki kod denktir.

Örnek 2.22 $C_1=\{0000,1001,0110,2002,0220,1111,2222,2112,1221\}$ koduna ilk olarak $\left(4,2,3,1\right)$ permütasyonu uygulanır, ardından da tüm kodsözlerin 3. bileşenleri 2 ile çarpılırsa C_1 koduna denk olan

$C_2=\{0000,1001,0120,2002,0210,1121,2212,2122,1211\}$ kodu elde edilir.

Teorem 2.9 Herhangi bir C lineer kodu standart formda olan üreteç matrisi tarafından C' lineer koduna denktir [6].

Örnek 2.23 $G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinde sütunlara $\left(1,4,5,2,3,6\right)$

permütasyonu uygulanırsa elde edilen $G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ standart formdadır ve denk kodunun üreteç matrisidir.

2.6 Hamming Metriğine Göre Lineer Kodlarda Ağırlık Sayaçları

Tanım 2.23 C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir $[n,k,d]$ kod olsun. A_i, C kodun Hamming ağırlığı i olan kodsöz sayısını göstermek üzere C nin Hamming metriğine göre ağırlık (dağılımı) polinomu

$$W_C(x) = \sum_{c \in C} x^{w(c)} = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$$

şeklinde tanımlanan polinomdur [7].

Not 2.11

- **i.** $A_0 = 1$ dir.
- **ii.** $w(C) = d$ ise $A_1 = A_2 = \ldots = A_{d-1} = 0$ dir.
- **iii.** $W_C(z)$ deki z lerin (sıfırdan farklı) kuvvetlerinden en küçük olanı minimum ağırlığı verir.
- **iv.** Eğer C ikili bir kod ise $\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ tane}} \in C$ olması için gerek ve yeter koşul $der\left(W_c(z)\right) = n$ olmasıdır.

Örnek 2.24 $\mathbb{F}_2^7$ de $C = \{0000000, 1010101, 0101010, 1111111\}$ kodun Hamming ağırlık dağılımı $W_C(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^7$ dir.

Tanım 2.24 $\mathbb{F}_q$ da aşikar (trivial) kod $[n,n,1]$ parametrelerine sahip koddur. Buradan $C=\mathbb{F}_q^{\,n}$ olduğunu kolayca söyleyebiliyoruz. $\mathbb{F}_q^{\,n}=\underbrace{\mathbb{F}_q\times\ldots\times\mathbb{F}_q}_{n-\text{tane}}$ dir. $\mathbb{F}_q=\{0,1,2,\ldots,q-1\}$ için $W_{\mathbb{F}_q}(z)=1.z^0+(q-1).z^1=1+(q-1)z$ olduğundan $W_{\mathbb{F}_q^{\,n}}(z)=\left(1+(q-1)z\right)^n$ dir.

$W_{\mathbb{F}_q^{\,n}}(z)$ içinde k ağırlıklı vektörlerin sayısı $(n-k)$ tane 0, k tane 0 dan farklı bileşenlerden oluşan vektörlerin sayısına eşittir. Böyle kaç tane vektör olduğunu A_k ile gösterirsek; $\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Yer Seçimi}}\cdot\underbrace{(q-1)^k}_{\text{Eleman Seçimi}}$ dir. Buradan

$$W_{\mathbb{F}_q^{\,n}}(z)=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}\cdot(q-1)^k}_{A_k}\cdot z^k=\left(1+(q-1)z\right)^n \text{ dir.}$$

Teorem 2.10 (MacWilliams Özdeşliği)

C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde lineer bir $[n,k,d]-$ kod olsun. $A(z)$, C nin ağırlık sayacı ve $B(z)$, $C^{\perp}$ nin ağırlık sayacı olsun. Bu durumda,

$$B(z)=\frac{1}{|C|}\cdot\left(1+(q-1)z\right)^n\cdot A\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z}\right) \text{ dir.}$$

Özel olarak; eğer C ikili bir kod ise $B(z)=\frac{1}{|C|}\cdot(1+z)^n\cdot A\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ dir.

Bu teoremin ispatında kullanmak üzere karakter kavramını tanımlayacağız.

Tanım 2.25 G değişmeli ve sonlu bir toplamsal grup olsun.

$\chi:G\to\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ olmak üzere $\chi(g_1+g_2)=\chi(g_1).\chi(g_2)$

şeklinde tanımlanan grup homomorfizmasına G nin bir karakteri denir.

Not 2.11 Karakterler $(\chi_1\circ\chi_2)(g)=\chi_1(g).\chi_2(g)$ işlemi ile bir grup oluştururlar. $\hat{G}$ ile G nin karakterlerinin oluşturduğu grubu gösterelim. Burada $\hat{G}\cong G$ ve $|\hat{G}|=|G|$ dir. Eğer $\chi\neq 1$ ise $\sum_{g\in G}\chi(g)=0$ dir. $\chi_0:g\to 1$ ise χ_0 karakteri birim karakter denir.

Eğer $H \leq G$ (alt grup) ise bir kısıtlanmış karakter oluşturabiliriz. $\chi : G \to C^{*}(H$ üzerinde) ise $\chi_H : H \to C^{*}$, olmak üzere her $h \in H$ için $\chi_H(h) = \chi(h)$ H üzerinde bir karakter tanımlar.

Eğer $\chi_H \neq 1$ (trivial değil, özdeşlik değil) ise $H \leq G : \sum_{h \in H} \chi(h) = 0$ dir.

Eğer $g \neq 0$ ise $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0$ ve $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(0) = |G|$ dir.

Önerme 2.11 Herhangi $u \in C \subseteq \mathbb{F}_2^{\,n}$ için $\chi_u(v) = (-1)^{\langle u,v \rangle}$ olmak üzere $v \notin C^{\perp}$ ise $\sum_{u \in C} \chi_u(v) = 0$ ve $v \in C^{\perp}$ ise $\sum_{u \in C} \chi_u(v) = |C|$ dir [9] .

Önerme 2.12 C bir ikili kod ve $f : \mathbb{Z}_2^{\,n} \to \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_s]$ bir fonksiyon olsun. $\tilde{f}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot f(v),\ u \in \mathbb{Z}_2^{\,n}$ olmak üzere $\sum_{v \in C^{\perp}} f(v) = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{u \in C} \tilde{f}(u)$ dir [9].

İspat (MacWilliams Özdeşliğinin (İkili Durumda) İspatı)

$u \in \mathbb{F}_2^{\,m}$ için $g(u) = \sum_{\overline{v} \in \mathbb{F}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot z^{w(v)}$ olsun.

$$\sum_{u \in C} g(u) = \sum_{u \in C} \sum_{v \in \mathbb{F}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot z^{w(v)} = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^{\,n}} z^{w(v)} \cdot \sum_{u \in C} (-1)^{\langle u,v \rangle} \qquad (2.1)$$

$$\sum_{u \in C} (-1)^{\langle u,v \rangle} = \begin{cases} \sum_{u \in C} (-1)^{\langle u,v \rangle} = |C|, v \in C^{\perp} \\ \sum_{u \in C} (-1)^{\langle u,v \rangle} = 0, v \notin C^{\perp} \end{cases} .$$

Gerçekten, eğer $v \notin C^{\perp}$ ise $f_v : C \to \mathbb{F}_2$, $u \mapsto \langle u,v \rangle$ ile tanımlanan f_v bir grup homomorfizmasıdır. Ayrıca $\text{Çek} f_v = C$ olması için gerek ve yeter koşul $v \in C^{\perp}$ olmasıdır. Bu nedenle $\text{Çek} f_v \neq C$ dir. $C / \text{Çek} f_v \cong \{0,1\}$ olur. Bu ise C nin vektörlerinin tam olarak yarısının $\text{Çek} f_v$ nin içinde olduğunu, diğer vektörlerinin ise $\text{Çek} f_v$ nin içinde olmadığını gösterir.

$(-1)^{\langle u,v\rangle}$, C nin vektörlerinin yarısı ($Çekf_v$ nin içinde olanlar için) 1; Diğer yarısı için -1 dir. Eğer $v \notin C^{\perp}$ ise $\sum_{u\in C}(-1)^{\langle u,v\rangle}=0$ dir.

