

67758

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAZ TÜRBİNİ KANATLARINDA
TİTREŞİMLERİN İNCELENMESİ

Mak. Müh. Cihan DEMİR

F.B.E. Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Enerji Makinaları Programında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Enerji Makinaları Programı

Tez Danışmanı

: Prof. Ertuğrul KÜÇÜKKARAMIKLI

Prof. Nezihi TAHRALI

Prof. Dr. Bahri SAHİN

Ertuğrul Küçükaramıklı
N. Tahrallı
Bahri Sahin

İSTANBUL , 1997

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	VII
ÖZET	VIII
ABSTRACT	X
1. GİRİŞ	1
2. GAZ TÜRBİNLERİNDE TİTREŞİMLER	2
2.1 Gaz Türbinlerinde Titreşim Sebepleri	3
2.1.1 İç Sebepler	3
2.1.2. Dış Sebepler	4
2.2 Titreşim Kontrolü	4
2.3 Titreşimlerin Kanatlara Göre Durumu	5
2.4 İyi Bir Kanat Dizyni İçin Gerekli Adımlar	6
2.5 Türbin Kanatları Titreşimlerinde Kullanılan Analiz Yöntemleri	6
3. SONLU ELEMAN İFADELERİNİN GELİŞTİRİLMESİ İÇİN GEREKLİ İFA DELERİN ÇIKARILMASI	7
3.1 Merkezkaç Kuvvetinin Bulunuşu	9
3.2. Eşdeğer Dikdörtgen Kesit Hesabı	11
3.3. Kanadın Dinamik Analizi	13
4. RİJİTLİK MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ	16
4.1. Boyuna Yer Değişimi Etkisi	16
4.1.1. Koordinatlar ve Şekil Fonksiyonları	18
4.1.2. Potansiyel Enerji Yaklaşımı	20
4.2 Eğilme Rijitliği	22

4.2.1	Potansiyel Enerji Yaklaşımı	22
4.2.2	Sonlu Eleman Formülasyonu	23
4.3.	Dönme Hızı Etkisi	28
4.4.	Sıcaklık Farkı Etkileri	35
4.4.1	İki Yüzey Arasındaki Sıcaklık Farkı Etkisi	35
4.4.2.	Kanat Boyunca Sıcaklık Farkı Etkisi	41
4.5	Kanat Konum Açısı Etkisi	42
5.	KÜTLE MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ	44
5.1.	Boyuna Titreşimden Oluşan Kütle Matrisi	44
5.2.	Eğilmeden Dolayı Meydana Gelen Kütle Matrisi	45
5.3	Kesit Dönmesinden Meydana Gelen Kütle matrisi	46
6.	TOPLAM MATRİSLERİN ELDE EDİLMESİ	48
6.1.	Toplam Rijitlik Matrislerinin Elde Edilmesi	48
6.1.1.	Eleman Rijitlik Matrislerinin Toplanması	48
6.1.2.	Sistem İçin Rijitlik Matrisi	50
6.2.	Toplam Kütle Matrislerinin Elde Edilmesi	51
6.2.1.	Eleman Kütle Matrislerinin Toplanması	51
6.2.2.	Sistem İçin Kütle Matrislerinin Toplanması	51
7.	SAYISAL SONUÇLAR	52
7.1.	Eğilme Titreşimleri	52
7.2	Boyuna Titreşimler	60
7.3.	Sonuçların İrdelenmesi	63

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

SEMBOLLER

A	: Kesit alanı
b	: Çubuğun genişliği
h	: Çubuğun kalınlığı
E	: Elastiklik modülü
$F_Y, F_y, F_X, F_x, F_Z, F_z$: Koordinat eksenleri boyunca etkili kuvvetler
H	: Şekil fonksiyonu
I	: Kesit atalet momenti
l	: Sonlu eleman uzunluğu
L	: Kanat uzunluğu
[K]	: Rijitlik matrisi
[M]	: Kütle matrisi
m	: Toplam eleman sayısı
n	: Eleman sayısı
r	: Disk yarı çapı
v	: eleman hacmi
V	: Eğilme yer değiştirmesi
X, Y, Z	: Merkezden geçen eksen takımı
U, W, V	: Yer değiştirmeler
x1	: 1.mod şekli
x2	: 2.mod şekli
x3	: 3.mod şekli
A_s	: Aerofil kesit alanı
k^e	: Bir eleman için rijitlik matrisi
m^e	: Bir eleman için kütle matrisi
$()'$: x ve y 'ye göre türev
$(\dot{})$: zamana göre türev

ρ	: Yoğunluk
θ	: Konum açısı
Ω	: Dönme hızı
ζ	: Koordinat dönüşüm eksenini
λ	: Frekans parametresi
σ_x, σ_s	: Eğilme ve sıcaklık gerilmeleri



ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil. 2.1. Kanat durumlarının gösterilmesi
- Şekil. 2.2. Campell diyagramı
- Şekil. 2.3. Gaz Dinamiği Sönümlemesi
- Şekil. 3.1. Aerofil kesitli kanatın disk üzerinde gösterilişi
- Şekil. 3.2. Dikdörtgen eşdeğer kesitli çubuğun disk üzerinde gösterilişi
- Şekil. 3.3. Dikdörtgen eşdeğer kesitli çubuğun önden eksen takımı üzerinde gösterilmesi
- Şekil. 3.4. z ekseni boyunca yer değiştirmenin bileşenlerinin gösterilmesi
- Şekil. 3.5. Eğilme sonrası kanat üzerindeki kuvvet bileşenleri
- Şekil. 4.1. Koordinatların gösterimi
- Şekil. 4.2. Bir elemandaki deplasman alanının lineer enterepolasyonu
- Şekil. 4.3. Şekil fonksiyonu
- Şekil. 4.4. Lineer enterepolasyon
- Şekil. 4.5. Sonlu eleman bölünmesi
- Şekil. 4.6. Kübik şekil fonksiyonları
- Şekil. 4.7. Sonlu çubuk eleman
- Şekil. 4.8. Elemanın koordinat dönüşümünün gösterilmesi
- Şekil. 4.9. Çubuk üzerinde sıcaklık değişiminin gösterilmesi
- Şekil. 4.10. Kanat sıcaklık izoterm eğrileri
- Şekil. 5.1. Çubuk eğilme elemanı
- Şekil. 6.1. Eğilme elemanın lokal koordinatlarda gösterilmesi
- Şekil. 6.2. Çubuk elemanın global koordinatlarda gösterilmesi
- Şekil. 6.3. Boyuna yer değişiminin lokal koordinatlarda gösterilmesi
- Şekil. 6.4. Boyuna yer değişiminin global koordinatlarda gösterilmesi
- Şekil. 7.1. Mod Şekilleri
- Şekil. 7.2. Mod Şekilleri
- Şekil. 7.3. Mod Şekilleri
- Şekil. 7.4. Mod Şekilleri
- Şekil. 7.5. Mod Şekilleri

TABLULAR LİSTESİ

- Tablo. 4.1. Sınır koşulları
- Tablo. 6.1. Numaralandırma
- Tablo 7.1 Çeşitli σ_t değerleri için frekans parametreleri
- Tablo 7.2 θ 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri
- Tablo 7.3 Ω 'nın çeşitil değerleri için frekans değerleri
- Tablo 7.4 θ 'nın değerleri için frekans değerleri
- Tablo 7.5 Ω 'nın çeşitil değerleri için frekans değerleri
- Tablo 7.6 σ_t 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri
- Tablo 7.7 Boyuna Titreşim ve sabit-serbest sınır koşulu için frekans değerleri
- Tablo 7.8 Boyuna Titreşim ve sabit-sabit sınır koşulu için frekans değerleri

ÖZET

Bu çalışmada dönen rijit bir diske bağlı olan arofil kesitli bir kanatın titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Bu incelemede analitik yöntem olarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla hazırlanan tez toplam olarak yedi bölümden oluşmaktadır.

Bölüm 1’de , konu tanıtılmakta konu hakkında kısa bir giriş vardır.

Bölüm 2’de , gaz türbini kanatlarında titreşim sebepleri ve iyi bir kanat dizaynı için gerekli adımlar anlatılmaktadır.

Bölüm 3’de , Lagrange yöntemi kullanılarak kanadın hareket denklemi elde edilmiştir. Kanadın arofil kesitini dikdörtgen kesite eşdeğer yapacak formüller kullanılarak dikdörtgen kesitli bir çubuk olarak analizler yapılmaktadır. Çubuk onbeş elemana bölünmekte , iki düğüm noktasına sahip olan her eleman , sadece bir düğüm noktasında boyuna ve eğilme titreşimleri için üç serbestlik dereceli olmaktadır. Çubuğun tamamı için ise toplam kırksekiz serbestlik dereceli olmaktadır. Kanat üzerinde etkili olan merkezkaç kuvveti ve bileşenleri bulunmaktadır.

Bölüm 4’de , boyuna titreşimden ve eğilme titreşiminden meydana gelen rijitlik matrisleri , potansiyel enerji yaklaşımı kullanılarak , elde edilmiştir. Ayrıca dönme hızının ve iki yüzey arasındaki sıcaklık farkının etkileri çeşitli enerji ifadeleri kullanılarak ve kabüller yapılarak rijitlik matrisleri şeklinde elde edilmiştir.

Bölüm 5’ de , Boyuna titreşimden ve eğilme titreşiminden meydana gelen kütle matrisleri elde edilmiştir. Elde edilen kütle matrisleri düzlemsel titreşimler için çıkarılan Euler denkleminde elde edilen kinetik enerji ifadelerinden elde edilmiştir. Euler denkleminde ise kesit dönmesi ihmal edilmiştir. Bu çalışmada ise kesit dönmesi için elde edilen kinetik enerji formunun kullanılarak kütle matrisinin elde edilmesiyle ortadan kaldırılmıştır.

Bölüm 6' da , elemanlar için elde edilen eğilme ve boyuna rijitlik matrisleri toplanarak global koordinatlarda ifade edilmiştir. Sistem için elde edilen boyuna ve eğilme rijitlik matrisleri , sistem lineer kabulüyle , süperpoze edilmiştir.

Bölüm 7' de , elde edilen sistemin hareket denkleminde kütle ve rijitlik matrisleri yerine konarak özdeğer incelemesi yapılmıştır. Bu elde edilen özdeğerler doğal frekanslara eşittir. Bu doğal frekanslar için ise mod şekilleri çizilmiştir.



ABSTRACT

In this study , a single free - standing blade is considered as a cantilever beam with aerofil cross - section mounted at a stagger angle on a rotating disk. A formulation is used to convert blade with aerofil cross - section into rectengular cross - section .Consequently , the natural freqencies are studied by finite element method. Study prapered for this intention consists of seven parts.

In Chapter 1 , there is an introduction.

In Chapter 2 , the reason of vibration in gas turbine is explained and for a good design of a turbine blading , what steps should be taken are explained.

In Chapter 3 , the centrifugal force acting on a beam and components of centrifugal force are presented. Blade with aerofil cross - section is converted into a beam with rectengular cross - section . For this beam equation of motion is expressed by using lagrange method.

In Chapter 4 , the stiffness matrices due to transverse vibration and longitudinal vibration are found. Under the effect of the rotational speed , the beam gets stiffened. Due to additional stresses created by centrifugal forces on the blade surfaces. The matrice due to temperature differences between two surfaces of beam is found. Temperature differences on the blade surfaces creates stresses. The x component of this stress put into formulation found by HOA , k rigidity matrices gets from enrgy expression.

In Chapter 5 , the mass matrices due to trnsverse vibration and longitudinal vibration are found. Above mass matrices , for plane vibration from Euler equation , form of kinetic energy is used to get mass matrices. But in this equation the kinetic energy due to rotation cross - section is not considered. This effect is expressed as rotary inertia by Ragleigh. By using kinetic energy formed for rotation cross - section mass matrice is found.

In Chapter 6 , the transverse and longitudinal matrices which are found for an element are assembled as global matrices. System is considered as linear , so transverse and longitudinal global matrices are superpositioned.

In Chapter 7 , the mass and stiffness matrices are put into equation of motion. Eigenvalues are numerically found. These eigenvalues are equal to natural frequencies. Mode shapes are drawn.



1-GİRİŞ

Enerji talebinin artması sonucunda daha büyük kapasiteli ve verimli türbinlere ve kompresörlere ihtiyaç duyulmuştur. Kapasite ve verim artırılması sonucunda malzeme bilgisi ile beraber, kanat titreşimleri ve bunun sonucunda oluşan yorulmalar turbomakina dizaynında önem kazanmıştır.

Türbin kanatı; gaz kuvvetinin basamak kesilmelerinden dolayı meydana getirdiği uyarmalardan, sistemde oluşan sönümlenmelerden ve yapısal olarak karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı mekanik titreşimlere çok iyi bir örnektir.

Gaz türbinlerinde çok yüksek hızlara çıkılması ve uçak gibi ulaşım araçlarında kullanılmasından dolayı , titreşimler ve doğal frekansların saptanması gaz türbinlerinde daha bir önem kazanmaktadır.

Yukarıdaki sayılan sebeplerden dolayı bir çok araştırmacı bu konu üzerinde çalışmıştır. Türbin kanatlarında yorulmadan meydana gelen hatalar türbin yapımcılarını en çok uğraştıran konu olmuştur. Başlangıç olarak duran bir kanatın eğilme titreşimleri klasik Euler-Bernoulli yöntemi ile tek taraftan ankastre bir çubuğun sınır şartları için Timoshenko (1955) tarafından çözüldü ve yine çevresel olmayan bir çubuğun burulma titreşimleri için Timoshenko tarafından çözüm geliştirilmiştir.

Türbin kanat titreşim problemlerinin çözüm yöntemlerini iki sınıfa ayırmak mümkündür.

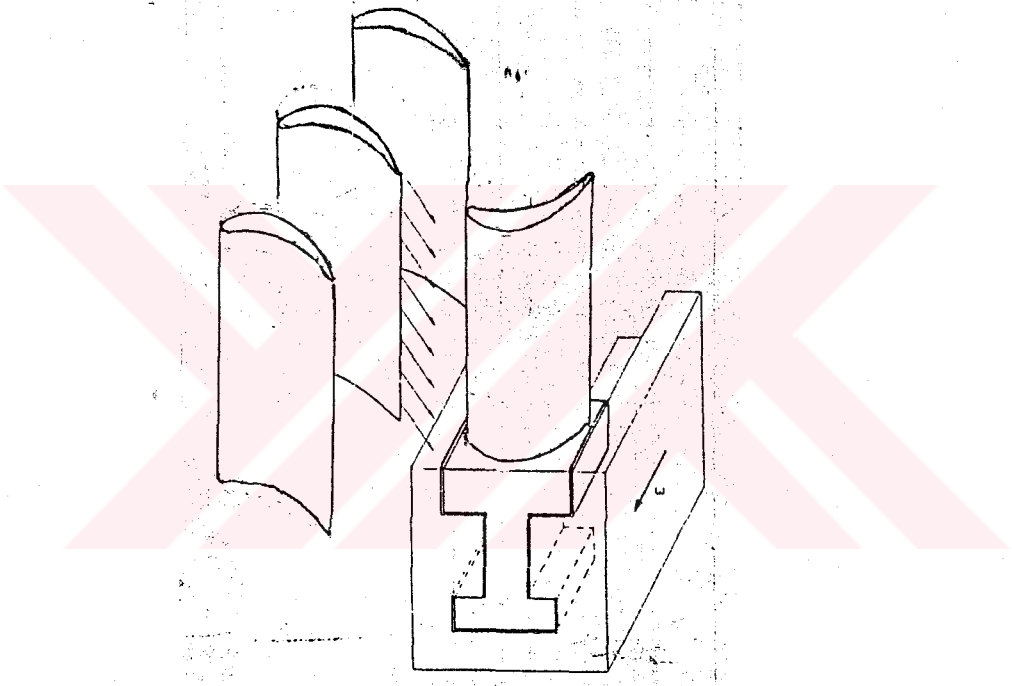
- 1) Sürekli model yaklaşımı; diferansiyel denklem çözmeye dayanır, Rayleigh-Ritz, Galerkin yöntemi gibi.
- 2) Ayrık model yaklaşımı; yapıyı elemanlara bölme esasına dayanır. Bu yöntemine örnek olarak ise Holzer, Myklestod, Sonlu Farklar, Sonlu Elemanlar verilebilir.

Gelişen bilgisayarlarla ve bunların mühendislikte kullanılması ile daha kesin ve daha doğru çözümler üretmek mümkün olmuştur.

2- GAZ TÜRBİNLERİNDE TİTREŞİMLER

Kanatlar çok esnek yapıya sahip olmalarından dolayı kanatların doğal frekanslarının önemli bir miktarı mümkün olan sabit kanat uyarma frekanslarının bölgesinde olabilir. Sabit işletme hızında normal olarak rezonanstan sakınacak şekilde türbinler dizayn edilmelerine rağmen türbinlerin işletmeye alınmaları ve durdurulmaları sırasında bir kaç defa rezonans durumuna gelinmektedir.

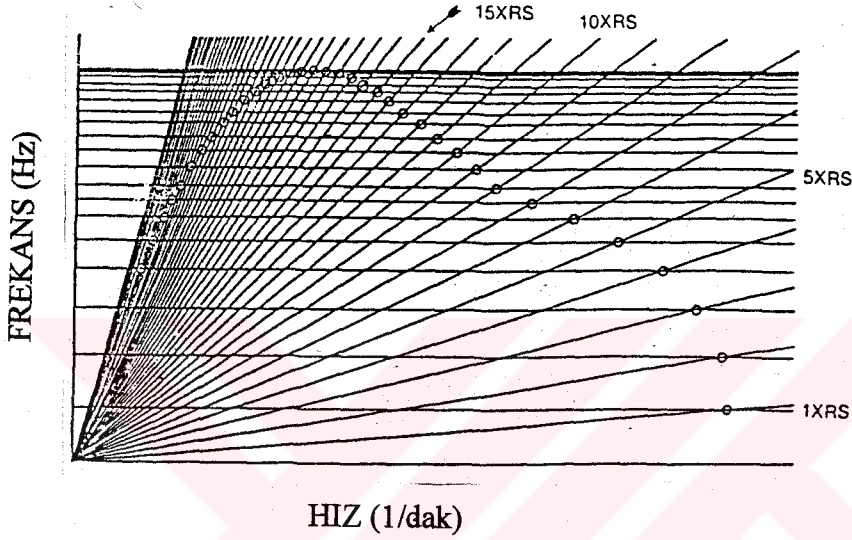
Bir türbinde tüm kanatlar sabit kanat geçiş frekansına eşit frekansda periyodik uyarıya maruz kalırlar



Şekil.2.1 Kanat durumlarının gösterilmesi

Eğer örnek vericek olursak; çevredeki kanat sayısı 100, rotorun devir sayısı 3000 d/d olduğu takdirde, dakikadaki darbe adedi 300.000 1/dak olacaktır. Saiyede ise 5000 1/s olur. Bu darbelerin tesiri altında kanatlar titreşim yapmaya başlar. Bu darbe adedi, kanatın öz frekansıyla çakışması halinde rezonans meydana gelir. Bunu başka bir şekilde ise şöyle ifade edebiliriz; sabit kanat sayısına n_s dersek ve rotorun açısal hızına ω dersek sabit kanatların önünden geçen bir kanat $n_s \cdot \omega$ bir frekansta kuvvete maruz kalır.

Kuvvetler periyodik olduklarından rezonansın meydana gelip gelmediği konusunda bu harmonikleri göz önüne almak gerekir. Bu harmoniklerden biri kanatın doğal frekansıyla çakışması durumunda da rezonans meydana gelir. Öncelikle bu durumu belirlemek için Campbell diyagramı çizilir.



Şekil 2.2 Campbell diyagramı

Devamlı titreşim yapan kanatlarda yorulma daha çabuk olur, yorulma dolayısıyla kopan kanadın türbin içinde büyük hasarlar meydana getirir.

2-1 GAZ TÜRBİNLERİNDE TİTREŞİM SEBEPLERİ

2-1.1 İÇ SEBEPLER

Türbin içinde gaz akışındaki kuvvetler sebebiyle oluşan titreşimlerdir.

- a- Çalışma maddesini sağlayan gaz fiskiyesinin kanatlar üzerine çarpması ve bunun sonucunda darbe etkisi meydana getirmesi.
- b- Bir basamaktaki sabit kanatlardan çıkan gazın hepsinde hız ve yoğunluğun aynı olmamasından dolayı oluşan kuvvet dengesizliği

2-1.2 DIŞ SEBEPLER

Türbin elemanlarının konstrüksiyonundan ve çalışma şartlarından oluşan titreşimlerdir.

- a- Rotorun veya disklerin dengesiz olması,
- b- Gemi , uçak ve bunun gibi vasıtalarda kullanılan gaz türbinlerinde, bu vasıtalarından meydana gelen titreşimlerde kanat titreşimlerine sebep verebilir.

2-2 TİTREŞİMLERİN KONTROLÜ

- a- Dengeleme, böylece zorlayıcı kuvvetin genliğini düşürmek.
- b- Sistemin rijitliğini arttırarak kritik hızlarını yükseltmek
- c- Türbinlerde bir dış veya iç sönümleyici kullanarak rezonans bölgelerindeki zorlanmış titreşimlerden sistemi korumak.

Bir türbin kanadı dizaynında enerji sönümlemesi kanat dizaynının en önemli parçalarından biridir. Bu önem işletmenin geçici ve sürekli rezonans durumlarında meydana gelen dinamik gerilmeleri sınırlamasından meydana gelir. Bir türbin kanadında sönümleme içkaynakdan meydana gelir.

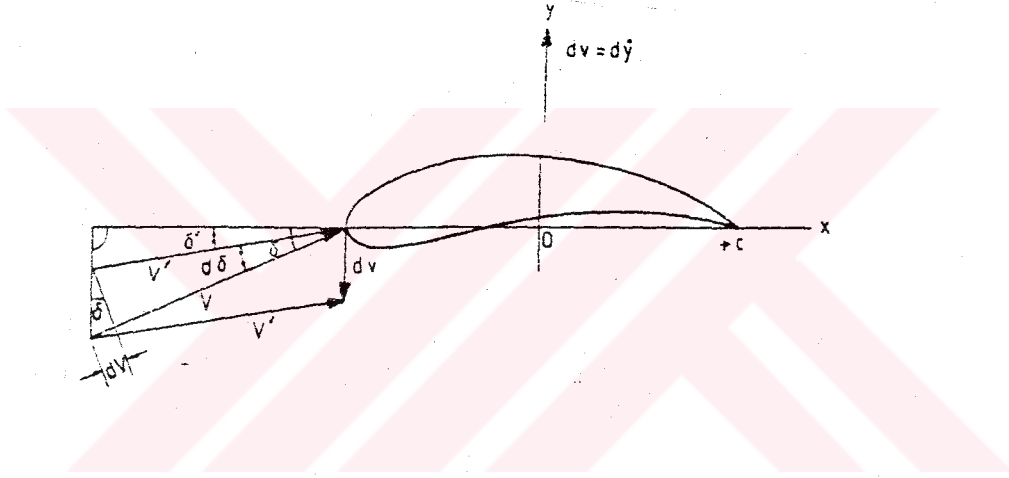
1) Malzeme Sönümlemesi : Karmaşık ve anlaşılması zor bir problem olmasına rağmen bu konu hakkında LAZAN tarafından bir çok araştırma yapılmıştır. Malzemeler için sönüm kat sayılarını bulmuştur.

2) Sürtünme Sönümlemesi : Malzemedeki meydana gelen rezonans genliklerini geçici durumlarda (İşletmeye alma ve İşletmeden çıkarma) küçültmede yeterli olmadığı için Sürtünme sönümlemesi meydana getirilir. Bu ise kanat diplerine, diske takılma bölgelerinde, şekil verme ile sağlanır. T kök veya diğer buna uygun herhangi bir form kayma sönümlemesini sağlar. Kanat diplerinde meydana gelen sönümlemeyi hesaplamak çok zordur.

Kayma ve sürtünme sönümlemesi nisbi olarak düşük hızlarda gerçekleşir. Hızların artmasıyla birlikte santrafuj yükleri artacağından kanat rijitliği artar. Sadece malzeme sönümü kalır Bu gibi yüksek hızlı türbinlerde takviye teli, çevre çemberi kullanılarak sönümleme sağlanmaya çalışılır.

Bitişik kanatlar arasında sönmüleyici bir temas sağlamaya çelikten yapılmış takviye telleriyle sağlanır. Bu tel vasıtasıyla birbirine bağlanmış kanatlarla, bir kanat paketi meydana getirilir. Doğal titreşim sayısı artık yalnız bir kanat için değil paket için geçerli olur. Bu durumda bir kanat için titreşim meydana getirecek olan ikaz frekansı kanat paketi için tehlikesiz olur.

3) Gaz dinamiği sönmülmesi : Gaz dinamiği sönmülmesi basamak keşimlerinden meydana gelir. Aşağıdaki şekilde gaz dinamiği sönmülmesi gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Gaz dinamiği sönmülmesi

d- İkaz seviyesini azaltma, bu ise bir basamaktaki kanat sayısını değiştirmekle veya kanat sıraları arasındaki boşluğu arttırmakla sağlanır.

2-3 TİTREŞİMLERİN KANATLARA GÖRE DURUMU

Sabit kanatlarda titreşime neden olan sebeplerin daha az olması hem de profillerinin kalın olmasından dolayı seyyar kanatlar, sabit kanatlara göre daha kolaylıkla titreşim yapabilirler. Profillerin eşit olduğu reaksiyon tipinin ise gaz türbinlerinde uygulama sahası azdır

Türbinin son basamaklarına doğru kanat boyu gittikçe uzadığından dolayı son basamaklardaki kanatlar titreşime oldukça müsaitdir. Bunun yanında ilk basamaklardaki kanatlarda da titreşim görülür.

2-4 İYİ BİR TÜRBİN KANATI DİZAYNI İÇİN GEREKLİ ADIMLAR

- 1) Doğal frekansların ve mod şekillerinin belirlenmesi,
- 2) Basamak akış etkilerinden oluşan kuvvetlerin belirlenmesi,
- 3) Sönümlenmelerin belirlenmesi
- 4) Modal analiz ve dinamik gerilmelerin belirlenmesi
- 5) Birikimli yorulma teorilerine dayalı ömür tahmini.

2-5 TÜRBİN TİTREŞİMLERİNİN ANALİZ METODLARI

Yalnız bir türbin kanadı için analiz yöntemi olarak sürekli sistem çözüm yöntemi seçilirse bir sürü analitik yöntem gerektirmektedir. Kanatı elemanlara ayırarak ve bu elemanlar için uygun eleman bağlantıları kullanılarak işlemler basitleştirilir. Türbinlere uygulanan ayırık sistem analiz yöntemleri aşağıdaki gibidir;

- 1) Holzer metodu
- 2) Myklestod, Prohl metodu
- 3) Matris yöntemi
- 4) Sonlu farklar metodu
- 5) Sonlu elemanlar metodu

Sonlu elemanlar metodunda yapıyı uygun elemanlarla bölerek daha iyi bir matematik model elde edilir. Diğer yöntemlere göre bir avantajı ise, sınır şartlarının sonunda oluşturulmasıdır.

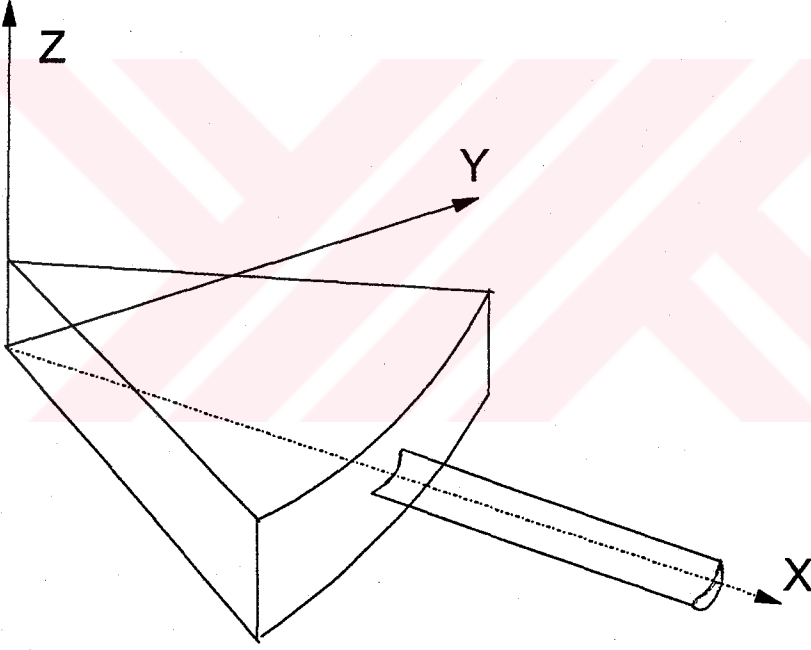
Sonlu elemanlar yönteminde izlenen yol aşağıdaki gibi özetlenebilir;

- 1) Yapı sonlu sayıda elemana bölünür.
- 2) İnterpolasyon fonksiyonları seçilir.
- 3) Eleman özellikleri bulunur, kütle matrisi ve rijitlik matrisi gibi.
- 4) Tüm yapı için denklemleri elde etmek üzere eleman matrislerinin birleştirilmesi ve birleştirme işleminden sonra sınır şartları uygulanır.
- 5) Lineer cebrik denklemi çözülür ve düğüm noktalandaki yer değiştirmeler bulunur.

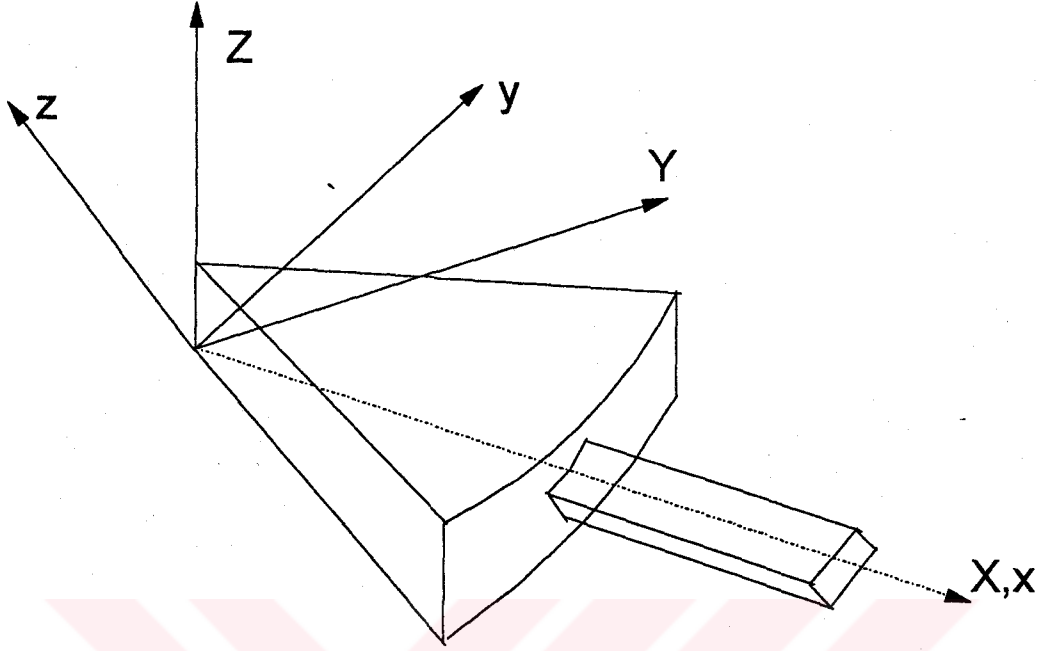
3 - SONLU ELEMAN İFADELERİNİN GELİŞTİRİLMESİ İÇİN GEREKLİ OLAN TEMEL İFADELER

Türbin kanadı aerofil kesitli ve ağırlık merkeziyle eğilme merkezinin çakışık olduğu kabulüyle eş değer dinamik özelliklere sahip dikdörtgen kesitli ince bir çubuk olarak kabul edildi. Burdan hareketle çubuk ,homojen uniform dikdörtgen kesitli ve elastik olarak ayrıca üzerinde bulunduğu r yarıçaplı Ω hızı ile dönen disk rijit olarak kabul edildi.