O halde (2.1) eşitliğini yeniden yazalım:

$$\sum_{u\in C} g(u)=\sum_{u\in C}\sum_{v\in\mathbb{F}_2{}^n}(-1)^{\langle u,v\rangle}\cdot z^{w(v)}=\sum_{v\in\mathbb{F}_2{}^n} z^{w(v)}\cdot\sum_{u\in C}(-1)^{\langle u,v\rangle}=|C|\cdot W_{C^{\perp}(z)}\Rightarrow W_{C^{\perp}(z)}=\frac{1}{|C|}\cdot\sum_{u\in C} g(u)$$

olur.

$$g(u)=\sum_{v\in\mathbb{F}_2{}^n}(-1)^{\langle u,v\rangle}\cdot z^{w(v)}=\sum_{v_1,\dots,v_n\in\mathbb{F}_2}(-1)^{u_1\cdot v_1+\dots+u_n\cdot v_n}\cdot z^{w(v_1)+\dots+w(v_n)}$$

$$=\sum_{v_1,\dots,v_n\in\mathbb{F}_2}\prod_{i=1}^{n}\left((-1)^{u_i\cdot v_i}\cdot z^{w(v_i)}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+(-1)^{u_i}\cdot z\right)=(1-z)^{w(u)}\cdot(1+z)^{n-(w(u))}$$

$$=(1+z)^n\cdot\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{w(u)}$$

$$\Rightarrow W_{C^{\perp}(z)}=\frac{1}{|C|}\cdot\sum_{u\in C}(1+z)^n\cdot\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{w(u)}=\frac{1}{|C|}(1+z)^n\cdot W_C\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$ elde edilir.

BÖLÜM 3

POSET KAVRAMI

Bu bölümde poset adı verilen kısmi sıralı kümeler tanıtılmış, bunlar üzerinde kod kavramından bahsedilmiştir. Ayrıca poset metrik ve buna bağlı olarak poset ağırlık ve poset uzaklık tanımları verilip örneklerle açıklanmıştır.

3.1 Genel Bilgiler

Tanım 3.1 A **,** boş olmayan bir küme olsun. Bir $\beta : A \times A \to A$ bağıntısı

• Yansıma $\left(\forall a \in A \text{ için } a\beta a\right)$

• Ters Simetri $\left(\forall a,b \in A \text{ için } a\beta b \text{ ve } b\beta a \Rightarrow a = b\right)$

• Geçişme $\left(\forall a,b,c \in A \text{ için } a\beta b \text{ ve } b\beta c \text{ ise } a\beta c\right)$

özelliklerini sağlıyorsa β bağıntısına sıralama bağıntısı denir.

Bu bağıntı yardımıyla A kümesinin her elemanı karşılaştırılabiliyorsa β bağıntısına *tam sıralama bağıntısı*; karşılaştırılamayan bazı elemanları varsa β bağıntısına *kısmi sıralama bağıntısı* denir [11].

Tanım 3.2 Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış kümeye kısmi sıralı küme (partially ordered set) ya da poset denir. Genellikle posetler üzerinde sıralama bağıntısı $\leq$ sembolü ile temsil edilir.

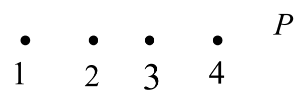
$\{1,2,...,n\}$ elemanları ile oluşturulmuş, $\leq$ bağıntısı ile sıralanmış bir P poseti $P=([n],\leq)$ ile ifade edilir.

Örnek 3.1 $A=\{1,2,3\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\beta : A\times A \to A$ bağıntısı $\beta=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ olsun. Bu durumda $1\neq 2$ için $(1,2)\in\beta$ ve $(2,1)\in\beta$ olduğundan ters simetri özelliği bozulur. Bu nedenle $A=\{1,2,3\}$ kümesi β bağıntısı ile bir poset değildir.

Tanım 3.3 Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine bir *zincir (chain)* denir [11].

Tanım 3.4 Herhangi iki elemanı birbiriyle kıyaslanamayan yani tüm zincirleri 1 boyutlu olan küme bir posettir. Bu posete aşikar (trivial) poset denir ve $P(1,1,...,1)$ ile gösterilir. Ayrıca böyle herhangi iki elemanı kıyaslanamayan posetlere antichain denir [2].

Örnek 3.2 $\{1,2,3,4\}$ elemanları ile aşikar poset (antichain)

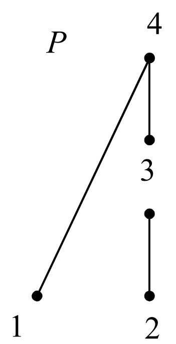


Şekil 3. 1 4 uzunluklu aşikar poset (antichain)

şeklindedir.

Örnek 3.3

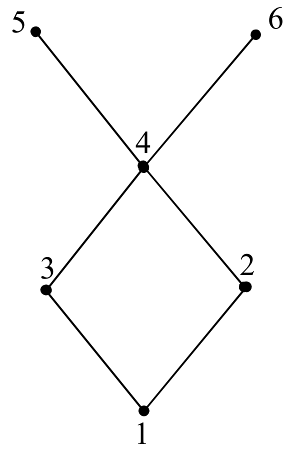
i.



Şekil 3. 2 4 uzunluklu 3 seviyeden oluşan poset

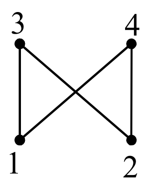
P poseti $\{1,2,3,4\}$ elemanları ile oluşturulmuş 4 tane 1 boyutlu, 4 tane 2 boyutlu, 1 tane 3 boyutlu zincirden oluşan bir posettir.

ii.



Şekil 3. 3 6 eleman, 4 seviyeden oluşan poset

Yandaki poset, $\{1,2,3,4,5,6\}$ elemanları ile oluşturulmuş 6 tane 1 boyutlu, 13 tane 2 boyutlu, 8 tane 3 boyutlu, 4 tane 4 boyutlu zincirden oluşan bir posettir.



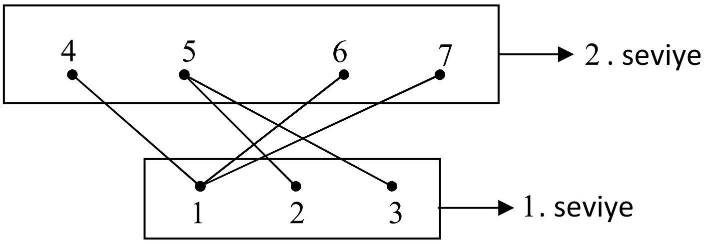
Şekil 3. 4 4 uzunluklu 2 seviyeli poset

poseti $\{1,2,3,4\}$ elemanları ile oluşturulmuş 4 tane 1 boyutlu, 4 tane 2 boyutlu zincirden oluşan bir posettir.

Tanım 3.5 A boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde $P(n_1,n_2,...,n_s)=\{(i,j):1\le i\le s, 1\le j\le n_i\}$ ile sırasıyla $n_1,n_2,...,n_s$ boyutlu s tane farklı $N_1,N_2,...,N_s$ zincirlerinden oluşan poset tanımlı olsun. $I=\{y\in A: y\le x, x\in A\}\subseteq A$ alt kümesine bir *ideal* denir [2].

Tanım 3.6 $A=\{1,2,...,n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir posetin I ideali , I idealindeki elemanlar ile bunların altında olan tüm elemanlardan oluşur.

Örnek 3. 4



Şekil 3. 5 7 elemandan ve 2 seviyeden oluşan poset

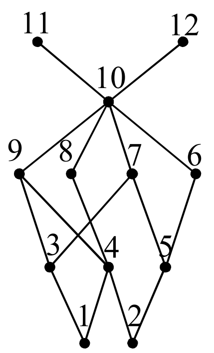
Poseti $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ elemanları ile oluşturulmuş 3 tane 1 boyutlu, 5 tane 2 boyutlu zincirlerden oluşan bir posettir.

Bu posete göre her bir elemanın ürettiği ideal;

$\langle 1\rangle = \{1\}$, $\langle 2\rangle = \{2\}$, $\langle 3\rangle = \{3\}$, $\langle 4\rangle = \{1,4\}$, $\langle 5\rangle = \{2,3,5\}$, $\langle 6\rangle = \{1,6\}$, $\langle 7\rangle = \{1,7\}$ dir.

Tanım 3.7 P, n elemanlı, $\leq$ bağıntısı ile bir poset olsun. Eğer $A \subseteq P$ ise $\langle A\rangle$, A kümesinin ürettiği ideal, A kümesini içeren P nin ideallerinin arakesitidir [2].

Örnek 3.5



Şekil 3. 6 12 uzunluklu 5 seviyeden oluşan poset

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ elemanları ile oluşturulmuş şekildeki posete göre;

$\langle 8\rangle = \{1,2,4,8\}$

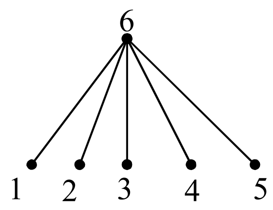
$\langle 5\rangle = \{2,5\}$

olduğundan $\langle\{5,8\}\rangle = \{1,2,4,5,8\}$ dir. Benzer şekilde

$\langle\{7,8,9\}\rangle = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$

$\langle\{11,12\}\rangle = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 3.6



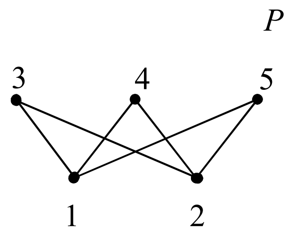
$\{1,2,3,4,5,6\}$ elemanları ile oluşturulmuş yandaki posete göre $\langle\{1,3\}\rangle=\{1,3\}$ ve $\langle\{2,6\}\rangle=\{1,2,3,4,5,6\}$ olur.