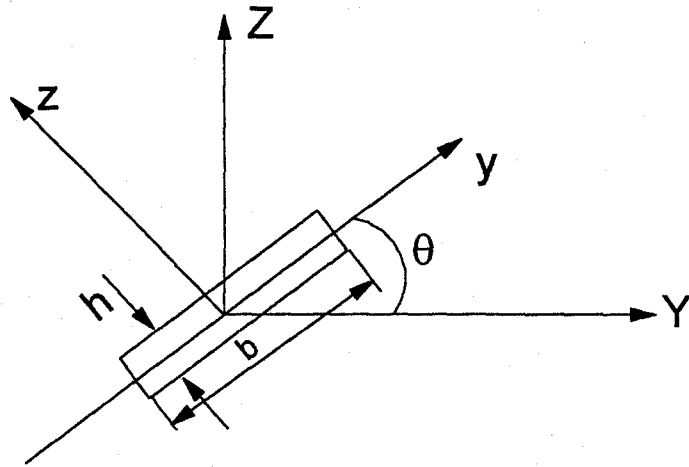
Eksen takımları ise ; dönen disk ekseninden geçen XYZ eksen takımı ve çubuğun x ekseninde diskin X eksenine ile çakışık olacak şekilde çubuk için xyz eksen takımı seçildi.



Şekil 3.1 Aerofil kesitli kanatın disk parçası üzerinde gösterilmesi



Şekil 3.2 Dikdörtgen eşdeğer kesitli çubuğun disk üzerinde gösterilmesi



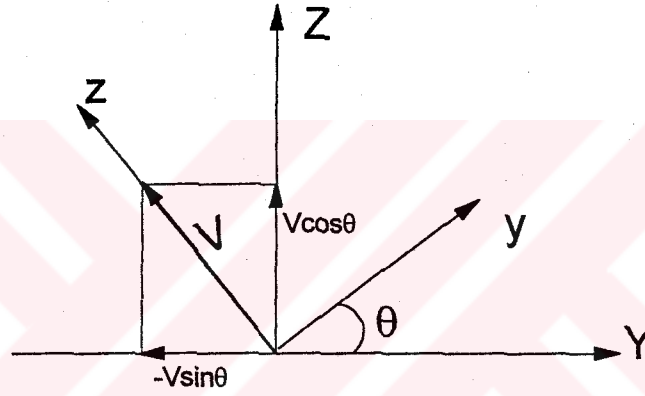
Şekil 3.3 Dikdörtgen kesitli çubuğun önden eksen takımı üzerinde gösterilmesi

3-1 MERKEZKAÇ KUVVETİNİN BULUNUŞU

Çubuğun tekerleğe bağlı olduğu noktadan x kadar uzaklıktaki birim hacme etkiyen merkezkaç kuvvetin Z eksenine dik bileşeni F_r aşağıdaki gibidir.

$$F_r = \rho \Omega^2 (r + x) \quad (3.1)$$

Şekil 2.6 danda görüldüğü gibi kanata ait z eksenini boyunca yer değişimi V 'nin bileşenleri Y doğrultusunda $-V\sin\theta$ ve Z doğrultusundaki bileşeni de $V\cos\theta$ dir.



Şekil 3.4 z eksenini boyunca yer değiştirmenin bileşenleri

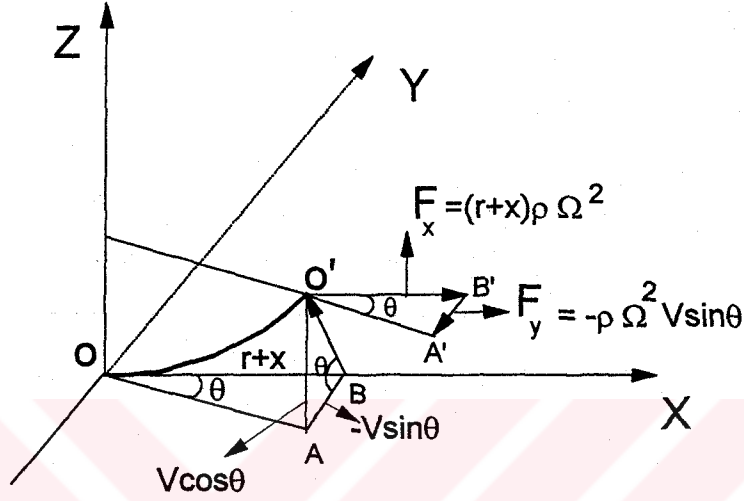
z eksenini doğrultusunda V yer değiştirmesinin sonucunda Şekil 3.5 den de görüleceği gibi merkezkaç kuvvetinin z eksenine dik bileşeni, küçük genlikli titreşimler için aşağıdaki gibidir.

$$F_x = F_x = \rho \Omega^2 (r + x) \quad (3.2)$$

Y doğrultusundaki bileşeni yazmak için kullanılan ve Şekil 3.5 de görülen XY düzlemindeki OAB üçgeninin orijindeki açısının tanjantı $(-V\sin\theta / (r+x))$ dir. $O'A'B'$ kuvvet üçgeninden F_Y aşağıdaki gibi bulunur.

$$F_Y = (r+x)\rho\Omega^2 \left[\frac{-V \sin\theta}{r+x} \right]$$

$$F_Y = -\rho\Omega^2 V \sin\theta \quad (3.3)$$



Şekil 3.5 Eğilme sonrası kanat üzerindeki kuvvet bileşenleri

F_Y 'nin y ve z doğrultusundaki bileşenlerinin bulunması için Şekil 3.4 deki YZ düzleminde bulunur.

$$F_y = F_Y \cos\theta = -\rho\Omega^2 V \sin\theta \cos\theta \quad (3.4)$$

$$F_z = -F_Y \sin\theta = \rho\Omega^2 V \sin^2\theta \quad (3.5)$$

z doğrultusundaki yerdeğiştirme incelendiğinde yer değiştirme V ise , bu durumda atalet kuvveti

$$F_{at} = \rho \ddot{V} \quad (3.6)$$

olur.

\ddot{V} : yer değiştirmenin zaman göre ikinci türevi

Kuvvet dengesini yazarsak

$$\rho\Omega^2 V \sin^2\theta = \rho \ddot{V} \quad (3.7)$$

olur. Yukarıdaki ifadelerin çıkartılmasında Hoa,1979 tarafından verilen yöntemden yararlanılmıştır.

3-2 EŞDEĞER DİKDÖRTGEN KESİT HESABI

Bu çalışmada aerofil kesit yerine bu kesite eş değer dikdörtgen kesitli çubuk kullanıldı. Bu yöntem Vedat KARADAĞ, 1993, tarafından doktora çalışmasında kullanılmıştır. Eşdeğer dikdörtgen kesit kullanılarak pratik yönden çok büyük kolaylık sağlanmıştır.

$$I_{ys} = I_y \cos^2 \theta + I_z \sin^2 \theta \quad (3.8)$$

$$I_{zs} = I_y \sin^2 \theta + I_z \cos^2 \theta \quad (3.9)$$

I_{ys} ve I_{zs} aerofil kanat kesitinin y ve z eksenlerine göre atalet momentleridir.

Dikdörtgen kesit için ise;

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (3.10)$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} \quad (3.11)$$

$$A = bh \quad (3.12)$$

bağıntıları yazılabilir.

Burada yapılacak bir yaklaşımla dikdörtgen kesitin alanı aerofil kesit alanına eşit yazılırsa, $A_s = A$

$$I_y = \frac{A_s h^2}{12} \quad (3.13)$$

$$h = \frac{A_s}{b} \quad (3.14)$$

$$I_y = \frac{A_s^3}{12b^2} \quad (3.15)$$

$$I_z = \frac{A_s b^2}{12} \quad (3.16)$$

şeklini alır.

3.15 ve 3.16, 3.8 ve 3.9 yerine yazılırsa,

$$I_{ys} = \frac{A_s^3}{12b^2} \cos^2 \theta + \frac{A_s b^2}{12} \sin^2 \theta \quad (3.17)$$

$$I_{zs} = \frac{A_s^3}{12b^2} \sin^2 \theta + \frac{A_s b^2}{12} \cos^2 \theta \quad (3.18)$$

3.17 ve 3.18 denklemleri beraber çözümlenerek b bulunur.

Buradan bulunan b , 3.14 de yerine yazılırsa kesit kalınlığı h bulunur.

Eşdeğer konum açısı için ise,

$$\sin^2 \theta = \frac{I_{zs} - I_{ys}}{I_z - I_y} \quad (3.19)$$

bağıntısı kullanılabilir. 3.15 ve 3.16 bağıntıları 3.19'da yerine yazılırsa θ hesaplanır.



3.3 KANATIN DİNAMİK ANALİZİ

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \dot{U} \right\}^T \left\{ \dot{U} \right\} \rho dV \quad (3.20)$$

$$\left\{ \dot{U} \right\} = \left[\dot{U} \quad \dot{W} \quad \dot{V} \right]^T \quad (3.21)$$

$$\{U\} = [N]\{q\} \quad (3.22)$$

3.22 ifadesinin zamana göre türevi alınırsa aşağıdaki forma gelir.

$$\left\{ \dot{U} \right\} = [N] \left\{ \dot{q} \right\}$$

Yukarıdaki ifadeler kinetik enerji ifadesinde yerine yazılırsa, kinetik enerji bağıntısı şekil fonksiyonlarına bağlı kütle matrisinin bir ifadesi olarak elde edilebilir.

$$T = \frac{1}{2} \int_V [N]^T \left\{ \dot{q} \right\}^T [N] \left\{ \dot{q} \right\} dV$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q} \right\}^T \left[\int_V [N]^T [N] \rho dV \right] \left\{ \dot{q} \right\} \quad (3.23)$$

3.23'de elde edilen kinetik enerji formunda bir eleman için kütle matrisi 3.24'de verilmiştir.

$$m_e = \int_V [N]^T [N] \rho dV \quad (3.24)$$

o halde bir eleman için kinetik enerji 3.25 deki gibi yazılabilir.

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q} \right\}^T m \{q\} \quad (3.25)$$

Çubuk için toplam kinetik enerji;

$$T = \sum T_e = \frac{1}{2} \left\{ \dot{Q} \right\}^T M Q \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilebilir.

Sistemin potansiyel enerjisi ise;

$$T.P. = \frac{1}{2} \{Q\}^T K \{Q\} - \{Q\}^T \{F\} \quad (3.27)$$

Lagrange bağıntısını kullanarak hareketin diferansiyel denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz

$$L = T - T.P. \quad (3.28)$$

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \dot{Q} \right\}^T [M] \{Q\} - \frac{1}{2} \{Q\}^T [K] \{Q\} + \{Q\}^T \{F\} \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial Q_i} \right) = 0 \quad (3.29)$$

$$[M] \left\{ \ddot{Q} \right\} + [K] \{Q\} = F \quad (3.30)$$

Serbest titreşim için $F = 0$ Hareket denkleme aşağıdaki şekle dönüşür.

$$[M] \left\{ \ddot{Q} \right\} + [K] \{Q\} = 0 \quad (3.31)$$

Burda diferansiyel denklem için $\{Q\} = \{U\} \sin \omega t$ yardımcı çözümünün zamana göre türevlerini alırsak ve denklemde yerine koyarsak ifade;

$$-[M] \omega^2 \{U\} \sin \omega t + [K] \{U\} \sin \omega t = 0$$

$\sin \omega t = 0$ olamayacağına göre diğer çarpan sifira eşit olacaktır. Burdan doğal frekans çözümü için matris denklemi özdeğer problemine döner.

$$[K] \{U\} = \omega^2 [M] \{U\}$$

Denklem bu durum için bir öz değer problemidir. Bu denklemin sıfırdan farklı $\{U\}$ vektörlerinin çözüm kabul edilmesi için ω^2 sabitinin alması gerekli özel değerlerin bulunması problemi sözkonusudur.

$$\omega^2 = \lambda$$

$$[K] \{U\} = \lambda [M] \{U\} \quad (3.32)$$

$$([K] - \lambda [M]) \{U\} = \{0\}$$

çözüm olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir.

$$\det([K] - \lambda [M]) = 0$$

3.32 deki ifadende görüleceği gibi rijitlik ve kütle matrislerinin bulunmasıyla sistem için doğal frekanslar elde edilmiş olacaktır. Elde etme yöntemi olarakda tezin başında da ifade edildiği gibi sonlu elemanlar kullanılmıştır.

4 RİJİTLİK MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ

4.1 BOYUNA YER DEĞİŞTİRME ETKİSİ

$X = [x, y, z]^T$ noktasındaki deformasyon, o yer değiştirmenin üç bileşeni tarafından belirlenir.

$$U = [U, W, V]^T$$

$$\{ \sigma \} = E \{ \varepsilon \} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır.

Tek boyutluda ise yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilme x 'e bağlıdır.

$$U = U(x) \quad (4.2.a)$$

$$\sigma = \sigma(x) \quad (4.2.b)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(x) \quad (4.2.c)$$

ve dolayısıyla

$$\sigma = E \varepsilon$$

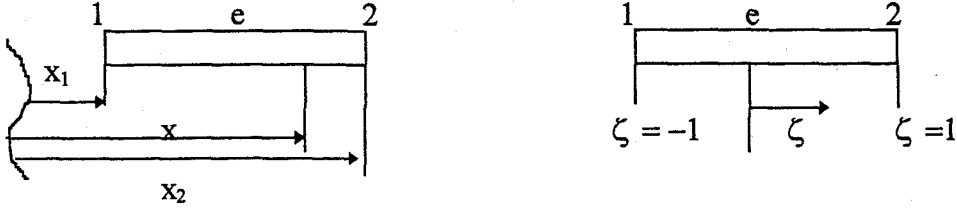
$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (4.3)$$

$$dV = Adx \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Her eleman iki düğüm noktasına sahiptir ve her düğüm noktası $\pm x$ yönünde hareket edebilir. Bir eleman iki serbestlik derecelidir. Bir elemandaki düğüm noktalarının deplasmanını lokal olarak $\{q\} = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n]^T$ vektörü gösterir. Çubuk boyunca yer değiştirmeler global olarak $\{Q\} = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_n]^T$ vektörü gösterir.

KOORDİNATLAR VE ŞEKİL FONKSİYONLARI



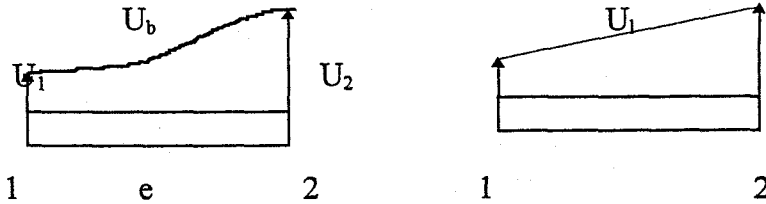
Şekil 4.1 koordinatların gösterimi

Tipik bir sonlu eleman e 'yi düşünürsek şekil 4.1 lokal numaralamada ilk düğüm noktası 1 ile ikinci düğüm noktası 2 ile gösterilir. 1.düğüm noktasında $x_1 = x$ ve ikinci düğüm noktasında ise $x_2 = x$ dir. ζ ile gösterilen doğal bir koordinat sistemi seçersek

$$\zeta = \frac{2}{x_2 - x_1} (x - x_1) - 1 \quad (4.5)$$

Şekildende görülebileceği gibi birinci düğüm noktasında $\zeta = -1$, ikinci düğüm noktasında $\zeta = 1$ dir. Bir elemanın boyu 0'dan l 'ye değişeceğine ζ 'nin -1 den 1'e değişmesiyle gösterilebilir. Bu koordinat sistemi deplasman alanlarının enterpolasyonunda kullanılan şekil fonksiyonlarını belirlemede kullanır.