Şekil 3. 7 $\{1,2,3,4,5,6\}$ elemanları ile 2 seviyeden oluşan poset

3.2 $P-$ uzaklık ve $P-$ ağırlık

Tanım 3.8 $\mathbb{F}_q^n$ vektör uzayında keyfi bir eleman $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ için bir $P=\{1,2,...,n\}$ posetine göre $P-$ *ağırlık,* $\operatorname{supp}(x)=\{i : x_i\neq 0\}$ olmak üzere $w_P(x)=\left|\langle\operatorname{supp}(x)\rangle\right|$ olarak tanımlanır [2].

Örnek 3.7



Şekil 3. 8 5 eleman ve 2 seviyeden oluşan poset

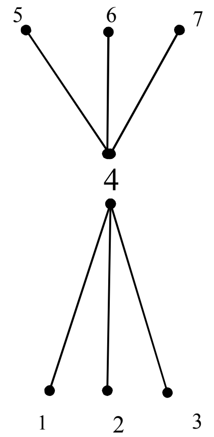
Şekildeki $\{1,2,3,4,5\}$ elemanları ile oluşturulmuş yukarıdaki P posetine göre $x=(1,0,0,0,1)\in F_2^5$ in $P-$ağırlığı; $\operatorname{supp}(x)=\{i : x_i\neq 0\}$ olmak üzere $w_P(x)=\left|\langle\operatorname{supp}(x)\rangle\right|$ olarak hesaplanır. Buna göre, $\operatorname{supp}(x)=\{1,5\}$ olduğundan $\langle\{1,5\}\rangle=\{1,2,5\}$ ve $w_P(x)=3$ dir.

$x=(1,1,0,0,0)\in F_2^5$ ile $y=(0,1,0,1,0)\in F_2^5$ arasındaki $P-$ uzaklığı hesaplayalım: $d_P(x,y)=w_P(x-y)$ olduğundan,

$d_P(x,y)=w_P(x-y)=\left|\langle\sup p(x-y)\rangle\right|=\left|\langle\{1,3,4\}\rangle\right|=\left|\{1,2,3,4\}\right|=4$ bulunur.

Tanım 3.9 $\mathbb{F}_q^n$ vektör uzayında keyfi iki vektör $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere bunlar arasındaki *P-uzaklık*, $d_P(x,y)=w_P(x-y)$ olarak tanımlanır [2].

Örnek 3.8



P_1

Poseti $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ elemanları ile oluşturulmuş 3 tane 1 boyutlu, 6 tane 2 boyutlu, 3 tane 3 boyutlu zincirden oluşan bir posettir.

Bu posete göre her bir elemanın ürettiği ideal;

$\langle 1\rangle=\{1\}$, $\langle 3\rangle=\{3\}$, $\langle 4\rangle=\{1,2,3,4\}$, $\langle 5\rangle=\{1,2,3,4,5\}$, $\langle 6\rangle=\{1,2,3,4,6\}$, $\langle 7\rangle=\{1,2,3,4,7\}$ olarak bulunur.

Şekil 3. 9 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ elemanları ile 3 seviyeden oluşan poset

Bu poset üzerinde bir C kodu $H=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\end{bmatrix}$ kontrol matrisine sahip 7 uzunluklu bir ikili $P-$ kod olsun. Bu durumda;

$$C=\left\{\begin{matrix}0000000,1101000,1010100,0110010,1110001,0111100,1011010,0011001,\\1100110,0100111,1000011,0001110,0010111,0101011,1001101,1111111\end{matrix}\right\}$$

$w_{P_1}(0000000)=0$ $\quad$ $w_{P_1}(1101000)=|\langle\{1,2,4\}\rangle|=|\{1,2,3,4\}|=4$

$w_{P_1}(1010100)=|\{1,2,3,4,5\}|=5$ $\quad$ $w_{P_1}(0110010)=|\{1,2,3,4,6\}|=5$

$w_{P_1}(1110001)=|\{1,2,3,4,7\}|=5$ $\quad$ $w_{P_1}(0111100)=|\{1,2,3,4,5\}|=5$

$w_{P_1}(1011010)=|\{1,2,3,4,6\}|=5$ $\quad$ $w_{P_1}(0011001)=|\{1,2,3,4,7\}|=5$

$w_{P_1}(1100110)=|\{1,2,3,4,5,6\}|=6$ $\quad$ $w_{P_1}(0100111)=|\{1,2,3,4,5,6,7\}|=7$

$w_{P_1}(1000011)=|\{1,2,3,4,6,7\}|=6$ $\quad$ $w_{P_1}(0001110)=|\{1,2,3,4,5,6\}|=6$

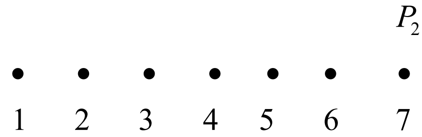
$w_{P_1}(0010111)=|\{1,2,3,4,5,6,7\}|=7$ $\quad$ $w_{P_1}(0101011)=|\{1,2,3,4,6,7\}|=6$

$w_{P_1}(1001101)=|\{1,2,3,4,5,7\}|=6$ $\quad$ $w_{P_1}(1111111)=|\{1,2,3,4,5,6,7\}|=7.$

Buradan $w_{P_1}(C)=4$ ve C lineer olduğundan $d_{P_1}(C)=4$ elde ederiz.

Not 3. 1 Eğer P aşikar poset ise $P-$ *ağırlık ve* $P-$ *uzaklık* sırasıyla Hamming *ağırlık ve Hamming uzaklıktır* [2].

Örnek 3.9



Şekil 3. 10 7 uzunluklu aşikar poset

Örnek 3.8 ‘deki C kodu 7 tane 1 boyutlu zincirden oluşan P_2 aşikar poseti üzerinde inceleyelim. Bu posete göre her bir elemanın ürettiği ideal,

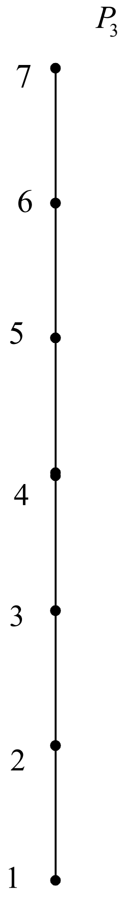
$\langle 1\rangle=\{1\}$, $\langle 2\rangle=\{2\}$, $\langle 3\rangle=\{3\}$, $\langle 4\rangle=\{4\}$, $\langle 5\rangle=\{5\}$, $\langle 6\rangle=\{6\}$, $\langle 7\rangle=\{7\}$ şeklinde bulunur. $\forall u\in C$ için $w_{P_2}(u)$;

$$w_{P_2}(0000000)=0=w_H(00000000)$$
$$w_{P_2}(1101000)=\left|\langle\{1,2,4\}\rangle\right|=\left|\{1,2,4\}\right|=3=w_H(1101000)$$
$$w_{P_2}(1010100)=\left|\{1,3,5\}\right|=3=w_H(1010100)$$
$$w_{P_2}(0110010)=\left|\{2,3,6\}\right|=3=w_H(0110010)$$
$$w_{P_2}(1110001)=\left|\{1,2,3,7\}\right|=4=w_H(1110001)$$
$$w_{P_2}(0111100)=\left|\{2,3,4,5\}\right|=4=w_H(0111100)$$
$$w_{P_2}(1011010)=\left|\{1,3,4,6\}\right|=4=w_H(1011010)$$
$$w_{P_2}(0011001)=\left|\{3,4,7\}\right|=3=w_H(0011001)$$
$$w_{P_2}(1100110)=\left|\{1,2,5,6\}\right|=4=w_H(1100110)$$
$$w_{P_2}(0100111)=\left|\{2,5,6,7\}\right|=4=w_H(0100111)$$
$$w_{P_2}(1000011)=\left|\{1,6,7\}\right|=3=w_H(1000011)$$
$$w_{P_2}(0001110)=\left|\{4,5,6\}\right|=3=w_H(0001110)$$
$$w_{P_2}(0010111)=\left|\{3,5,6,7\}\right|=4=w_H(0010111)$$
$$w_{P_2}(0101011)=\left|\{2,4,6,7\}\right|=4=w_H(0101011)$$
$$w_{P_2}(1001101)=\left|\{1,4,5,7\}\right|=4=w_H(1001101)$$
$$w_{P_2}(1111111)=\left|\{1,2,3,4,5,6,7\}\right|=7=w_H(1111111)$$

olur. Buradan $w_{P_2}(C)=4=w(C)$ ve C lineer olduğundan $d_{P_2}(C)=4=d(C)$ elde edilir.