Bir elemandaki bilinmeyen deplasman alanı lineer enterpolasyonla bulunur, bu yaklaşımın doğruluğu eleman sayısı arttıkça artar

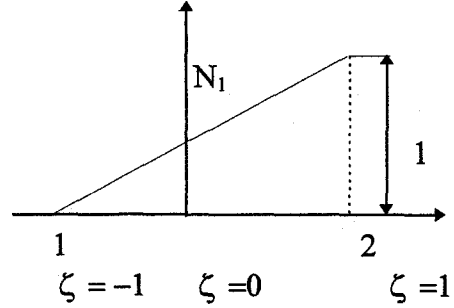
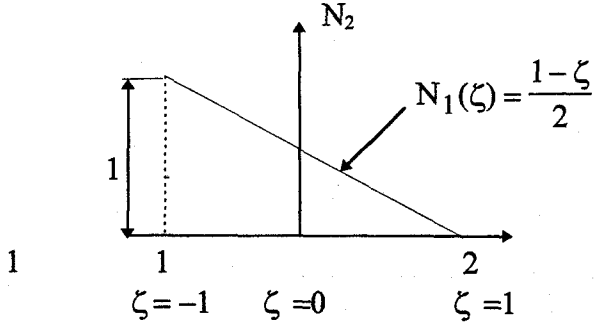


Şekil 4.2 Bir elemandaki deplasman alanının lineer enterpolasyonu

Lineer enterpolasyonu lineer şekil fonksiyonlarına uygularsak

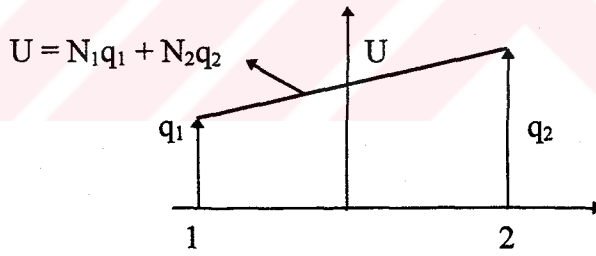
$$N_1(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}$$

$$N_2(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}$$



Şekil 4.3.a N_1 şekil fonksiyonu

Şekil 4.3.b N_2 şekil fonksiyonu



Şekil 4.4 Lineer enterpolasyon

N_1 ve N_2 yukarıdaki şekilde grafik olarak gösterildi. Bunun elde edildiği şekil fonksiyonlarında

$$\begin{aligned} \zeta = -1 & \quad N_1 = 1 \\ \zeta = 1 & \quad N_1 = 0 \end{aligned}$$

değerlerini koyma şeklindedir, ve elde edilen iki nokta arasında doğru çizilir. Aynı şekilde N_2 için hesaplar yapılır.

Lineer deplasman alanı düğüm noktaları deplasmanlarına göre yazılırsa

$$U = N_1q_1 + N_2q_2 \quad (4.8)$$

veya matris formunda yazılırsa

$$\{U\} = [N] \{q\} \quad (4.9)$$

$$N = [N_1, N_2] \quad (4.10)$$

$$q = [q_1, q_2] \quad (4.11)$$

olur.

Şekil değiştirme ve deplasman arasındaki bağıntı $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ dir.

Diferansiyel zincir kuralı uygularsak

$$\varepsilon = \frac{du}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx}$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1}$$

$$U = N_1 q_1 + N_2 q_2 = \frac{1-\zeta}{2} q_1 + \frac{1+\zeta}{2} q_2$$

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{-q_1 + q_2}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{x_2 - x_1} (-q_1 + q_2) \quad (4.12)$$

Bu eşitliği aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad (4.13)$$

$$B = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\{\sigma\} = E [B] \{q\} \quad (4.15)$$

[B] = Şekil değiştirme - deplasman matrisi

Gerilme , Şekil değiştirme ve deplasman değerleri dđęüm noktalarına göre elde edilmiştir.

4.1.1

POTANSİYEL ENERJİ YAKLAŞIMI

Şekil değiştirme enerjisinde $\{\epsilon\} = [B] \{q\}$ ve $\{\sigma\} = E [B] \{q\}$ formüllerini yerine koyarsak;

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \{\sigma\}^T \{\epsilon\} A dx \quad (4.16)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \{q\}^T [B]^T E [B] \{q\} A dx \quad \text{veya aşağıdaki formda yazılabilir.}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_e [B]^T E [B] A dx \{q\} \quad (4.17)$$

Sonlu eleman modellemede bir elemanın kesit alanı bir sabit olmak üzere A ile gösterildi. Aynı zamanda $[B]$ de sabit bir matrisdir. X 'den ζ 'ye dönüşüm yaparsak 4.17 eşitliği aşağıdaki sonucu verir;

$$dx = \frac{x_2 - x_1}{2} d\zeta$$

veya

$$dx = \frac{1}{2} d\zeta$$

Burda $-1 \leq \zeta \leq 1$ iken l : eleman boyunu göstermektedir. $l = |x_2 - x_1|$

Bir eleman için şekil değiştirme enerjisi U_e aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}^T \left[A \frac{1}{2} E [B]^T [B] \int_{-1}^1 d\zeta \right] q$$

$$\int_{-1}^1 d\zeta = 2$$

Yukardaki integral değerini ve $[B]$ değerini yerine koyarsak

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}^T A_e E \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{q\}$$

(4.18)

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}^T \frac{A_e E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{q\}$$

Yukardaki eşitlik

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}^T k^e \{q\} \text{ formundadır.}$$

k^e : eleman rijitlik matrisidir.

$$k^e = \frac{EA_e}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.19)

Rijitlik matrisi boyuna titreşim için enerji denkleminde yukarıdaki şekilde elde edilir.

4.2 EĞİLME RİJİTLİĞİ

4.2.1 POTANSİYEL ENERJİ YAKLAŞIMI

dx uzunluğundaki bir elamandaki gerilme enerjisi;

$$dU = \frac{1}{2} \int_A \{\sigma\} \{\varepsilon\} dA dx$$

Küçük deplasmanlar için ;

$$\sigma = -\frac{M}{I} z$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitlikleri yerine yazarsak;

$$\frac{1}{2} \int_A \left(-\frac{M}{I} z\right) \left(-\frac{M}{EI} z\right) dA dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI^2} \int_A z^2 dA \right) dx$$

$$I = \int_A z^2 dA$$

$$M = \frac{d^2 V}{dx^2}$$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \text{ olur.}$$

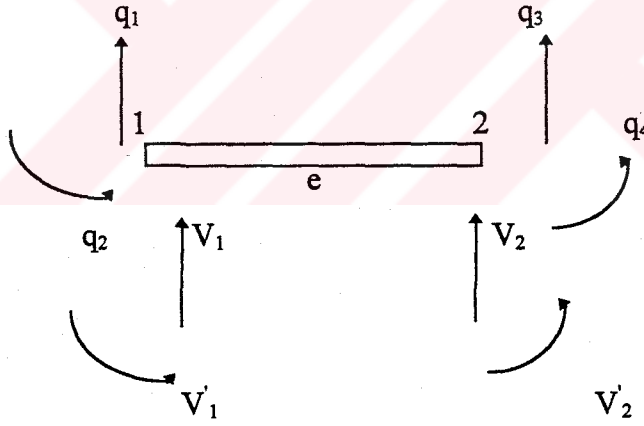
L uzunluğundaki bir çubuk için gerilme enerjisini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4.21)$$

elde edilir.

4.2.2 SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Çubuk elemanlara bölünerek lokal ve global yer değiştirmeler yazılır. Tezde incelenecek olan eşdeğer kesitli çubuk 15 elemana bölünmüştür. Aşağıda bir eleman için ve çubuk için lokal , global numaralandırmalar gösterilmiştir.



Şekil 4.5 Sonlu eleman bölünmesi

$q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ ve $V = [V_1, V_1', V_2, V_2']^T$ vektörleri aynı yer değiştirmeleri ifade etmektedir.

V yer değiştirmesinin enterpolasyonu için kullanılacak olan Şekil fonksiyonları ζ 'ye göre ifade edilir. Düğüm noktası değerleri ve düğüm noktası eğrileri mevcut olduğundan sınır Őartlarını sağlayacak Kübik Şekil fonksiyonları Őeçilmiřtir.

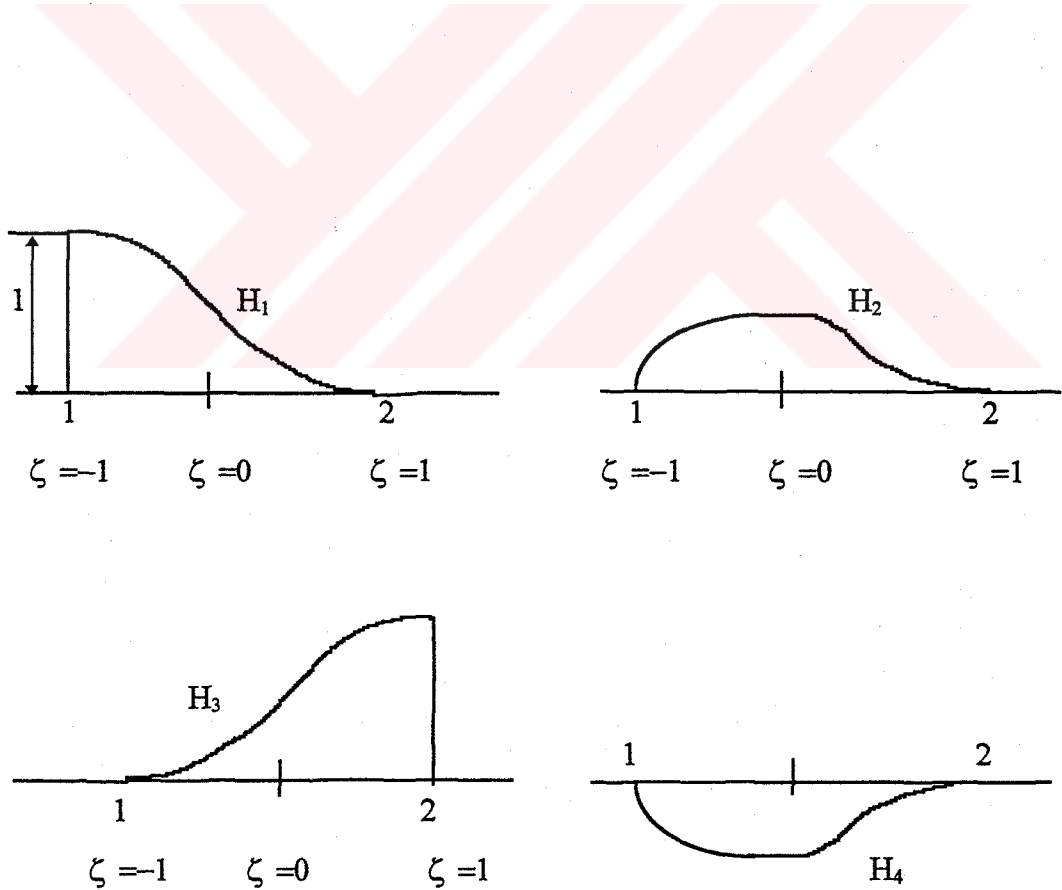
Her bir Şekil fonksiyonu aşağıdaki genel üçüncü mertebeden fonksiyonla gösterilir.

$$H = a_1 + b_1\zeta + c_1\zeta^2 + d_1\zeta^3 \quad (4.22)$$

Aşağıda tabloda verilen koşulların sağlanması gerekir.

Tablo 4.1 Sınır koşulları

	H_1	H_1'	H_2	H_2'	H_3	H_3'	H_4	H_4'
$\zeta = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\zeta = 1$	0	0	0	0	1	0	0	1



Şekil 4.6 Hermetik Şekil fonksiyonları

Bir örnek olarak sadece H_1 fonksiyonunun katsayılarının bulunuşunu gösterecek olursak

$$\zeta = -1 \quad H_1 = 1 \quad 1 = a_1 - b_1 + c_1 - d_1$$

$$\zeta = 1 \quad H_1 = 0 \quad 0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$$

$$H'_1 = b_1 + 2\zeta c_1 + 3\zeta^2 d_1$$

$$\zeta = -1 \quad H'_1 = 1 \quad 0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1$$

$$\zeta = 1 \quad H'_1 = 0 \quad 0 = b_1 - 2c_1 + 3d_1$$

Burdan yukardaki denklemler çözülerek katsayılar elde edilir.

$$H_1 = \frac{1}{4}(1-\zeta)^2(2+\zeta) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{4}(2-3\zeta+\zeta^3) \quad (4.23.a)$$

$$H_2 = \frac{1}{4}(1-\zeta)^2(1+\zeta) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{4}(1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3) \quad (4.23.b)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(1+\zeta)^2(2-\zeta) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{4}(2+3\zeta-\zeta^3) \quad (4.23.c)$$

$$H_4 = \frac{1}{4}(1+\zeta)^2(\zeta-1) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{4}(-1-\zeta+\zeta^2+\zeta^3) \quad (4.23.d)$$

Koordinat dönüşümü aşağıdaki formüllerle sağlanırsa;

$$x = \frac{1-\zeta}{2}x_1 + \frac{1+\zeta}{2}x_2$$

ya da

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}\zeta$$

Zincir kuralını uygularsak

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{d\zeta}$$

Oluşturulan dV/dx 1. ve 2. düğüm noktalarındaki q_2 ve q_4 için oluşturulmuştur.

$$V(\zeta) = H_1 q_1 + \frac{1}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{1}{2} H_4 q_4 \quad (4.24)$$

veyahut da aşağıdaki formda vektörel olarak gösterebiliriz.

$$[H] = \begin{bmatrix} H_1 & \frac{1}{2}H_2 & H_3 & \frac{1}{2}H_4 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Eleman için şekil değiştirme enerjisini yazarsak;

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)^2 dx$$

eşitlikden

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{l} \frac{dV}{d\zeta} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2V}{d\zeta^2}$$

$\{V\} = [H] \{q\}$ eşitliğini yerine koyarsak

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)^2 = \{q\}^T \frac{16}{l^4} \left(\frac{d^2H}{d\zeta^2} \right)^T \left(\frac{d^2H}{d\zeta^2} \right) \{q\} \quad (4.26)$$

$$\left(\frac{d^2H}{d\zeta^2} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\zeta & \frac{-1+3\zeta}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\zeta & \frac{1+3\zeta}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Şekil değiştirme enerji bağıntısı aşağıdaki şekle döner.

$$U_e = \int_0^l EI \{q\}^T \frac{16}{l^4} \left(\frac{d^2H}{d\zeta^2} \right)^T \left(\frac{d^2H}{d\zeta^2} \right) \{q\} dx \quad (4.27)$$

Yukarıdaki 4.27 nolu bağıntıda $dx = (l/2)d\zeta$ yazarsak aşağıdaki son şekli alır.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 EI \{q\}^T \frac{16}{l^4} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\zeta \\ \frac{-1+3\zeta}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}\zeta \\ \frac{1+3\zeta}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\zeta & \frac{-1+3\zeta}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\zeta & \frac{1+3\zeta}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} d\zeta \{q\} \quad (4.28)$$

Eleman şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki forma getirilirse;

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}^T k^e \{q\}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 EI \{q\}^T [A] d\zeta \{q\}$$

[A] matrisi aşağıda gsterildiği gibidir.

$$\begin{bmatrix} 18 \frac{\zeta^2}{l^3} & 3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (-1 + 3\zeta) & -18 \frac{\zeta^2}{l^3} & 3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (1 + 3\zeta) \\ 3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (-1 + 3\zeta) & \frac{1}{(2 \cdot l)} \cdot (-1 + 3\zeta)^2 & -3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (-1 + 3\zeta) & \frac{1}{(2 \cdot l)} \cdot (-1 + 3\zeta) \cdot (1 + 3\zeta) \\ -18 \frac{\zeta^2}{l^3} & -3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (-1 + 3\zeta) & 18 \frac{\zeta^2}{l^3} & -3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (1 + 3\zeta) \\ 3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (1 + 3\zeta) & \frac{1}{(2 \cdot l)} \cdot (-1 + 3\zeta) \cdot (1 + 3\zeta) & -3 \frac{\zeta}{l^2} \cdot (1 + 3\zeta) & \frac{1}{(2 \cdot l)} \cdot (1 + 3\zeta)^2 \end{bmatrix}$$

Matris içindeki her bir elemanı ζ 'ye göre integre edersek;

$$\int_{-1}^1 \zeta^2 d\zeta = \frac{2}{3} \quad \int_{-1}^1 \zeta d\zeta = 0 \quad \int_{-1}^1 d\zeta = 2$$

Bir eleman için eğilme rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$k^e = E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{-12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{-6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \frac{-12}{l^3} & \frac{-6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{-6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{-6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}$$

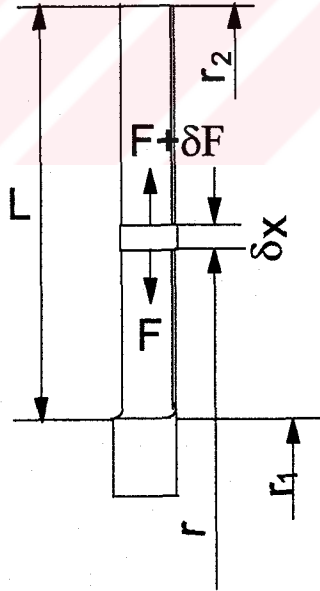
4.3 DÖNME HIZI ETKİSİ

Dönme etkisiyle birlikte meydana gelen santrafuj kuvvetler eğilmede kanat rijitliğini artırır. Dolayısıyla doğal frekanslarda dönme hızı ile birlikte artar. Kanatın burulma hareketinde santrafuj kuvvetlerin etkisi yoktur. Atalet momenti arttıkça santrafuj kuvvetler artar. Yüksek modlarda santrafuj kuvvetlerin etkisi yok denecek kadar azdır.

Bir elemanın x mesafesindeki kesitine etki eden merkezkaç kuvveti, kesit alanı A 'ya bölünürse bu kesitte meydana gelen gerilme bulunur. Bulunan bu gerilmeyide dış kuvvetlerden dolayı meydana gelen gerilmeyi kullanarak sistemin potansiyel enerjisini veren formülde yerine koyarsak uygun forma koyarak dönme etkisinden oluşan k rijitlik matrisini bulabiliriz.

4.3-1 Santrafuj Kuvvet

Sabit kesite sahip bir türbin kanatını aşağıdaki gibi çizersek ve kuvvet dengelerini yazarsak kanat elemanı üzerindeki etkili olan santrafuj kuvvet ifadesini çıkartmış oluruz.



F : r yarıçapındaki iç kuvvet

$F+\delta F$: $r+\delta r$ yarıçapındaki iç kuvvet

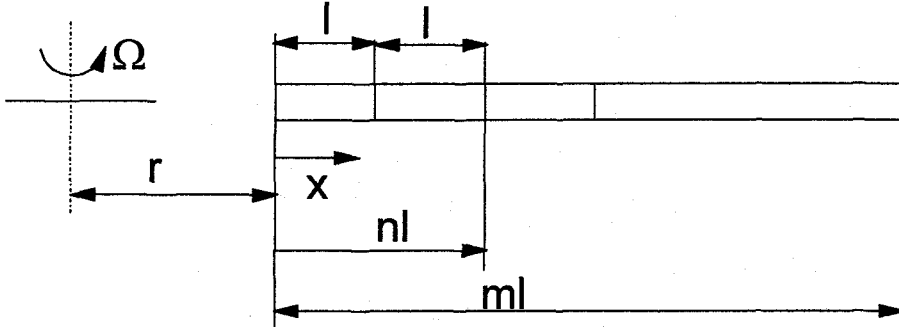
Bir elemanın hacmi = $A \cdot \delta x$

Kanat elemanı üzerindeki santrafij kuvveti yazacak olursak;

$$\rho \cdot A \cdot \Omega^2 \cdot x \cdot \delta x$$

$$F + \delta F + \rho \cdot A \cdot \Omega^2 \cdot x \cdot \delta x = F$$

$$\delta F = - \rho \cdot A \cdot \Omega^2 \cdot x \cdot \delta x$$



Şekil 4.7 Sonlu çubuk eleman

m: toplam eleman sayısı

n: eleman numarası

x: eleman içindeki bir noktanın uzaklığı

Şekil 3.7 görülen bir eleman içinde dx uzunluğundaki bir parçaya etkileyen diferansiyel kuvvet;

$$dF_x = A\rho\Omega^2 (r + nl + x)dx \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlanabilir.

İncelemek için ele alınan elemandan itibaren serbest uca doğru diğer elemanların meydana getirdikleri merkezkaç kuvveti de bu elemana etkimektedir. Bu kuvvet;

$$F_1 = A\rho\Omega^2 \int_{(n+1)l}^{ml} (r + x)dx \quad (4.31)$$

dir.

Bu sonuçlar dikkate alındığında, bir elemanın x mesafesindeki kesitine x doğrultusunda etki eden toplam kuvvet aşağıdaki gibidir.

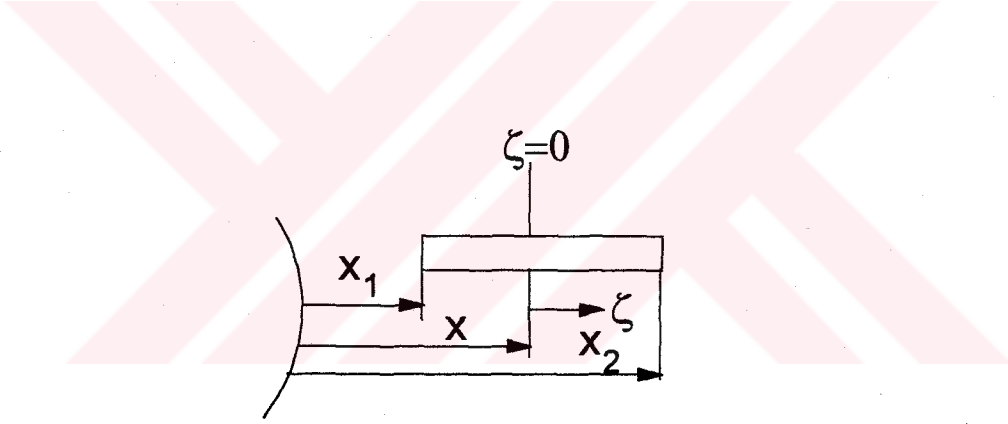
$$F_m = \left(A \int_x^l \rho\Omega^2 (r + nl + x)dx \right) + \left(A\rho\Omega^2 \int_{(n+1)l}^{ml} (r + x)dx \right) \quad (4.32)$$

$$F_m := A \cdot \rho \cdot \Omega^2 \cdot \left[\int_x^1 (r + n \cdot l + x) dx + \int_{(n+1) \cdot l}^{m \cdot l} (r + x) dx \right]$$

$$F_m := A \cdot \rho \cdot \Omega^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot m^2 + r \cdot l \cdot m - \frac{1}{2} \cdot l^2 - r \cdot l \cdot n - r \cdot l - n \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot n^2 \right) + \left(r \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l^2 + n \cdot l^2 - r \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - n \cdot l \cdot x \right) \right]$$

$$F_m := A \cdot \rho \cdot \Omega^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot m^2 + r \cdot l \cdot m - r \cdot l \cdot n - \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot n^2 - r \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - n \cdot l \cdot x \right)$$

$$\sigma_n = \frac{F_m}{A}$$



Şekil 4.8 Elemanın koordinat dönüşümünün gösterilmesi

Aşağıdaki gerekli koordinat dönüşümleri yapılırsa gerilme ζ 'ye bağlı olarak elde edilir.

$$x = \frac{1-\zeta}{2} x_1 + \frac{1+\zeta}{2} x_2$$

$$x_1 = r + (n-1)l$$

$$x_2 = r + nl$$

$$x_2 - x_1 = l$$

$$\sigma_n = \rho \Omega^2 [A - B + C + D]$$

$$A := -r \cdot \left[\left[\frac{1-\zeta}{2} \cdot r + (n-1) \cdot l \right] + \left[\frac{1+\zeta}{2} \cdot (r+n \cdot l) \right] \right]$$

$$B := n \cdot l \cdot \left[\left[\frac{1-\zeta}{2} \cdot r + (n-1) \cdot l \right] + \left[\frac{1+\zeta}{2} \cdot (r+n \cdot l) \right] \right]$$

$$C := \frac{\left[\left[\frac{1-\zeta}{2} \cdot r + (n-1) \cdot l \right] + \left[\frac{1+\zeta}{2} \cdot (r+n \cdot l) \right] \right]^2}{2}$$

$$D := \left[r \cdot l \cdot (m-n) + \frac{l^2}{2} \cdot (m^2 - n^2) \right]$$

Yukarıdaki işlemleri sadeleştirirsek aşağıdaki şekle gelir.

$$\sigma_n := \frac{-1}{8} \cdot \rho \cdot \Omega^2 \cdot (2 \cdot r - 2 \cdot l + 5 \cdot n \cdot l - 2 \cdot l \cdot m + \zeta \cdot n \cdot l) \cdot (6 \cdot r + 5 \cdot n \cdot l + 2 \cdot l \cdot m - 2 \cdot l + \zeta \cdot n \cdot l)$$

(4.32)

Sistemde dış kuvvetlerden dolayı meydana gelen potansiyel enerji

$$U_{DK} = \frac{1}{2} \int_v \left(\sigma_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2\tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) dv \quad (4.33)$$

$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$ yaklaşımından ifade, aşağıdaki şekle dönüşür.

$\sigma_x = \sigma_n$ kabulüyle formül aşağıdaki şekle döner.

$$U_{DK} = \frac{1}{2} \int_v \sigma_n \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dv$$

$$dv = A dx$$

$$U_{DK} = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_n \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx$$

Enerji ifadesinde gerekli dönüşümleri yaparsak ifadedeki terimler aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \{q\}^T \frac{4}{l^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) \{q\}$$

$$dx = \frac{1}{2} d\zeta$$

$$U_{DK} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_n \{q\}^T \frac{4}{l^2} \left(\frac{\partial[H]}{\partial \zeta} \right)^T \left(\frac{\partial[H]}{\partial \zeta} \right) \{q\} \frac{1}{2} d\zeta \quad (4.34)$$

$U = \frac{1}{2} \{q\}^T k^e \{q\}$ formundaki enerji denkleminde k rijitlik matrisini çekeriz.

$$k^e = \int_{-1}^1 \frac{2}{l} \sigma_n \left(\frac{\partial[H]}{\partial \zeta} \right)^T \left(\frac{\partial[H]}{\partial \zeta} \right) d\zeta \quad (4.35)$$

$$\left[\frac{d}{d\zeta}(H) \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (-3 + 3 \cdot \zeta^2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \\ \frac{1}{4} \cdot (3 - 3 \cdot \zeta^2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [(-1 + 2 \cdot \zeta) + 3 \cdot \zeta^2] \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki bir eleman için k rijitlik matrisinin integrali içindeki matris çarpımları ve bunların ζ 'ye göre integrali, elemanlar halinde verilmiştir.

$$k_{11} := \int_{-1}^1 \frac{-9}{64} \cdot (-1 + \zeta^2)^2 \cdot \frac{(-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2)}{1} d\zeta$$

$$k_{11} := \frac{-24}{5} \cdot r \cdot n + \frac{6}{5} \cdot r + \frac{3}{5} \cdot l \cdot m^2 + \frac{6}{5} \cdot r \cdot m - \frac{9}{(5 \cdot l)} \cdot r^2 - \frac{12}{5} \cdot l \cdot n^2 - \frac{6}{35} \cdot l + \frac{6}{5} \cdot n \cdot l$$

$$k_{21} := \int_{-1}^1 \frac{-3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) d\zeta$$

$$k_{21} := \frac{-1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 - \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n + \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m + \frac{1}{70} \cdot l^2 - \frac{3}{20} \cdot r^2 + \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2$$

$$k31 := \int_{-1}^1 \frac{9}{64} \cdot (-1 + \zeta^2)^2 \cdot \frac{(-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2)}{1} d\zeta$$

$$k31 := \frac{3}{35} \cdot \frac{(56 \cdot r \cdot l \cdot n - 14 \cdot r \cdot l - 7 \cdot l^2 \cdot m^2 - 14 \cdot r \cdot l \cdot m + 21 \cdot r^2 + 28 \cdot l^2 \cdot n^2 + 2 \cdot l^2 - 14 \cdot n \cdot l^2)}{1}$$

$$k41 := \int_{-1}^1 \frac{-3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) d\zeta$$

$$k41 := \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m - \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 - \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n + \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2 + \frac{1}{5} \cdot n \cdot l^2 - \frac{3}{20} \cdot r^2 + \frac{1}{5} \cdot r \cdot l - \frac{1}{28} \cdot l^2$$

$$k12 := \int_{-1}^1 \frac{-3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) d\zeta$$

$$k12 := \frac{-1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 - \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n + \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m + \frac{1}{70} \cdot l^2 - \frac{3}{20} \cdot r^2 + \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2$$

$$k22 := \int_{-1}^1 \frac{-1}{256} \cdot l \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)^2 \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) d\zeta$$

$$k22 := \frac{-8}{15} \cdot r \cdot l^2 \cdot n + \frac{2}{15} \cdot r \cdot l^2 \cdot m - \frac{4}{15} \cdot l^3 \cdot n^2 + \frac{1}{5} \cdot r \cdot l^2 + \frac{1}{15} \cdot l^3 \cdot m^2 - \frac{3}{70} \cdot l^3 - \frac{1}{5} \cdot l \cdot r^2 + \frac{1}{5} \cdot n \cdot l^3$$

$$k32 := \int_{-1}^1 \frac{3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) d\zeta$$

$$k32 := \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n - \frac{1}{70} \cdot l^2 - \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m + \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 - \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2 + \frac{3}{20} \cdot r^2$$

$$k42 := \int_{-1}^1 \frac{-1}{256} \cdot l \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

$$k42 := \frac{2}{15} \cdot r \cdot l^2 \cdot n - \frac{1}{60} \cdot l^3 \cdot m^2 - \frac{1}{30} \cdot r \cdot l^2 \cdot m - \frac{1}{30} \cdot n \cdot l^3 + \frac{1}{15} \cdot l^3 \cdot n^2 + \frac{1}{140} \cdot l^3 + \frac{1}{20} \cdot l \cdot r^2 - \frac{1}{30} \cdot r \cdot l^2$$

$$k13 := \int_{-1}^1 \frac{9}{64} \cdot (-1 + \zeta^2)^2 \cdot \frac{(-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2)}{1} \, d\zeta$$

$$k13 := \frac{24}{5} \cdot r \cdot n - \frac{6}{5} \cdot l \cdot n + \frac{12}{5} \cdot l \cdot n^2 - \frac{3}{5} \cdot l \cdot m^2 - \frac{6}{5} \cdot r + \frac{6}{35} \cdot l + \frac{9}{(5 \cdot l)} \cdot r^2 - \frac{6}{5} \cdot r \cdot m$$

$$k23 := \int_{-1}^1 \frac{3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

$$k23 := \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n - \frac{1}{70} \cdot l^2 - \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m + \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 - \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2 + \frac{3}{20} \cdot r^2$$

$$k33 := \int_{-1}^1 \frac{-9}{64} \cdot (-1 + \zeta^2)^2 \cdot \frac{(-4 \cdot l^2 \cdot m^2 - 8 \cdot r \cdot l \cdot m + 32 \cdot r \cdot l \cdot n + 16 \cdot l^2 \cdot n^2 + 12 \cdot r^2 - 8 \cdot r \cdot l + 8 \cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8 \cdot n \cdot l^2 + 8 \cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2 \cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2)}{1} \, d\zeta$$

$$k33 := \frac{-24}{5} \cdot r \cdot n + \frac{6}{5} \cdot l \cdot n - \frac{12}{5} \cdot l \cdot n^2 + \frac{3}{5} \cdot l \cdot m^2 + \frac{6}{5} \cdot r - \frac{6}{35} \cdot l - \frac{9}{(5 \cdot l)} \cdot r^2 + \frac{6}{5} \cdot r \cdot m$$

$$k43 := \int_{-1}^1 \frac{3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2) \cdot (-4\cdot l^2 \cdot m^2 - 8\cdot r \cdot l \cdot m + 32\cdot r \cdot l \cdot n + 16\cdot l^2 \cdot n^2 + 12\cdot r^2 - 8\cdot r \cdot l + 8\cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8\cdot n \cdot l^2 + 8\cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2\cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

$$k43 := \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n + \frac{1}{28} \cdot l^2 - \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m + \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 + \frac{3}{20} \cdot r^2 - \frac{1}{5} \cdot r \cdot l - \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2 - \frac{1}{5} \cdot n \cdot l^2$$

$$k14 := \int_{-1}^1 \frac{-3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2) \cdot (-4\cdot l^2 \cdot m^2 - 8\cdot r \cdot l \cdot m + 32\cdot r \cdot l \cdot n + 16\cdot l^2 \cdot n^2 + 12\cdot r^2 - 8\cdot r \cdot l + 8\cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8\cdot n \cdot l^2 + 8\cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2\cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

$$k14 := \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m - \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 - \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n + \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2 + \frac{1}{5} \cdot n \cdot l^2 - \frac{3}{20} \cdot r^2 + \frac{1}{5} \cdot r \cdot l - \frac{1}{28} \cdot l^2$$

$$k24 := \int_{-1}^1 \frac{-1}{256} \cdot l \cdot (-1 - 2\zeta + 3\zeta^2) \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2) \cdot (-4\cdot l^2 \cdot m^2 - 8\cdot r \cdot l \cdot m + 32\cdot r \cdot l \cdot n + 16\cdot l^2 \cdot n^2 + 12\cdot r^2 - 8\cdot r \cdot l + 8\cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8\cdot n \cdot l^2 + 8\cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2\cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

$$k24 := \frac{2}{15} \cdot r \cdot l^2 \cdot n - \frac{1}{60} \cdot l^3 \cdot m^2 - \frac{1}{30} \cdot r \cdot l^2 \cdot m - \frac{1}{30} \cdot n \cdot l^3 + \frac{1}{15} \cdot l^3 \cdot n^2 + \frac{1}{140} \cdot l^3 + \frac{1}{20} \cdot l \cdot r^2 - \frac{1}{30} \cdot r \cdot l^2$$

$$k34 := \int_{-1}^1 \frac{3}{128} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2) \cdot (-4\cdot l^2 \cdot m^2 - 8\cdot r \cdot l \cdot m + 32\cdot r \cdot l \cdot n + 16\cdot l^2 \cdot n^2 + 12\cdot r^2 - 8\cdot r \cdot l + 8\cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8\cdot n \cdot l^2 + 8\cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2\cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

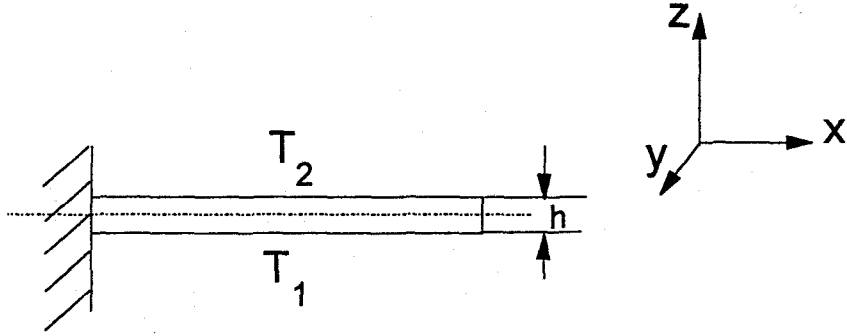
$$k34 := \frac{2}{5} \cdot r \cdot l \cdot n + \frac{1}{28} \cdot l^2 - \frac{1}{10} \cdot r \cdot l \cdot m + \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot n^2 + \frac{3}{20} \cdot r^2 - \frac{1}{5} \cdot r \cdot l - \frac{1}{20} \cdot l^2 \cdot m^2 - \frac{1}{5} \cdot n \cdot l^2$$

$$k44 := \int_{-1}^1 \frac{-1}{256} \cdot l \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2)^2 \cdot (-4\cdot l^2 \cdot m^2 - 8\cdot r \cdot l \cdot m + 32\cdot r \cdot l \cdot n + 16\cdot l^2 \cdot n^2 + 12\cdot r^2 - 8\cdot r \cdot l + 8\cdot r \cdot \zeta \cdot l - 8\cdot n \cdot l^2 + 8\cdot n \cdot l^2 \cdot \zeta + l^2 - 2\cdot \zeta \cdot l^2 + \zeta^2 \cdot l^2) \, d\zeta$$

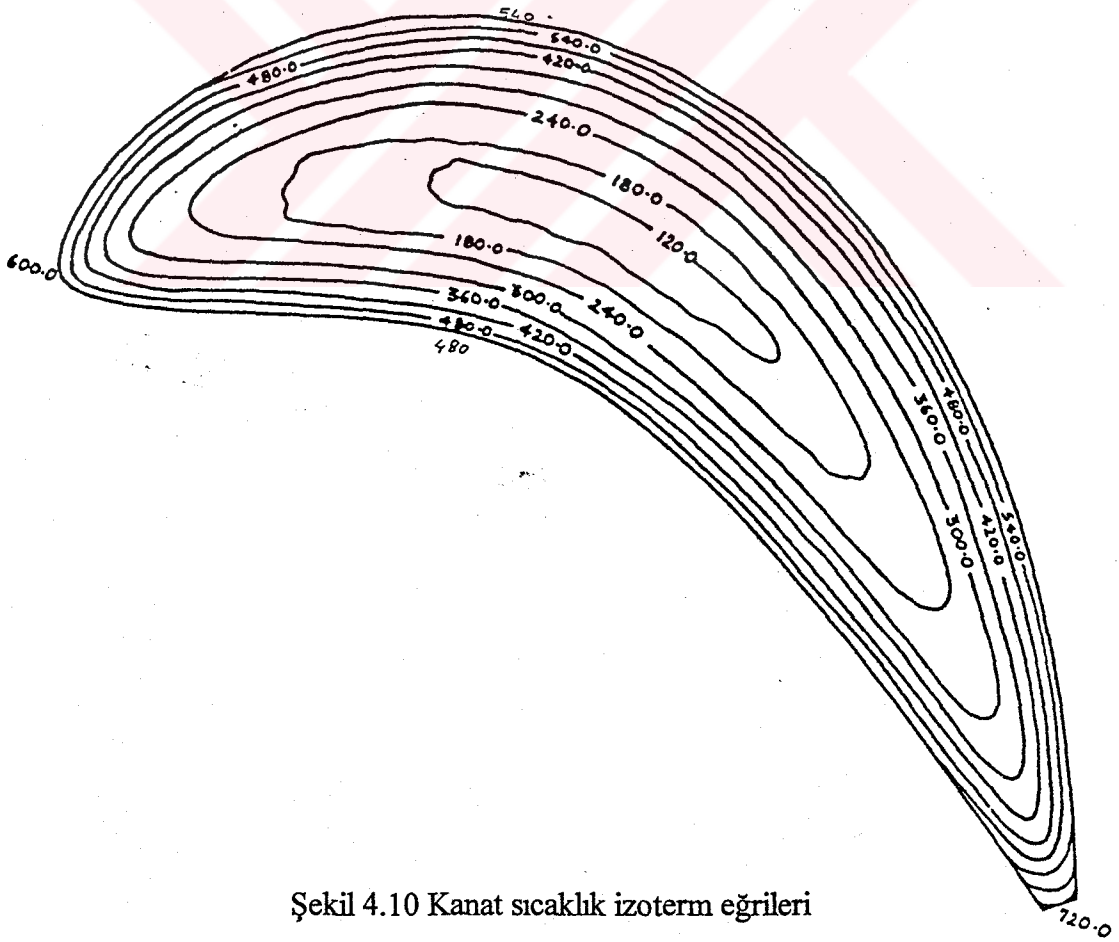
$$k44 := \frac{-4}{15} \cdot l^3 \cdot n^2 - \frac{8}{15} \cdot r \cdot l^2 \cdot n + \frac{1}{15} \cdot l^3 \cdot m^2 - \frac{1}{5} \cdot l \cdot r^2 - \frac{1}{105} \cdot l^3 + \frac{1}{15} \cdot n \cdot l^3 + \frac{2}{15} \cdot r \cdot l^2 \cdot m + \frac{1}{15} \cdot r \cdot l^2$$

4.4 SICAKLIK FARKI ETKİLERİ

4.4.1 İKİ YÜZEY ARASINDAKİ SICAKLIK FARKI ETKİSİ



Şekil 4.9 Çubuk üzerinde sıcaklık değişiminin gösterilmesi



Şekil 4.10 Kanat sıcaklık izoterm eğrileri

Daha önce Shran tarafından yapılan benzer kanat modeli için Şekil.4.10 da görülen izoterm eğrilerini elde etmiştir. Kanat yüzeyi boyunca oluşan gerilmelerde Allen tarafından elde edilmiştir. Farklı kesitlerde farklı gerilmeler olmasına rağmen Morgül,1993 doktora çalışmasında her birim alanda ve her kesitte gerilmelerin sabit olduğu kabul edilerek çözüm yapmıştır. Aşağıda da görüleceği gibi x eksenine doğrultusundaki gerilme farkı yaklaşık olarak, $\Delta\sigma_x = 10.34 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ olduğu anlaşılmıştır. Farklı eksenlerdeki bileşenler ihmal edilmiştir.

$\sigma_s = \Delta\sigma$ olarak hesaplamalar yapılır. Hoa,1979 tarafından çıkarılan 4.33 deki formülde sıcaklık farkından meydana gelen gerilmenin x bileşeni yerine konarak potansiyel enerji hesaplanır.

$$U = \frac{1}{2} A \int_e \sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.37)$$

Gerekli koordinat dönüşümleri ve işlemler yapıldıktan sonra çözümler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$k_1^e := \int_{-1}^1 \sigma \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (-3 + 3\zeta^2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 - 2\zeta + 3\zeta^2) \\ \frac{1}{4} \cdot (3 - 3\zeta^2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2) \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot (-3 + 3\zeta^2) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 - 2\zeta + 3\zeta^2) \quad \frac{1}{4} \cdot (3 - 3\zeta^2) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 + 2\zeta + 3\zeta^2) \right] \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \frac{1}{2} d\zeta$$

Yukardaki matrislerin çarpılması ve ξ 'ye göre integre edilmesi eleman eleman aşağıda gösterilmiştir.

$$k_{11} := \int_{-1}^1 \frac{9 \cdot (-1 + \zeta^2)^2}{8 \cdot 1} d\zeta$$

$$k_{11} := \frac{6}{(5 \cdot 1)}$$

$$k_{21} := \int_{-1}^1 \frac{3}{16} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \, d\zeta$$

$$k_{21} := \frac{1}{10}$$

$$k_{31} := \int_{-1}^1 \frac{-9}{8} \cdot \frac{(-1 + \zeta^2)^2}{1} \, d\zeta$$

$$k_{31} := \frac{-6}{(5 \cdot 1)}$$

$$k_{41} := \int_{-1}^1 \frac{3}{16} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \, d\zeta$$

$$k_{41} := \frac{1}{10}$$

$$k_{12} := \int_{-1}^1 \frac{3}{16} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \, d\zeta$$

$$k_{12} := \frac{1}{10}$$

$$k_{22} := \int_{-1}^1 \frac{1}{32} \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)^2 \cdot 1 \, d\zeta$$

$$k_{22} := \frac{2}{15} \cdot 1$$

$$k_{32} := \int_{-1}^1 \frac{-3}{16} \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \, d\zeta$$

$$k_{32} := \frac{-1}{10}$$

$$k_{42} := \int_{-1}^1 \frac{1}{32} \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot 1 \, d\zeta$$

$$k_{42} := \frac{-1}{30} \cdot 1$$

$$k_{13} := \int_{-1}^1 \frac{-9 \cdot (-1 + \zeta^2)^2}{8 \cdot 1} d\zeta$$

$$k_{13} := \frac{-6}{(5 \cdot 1)}$$

$$k_{23} := \int_{-1}^1 \frac{-3 \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)}{16} d\zeta$$

$$k_{23} := \frac{-1}{10}$$

$$k_{33} := \int_{-1}^1 \frac{9 \cdot (-1 + \zeta^2)^2}{8 \cdot 1} d\zeta$$

$$k_{33} := \frac{6}{(5 \cdot 1)}$$

$$k_{43} := \int_{-1}^1 \frac{-3 \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)}{16} d\zeta$$

$$k_{43} := \frac{-1}{10}$$

$$k_{14} := \int_{-1}^1 \frac{3 \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)}{16} d\zeta$$

$$k_{14} := \frac{1}{10}$$

$$k_{24} := \int_{-1}^1 \frac{1}{32} \cdot (-1 - 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2) \cdot 1 d\zeta$$

$$k_{24} := \frac{-1}{30} \cdot 1$$

$$k_{34} := \int_{-1}^1 \frac{-3 \cdot (-1 + \zeta^2) \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)}{16} d\zeta$$

$$k_{34} := \frac{-1}{10}$$

$$k_{44} := \int_{-1}^1 \frac{1}{32} \cdot (-1 + 2 \cdot \zeta + 3 \cdot \zeta^2)^2 \cdot 1 \, d\zeta$$

$$k_{44} := \frac{2}{15} \cdot 1$$

Sıcaklık farkının rijitliğe etkisi olan matris;

$$k^e := \sigma t \cdot A \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{(5 \cdot 1)} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{(5 \cdot 1)} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \cdot 1 & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{30} \cdot 1 \\ \frac{-6}{(5 \cdot 1)} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{(5 \cdot 1)} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{30} \cdot 1 & \frac{-1}{10} & \frac{2}{15} \cdot 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

4.4.2 KANAT BOYUNCA SICAKLIK FARKININ ETKİSİ

E elastiklik katsayısı sıcaklıkla birlikte önemli bir şekilde değişir. Özellikle bu türbinin devreye alınmasında veya devreden çıkartılmasında daha bir önem kazanır. E'nin değişmesiyle sistemin sahip olduğu doğal frekanslarda değişme olacaktır. Bu durum yani geçici titreşimler durumu için Rao tarafından çözümler üretilmiştir. Rao'nun bu çözümleri ise bu çalışmada ele alınmamıştır.



4.5 KANAT KONUM AÇISI ETKİSİ

Kanat konum açısının etkisini aşağıdaki iki maddeyle kısaca açıklayabiliriz. Bu tezde burulma titreşimleri göz önüne alınmadığından; buradaki etkileri açıklanmamıştır.

1- Kanat konum açısı eğilme modlarının doğal frekanslarını $\sin^2\theta$ ile orantılı olarak arttırmaktadır.

2- Temel modlarda ihmal edilemez fakat yüksek modlarda önemsizdir.

Yukarıda elde edilen F_z kuvveti, z doğrultusunda yayılı olan kuvvetin bir noktaya etkiyen büyüklüğü, aşağıdaki gibidir.

$$F_z = \rho \Omega^2 \sin^2\theta$$

z doğrultusundaki V yer değiştirmesinin virtüel yer değişimi δV olarak düşünülürse, F_z kuvvetinin yaptığı toplam virtüel iş;

$$\delta W = \int_V \delta V F_z dv \quad (4.39)$$

dir.

Yukarıda tanımlanan virtüel işi, bir elemandaki dört değişkene etki eden $\{F\}_e$ eşdeğer kuvvet vektörünün yaptığı virtüel işe eşitlersek;

$$\{F\}_e \{q\}^T = \int_V \delta V F_z dv \quad (4.40)$$

elde edilir.

Daha öncedende tanımladığımız gibi V yer değiştirmesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$[V] = [H] \{q\} \quad (4.41)$$

$[V]$ ve F_z denklemleri 3.40 nolu denklemde yerine koyulursa;

$$\begin{aligned} \{q\}^T \{F\}_e &= \{q\}^T \int_1^A [H]^T \rho \Omega^2 [H] \{q\} \sin^2 \theta dx \\ \{F\}_e &= \rho \Omega^2 A \sin^2 \theta \int_1^A [H]^T [H] dx \{q\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$\{F\} = [k] \{q\}$ bağıntısını kullanarak kanat konum açısının etkisini veren rijitlik matrisi elde edilir.

$dx = \frac{1}{2} d\zeta$ ifadesi ile koordinat dönüşümü sağlanarak eleman rijitlik matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[k^e] = \rho \Omega^2 A \sin^2 \theta \int_{-1}^1 [H]^T [H] \frac{1}{2} d\zeta \quad (4.43)$$

Eleman rijitlik matrisinin sayısal olarak değeri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$k_{\zeta}^e := \rho \cdot A \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (2 - 3\zeta + \zeta^3) \\ \frac{1}{4} \cdot (1 - \zeta - \zeta^2 + \zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \cdot (2 + 3\zeta - \zeta^3) \\ \frac{1}{4} \cdot (-1 - \zeta + \zeta^2 + \zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot (2 - 3\zeta + \zeta^3) \quad \frac{1}{4} \cdot (1 - \zeta - \zeta^2 + \zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \cdot (2 + 3\zeta - \zeta^3) \quad \frac{1}{4} \cdot (-1 - \zeta + \zeta^2 + \zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{1}{2} d\zeta$$

Yukarıdaki matris işlemleri yapılırsa ve sonuç ζ 'ye göre integre edilirse rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$k_{\zeta}^e := \rho \cdot A \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{35} \cdot 1 & \frac{11}{210} \cdot 1^2 & \frac{9}{70} \cdot 1 & \frac{-13}{420} \cdot 1^2 \\ \frac{11}{210} \cdot 1^2 & \frac{1}{105} \cdot 1^3 & \frac{13}{420} \cdot 1^2 & \frac{-1}{140} \cdot 1^3 \\ \frac{9}{70} \cdot 1 & \frac{13}{420} \cdot 1^2 & \frac{13}{35} \cdot 1 & \frac{-11}{210} \cdot 1^2 \\ \frac{-13}{420} \cdot 1^2 & \frac{-1}{140} \cdot 1^3 & \frac{-11}{210} \cdot 1^2 & \frac{1}{105} \cdot 1^3 \end{bmatrix}$$

5. KÜTLE MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Katı bir gövde için kinetik enerji aşağıdaki formül ile elde edilir;

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \dot{\mathbf{U}} \right\}^T \left\{ \dot{\mathbf{U}} \right\} \rho dV \quad (5.1)$$

$\dot{\mathbf{U}}$: x noktasındaki hız vektörü

$$\left\{ \dot{\mathbf{U}} \right\} = \left\{ \dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \right\}^T$$

Sonlu eleman metodunda gövdeyi elemanlara bölüp Şekil fonksiyonları kullanılarak düğüm noktalarının yer değiştirmeleri \mathbf{q} 'ya göre \mathbf{u} ile ifade edilebilir.

$$\left\{ \mathbf{u} \right\} = [\mathbf{N}] \left\{ \mathbf{q} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{U}} = [\mathbf{N}] \left\{ \dot{\mathbf{q}} \right\}$$

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{q}} \right\}^T \left[\int_e [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \rho dV \right] \left\{ \dot{\mathbf{q}} \right\}$$

.Eleman kütle matrisi

$$\mathbf{m}^e = \int_e \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (5.2)$$

olarak elde edilir.

4-1 BOYUNA TİTREŞİMDEN OLUŞAN KÜTLE MATRİSİ

$$\mathbf{m}^e = \int_e \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV$$

$$\left\{ \mathbf{q} \right\}^T = \left\{ q_1 \quad q_2 \right\} \quad (5.3)$$

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2] \quad (5.4)$$

$$N_1(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}$$

$$N_2(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}$$

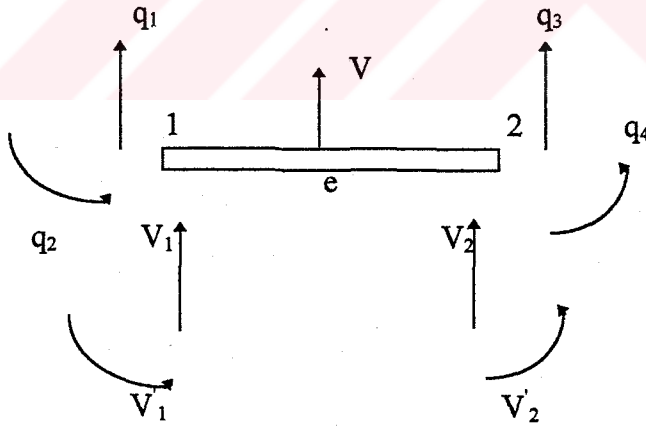
$dV = A dx$ ve $dx = (1/2) d\zeta$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuca varılır.

$$m^e = \int_{-1}^1 \rho \begin{bmatrix} \frac{1-\zeta}{2} \\ \frac{1+\zeta}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1-\zeta}{2} & \frac{1+\zeta}{2} \end{bmatrix} A_e \frac{1}{2} d\zeta \quad (5.5)$$

Burada ζ 'ye göre integrale edersek kütle matrisini bulmuş oluruz.

$$m^e = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.2 EĞİLMEDEN DOLAYI MEYDANA GELEN KÜTLE MATRİSİ



Şekil 5.1 çubuk eğilme elemanı

Yukarda görülen çubuk elemanı için daha önce verilen kübik şekil fonksiyonlarını kullandık

$$\{V\} = [H] \{q\}$$

$$m^e = \int_{-1}^1 [H]^T [H] \rho A \frac{1}{2} d\zeta \quad (5.7)$$

$$m = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2-3\zeta+\zeta^3) \\ \frac{1}{4}(1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(2+3\zeta-\zeta^3) \\ \frac{1}{4}(-1-\zeta+\zeta^2+\zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{1}{4}(2-3\zeta+\zeta^3) \quad \frac{1}{4}(1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}(2+3\zeta-\zeta^3) \quad \frac{1}{4}(-1-\zeta+\zeta^2+\zeta^3) \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho A d\zeta$$

Eğilmeden dolayı meydana gelen kütle matrisi aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$m = \rho \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{35} \cdot l \cdot A & \frac{11}{210} \cdot l^2 \cdot A & \frac{9}{70} \cdot l \cdot A & -\frac{13}{420} \cdot l^2 \cdot A \\ \frac{11}{210} \cdot l^2 \cdot A & \frac{1}{105} \cdot l^3 \cdot A & \frac{13}{420} \cdot l^2 \cdot A & -\frac{1}{140} \cdot l^3 \cdot A \\ \frac{9}{70} \cdot l \cdot A & \frac{13}{420} \cdot l^2 \cdot A & \frac{13}{35} \cdot l \cdot A & -\frac{11}{210} \cdot l^2 \cdot A \\ -\frac{13}{420} \cdot l^2 \cdot A & -\frac{1}{140} \cdot l^3 \cdot A & -\frac{11}{210} \cdot l^2 \cdot A & \frac{1}{105} \cdot l^3 \cdot A \end{bmatrix}$$

5.3 KESİT DÖNMESİ HALİ

Ö, Morgül'ün doktora çalışmasında bir türbin kanadı için kesit dönmesi hesaba katılarak rijitliğe olan etkisi çıkartılmıştır. Aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Kinetik enerji bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$T_{2v} = \frac{1}{2} \rho I \int_e \dot{V}^2 dx \quad (5.9)$$

$\{V\} = [H] \{q\}$ bağıntısının zamana göre türevi alınıp yerine yazılırsa

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \left\{ \dot{q} \right\}^T \frac{4}{l^2} \left(\frac{dH}{d\zeta}\right)^T \left(\frac{dH}{d\zeta}\right) \left\{ \dot{q} \right\} \quad (5.10)$$

$$dx = \frac{1}{2} d\xi$$

Yukardaki denklemleri kinetik enerji bağıntısında yerine yazarsak denklem aşağıdaki şekle gelir.

$$T_{2v} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q} \right\}^T \rho I \int_{-1}^1 [H']^T [H'] \frac{4}{l^2} \frac{1}{2} d\xi \left\{ \dot{q} \right\}$$

$$m = \rho \cdot I \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (-3 + 3\zeta^2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 - 2\zeta + 3\zeta^2) \\ \frac{1}{4} \cdot (3 - 3\zeta^2) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [(-1 + 2\zeta) + 3\zeta^2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (-3 + 3\zeta^2) & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1 - 2\zeta + 3\zeta^2) & \frac{1}{4} \cdot (3 - 3\zeta^2) & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [(-1 + 2\zeta) + 3\zeta^2] \end{bmatrix} \cdot \frac{4}{l^2} \frac{1}{2} d\xi$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra kesit dönmesi hali için kütle matrisi elde edilir.

$$m = \rho \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{(5 \cdot 1)} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{(5 \cdot 1)} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-6}{(5 \cdot 1)} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{(5 \cdot 1)} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{30} & \frac{-1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

6-TOPLAM MATRİSLERİNİN ELDE EDİLMESİ

6.1.1 ELEMEN RİJİTLİK MATRİSİ

Daha önceki bölümlerde elde ettiğimiz lineer eğilme rijitliği eleman matrislerini toplarsak bir eleman için toplam eğilme matrisini buluruz.

$$[K^e]_V = [k_e^e] + [k_{scf}^e] + [k_{dn}^e] + [k_{kka}^e] \quad (6.1)$$

$[K^e]_V$ = Toplam matris

$[k_e^e]$ = Eğimeden meydana gelen rijitlik matrisi

$[k_{scf}^e]$ = İki yüzey arasındaki farkdan dolayı meydana gelen rijitlik matrisi

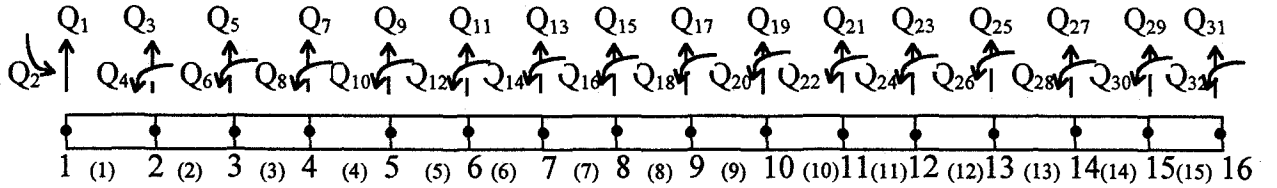
$[k_{dn}^e]$ = Dönme hızından meydana gelen rijitlik matrisi

$[k_{kka}^e]$ = Kanat konum açısından dolayı meydana gelen rijitlik matrisi



Şekil 6.1 Eğilme elemanın lokal koordinatlarda gösterilmesi

Kanadı dikdörtgen eşdeğer kesitli çubuk olarak kabul ettiğimiz bu çubuğu 15 elemana bölersek her eleman için lokal koordinatlarda elde edilen rijitlik matrislerini global koordinatlarda yazmamız gerekir.



Şekil 6.2 Çubuğun Global koordinatlarda gösterilmesi

Tablo 6.1 den lokal ve global numaralandırmayı rahatlıkla görebiliriz.

Tablo 6.1 Numaralandırma

	LOKAL	
Eleman (e)	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10
10	10	11
11	11	12
12	12	13
13	13	14
14	14	15
15	15	16

GLOBAL

Sistem için toplam eğilme rijitlik matrisi

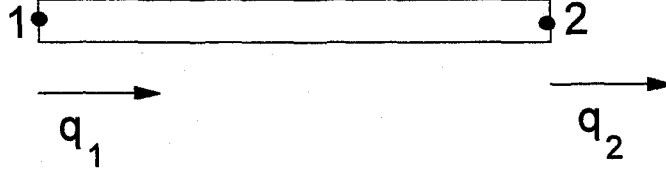
$$[K]_V = \sum_{n=1}^m [K^e]_V \quad (6.2)$$

şeklinde elde edilir.

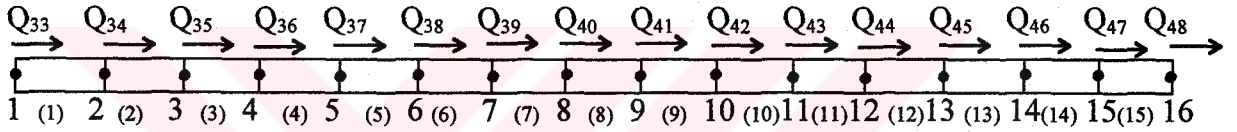
n : eleman numarası

m : toplam eleman sayısı

Boyuna yer değiştirme için elemanı lokal koordinatlar ve global koordinatlarda gösterirsek aşağıdaki gibi olur.



şekil 6.3 Boyuna yer değiştirmenin lokal koordinatlarda gösterilmesi



şekil 6.4 Boyuna yer değiştirmenin global koordinatlarda gösterilmesi

Boyuna yer değiştirme için rijitlik matrisini $[k^e]_u$ şeklinde gösterirsek sistem için boyuna yer değiştirmeden meydana gelen rijitlik matrisini

$$[K]_u = \sum_{n=1}^m [k^e]_u \quad (6.4)$$

şeklinde elde ederiz.

6.1-2 SİSTEM İÇİN RİJİTLİK MATRİSİ

Sistem için eğilme titreşiminden ve boyuna titreşimden meydana gelen rijitlik matrislerini süperpoze edersek global koordinatlarda 48 x 48 bir sistem rijitlik matrisi elde ederiz.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_v & [0] \\ [0] & [K]_u \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$[K]$: Sistem için toplam rijitlik matrisi

6.2 TOPLAM KÜTLE MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

6.2.1 ELEMEN KÜTLE MATRİSİ

$$[M^e]_V = [M^e]_e + [M^e]_{KD} \quad (6.6)$$

$[M^e]_e$ = Eğilmeden oluşan kütle matrisi

$[M^e]_{KD}$ = Kesit dönmesinden meydana gelen kütle matrisi

Sistem için eğilmeden dolayı meydana gelen kütle matrisi ve boyuna uzamadan meydana gelen kütle matrisi sırasıyla

$$[M]_V = \sum_{n=1}^m [M^e]_V \quad (6.7)$$

$$[M]_u = \sum_{n=1}^m [M^e]_u \quad (6.8)$$

şeklinde elde edilir.

6.2.2 SİSTEM İÇİN KÜTLE MATRİSİNİN ELDESİ

Sistem için eğilme titreşiminden ve boyuna titreşimden meydana gelen kütle matrislerini süperpoze edersek global koordinatlarda 48 x 48 bir sistem rijitlik matrisi elde ederiz.

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_V & [0] \\ [0] & [M]_U \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$[M]$: Sistem için toplam kütle matrisi

7- SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde çeşitli kanat verilerinde ilk on mod için doğal frekans ve ilk üç mod için şekil araştırması yapılmıştır.

7.1- Eğilme Titreşimleri

7.1-a Sabit-serbest sınır koşulu için

$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, $b=0.0254 \text{ m}$, $h=0.00635 \text{ m}$, $L=0.152 \text{ m}$, $r=1.33*L$,
 $\theta = 0$, $E=0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2$, $\Omega = 1000 \text{ r / s}$

$$\lambda = \omega \cdot L^2 \cdot \sqrt{(\rho \cdot A) / (E \cdot I)} \text{ (frekans parametresi)}$$

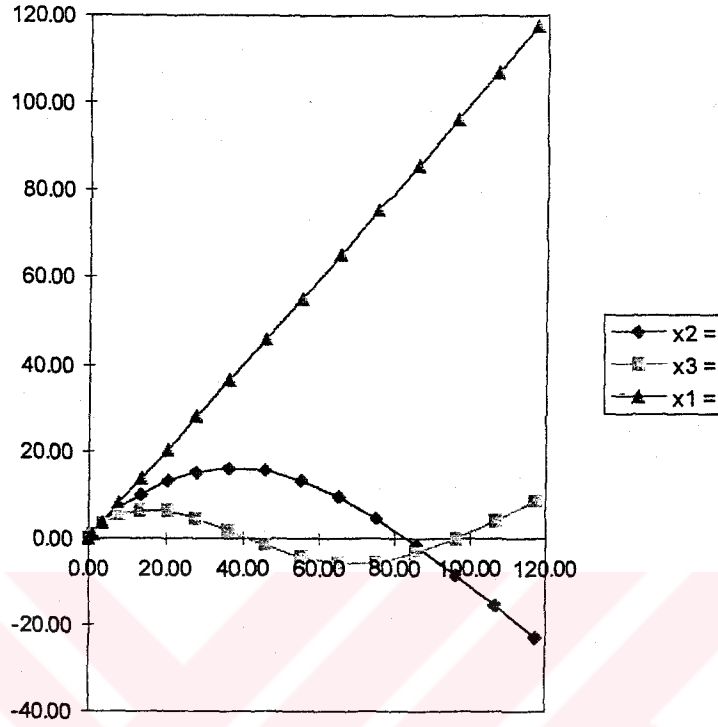
Yukardaki değerler için

Tablo 7.1 Çeşitli σ_s değerleri için frekans parametreleri

	$\sigma_s=0$	$\sigma_s=10.34 \cdot 10^6$
1. frekans	5.152472055544368e+000	5.029288859781819e+000
2. frekans	2.375355026928718e+001	2.356107836883332e+001
3. frekans	6.316193583920366e+001	6.299179921015657e+001
4. frekans	1.215747473284521e+002	1.214133126008664e+002
5. frekans	1.986694275705329e+002	1.985136985743423e+002
6. frekans	2.938928138699855e+002	2.937413401306667e+002
7. frekans	4.066579200306024e+002	4.066579200306024e+002
8. frekans	5.363746963549266e+002	5.362299378664957e+002
9. frekans	6.824895871239356e+002	6.823478345553981e+002
10. frekans	8.445084494011603e+002	8.443696457785330e+002

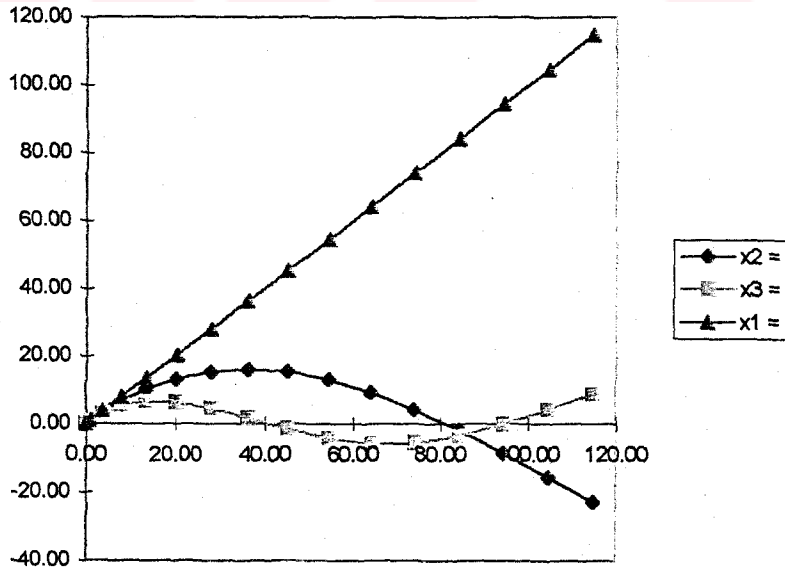
değerleri elde edilir

İlk üç mod için şekil aşağıdaki gibi elde edilir, $\sigma_s = 10.34 \cdot 10^6$



Şekil 7.1 Mod şekilleri

İlk üç mod için şekil aşağıdaki gibi elde edilir, $\sigma_s = 0$



Şekil 7.2 Mod şekilleri

$$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3, b = 0.0254 \text{ m}, h = 0.00635 \text{ m}, L = 0.152 \text{ m}, \sigma_s = 0$$

$$r = 1.33 * L, E = 0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2, \Omega = 1000 \text{ r / s}$$

$$\lambda = \omega \cdot L^2 \cdot \sqrt{(\rho \cdot A) / (E \cdot I)} \text{ (frekans parametresi)}$$

Tablo 7.2 θ 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri

	$\theta = 0$	$\theta = 49.3^\circ$
1. frekans	5.152472055544368e+000	5.300547141408167e+000
2. frekans	2.375355026928718e+001	2.362022499628323e+001
3. frekans	6.316193583920366e+001	6.301380316636001e+001
4. frekans	1.215747473284521e+002	1.214246236126035e+002
5. frekans	1.986694275705329e+002	1.985205336997827e+002
6. frekans	2.938928138699855e+002	2.937458920797283e+002
7. frekans	4.066579200306024e+002	4.065132186636641e+002
8. frekans	5.363746963549266e+002	5.362323413833443e+002
9. Frekans	6.824895871239356e+002	6.823496826033989e+002
10. frekans	8.445084494011603e+002	8.443711038836786e+002

$\rho=7800 \text{ kg/m}^3$, $b=0.0254 \text{ m}$, $h=0.00635 \text{ m}$, $L=0.152 \text{ m}$, $\sigma_s=0$
 $r=1.33*L$, $\theta=0$, $E=0.254 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2$,

$\lambda = \omega \cdot L^2 \cdot \sqrt{(\rho \cdot A) / (E \cdot I)}$ (frekans parametresi)

Tablo 7.3 Ω 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri

	$\Omega = 0 \text{ r/s}$	$\Omega = 2000 \text{ r/s}$	$\Omega = 3000 \text{ r/s}$
1.frekans	3.514828055691289e +000	7.966645655278982e +000	1.121983136873068e +001
2.frekans	2.198286770528368e +001	2.774911563407188e +001	3.355051213968013e +001
3.frekans	6.135641784454441e +001	6.762979584778057e +001	7.463819659281783e +001
4.frekans	1.196877867288053e +002	1.264241686539085e +002	1.342876552083122e +002
5.frekans	1.967259062111796e +002	2.037660184423190e +002	2.121777591964698e +002
6.frekans	2.919062440576530e +002	2.991667188542540e +002	3.079567971806586e +002
7.frekans	4.046374819853425e +002	4.120670012303643e +002	4.211349637992045e +002
8.frekans	5.343274665641195e +002	5.418898348261680e +002	5.511693920489203e +002
9.frekans	6.804217060643271e +002	6.880878714008604e +002	6.975298293965217e +002
10.frekans	8.424256050360435e +002	8.501701749547177e +002	8.597344544025339e +002

7.1-b Sabit-sabit sınır koşullarında çözümler

$$\rho=7800 \text{ kg / m}^3, b=0.0254 \text{ m}, h=0.00635 \text{ m}, L=0.152 \text{ m}, \sigma_s=0 \text{ N / m}^2$$

$$r=1.33*L, E=0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2, \Omega =1000 \text{ r / s}$$

$$\lambda = \omega \cdot L^2 \cdot \sqrt{(\rho \cdot A) / (E \cdot I)} \text{ (frekans parametresi)}$$

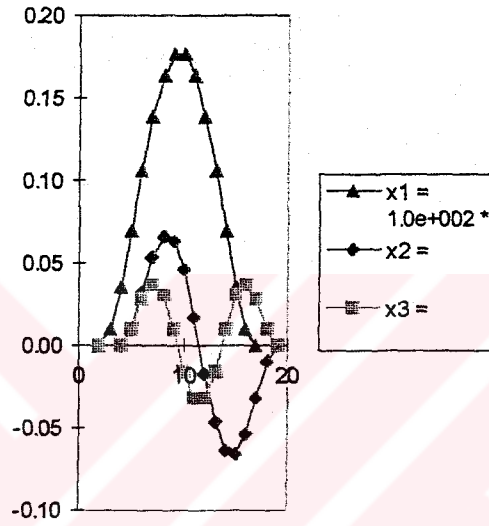
Tablo 7.4 θ 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri

	$\theta = 0$	$\theta = 49.3$
1.frekans	2.340823857604731e +001	2.346794711778231e +001
2.frekans	6.294515656297305e +001	6.296727723585290e +001
3.frekans	1.217005770147389e +002	1.217119327955898e +002
4.frekans	1.992453138170360e +002	1.992521786551724e +002
5.frekans	2.951223226885967e +002	2.951268973635883e +002
6.frekans	4.087932750281770e +002	4.087965265487799e +002
7.frekans	5.397146923345989e +002	5.397171110683466e +002
8.frekans	6.873824507522788e +002	6.873843115602228e +002
9.frekans	8.513577845066847e +002	8.513592533394308e +002
10.frekans	1.031252021676071e +003	1.031253204687201e +003

$$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3, b = 0.0254 \text{ m}, h = 0.00635 \text{ m}, L = 0.152 \text{ m}, \sigma_s = 0 \text{ N / m}^2$$

$$r = 1.33 * L, E = 0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2, \Omega = 0 \text{ r / s}, \theta = 0$$

Yukardaki değerler için ilk üç mod şekli sabit-sabit sınır koşulu için aşağıdaki gibidir.



Şekil 7.3 Mod şekilleri

$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, $b=0.0254 \text{ m}$, $h=0.00635 \text{ m}$, $L=0.152 \text{ m}$, $\sigma_s = 0$
 $r=1.33*L$, $\theta = 0$, $E=0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2$,

$\lambda = \omega \cdot L^2 \cdot \sqrt{(\rho \cdot A) / (E \cdot I)}$ (frekans parametresi)

Tablo 7.5 Ω 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri

	$\Omega = 0 \text{ r / s}$	$\Omega = 2000 \text{ r / s}$	$\Omega = 3000 \text{ r / s}$
1.frekans	2.235344866978441e +001	2.625493268371797e +001	3.025856552341775e +001
2.frekans	6.147049274055588e +001	6.712976727734518e +001	7.345135370017262e +001
3.frekans	1.200667848998700e +002	1.264498270968616e +002	1.339128425194282e +002
4.frekans	1.975169885803713e +002	2.043254634262044e +002	2.124679149560377e +002
5.frekans	2.933294063617710e +002	3.004244995922416e +002	3.090191345757964e +002
6.frekans	4.069521156164493e +002	4.142582472621582e +002	4.231788701099316e +002
7.frekans	5.378359817477703e +002	5.453046000356177e +002	5.544715288610200e +002
8.frekans	6.854742852445308e +002	6.930695005525522e +002	7.024259903271616e +002
9.frekans	8.494269693093050e +002	8.571192995521691e +002	8.666206650987460e +002
10.frekans	1.029304547615483e +003	1.037068452082900e +003	1.046677217330799e +003

$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, $b=0.0254 \text{ m}$, $h=0.00635 \text{ m}$, $L=0.152 \text{ m}$,
 $r=1.33*L$, $\theta=0$, $E=0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2$, $\Omega=1000 \text{ r / s}$

$\lambda = \omega \cdot L^2 \cdot \sqrt{(\rho \cdot A) / (E \cdot I)}$ (frekans parametresi)

Tablo 7.6 σ_s 'nın çeşitli değerleri için frekans değerleri

	$\sigma_s = 0$	$\sigma_s = 10.34 \cdot 10^6 \text{ N / m}^2$
1.frekans	2.340823857604731e +001	2.333529480614265e +001
2.frekans	6.294515656297305e +001	6.274900950978810e +001
3.frekans	1.217005770147389e +002	1.213213387880698e +002
4.frekans	1.992453138170360e +002	1.986244339384225e +002
5.frekans	2.951223226885967e +002	2.942026749017720e +002
6.frekans	4.087932750281770e +002	4.075194105938518e +002
7.frekans	5.397146923345989e +002	5.380328560783629e +002
8.frekans	6.873824507522788e +002	6.852404584293075e +002
9.frekans	8.513577845066847e +002	8.487048191356319e +002
10.frekans	1.031252021676071e +003	1.028038477438709e +003

7.2 Boyuna Titreşimler

7.2.a- Sabit - serbest sınır koşulları için

 $\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, $b=0.0254 \text{ m}$, $h=0.00635 \text{ m}$, $L=0.152 \text{ m}$, $E=0.254 \cdot 10^{12} \text{ N / m}^2$

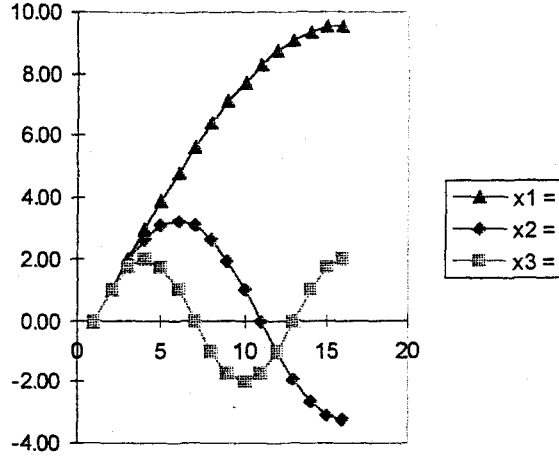
$$\lambda = \omega / \sqrt{(E) / (\rho * L^2)}$$

Yukardaki değerler için frekans değerleri ,

Tablo 7.7 Boyuna Titreşim ve sabit-serbest sınır koşulu için frekans değerleri

	Frekans değerleri
1.Frekans	1.571514162730423e+000
2.Frekans	4.731791066767981e+000
3.Frekans	7.943979136099012e+000
4.Frekans	1.124311558395195e+001
5.Frekans	1.466440782825293e+001
6.Frekans	1.824216424208306e+001
7.Frekans	2.200710098917180e+001
8.Frekans	2.598076211353318e+001
9.Frekans	3.016510026626835e+001
10.Frekans	3.452466715685600e+001

Boyuna titreşimde ilk üç mod şekli aşağıdaki gibidir,



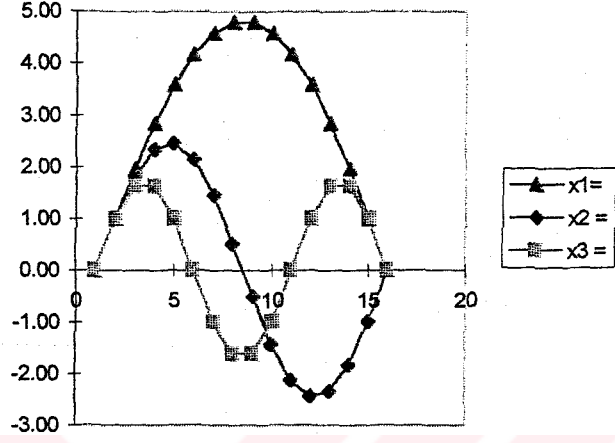
Şekil 7.4 Mod şekilleri

7.2.b- Sabit - sabit sınır koşulları için

Tablo 7.8 Boyuna Titreşim ve sabit-sabit sınır koşulu için frekans değerleri

	Frekans değerleri
1.Frekans	3.147337661768575e+000
2.Frekans	6.329215648179883e+000
3.Frekans	9.580475461022550e+000
4.Frekans	1.293630568435507e+001
5.Frekans	1.643167672515497e+001
6.Frekans	2.009958093440542e+001
7.Frekans	2.396709378594419e+001
8.Frekans	2.804766467785909e+001
9.Frekans	3.232733510829347e+001
10.Frekans	3.674234614174769e+001

Boyuna titreşim ve sabit-sabit sınır koşulları için ilk üç mod şekli aşağıdaki gibidir,



Şekil 7.5. Mod şekilleri

7.3 SONUÇLARIN İRDELENMESİ

Dönen bir türbin kanatı için iki yüzey arasındaki sıcaklık, kanat konum açısı ve dönme hızı gibi etkiler altında doğal frekanslar bulunmuş ve ilk üç mod için şekiller çizilmiştir.

1) Boyutsuz frekans parametresi eğilme titreşimlerinde disk yarıçapı ve açısal hızla lineer olarak artmaktadır. Bu etkiler ilk modlarda yüksek modlara göre daha etkilidir.

2) Kanat konum açısı eğilme titreşimlerinde doğal frekanslar $\sin^2\theta$ ile lineer olarak artmaktadır. İlk modlardaki etkisi daha yüksektir.

3) İki yüzey arasındaki sıcaklık etkisiyle frekans parametrelerinde azalma görülmüştür.

KAYNAKLAR

ALLEN, S. M. , “ Effect of Temperature Dependent Mechanical Properties on Thermal Stress in Cooled Turbine Blades ” , Journal of Engineering for Power , Vol. 104 , pp. 349 - 353 , 1982.

CHANDRUPATLA , R. T. , “ Introduction to Finite Elements in Engineering ” , Prentice Hall , Sydney , 1991.

HOA , S. V. , “ Vibration of A Rotating Beam With Tip Mass ” , Journal of Sound and Vibration , Vol. 67(3) , pp. 369 - 381 , 1979.

KARADAĞ , V. , “ Türbinlerde , Aerofil Kanat ve Disk-Kanat Sistemi Titreşimlerinin Sonlu Elemanlar Metodu İle Araştırılması “ , Doktora Tezi , İTÜ Makina Fakültesi , 1982.

KARADAĞ , V. , MORGÜL , Ö.K. , “ Ani Sıcaklık Değişimi Altında Dönen Türbin Kanadı “ , 4. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu , Yalova İSTANBUL, Eylül 1990.

LAZAN, B.J. , “Damping of Materials and Members in Structural Mechanics”, Elmsford, N.Y., Pergamon Press, 1968.

MORGÜL , Ö.K. , “ Ani Sıcaklık Değişimi Etkisindeki Türbin Kanatı Nonlinear Titreşimlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile incelenmesi ” , Doktora Tezi , İTÜ Makina Fakültesi, 1993.

RAO , J. S. , “ Turbomachine Blade Vibration ” , John Wiley & Sons , New Delhi , 1991.

SHARAN,A.M.,BAHREE, R. , “Variation of Undamped Rotor Blade Frequencies Subjected to Transient Heat Flux “, AIAA Journal, Vol.27, No.6,pp.802-808,1989.

TİMOSHENKO , S. P. , Vibration Problems in Engineering , Van Nostrand Publication 1955.

TİMOSHENKO , S. P. , Goodier , J. N. , Theory of Elasticity , McGraw - Hill Publications 1961

WRIGHT,A.D., “Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams” , Journal of Applied Mechanics, Vol.49, pp.197-202 , 1982

ÖZ GEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 18 Aralık 1973

Doğum Yeri : İSTANBUL

Eğitim :

Lise 1987-90 Kemal Hasoğlu Lisesi, İstanbul

Üniversite 1990-94 Yıldız Teknik Üniversitesi , Makina
Fakültesi ,Makina Mühendisliği

Yüksek Lisans 1994- Yıldız Teknik Üniversitesi

Mesleği: Makina Mühendisi

İşi : Araştırma Görevlisi

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
DOKÜMANLAMA VE ARŞİV MERKEZİ