Not 3. 2 Eğer P , n boyutlu 1 zincirden oluşursa *P-ağırlık* ve *P-uzaklık* sırasıyla *RT (Rosenbloom-Tsfasman)- ağırlık* ve *RT-uzaklıktır.*

Örnek 3.10



Şekil 3. 11 7 uzunluklu tek zincirli poset

Örnek 3.9 daki C kodu 1 tane 7 boyutlu zincirden oluşan P_3 poseti üzerinde incelendiğinde,

$$\langle 1\rangle=\{1\},\langle 2\rangle=\{1,2\},\langle 3\rangle=\{1,2,3\},\langle 4\rangle=\{1,2,3,4\},$$
$$\langle 5\rangle=\{1,2,3,4,5\},\langle 6\rangle=\{1,2,3,4,5,6\},\langle 7\rangle=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

bulunur. $\forall u\in C$ için $w_{P_3}(u)$;

$$w_{P_3}(0000000)=0=w_{RT}(0000000)$$

$$w_{P_3}(1101000)=4=w_{RT}(1101000)$$
$$w_{P_3}(1010100)=5=w_{RT}(1010100)$$

$$w_{P_3}(0110010)=6=w_{RT}(0110010)$$
$$w_{P_3}(1110001)=7=w_{RT}(1110001)$$

$$w_{P_3}(0111100)=5=w_{RT}(0111100)$$
$$w_{P_3}(1011010)=6=w_{RT}(1011010)$$

$$w_{P_3}(0011001)=7=w_{RT}(0011001)$$
$$w_{P_3}(1100110)=6=w_{RT}(1100110)$$

$$w_{P_3}(0100111)=7=w_{RT}(0100111)$$
$$w_{P_3}(1000011)=7=w_{RT}(1000011)$$

$$w_{P_3}(0001110)=6=w_{RT}(0001110)$$
$$w_{P_3}(0010111)=7=w_{RT}(0010111)$$

$$w_{P_3}(0101011)=7=w_{RT}(0101011)$$

$$w_{P_3}(1001101)=7=w_{RT}(1001101)$$

$w_{P_3}(1111111)=7=w_{RT}(1111111)$ dir.

Önerme 3.1 Eğer P , n elemanlı bir poset ise $P-$ *uzaklık* $d_P(.,.)$, $\mathbb{F}_q^n$ üzerinde bir metriktir [2] .

İspat:

i. $\forall x,y\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için $d_P(x,y)=w_P(x-y)=\left|\left\langle \operatorname{supp}(x-y)\right\rangle\right|\geq 0$ olduğundan $d_P(.,.)$ pozitif tanımlıdır.

ii. $\forall x,y\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için $d_P(x,y)=0 \Leftrightarrow w_P(x-y)=0 \Leftrightarrow \left|\left\langle \operatorname{supp}(x-y)\right\rangle\right|=0 \Leftrightarrow (x-y)=0$

$$\Leftrightarrow x=y\,.$$

iii. $\forall x,y\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için $d_P(x,y)=w_P(x-y)=\left|\left\langle \operatorname{supp}(x-y)\right\rangle\right|=\left|\left\langle \operatorname{supp}(y-x)\right\rangle\right|=d_P(y,x)$

olduğundan $d_P(.,.)$ simetriktir.

iv. $\forall x,y,z\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ için

$$\begin{aligned} w_P(x+y)&=\left|\left\langle \operatorname{supp}(x+y)\right\rangle\right|\leq\left|\left\langle \operatorname{supp}(x)\right\rangle\cup\left\langle \operatorname{supp}(y)\right\rangle\right|\leq\left|\left\langle \operatorname{supp}(x)\right\rangle\right|+\left|\left\langle \operatorname{supp}(y)\right\rangle\right| \\ &=w_P(x)+w_P(y)\,. \end{aligned}$$

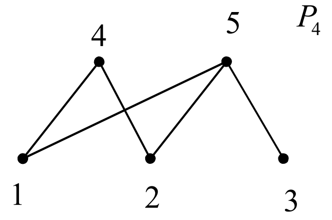
$$d_P(x,y)=w_P(x-y)=w_P(x-y+z-z)\leq w_P(x-z)+w_P(y-z)=d_P(x,z)+d_P(y,z)$$

sağlanır.

Tanım 3.10 $\mathbb{F}_q^{\,n}$ üzerindeki $d_P(.,.)$ metriğine bir *poset-metrik* ; $\mathbb{F}_q^{\,n}$ bir poset-metrik ile verilirse $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin bir C alt kümesine *poset-kod;* C, $\mathbb{F}_q^{\,n}$ nin k boyutlu bir alt uzayı ise C ye bir $[n,k]$ *lineer poset-kod;* C nin farklı kodsözleri arasındaki minimum $P-$ *uzaklık* d_P ise C koduna bir $[n,k,d_P]$ *poset-kod* denir [2].

Tanım 3.11 $x\in\mathbb{F}_q^{\,n}$ keyfi vektörü ile $r\in\mathbb{Z}^+$ alalım. x merkezli , r yarıçaplı $P-$ *küre* $S_P(x;r)=\left\{y\in\mathbb{F}_q^{\,n}:d_P(x,y)\leq r\right\}$ ile tanımlanan x ile aralarındaki $P-$ *uzaklık* en fazla r olan $\mathbb{F}_q^{\,n}$ deki tüm vektörlerin kümesidir [2].

Örnek 3.11



Şekil 3. 12 $\{1,2,3,4,5\}$ elemanları ile 2 seviyeden oluşan poset

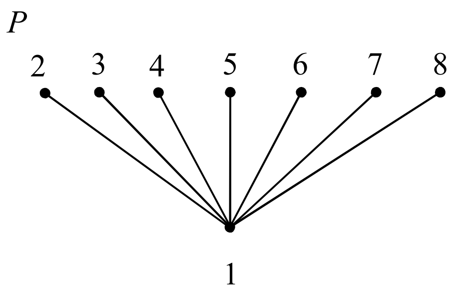
$\{1,2,3,4,5\}$ elemanları ile oluşturulmuş yukarıdaki P_4 posetine göre $C=\{00000,10101,01010,11111\}\subset\mathbb{F}_2^{\,5}$ kodun kodsözlerini merkez kabul eden $r=1$ ve $r=2$ yarıçaplı $P-$ küreler;

$S_{P_4}\left(00000;1\right)=\{00000,10000,01000,00100\}$
$S_{P_4}\left(10101;1\right)=\{10101,00101,11101,10001\}$
$S_{P_4}\left(01010;1\right)=\{01010,11010,00010,01110\}$
$S_{P_4}\left(10101;1\right)=\{10101,00101,11101,10001\}$
$S_{P_4}\left(00000;2\right)=\{00000,10000,01000,00100,11000,10100,01100\}$
$S_{P_4}\left(10101;2\right)=\{10101,00101,11101,10001,01101,00001,11001\}$
$S_{P_4}\left(01010;2\right)=\{01010,11010,00010,01110,10010,11110,00110\}$
$S_{P_4}\left(10101;2\right)=\{10101,00101,11101,10001,01101,00001,11001\}$ dir.

Önerme 3.2 $\mathbb{F}_q^{\,n}$ de sıfır vektöre i uzaklığındaki vektörlerin sayısı, $\Omega_j\left(i\right)$, j tane maksimal (en büyük) elemana sahip i tane elemanı olan kürelerin sayısını göstermek üzere $\begin{cases} 1 & ,i=0 \\ \sum\limits_{j=1}^{i}\left(q-1\right)^j q^{i-j}\Omega_j\left(i\right) & ,i>0 \end{cases}$ olarak hesaplanır [2].

Sonuç 3.1 $d_P\left(x,y\right)=d_P\left(0,y-x\right)$ olduğundan r yarıçaplı bir kürenin eleman sayısı (içine düşen vektör sayısı) $1+\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{i}\left(q-1\right)^j q^{i-j}\Omega_j\left(i\right)$ dir ve kürenin merkezinden bağımsızdır [2].

Örnek 3.12



Şekil 3. 13 8 uzunluklu 2 seviyeli poset

$q=2$, $n=8$ ve P poseti yandaki şekilde verilen poset olsun. C kodu, $[8,4,4]$ parametrelerine sahip $\mathbb{F}_2^8$ üzerinde tanımlı, $[7,4,3]$ parametrelerine sahip Hamming kodun kontrol matrisine birlerden oluşan bir satır eklenmesi ile oluşan matrisi kontrol matris kabul eden ikili kod olsun.

Bu durumda C kodun kontrol matrisi $H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir.

C kodu, posetten bağımsız ikili bir kod olarak düşünüldüğünde A_i, Hamming ağırlığı i olan kodsöz sayısını göstermek üzere, tüm kodsözlerinin Hamming ağırlık dağılımı, $A_0=1$, $A_4=14$ ve $A_8=1$ şeklindedir.

C kodu, şekildeki P poseti üzerinde bir poset kod olarak düşünüldüğünde $A_i(P)$, $P-$ ağırlığı i olan kodsöz sayısını göstermek üzere, tüm kodsözlerinin $P-$ ağırlık dağılımı, $A_0(P)=1$, $A_4(P)=7$, $A_5(P)=7$, $A_8(P)=1$ dir. Bu sonuçlara bakarak $w_P(C)=4$ ve C lineer olduğundan $d_P(C)=4$ olduğu kolaylıkla söylenebilir.

Öte yandan Sonuç 3. 1' den yararlanarak $r=2$ yarıçaplı $P-$küre içine düşecek vektör sayısı $1+1+2\cdot 7=16=|C|$ dir. Bu ise $r=2$ yarıçaplı $P-$kürelerin C kodun kodsözlerinin tamamını (açıkta eleman bırakmayacak şekilde) örtmesi anlamına gelir. Üstelik bu $P-$ küreler ayrıktır. Bunu göstermek için $c'=0$ olsun. Bu durumda C kodun $P-$ağırlığı en az 4 olan bir $c\neq 0$ kodsözü mevcuttur. $d_P(x,c)\leq 2$ ve $d_P(0,x)\leq 2$ olan bir $x\in\mathbb{F}_2^8$ olduğunu varsayalım. O halde $w_P(x)\leq 2$ dir ve genelliği bozmadan $x=(a,b,0,0,0,0,0,0)$, $a,b\in\mathbb{F}_2$ olduğu söylenebilir. Ancak $w_P(c)\geq 4$

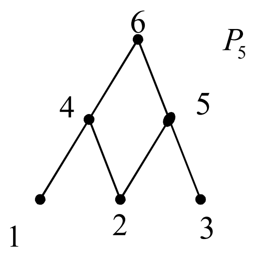
olması c kodsözünün $3,4,...,8$ bileşenlerinden en az ikisinde 1 bulunmasını gerektirir. Bu ise $d_P(c,x) \geq 3$ çelişkisini ortaya çıkarır. Bu nedenle 2 yarıçaplı $P-$küreler ikişer ayrıktır. Her bir kürenin $16 = 2^4$ vektör içerdiği hesaplanmıştı. Toplamda 2^4 kodsözü merkez kabul eden 2^4 tane $P-$ küre mevcut ve bunlar ikişer ayrık olduğundan C kodu verilen P posetine göre $P-$mükemmel koddur [2].

Tanım 3.12 Bir $P = ([n], \leq)$ posetinde $[n] = \mathop{\dot{\bigcup}}\limits_{l=1,2,...,h} H_l$ şeklinde parçalanabiliyorsa ve herhangi $i \in H_{l_i}$, $j \in H_{l_j}$ $(i \neq j)$ için $i \leq j$ iken $l_i \leq l_j$ sağlanıyorsa P posetine hiyerarşik poset denir [10].

Örnek 3.13

i. Örnek 3.8 ‘de verilen P_1 poseti hiyerarşik bir posettir.

ii.



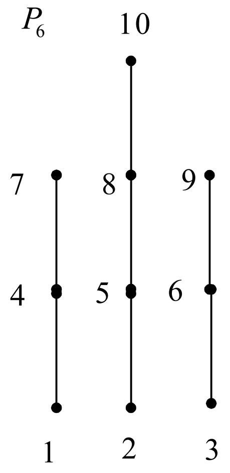
Şekil 3. 14 $\{1,2,3,4,5,6\}$ elemanları ile 3 seviyeli hiyerarşik olmayan poset

Yandaki P_5 poseti hiyerarşik olmayan bir posettir. Bunun nedeni $3-4$ ve $1-5$ elemanları arasında kıyaslamanın olmamasıdır.

Tanım 3.13 Bir $P = ([n], \leq)$ posetinde herhangi i, j, k elemanları için $i \leq j$ ve $k \leq j$ iken $i \leq k$ ya da $k \leq i$ sağlanıyorsa bu posete *ayrık zincirli poset (discrete chain poset)* denir.

Örnek 3.14

Yandaki P_6 poseti 10 uzunluklu 4 seviye ve 3 ayrık zincirden oluşan ayrık zincirli bir posettir.



Şekil 3. 15 10 elemanlı 4 seviyeli ayrık zincirli poset

BÖLÜM 4

POSET METRİĞİNE GÖRE KODLARDA AĞIRLIK SAYAÇLARI

Bu bölümde Bölüm 3' de tanımlanan poset metriğine göre kodlar ağırlık dağılımları bakımından incelenmiştir. Ayrıca dual poset kodların ağırlık dağılımını veren MacWilliams özdeşliğinden bahsedilmiştir.

Tanım 4.1 C bir lineer $P-$kod olsun. $A_i(P)$, $P-$ ağırlığı i olan vektör (kodsöz) sayısını göstermek üzere C nin $P-$ ağırlık polinomu

$W_{C,P}(x)=\sum_{u\in C} x^{w_P(u)}=\sum_{i=0}^{n} A_i(P)\cdot x^i$ şeklinde tanımlanır [5].

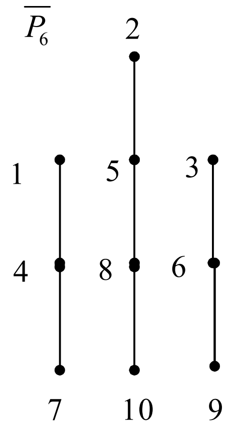
Örnek 4.1 Örnek 3.13 ii 'deki P_5 posetine göre $C_1=\{000000,100101,001011,101110\}$ ve $C_2=\{000000,100001,010110,110111\}$ kodların $P-$ ağırlık polinomları $W_{C_1,P_5}(x)=1+x^5+2x^6=W_{C_2,P_5}(x)$ olarak hesaplanır.

Not 4.1. Aşikar poset (antichain) üzerindeki ağırlık polinomu Hamming metriğine göre tanımlanan ağırlık polinomuna dönüşür.

Örnek 4.2 Örnek 2.24 'de Hamming ağırlık polinomunu hesaplanan $C=\{0000000,1010101,01010101,1111111\}$ kodunun Örnek 3.9 'daki P_2 poseti üzerinde $P-$ağırlık dağılımı, $W_{C,P_2}(x)=1+x^3+x^4+x^7=W_C(x)$ dir.

Tanım 4.2 Her $x,y\in P$, $x\le y$ için $y\le x$ olan posete P posetinin dual poseti denir ve $\overline{P}$ ile gösterilir [5].

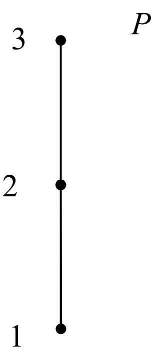
Örnek 4.3



Şekil 4. 1 Şekil 3.14 posetinin dual poseti

Örnek 3.14 ‘deki P_6 posetinde $1 \leq 4 \leq 7$, $2 \leq 5 \leq 8 \leq 10$, $3 \leq 6 \leq 9$ ve diğer elemanlar birbirleriyle kıyaslanamadığından dual posetinde $7 \leq 4 \leq 1$, $10 \leq 8 \leq 5 \leq 2$, $9 \leq 6 \leq 3$ ve diğer elemanlar kıyaslanamaz elemanlardır. O halde $\overline{P_6}$ yandaki şekildeki posettir.

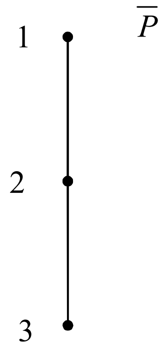
Örnek 4.4



Şekil 4. 2 3 elemanlı tek zincirli poset

Yanda verilen P poseti üzerinde $C_1 = \{000, 001\}$ ve $C_2 = \{000, 111\}$ kodları alınsın. Bu kodlar, $P-$ağırlık polinomları $W_{C_1,P}(x) = 1 + x^3 = W_{C_2,P}(x)$ olarak hesaplandığında aynı olan, birbirinden farklı iki koddur. Bu kodların dual kodları sırasıyla $C_1^{\perp} = \{000, 100, 010, 110\}$ ve $C_2^{\perp} = \{000, 110, 101, 011\}$ dir. Buradan dual kodların $P-$ağırlık polinomları $W_{C_1^{\perp},P}(x) = 1 + x + 2x^2$ ve $W_{C_2^{\perp},P}(x) = 1 + x^2 + 2x^3$ dir.

Dual kodların $P-$ ağırlık dağılımlarını yanda oluşturduğumuz dual posete göre $W_{C_1^{\perp},\overline{P}}(x) = 1 + x^2 + 2x^3 = W_{C_2^{\perp},\overline{P}}(x)$ dir.



Şekil 4. 3 Şekil 4.2 nin dual poseti

Sonuç olarak; birbirinden farklı ağırlık dağılımları aynı olan iki kodun aynı poset üzerinde duallerinin ağırlık dağılımlarının farklı olması o posette MacWilliams özdeşliğinin uygulanamayacağını gösterir. Bu sorun ise dual poset yardımıyla Örnek 4.4' de gösterildiği gibi aşılmaktadır [5].

Önerme 4.1 Bir posetin MacWilliams özdeşliği uygulanabilir olması için gerek ve yeter koşul posetin hiyerarşik olmasıdır [5].

Teorem 4.1 (MacWilliams Özdeşliği) Bir P poseti $P = \mathrm{H}(n : n_1, ..., n_t)$ şeklinde gösterilen n tane eleman ve t tane seviyeden oluşan hiyerarşik poset olsun. Bu P poseti üzerinde lineer bir $C \subseteq \mathbb{F}_q^{\,n}$ $P-$poset kodu için $\widehat{n_i} = n - (n_1 + ... + n_i)$, her $i < 0$ için $n_i = n$ ve

$$f_i = \begin{cases} 0 & ,i = 0 \\ \left(\dfrac{1+(q-1)x}{qx}\right)^{n-\widehat{n_i}} \cdot (1-x)^{\widehat{n_{i-1}}} \cdot z_i & ,i \geq 1 \end{cases}$$

$$g_j = \begin{cases} \sum\limits_{i=j}^{t-1} (qx)^{\widehat{n_{i-1}}} \cdot \left(1+(q-1)x\right)^{n_{i-1}} \cdot z_{i+1} & ,0 \leq j \leq t-1 \\ 0 & ,j = t \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} \sum\limits_{i=j}^{t} (qx)^{\widehat{n_i}} \cdot z_i, 1 \leq j \leq t \\ \sum\limits_{i=1}^{t} (qx)^{\widehat{n_i}} \cdot z_i, \, j = 0 \end{cases}$$

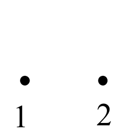
olmak üzere her $u = (u_1, ..., u_t) \in \mathbb{F}_q^{\,t}$ için $s_P(u) = \max\{i \mid u_i \neq 0\}$ ve $s_P(0) = 0$ olarak tanımlanan $s_P(0) = 0$ ve $Q(x) = \dfrac{1-x}{1+(q-1)x}$ ile

$$W_{C^{\perp},\overline{P}}(x : z_{t+1}, ..., z_1) = \frac{1}{|C|} \sum_{u \in C} \widetilde{f}(u) = z_{t+1} + \frac{1}{|C|} \left(\left(\frac{qx}{1-x}\right)^n W_{C,P}\left(Q(x) : f_0, ..., f_t\right) \right.$$
$$\left. + W_{C,P}(1 : g_0, ..., g_t) - W_{C,P}(1 : h_0, ..., h_t) \right)$$

dir [5] .

Burada $W_{C,P}(x : y_0, ..., y_t) = \sum\limits_{u \in C} x^{w_P(u)} \cdot y_{s_P(u)}$ şeklinde tanımlıdır.

Örnek 4.5 $C=\{00,10\}\subseteq\mathbb{F}_2^{\,2}$ kodun



Şekil 4. 4 1 seviyeli hiyerarşik poset

poseti üzerinde poset ağırlık dağılımı $W_{C,P}(x)=1+x$ dir. $z_1=z_2=1$ alalım. $n=2$ ve $t=1$ olduğundan $n_0=0,\ \widehat{n_0}=2$, $n_1=2,\ \widehat{n_1}=0$ olur. Her $i<0$ için $n_i=2=n,\ \widehat{n_i}=0$ kabul edelim. Bu durumda

$$f_i=\begin{cases}0 & ,i=0\\ \left(\dfrac{1+x}{2x}\right)^{2-\widehat{n_i}}\cdot(1-x)^{\widehat{n_{i-1}}} & ,i\geq 1\end{cases}$$ olduğundan $f_0=0,\ f_1=\dfrac{(1+x)^2(1-x)^2}{4x^2}$ bulunur.

$$g_j=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=j}^{0}(2x)^{\widehat{n_{i-1}}}\cdot(1+x)^{n_{i-1}} & ,j=0\\ 0 & ,j=1\end{cases}$$ olduğundan $g_0=(1+x)^2$, $g_1=0$ bulunur.

$$h_j=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=j}^{1}(2x)^{\widehat{n_i}}, & j=1\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{1}(2x)^{\widehat{n_i}}, & j=0\end{cases}$$ olduğundan $h_0=1=h_1$ bulunur.

$$W_{C,P}\left(\frac{1-x}{1+x}:f_0,f_1\right)=\sum_{u\in C}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{w_P(u)}\cdot f_{s_P(u)}=0+\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+x)(1-x)^3}{x^2}\ ,$$

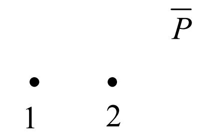
$$W_{C,P}(1:g_0,g_1)=\sum_{u\in C}1^{w_P(u)}\cdot g_{s_P(u)}=(1+x)^2+0 \quad \text{ve} \quad W_{C,P}(1:h_0,h_1)=\sum_{u\in C}1^{w_P(u)}\cdot h_{s_P(u)}=1+1$$

olarak hesaplanır. Buna göre;

$$W_{C^{\perp},\overline{P}}(x:1,1)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{4x^2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1+x)(1-x)^3}{4x^2}+(1+x)^2-2\right)=1+\frac{1}{2}\left(1-x^2+1+2x+x^2-2\right)=1+x$$

olur.

Gerçekten,



Şekil 4. 5 Şekil 4.4 posetinin dual poseti

Dual poseti üzerinde $C^{\perp}=\{00,01\}\subseteq \mathbb{F}_2^{\,2}$ dual kodun poset ağırlık sayacı $W_{C^{\perp},\overline{P}}(x)=1+x$ dir.

BÖLÜM 5

P - TAM AĞIRLIK SAYACI ve MacWILLIAMS ÖZDEŞLİĞİ

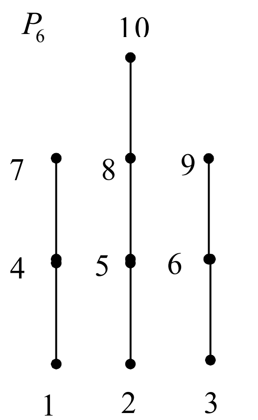
Bu bölümde seviyeler yardımıyla posetlerin özel bir alt ailesi olan ayrık zincirli posetler üzerinde tanımlanan ve $P-$ tam ağırlık sayacı adını verdiğimiz ağırlık sayacı tanıtılmıştır. Ayrıca bu ağırlık sayacına paralel olarak MacWilliams özdeşliği ispatlanmıştır.

Bu bölümde tüm posetler aksi belirtilmedikçe ayrık zincirli poset olarak alınmıştır.

Tanım 5.1 C, $[n,k,d]$ parametrelerine sahip, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan bir P poseti üzerinde ikili bir poset-kod olsun. $u_j^{(i)}$, C kodun i. kodsözünün j. seviyedeki parçasıdır.

Genelliği bozmadan posetlerde seviye sırasına göre bileşenlerin sıralandığı kabul edilecektir.

Örnek 5.1 $C=\{0000000000,1010101010,0101010101,1111111111\}$ kodun



poseti üzerinde $u^{(1)}=1010101010$ olmak üzere $u_1^{(1)}=101$, $u_2^{(1)}=010$, $u_3^{(1)}=101$ ve $u_4^{(1)}=0$ şeklindedir.

Tanım 5.2 C, $\mathbb{Z}_2^n$ üzerinde, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan P poseti ile bir lineer poset-kod olsun. C kodunun $P-$ tam ağırlık sayacı,

$$W_C\left(z_1,z_2,\dots,z_s\right)=\sum_{u\in C}\prod_{i=1}^{s} z_i^{w_H(u_i)}=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s} z_i^{w_H\left(u_j^{(i)}\right)}$$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 5.1 C, $\left[n,k,d\right]$ parametrelerine sahip, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan bir P poseti üzerinde ikili bir poset-kod olsun. C nin kodsözleri $u^{(i)}$ ile gösterilsin.

$u_i^{(i)}$: $u^{(i)}$ kodsözünün i. seviyedeki parçasını,

v_i: $v\in\mathbb{Z}_2^n$ nin i. seviyedeki parçasını,

$n_{u_i^{(i)}}$: $u^{(i)}$ kodsözünün i. seviyedeki parçasının uzunluğunu

göstermek üzere;

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{\langle u,v\rangle}\cdot z_i^{w_H(v_i)}=\begin{cases}\left(1+z_i\right)^{n_{u_i^{(i)}}}\cdot\left(1-z_i\right)^0, & w_H\left(u_i^{(i)}\right)=0\\ \left(1+z_i\right)^{n_{u_i^{(i)}}-1}\cdot\left(1-z_i\right)^1, & w_H\left(u_i^{(i)}\right)=1\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \left(1+z_i\right)^0\cdot\left(1-z_i\right)^{n_{u_i^{(i)}}}, & w_H\left(u_i^{(i)}\right)=n_{u_i^{(i)}}\end{cases}$$

dir.

Teorem 5.1 ($P-$ Tam Ağırlık Sayacına Göre Mac Williams Özdeşliği)

C, $\mathbb{F}_2^n$ üzerinde, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan P poseti ile bir lineer $P-$kod olsun. $W_C\left(z_1,z_2,\dots,z_s\right)$ ile C kodun ve $W_{C^\perp}\left(z_1,z_2,\dots,z_s\right)$ ile $C^\perp$ kodun $P-$ tam ağırlık sayaçlarını gösterelim. Bu durumda

$$W_{C^\perp}\left(z_1,z_2,\dots,z_s\right)=\frac{1}{|C|}\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(1+z_i\right)^{n_i}\cdot W_C\left(\frac{1-z_1}{1+z_1},\frac{1-z_2}{1+z_2},\dots,\frac{1-z_s}{1+z_s}\right)$$ dir.

İspat

Önerme 2.12 kullanılarak

$f(v) = z_1^{w(v_1)} \cdot z_2^{w(v_2)} \cdot \ldots \cdot z_s^{w(v_s)} = \prod_{i=1}^{s} z_i^{w(v_i)}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda Önerme 2.11 ve Önerme 5.1 ile

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{f}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot f(v) \Rightarrow \widetilde{f}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot \prod_{i=1}^{s} z_i^{w(v_i)} \\
&\Rightarrow \tilde{f}(u) = \sum_{v_1 \in \mathbb{Z}_2^{\,n_1}} \ldots \sum_{v_s \in \mathbb{Z}_2^{\,n_s}} \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} (u_{ij} v_{ij})} \cdot \prod_{i=1}^{s} z_i^{w_H(v_i)} \\
&= \sum_{v_1 \in \mathbb{Z}_2^{\,n_1}} \ldots \sum_{v_s \in \mathbb{Z}_2^{\,n_s}} \prod_{i=1}^{s} (-1)^{\sum_{j=1}^{n_i} (u_{ij} v_{ij})} \cdot z_i^{w_H(v_i)} \\
&= \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{v_i \in \mathbb{Z}_2^{\,n_i}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n_i} (u_{ij} v_{ij})} \cdot z_i^{w_H(v_i)} \right) = \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^n \cdot \left(\frac{1-z_i}{1+z_i} \right)^{w_H(u_i)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Tekrar, Önerme 2.12 ‘den

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u \in C^{\perp}} f(u) = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{u \in C} \tilde{f}(u) = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{u \in C} \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^n \cdot \left(\frac{1-z_i}{1+z_i} \right)^{w_H(u_i)} \\
&\Rightarrow W_{C^{\perp}}(z_i) = \frac{1}{|C|} \cdot \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^{n_i} \cdot W_C \left(\frac{1-z_i}{1+z_i} \right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 5.2

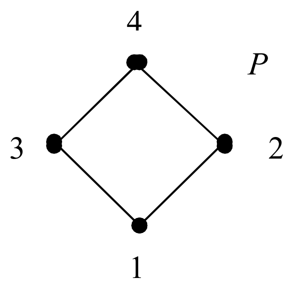
Şekil 3.15 ‘deki P_6 poseti üzerinde

$C = \{0000000000, 1010101010, 0101010101, 1111111111\}$ kodun $P-$tam ağırlık sayacı $W_C(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1 + z_1^{\,2} z_2 z_3^{\,2} + z_1 z_2^{\,2} z_3 z_4 + z_1^{\,3} z_2^{\,3} z_3^{\,3} z_4$ dir. Buna göre $C^{\perp}$ dual kodun ağırlık sayacı, teorem uygulandığında;

$$
\begin{aligned}
W_{C^{\perp}}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= 1 + 2z_1^{\,3} z_2^{\,3} z_3^{\,2} + 2z_4 z_1^{\,3} z_2^{\,3} z_3 + z_1^{\,3} z_2^{\,2} z_3^{\,3} + 5z_4 z_1^{\,3} z_2^{\,2} z_3^{\,2} + 5z_1^{\,3} z_2^{\,2} z_3 + z_4 z_1^{\,3} z_2^{\,2} \\
&+ 2z_4 z_1^{\,3} z_2 z_3^{\,2} + 4z_1^{\,3} z_2 z_3^{\,2} + 4z_4 z_1^{\,3} z_2 z_3 + 2z_1^{\,3} z_2 + z_1^{\,3} z_2^{\,3} + z_4 z_1^{\,3} z_3^{\,2} + z_1^{\,3} z_3 + z_4 z_1^{\,3} + 2z_1^{\,2} z_2^{\,3} z_3^{\,3} \\
&+ 4z_1^{\,2} z_2^{\,3} z_3 + 2z_4 z_1^{\,2} z_2^{\,3} + 4z_4 z_1^{\,2} z_2^{\,3} z_3^{\,2} + 13z_1^{\,2} z_2^{\,2} z_3^{\,2} + 13z_4 z_1^{\,2} z_2^{\,2} z_3 + 5z_4 z_1^{\,2} z_2^{\,2} z_3^{\,3} + 4z_1^{\,2} z_2 z_3^{\,3} \\
&+ 14z_4 z_1^{\,2} z_2 z_3^{\,2} + 5z_1^{\,2} z_2^{\,2} + 4z_1 z_2 + z_1 z_3^{\,3} + 5z_4 z_1 z_3^{\,2} + 14z_1^{\,2} z_2 z_3 + 2z_4 z_2^{\,3} z_3^{\,2} + 2z_2^{\,3} z_3 + z_4 z_2^{\,2} z_3^{\,3} \\
&+ 5z_1 z_3 + z_4 z_1 + 5z_2^{\,2} z_3^{\,3} + z_2^{\,2} + 2z_2 z_3^{\,3} + 4z_4 z_2 z_3^{\,2} + 4z_2 z_3 + 2z_4 z_2 + z_4 z_3^{\,3} + z_3^{\,2} + z_4 z_3
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.3 $C = \{0000, 1010, 0101, 1111\} = C^{\perp} \subseteq \mathbb{F}_2^{\,4}$ kendine dual, lineer $P-$kodun ağırlık dağılımını



Şekil 5. 1 4 eleman ve 3 seviyeden oluşan hiyerarşik poset

şeklinde verilen 4 uzunluklu 3 seviyeden oluşan hiyerarşik P poseti üzerinde inceleyelim.

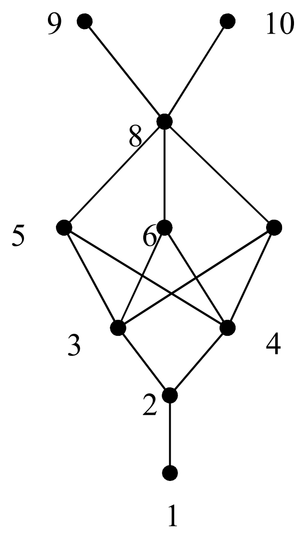
$W_C(z_1,z_2,z_3) = 1 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_2^{\,2}z_3$ dir.

$$W_{C^{\perp}}(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{4}\cdot\prod_{i=1}^{3}(1+z_i)^{n_i}\cdot W_C\left(\frac{1-z_1}{1+z_1},\frac{1-z_2}{1+z_2},\frac{1-z_3}{1+z_3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1+z_1)(1+z_2)^2(1+z_3)\left[1+\frac{1-z_1}{1+z_1}\cdot\frac{1-z_2}{1+z_2}+\frac{1-z_2}{1+z_2}\cdot\frac{1-z_3}{1+z_3}+\frac{1-z_1}{1+z_1}\cdot\left(\frac{1-z_2}{1+z_2}\right)^2\cdot\frac{1-z_3}{1+z_3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 + 4z_1z_2 + 4z_2z_3 + 4z_1z_2^{\,2}z_3\right) = 1 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_2^{\,2}z_3 .$$

Örnek 5.4



Şekil 5. 2 10 uzunluklu 6 seviyeli hiyerarşik poset

$C=\left\{\begin{matrix} 0000000000,1010101010, \\ 0101010101,1111111111 \end{matrix}\right\}\subseteq \mathbb{F}_2^{10}$ ikili lineer $P-$kodun $P-$tam ağırlık polinomu yukarıda verilen hiyerarşik poset üzerinde

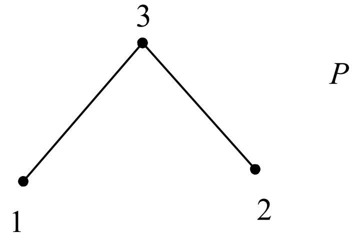
$$W_C\left(z_1,...,z_6\right)=1+z_1z_3{z_4}^2z_6+z_2z_3z_4z_5z_6+z_1z_2{z_3}^2{z_4}^3z_5{z_6}^2$$

olduğundan $C^{\perp}$ dual kodun ağırlık dağılımını MacWilliams özdeşliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
W_{C^{\perp}}\left(z_1,...,z_6\right)&=\frac{1}{4}\left(1+z_1\right)\left(1+z_2\right)\left(1+z_3\right)^2\left(1+z_4\right)^3\left(1+z_5\right)\left(1+z_6\right)^2 \\
&=1+z_1z_3+z_2z_3+z_1z_2z_3^2+2z_1z_4+z_2z_4+3z_3z_4+3z_1z_2z_3z_4+z_1z_3^2z_4+2z_2z_3^2z_4 \\
&+2z_1z_2z_4^2+3z_1z_3z_4^2+3z_2z_3z_4^2+2z_3^2z_4^2+z_1z_2z_3^2z_4^2+z_2z_4^3+z_3z_4^3+z_1z_2z_3z_4^3 \\
&+z_2z_5+z_3z_5+z_1z_2z_3z_5+z_1z_3^2z_5+z_4z_5+2z_1z_2z_4z_5+3z_1z_3z_4z_5+3z_2z_3z_4z_5 \\
&+z_1z_2z_3^2z_4z_5+2z_1z_4^2z_5+z_2z_4^2z_5+3z_3z_4^2z_5+3z_1z_2z_3z_4^2z_5+z_1z_3^2z_4^2z_5+2z_2z_3^2z_4^2z_5 \\
&+z_1z_3z_4^3z_5+z_2z_3z_4^3z_5+z_1z_2z_3^2z_4^3z_5+z_1z_6+z_2z_6+2z_3z_6+2z_1z_2z_3z_6+z_4^2 \\
&+z_1z_3^2z_6+z_2z_3^2z_6+3z_4z_6+3z_1z_2z_4z_6+6z_1z_3z_4z_6+6z_2z_3z_4z_6+3z_3^2z_4z_6 \\
&+3z_1z_2z_3^2z_4z_6+3z_1z_4^2z_6+3z_2z_4^2z_6+6z_3z_4^2z_6+6z_1z_2z_3z_4^2z_6+3z_1z_3^2z_4^2z_6 \\
&+3z_2z_3^2z_4^2z_6+z_4^3z_6+z_1z_2z_4^3z_6+2z_1z_3z_4^3z_6+2z_2z_3z_4^3z_6+z_3^2z_4^3z_6+z_1z_2z_3^2z_4^3z_6 \\
&+z_1z_2z_3^2z_5z_6+3z_1z_4z_5z_6+3z_2z_4z_5z_6+6z_3z_4z_5z_6+6z_1z_2z_3z_4z_5z_6+3z_3^2z_4^2z_5z_6 \\
&+3z_1z_2z_3^2z_4^2z_5z_6+3z_2z_3^2z_4z_5z_6+3z_4^2z_5z_6+3z_1z_2z_4^2z_5z_6+6z_1z_3z_4^2z_5z_6+z_5z_6 \\
&+6z_2z_3z_4^2z_5z_6+z_1z_2z_6^2+z_1z_3z_6^2+2z_4^2z_6^2+z_1z_4^3z_5z_6+z_2z_4^3z_5z_6+2z_3z_4^3z_5z_6 \\
&+2z_1z_2z_3z_4^3z_5z_6+z_1z_3^2z_4^3z_5z_6+z_2z_3^2z_4^3z_5z_6+z_1z_2z_3z_4^3z_6^2+z_2z_3z_6^2+z_3^2z_6^2 \\
&+z_1z_4z_6^2+2z_2z_4z_6^2+3z_3z_4z_6^2+3z_1z_2z_3z_4z_6^2+2z_1z_3^2z_4z_6^2+z_2z_3^2z_4z_6^2+z_3^2z_4^2z_6^2 \\
&+z_1z_2z_4^2z_6^2+3z_1z_3z_4^2z_6^2+3z_2z_3z_4^2z_6^2+2z_1z_2z_3^2z_4^2z_6^2+z_1z_4^3z_6^2+z_3z_4^3z_6^2+z_4^3z_5 \\
&+3z_1z_2z_3z_4^2z_5z_6^2+z_2z_3^2z_4^3z_6^2+z_1z_5z_6^2+z_1z_2z_3z_5z_6^2+z_2z_3^2z_5z_6^2+2z_4z_5z_6^2 \\
&+z_1z_2z_4z_5z_6^2+3z_1z_3z_4z_5z_6^2+z_2z_3z_4^3z_5z_6^2+3z_2z_3z_4z_5z_6^2+z_3^2z_4z_5z_6^2+z_3^2z_4^3z_5z_6^2 \\
&+2z_1z_2z_3^2z_4z_5z_6^2+z_1z_4^2z_5z_6^2+2z_2z_4^2z_5z_6^2+3z_3z_4^2z_5z_6^2+z_3z_5z_6^2+z_1z_2z_5z_6 \\
&+2z_1z_3z_5z_6+2z_1z_3^2z_4^2z_5z_6^2+z_2z_3^2z_4^2z_5z_6^2+z_1z_2z_4^3z_5z_6^2+z_1z_3z_4^3z_5z_6^2+2z_2z_3z_5z_6 \\
&+z_3^2z_5z_6+3z_1z_3^2z_4z_5z_6+z_1z_3^2z_4^3+2z_3^2z_4z_5
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.5



Şekil 5. 3 3 eleman ve 2 seviyeden oluşan poset

2 seviyeden oluşan P poseti üzerindeki $C_1 = \{000, 101\}, C_2 = \{000, 011\}$ lineer ikili P kodlarını incelendiğinde, bu kodların birbirlerinden farklı ancak P tam ağırlık dağılımları $W_{C_1}(z_1, z_2) = 1 + z_1 z_2 = W_{C_2}(z_1, z_2)$ aynı olduğu görülür. Bu kodların dual kodları sırasıyla $C_1^{\perp} = \{000, 010, 101, 111\}, C_2^{\perp} = \{000, 100, 011, 111\}$ dir. Bunların $P-$ tam ağırlık dağılımları ise $W_{C_1^{\perp}}(z_1, z_2) = 1 + z_1 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2 = W_{C_2^{\perp}}(z_1, z_2)$ olduğundan aynıdır.

BÖLÜM 6

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde özel bir poset şekli olan ayrık zincirli posetler tanıtılarak MacWilliams özdeşliği yalnızca bu posetler için ispatlanmıştır. Ayrık zincirli posetler kullanılmasının nedeni her elemanın seviye numarasının, o elemanın ürettiği idealdeki eleman sayısına eşit olmasıdır. Böylece elemanların seviyeleri ile poset ağırlıkları kontrol edilebilmiştir.

Tanımlanan $P-$ tam ağırlık sayacının genelleştirilerek, dual posete ihtiyaç duyulmadan hesaplanabilen MacWilliams özdeşliğinin tüm posetler üzerinde geçerli hale getirilmesi çözüm bekleyen bir problemdir.

KAYNAKLAR

[1] Niederreiter H., (1987), “Point Sets and Sequences with Small Discrepancy”, Monaths. Math. 104:273-337.

[2] Brualdi R. A., Graves J. and Lawrence K. M., (1995), “ Codes with a poset metric”, Disc. Math. ,147: 57-72.

[3] Kim H. K. , Kim J. S. , Ahn J., Kim M., (2003), “Classification of Perfect Linear Codes with Crown Poset Structure” Department of Mathematics, 268: 21-30

[4] Jang Y., Park J., (2003), “On a MacWillimas Type İdentity and a Perfectness for a Binary Linear (n,n-1,j)-Poset Code”, Discrete Mathematics, 265:85-104

[5] Kim H. K. and Oh D. Y., (2005), “A Classification of Posets Admitting the MacWilliams Identity”, IEEE, 51:1424-1431.

[6] Ling S. and Xing C, (2004), Coding Theory A First Course, National University of Singapore, Cambridge University Press.

[7] Huffman W. C. and Pless V., (2003), Fundamentals of Error-Correcting Codes, Cambridge University Press.

[8] Ozen M. ve Şiap İ., (2004), “On The Structure and Decoding of Linear Codes with Respect to the Rosenbloom-Tsfasman Metric”, Selcuk Journal of Applied Mathematics, 5:25-31, Konya.

[9] MacWilliams F. J. and Sloane N. J., (1977), The Theory of Error- Correcting Codes. Amsterdam, The Netherlands: North- Holland.

[10] Firer M., Panek L. and Rifo L., (17 Aug 2011), “ Coding in the Presence of Semantic Value of Information: Unequal Error Protection Using Poset Decoders” arXiv: 1102.3832v1 [cs.IT].

[11] Turunen E., (1999), ”Mathematics behind Fuzzy Logic. Advances in Soft Computing”, Physica-Verlag, Heidelberg 1-11.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Seda Akbıyık

Doğum Tarihi ve Yeri :10/09/1989, İstanbul

Yabancı Dili: :İngilizce

E-posta: :akbiyiks@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	2009
Lise	Fen Bilimleri	Şişli Ahmet Buhan Lisesi	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2010- 2011	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011- …	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi