



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AKIŞKAN TAŞIYAN BİR BORUNUN
AKTİF TİTREŞİM KONTROLÜ**

Makina Müh. Ersun YALÇIN

F.B.E Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Faruk YİĞİT

İSTANBUL -Eylül 1995

İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA NO</u>
SEMBOL LİSTESİ	III
ŞEKİL LİSTESİ	V
TEŞEKKÜR	VI
TÜRKÇE ÖZET	VII
İNGİLİZCE ÖZET	VIII
BÖLÜM 1	
<i>ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</i>	1
BÖLÜM 2	
<i>SİSTEMİN MODELLENMESİ</i>	
2.1 Giriş	5
2.2 Matematiksel Modelin Çıkarılması	6
2.3 Dinamik Denklemin Ayrıştırılması	9
2.3.1 Sistemin İlk Titreşim Biçimi	11
2.3.2 Sistemin İlk İki Titreşim Biçimi	11
2.3.3 Sistemin İlk Üç Titreşim Biçimi	12
2.3.4 Katsayı Matrislerinin Özellikleri	13
2.3.5 Yer Değiştirme Miktarının Hesabı	14
2.4 Kritik Akış Hızı	15
2.5 Temel Kritik Frekans	16
2.6 Hareket Denklemlerinin Durum Uzayında İfadesi	17
2.6.1 İlk Titreşim Biçimi	18
2.6.2 İlk İki Titreşim Biçimi	19
2.6.3 İlk Üç Titreşim Biçimi	20
2.6.4 Durum Uzayında Yer Değiştirme Miktarının Hesabı	21

BÖLÜM 3

SİSTEM DİNAMİĞİNİN İNCELENMESİ

3.1 Giriş	23
3.2 Sistemin Karakteristik Denklemi	23
3.3 Sistemin Similasyonu	28

BÖLÜM 4

AKTİF TİTREŞİMLERİN KONTROLU

4.1 Giriş	33
4.2 Eyleyicinin Yerleştirilmesi	35
4.3 Hareket Denklemi	36
4.4 Kontrol Organı Tasarımı	37
4.4.1 Regülatör Tasarımı -1	38
4.4.2 Regülatör Tasarımı -2	48
4.5 İhmal Edilen Titreşim Biçimlerinin Etkisi ve Uygun Titreşim Biçimi Sayısı	54

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

5.1 Giriş	56
5.2 Yapılan Çalışma	56
5.3 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar	57
Kaynaklar	58
Ekler	62

SEMBOL LİSTESİ

<u>SEMBOL</u>	<u>TANIMI</u>	<u>BOYUTU</u>
F	: Basınç kuvveti	[N/m]
A	: Borunun iç kesiti	[m ²]
ρ	: Akışkanın yoğunluğu	[kg/m ³]
v	: Akış hızı	[m/sn]
t	: Zaman	[sn]
S	: Boru çeperinin çevre uzunluğu	[m]
E	: Elastiklik modülü	[N/m ²]
q, Q, T	: Gerilme	[N/m ²]
\mathfrak{M}	: Eğilme momenti	[Nm]
P	: Basınç	[N/m ²]
m	: Birim uzunluktaki içi boş borunun kütlesi	[kg/m]
L	: Borunun boyu	[m]
M	: Birim uzunlukta ki borunun içindeki akışkan ile birlikte kütlesi	[kg/m]
I	: Eğilmeye atalet momenti	[m ⁴]
F _{kr}	: Kritik burkulma kuvvet	[N]
$\phi(x)$: Mukayese fonksiyonu	
n	: Titreşim biçimi sayısı	
\mathfrak{w}	: Zaman uzayında yer değiştirme	[m]
$\dot{\mathfrak{w}}$: Zaman uzayında hız vektörü	[m/sn]
$\ddot{\mathfrak{w}}$: Zaman uzayında ivme vektörü	[m/sn ²]
<u>M</u>	: Kütle matrisi	
<u>G</u>	: Jiroskopik sönüm matrisi	
<u>K</u>	: Rijitlik matrisi	
<u>C</u>	: Çıkış katsayı matrisi	
V _c	: Kritik akış hızı	[m/sn]

ω	: Açısal hız	[Rd/sn]
\underline{x}	: Durun değişkenleri vektörü	
y	: Yer değiştirme miktarı	[m]
β	: Akış hızı oranı	
α	: Kütle oranı	
$u(t)$: Kontrol kuvveti	[N]
x_m	: Sensörün sol mesnetten uzaklığı	[m]
x_a	: Eyleyicinin sol mesnetten uzaklığı	[m]
$\delta(x)$: Dirac delta fonksiyonu	
\underline{A}	: Karakteristik matris	
\underline{B}	: Giriş vektörü	
\underline{A}_k	: Kontrol edilmiş sistemin karakteristik matrisi	
\underline{K}	: Geri besleme kazanç vektörü	
r	: Hız geri besleme kazancı	[kg/s]
\underline{S}_c	: Kontrol edilebilirlik matrisi	
\underline{T}	: Hız katsayı vektörü	

ŞEKİL LİSTESİ

- Şekil 2.1 Akışkan Taşıyan Basit Mesnetli Boru
- Şekil 2.2a,b Elemanter Boru Parçasına ve İçindeki Akışkana Etki Eden Kuvvetler
- Şekil 3.1 Kritik Frekanslar
- Şekil 3.2 Kütle Oranının Değişimiyle Kritik Frekansın Değişimi
- Şekil 3.3a-g Sistemin Yer Değiştirme Miktarı
- Şekil 4.1 Aktif Kontrol Sistemi
- Şekil 4.2 Akışkan Taşıyan Boru ve Eyleneç
- Şekil 4.3 Kontrol Sisteminin Basit Şeması
- Şekil 4.4a-g Kontrol Sisteminin Similasyonları
- Şekil 4.5 Kritik Frekansın Değişimi
- Şekil 4.6 Sönüm Oranının Değişimi
- Şekil 4.7a-g Regülatör Tasarımı-1 in Similasyonu
- Şekil 4.8 Yer Değiştirme Eğrilerinin Karşılaştırılması
- Şekil 4.9a-g Regülatör Tasarımı-2 nin Similasyonu
- Şekil 4.10 Yer Değiştirme Eğrilerinin Karşılaştırılması

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sırasında, her türlü bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim değerli hocam *Yrd. Doç. Dr. Faruk YİĞİT* 'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Lisans eğitimim sırasında titreşimler konusunda ilk bilgileri aldığıım saygıdeğer hocam *Prof. Necati TAHRALI* 'ya ve beni her konuda teşvik edip, yardımlarını esirgemeyen hocam *Prof. Dr. Faris KAYA* 'ya teşekkürlerimi borç bilirim.

İstanbul
Eylül, 1995

Ersun YALÇIN
Makina Mühendisi

ÖZET

Akışkan taşıyan boruların dinamik davranışı uzun süreden beri araştırmacıların ilgi odağı olmaktadır. Problemin zenginliği ve çeşitli alanlarda pratik problem teşkil etmesi nedeniyle konu hakkındaki araştırmalar devam etmektedir.

Bu çalışmada basit mesnetli akışkan taşıyan boru ele alınarak önce serbest titreşim denklemi ardından zorlanmış titreşim denklemi elde edilerek sistemin dinamiği incelenmiş daha sonra sistemin dinamiği göz önünde bulundurularak titreşimler aktif kontrol yöntemleri ile sönümlenmiştir.

İlk bölümde daha önce yapılmış çalışmalar özetlenmiştir. İkinci bölümde sistemin tanımı yapılarak Newton prensipleri yardımıyla serbest titreşim denklemi elde edilmiştir. Yine aynı bölümde kritik akış hızının ve temel kritik frekansın analitik ifadeleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sistemin dinamik özellikleri incelenerek kritik frekansların akış hızıyla nasıl değiştiği gösterilmiştir. Ayrıca sistemin çeşitli akış hızlarında simülasyonu yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise sistemin zorlanmış titreşim denklemi elde edilmiştir. Sistemin titreşimlerini sönümlenmek amacıyla iki tane regülatör tasarımı yapılarak sisteme aktif kontrol uygulanmıştır.

Beşinci bölümde ise yapılan çalışma özetlenerek gelecekte yapılabilecek çalışmalara değinilmiştir.

SUMMARY

Research on the characteristics of pipeline dynamics conveying fluid flow has received great attention because of the stability of fluid conveying pipe is of practical importance since the natural frequency of a pipe generally decreases with the increasing velocity of fluid flow.

In this study, the problem of vibration control of a simply supported pipe conveying fluid flow is considered. First, we derived the equation of motion of the system using Newton's law. Then, the equation of motion has been discretized using Galerkin's method in order to be able to apply the active control law to the system. And then the discretized equation of motion is written in the state space form. In chapter 4, two different control law are applied to control the vibration of the pipe conveying fluid flow

Finally, In chapter 5, the summary of this study is given, and some possible future works are suggested.

BÖLÜM 1

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Akış hızının artması ile akışkan taşıyan borunun kritik frekansları azalmaktadır. Yeterince yüksek akış hızlarında borunun doğal kritik frekanslarının azalması nedeniyle karasızlaşarak yapacağı büyük genlikli titreşimler öncelikle borunun hasar görmesine sebep olabileceği gibi çevresinde bulunan sistemlerinde zarar görmesine de neden olacaktır. Bu durum özellikle ince cidarlı esnek boruların kullanıldığı su türbünlerinde ve roket motorlarının yakıt besleme borularında önemli bir problemdir [1]. Bu nedenle akışkan taşıyan boruların dinamik davranışları bir çok araştırmaya konu teşkil etmiştir. Günümüzde de bu konudaki araştırmalar devam etmektedir.

Literatürde akışkan taşıyan boruların dinamik kısmı ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. . Paidoussis ve Issid [10] tarafından yayınlanmış olan makalede 1974 yılına kadar yapılmış bulunan 35 tane çalışma referans olarak verilmektedir. Yine Paidoussis tarafından yayınlanan akışkan taşıyan boruların dinamik davranışları konusunda 1994 yılına kadar yapılan çalışmaların özeti mahiyetinde olan Referans [24] te 100 den fazla çalışmadan bahsedilmektedir. Aşağıda bu konuda yapılmış bazı çalışmalar özetlenmeye çalışılmıştır.

Bu konudaki araştırmaların başlangıcı Aitken [11] tarafından yayınlanan bir çalışmadır. Yeterince yüksek akış hızlarında bir ucu serbest kauçuk borunun yaptığı hareketler ilk defa Marcel Brillouin ,1885, adındaki araştırmacı tarafından kendi kendini besleyen titreşimler (self-excited oscilation) olarak tanımladığını görüyoruz. Marcel Brillouin 'nın öğrencilerinden biri olan Bourrieres [12] ilk dikkate değer çalışmayı 1939 yılında yayınlamıştır. Bu araştırmacı bir ucu ankastre

mesnetli borunun kararlılığını incelemiştir. Doğru hareket denklemini elde etmesine rağmen analitik olarak kritik akış hızını elde edememiştir.

Bu konudaki araştırmaların Arabistan petrol boru hattındaki titreşim problemi nedeniyle tekrar gündeme geldiği ve hız kazandığı görülmektedir. Ashley ve Haviland [13] tarafından yapılan çalışmalardan sonra Feodos'ev [14] akışkan taşıyan borunun hareket denklemini elde ederek iki ucundan mesnetli borunun dinamik davranışlarını incelemiştir. Aynı problem Housner [15] tarafından değişik bir yaklaşımla incelenmiştir. Feodos'ev ve Housner yeterince yüksek akış hızlarında basit mesnetli bir borunun aksenal yüke maruz bir giriş gibi burkulduğunu bulmuşlardır.

1974 yılında Paidoussis ve Issid [10] tarafından yayınlanmış olan makalede çeşitli sınır şartları için akışkan taşıyan boruların kararlılığı incelenmiştir.

1979 yılında K. Singh ve A. K. Mallig [18] tarafında yayınlanan çalışmada periyodik olarak mesnetlenmiş akışkan taşıyan borunun kararlılığı incelenmiştir. Kütle oranının dolayısıyla Coriolis kuvvetlerinin sistem dinamiği üzerindeki etkisinin ihmal edilebilecek düzeyde olduğu bu çalışmada gösterilmektedir.

R. O. Johnson , J. E. Stoneking ve T. G. Carley [20] tarafından yapılarak 1987 de yayınlanan çalışmada sıkıştırılabilen sıvı taşıyan basit mesnetli bir tüpün kararlılığı ve sistem dinamiği incelenmiştir.

Eğri aksenli akışkan taşıyan borular konusunda yapılan çalışmalara A. K. Misra , M. P. Paidoussis ve K. S. Van [21-22] tarafından yapılan çalışma örnek olarak gösterilebilir. Bu çalışmada sonlu elemanlar metodu uygulanarak çeşitli sınır şartlarında eğri aksenli borunun dinamiği incelenmiştir.

Akışkan taşıyan boruların dinamik davranışlarının analizinde lineer olmayan yaklaşımlar kullanılarak yapılan çalışmalara referans [23] örnek olarak verilebilir.

Buraya kadar bahsettiğimiz çalışmalar akışkan taşıyan boruların dinamik analizi ve kararlılık incelemesi konusunda yapılmış çalışmalardır. Akışkan taşıyan boruların titreşimlerinin aktif kontrolü konusunda az sayıda da olsa yapılan birkaç çalışma mevcuttur.

Elimizdeki ilk çalışma 1990 yılında A. Baz ve S. Poh [25] tarafından yapılmıştır. Bir ucundan ankastre mesnetli akışkan taşıyan borunun titreşimlerini piezo-elektrik eyleyici kullanarak sönülmeye çalışmışlardır.

Aktif kontrol ile ilgili elimizde bulunan diğer çalışma bir ucundan ankastre mesnetli akışkan taşıyan boruya uygulanan kontrol sisteminin etkilerini araştıran bir çalışmadır [26]. Akışkan taşıyan boru sonlu elemanlar metodu ile modellenerek aktif kontrol uygulanmış ve borunun kritik akış hızı kontrol uygulanarak arttırılabileceği sonucuna varılmıştır.

Diğer bir aktif kontrol uygulaması ise referans [27] de verilmektedir. Bu çalışmada vorteks kaynaklı titreşimler modellenerek aktif kontrol uygulanmış ve vorteks kaynaklı titreşimler kontrol altına alınmıştır.

Vorteks kaynaklı titreşimlerin aktif kontrol uygulanarak sönümlenmesi için yapılan diğer bir çalışma ise referans [28] de verilmektedir. Baz ve Ro tarafından yapılan çalışmada elektromanyetik bir eyleyici kullanılmış ve hız geri besleme (Direct velocity feedback) yöntemi uygulanarak vorteks kaynaklı titreşimler sönümlenmiştir. Bu çalışma deneysel olarak gerçekleştirilmiştir.

Yapılan bu çalışmanın konusu ise iki ucundan basit mesnetlenmiş bir borunun aktif titreşim kontrolü ile ilgilidir. Bu çalışmada sistemin hareket denklemleri Newton presipleri yardımıyla çıkartılmış ve kontrol uygulanabilmesi için sistemin kısmi türevli diferansiyel denklemi Galerkin yöntemi ile adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Sistemin dinamik modelinde sadece ilk üç titreşim biçimi dikkate

alınarak iki değişik kontrol kanunu uygulanmıştır. Birinci kontrol kanunun da tüm durum değişkenleri geri beslenmektedir (State variable feedback) , ikinci kontrol kanunda borunun eyleyicinin yerleştirildiği noktadaki yer değiştirme hızı sistemin girişine geri beslenmektedir. Bu iki değişik kontrol yöntemi ile sistemin titreşimleri aktif olarak kontrol edilmektedir.

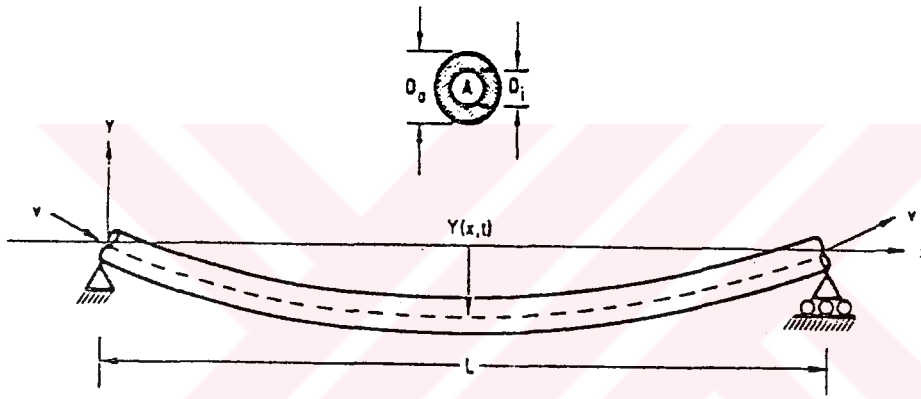


BOLÜM 2

SİSTEMİN MODELLENMESİ

2.1 Giriş

Bu bölümde akışkan taşıyan bir borunun düşey titreşim hareketinin dinamik denklemini elde edilmiştir. Sistem basit bir şeması Şekil 2.1 de görülmekte olan akışkan taşıyan doğrusal bir borudan oluşmaktadır.



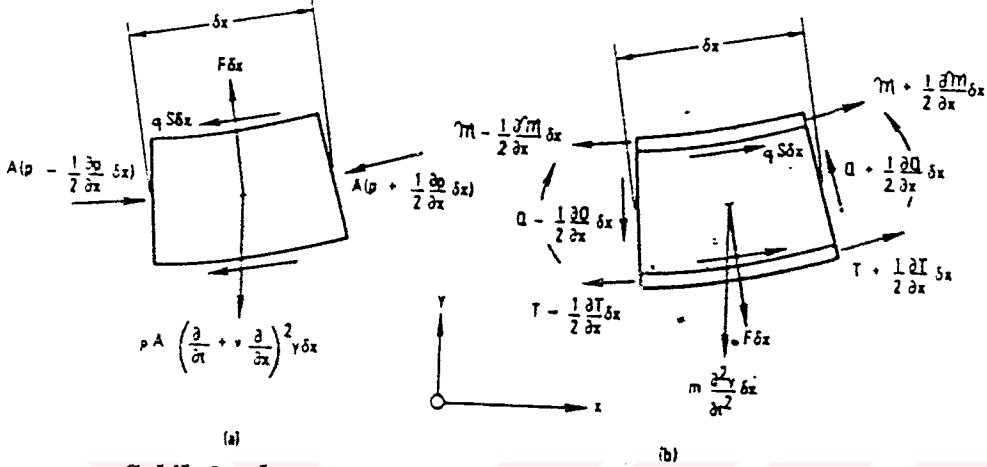
Şekil 2.1 Akışkan taşıyan basit mesnetli boru

İncelenen sistemin dinamik denklemini Newton prensipleri yardımıyla elde edilmiştir [1]. Elemanter boru parçacığına ve içindeki akışkana etki eden kuvvetler belirlenirken aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

- Akışkan sıkıştırılmaz .
- Boru içinden akmakta olan akışkan düzgün akım çizgilerine sahiptir.
- Yer çekimi ivmesinin etkisi ihmal edilmiştir.
- Borunun içindeki akışkanın her noktadaki hızı aynıdır.
- Boru , basıncın etkisiyle şekil değiştirmemektedir.
- Boru x-y düzlemi içinde düşey yönde titreşim hareketini yapmaktadır.
- Boru elastik lineer malzemeden imal edilmiştir.
- Bütün hareketler küçük kabul edilmiştir.

2.2 Matematiksel Modelin Çıkarılması

Yapılan bu kabullerle δx uzunluğunda elemanter bir boru parçasına ve içindeki akışkana etkiyen kuvvetler Şekil 2.2-a,b de görülmektedir.



Şekil 2-a,b Elemanter boru parçasına ve içindeki akışkana etki eden kuvvetler

Sehim yapmış bir boru içinden akışkan akarken borunun eğiminin değişmesi ve titreşimler sayesinde akış hızı artar. Bu hız artışı elemanter akışkan parçasına etkiyen akışkan basıncının düşey bileşeni ve boru cidarına etkiyen, borunun birim uzunluğuna düşen F basınç kuvveti tarafından ters yönde engellenmektedir. Elemanter akışkan parçasına y eksenine yönünde etkiyen kuvvetlerin dengesi küçük deformasyonlar için yazıldığında aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$F - \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \rho A \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 Y \quad (2.1)$$

Boru boyunca, basınç değişimine zıt yönde, akışkan ile boru cidarı arasında oluşan sürtünme kuvvetinin oluşturduğu kayma gerilmesi etki eder. Boru eksenine paralel toplam kuvvetler sabit bir akış hızı için yazılacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$A \frac{\partial P}{\partial x} + q S = 0 \quad (2.2)$$

Burada S boru iç çeperinin çevre uzunluğudur. q ise borunun iç yüzeyindeki kayma gerilmesidir. Birim boru parçacığının denge deklemleri Şekil 2.2-b yardımıyla elde edilir. Boru eksenine paralel kuvvetlerin toplamı sıfırdır.

$$\frac{\partial T}{\partial x} + qS - Q \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

Burada T boru eksenine paralel gerilme ve Q ise y eksenine paralel etki eden kuvvettir. Boru parçacığına etkiyen bu kuvvetler boru parçacığını y eksenini yönünde hızlandırır. Küçük deformasyonlar için

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - F = m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Burada m borunun birim uzunluğunun boş durumdaki kütlesidir. y eksenini boyunca etkiyen Q kuvveti \mathcal{M} eğilme momentine bağlıdır. Borunun deformasyonu

$$Q = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \quad (2.5)$$

dir. Q kuvveti $\partial^3 Y / \partial x^3$ terimi ile orantılı olduğundan denklem (2.3) teki $\partial^2 Y / \partial x^2$ terimi ihmal edilebilir. Denklem (2.1) den F ve Q ' ları yok edecek biçimde denklem (2.4) ve (2.5) düzenlenip yerine konduğunda

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + (pA - T) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \rho A \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 Y + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. Yukarıdaki (2.2) ve (2.3) denklemleri q yok edilecek biçimde düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\partial(pA - T) / \partial x = 0 \quad (2.7)$$

Yukarıdaki denklemden $(pA-T)$ nin boru üzerindeki pozisyonundan bağımsız olduğu, x 'in değişimine bağlı olmadığı anlaşılır. Borunun sonunda ($x=L$ olduğunda) boru içindeki gerilme sıfıra eşittir. $p=T=0$, $x=L$ olur. Denklem (2.7) den bütün x değerleri için

$$pA-T=0 \quad (2.8)$$

sonucu elde edilir. Eğer borunun sonunda bir nozül takılmışsa momentumun korunumu prensibinden

$$pA - T = pA v (v_j - v)$$

elde edilir. Burada v_j nozülün boğazındaki hızdır. Bu çalışmada nozül etkisi dikkate alınmamıştır. (2.8) bağıntısı (2.6) denkleminde yerine konulup düzenlenirse akışkan taşıyan bir borunun serbest titreşim denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Burada M içinde akışkan bulunan borunun birim uzunluğunun kütlesidir.

$$M = m + \rho A \quad (2.10)$$

İki ucundan basit mesnetli boru için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$Y(0, t) = Y(L, t) = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

1.3 Dinamik Denklemin Ayrıştırılması*

Bölüm 2.1 de elde edilen (2.9) basit mesnetli borunun titreşim denkleminin ilk ve son terimi rijidlik ve atalet terimi olup akışkanın akış hızından

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

bağımsızdır. Soldan ikinci terim akışkanın borunun eğimi doğrultusunda yönünü değiştirebilmek için gerekli kuvveti ifade eder. Soldan üçüncü terim elemanter akışkan parçacığının dönme hareketini yapması için gereken kuvveti ifade eder başka bir tanımlamayla Coriolis kuvvetini ifade etmektedir.

Denklem (2.9) Galerkin yöntemi uygulanarak titreşim biçimlerine ayrıştırılmak suretiyle yaklaşık olarak çözümlenebilir. Galerkin yönteminde yaklaşık çözüm modeli olarak sonlu elemanlı bir dizi kullanılır.

$$Y_c(x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \phi_i(x) \quad (2.12)$$

Bu dizide $w_i(t)$ zamana bağlı titreşim biçimi yer değiştirme fonksiyondur. $\phi_i(x)$ fonksiyonu ise sistemin sınır şartlarını sağlayan ve mukayese fonksiyonu olarakda adlandırılan , yalnızca x 'e bağlı bir fonksiyondur. Serbest titreşim denkleminde akışkanın etkisini ifade eden 2. ve 3. terim olmasaydı denklem basit mesnetli kirişin titreşim denklemine dönüşürdü. Bu nedenle basit mesnetli kirişin dinamik davranışları ile ilgili yapılan çalışmalar dikkate alınarak, sistemin sınır şartlarını sağlayan (2.13) fonksiyonunun mukayese fonksiyonu olarak seçilmesi uygundur.

$$\phi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad i=1,2,3, \quad (2.13)$$

* Kısmi türevli diferansiyel denklemin Galerkin yöntemi yardımıyla adi diferansiyel denklemlere dönüştürme işlemine verilen isimdir.

Yaklaşık çözüm serisinde yukarıdaki mukayese fonksiyonu yerine yazıldığında aşağıdaki yaklaşık çözüm serisi elde edilir.

$$Y_c(x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.14)$$

Yaklaşık çözüm serisinin gerekli türevleri serbest titreşim denkleminde yerine yazıldığında denklemin ε gibi bir hata ile sağlanacağı açıktır.

$$EI \frac{\partial^4 Y_c}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 Y_c}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 Y_c}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 Y_c}{\partial t^2} = \varepsilon \quad (2.15)$$

Galerkin yöntemine göre boru boyunca yapılacak ε hatası (2.13) mukayese fonksiyonuna dik olmalıdır [6].

$$\int_0^L \varepsilon \phi_i(x) dx = 0 \quad i=1,2,3,\dots \quad (2.16)$$

Yaklaşık çözüm serisinin gerekli türevleri alındığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\frac{\partial^2 Y_c}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n -\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 w_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial^4 Y_c}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 w_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.17b)$$

$$\frac{\partial^2 Y_c}{\partial x \partial t} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right) \dot{w}_i(t) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.17c)$$

$$\frac{\partial^2 Y_c}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \ddot{w}_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.17d)$$

Yukarıdaki türevler (2.15) denkleminde yerine yazılıp, (2.16) integrali çözümlendiğinde serbest titreşim denklemi adi diferansiyel denklemlere dönüşür.

2.3.1 Sistemin İlk Titreşim Biçimi

Sistemin ilk titreşim biçimi dikkate alınarak ($n=1$) yukarıda belirtilen integral çözümlendiğinde aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\left[\frac{EI}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] w_1(t) + \ddot{w}_1(t) = 0 \quad (2.18)$$

2.3.2 Sistemin İlk İki Titreşim Biçimi

Sistemin ilk iki titreşim biçimi dikkate alınarak ($n=2$) integral çözümlendiğinde aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\left[\frac{EI}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] w_1(t) - \frac{16\rho Av}{3ML} \dot{w}_2(t) + \ddot{w}_1(t) = 0 \quad (2.19a)$$

$$\left[\frac{16EI}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - \frac{4\rho Av^2}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] w_2(t) + \frac{16\rho Av}{3ML} \dot{w}_1(t) + \ddot{w}_2(t) = 0 \quad (2.19b)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemleri aşağıdaki belirtilen matris formunda düzenlenebilir.

$$\underline{M} \ddot{\underline{w}} + \underline{G} \dot{\underline{w}} + \underline{K} \underline{w} = 0 \quad (2.20)$$

Burada n titreşim biçimi sayısı olmak üzere \underline{M} , $n \times n$ boyutunda kütle matrisidir. \underline{G} , $n \times n$ boyutunda jiroskopik sönüm matrisi, \underline{K} $n \times n$ boyutunda sistemin rijidlik matrisi \underline{w} , ise $n \times 1$ boyutunda titreşim biçimi yer değiştirme vektörüdür.

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra elde edilen katsayı matrisleri aşağıda görülmektedir.

$$\underline{w} = [w_1 \quad w_2]^T \quad (2.21a)$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21b)$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{16\rho Av}{3ML} \\ \frac{16\rho Av}{3ML} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21c)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{M} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.21d)$$

2.3.3 Sistemin İlk Üç Titreşim Biçimi

Sistemin ilk üç titreşim biçimi dikkate alınarak ($n=3$) Galerkin yöntemi ile titreşim biçimlerine ayrıştırıldığında diferansiyel denklemler aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$\left[\frac{EI}{M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right] w_1(t) - \frac{16\rho Av}{3ML} \dot{w}_2(t) + \ddot{w}_1(t) = 0$$

$$\left[\frac{EI}{M} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \right] w_2(t) + \frac{16\rho Av}{3ML} \dot{w}_1(t) - \frac{48\rho Av}{5ML} \dot{w}_3(t) + \ddot{w}_2(t) = 0 \quad (2.22)$$

$$\left[\frac{EI}{M} \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho Av^2}{M} \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 \right] w_3(t) + \frac{48\rho Av}{5ML} \dot{w}_2(t) + \ddot{w}_3(t) = 0$$

Bu diferansiyel denklemler (2.20) matris formunda düzenlendiğinde elde edilen katsayı matrisleri aşağıda görülmektedir.

$$\underline{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T \quad (2.23a)$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23b)$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{16\rho A v}{3 M L} & 0 \\ \frac{16\rho A v}{3 M L} & 0 & -\frac{48\rho A v}{5 M L} \\ 0 & \frac{48\rho A v}{5 M L} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23c)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho A v^2}{M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{M} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho A v^2}{M} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{M} \left(\frac{3\pi}{L}\right)^4 - \frac{\rho A v^2}{M} \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.23d)$$

2.3.4 Katsayı Matrislerinin Genel Özellikleri

Burada n titreşim biçimi sayısı olmak üzere \underline{M} $n \times n$ boyutunda kütle matrisi, \underline{G} $n \times n$ boyutunda jiroskopik sönüm matrisini, \underline{K} ise sistemin $n \times n$ boyutunda rijitlik matrisini ifade eder. Kütle ve rijitlik matrisleri pozitif tanımlı matrislerdir. \underline{G} jiroskopik sönüm matrisi ise skew simetrik matris olup pozitif yarı tanımlı matristir. Jiroskopik sönüm matrisi enerji sönümlemesi yapmamaktadır. Bu matris titreşim biçimleri arasında enerji aktarımını yapar [4].

$$\underline{x}^T \cdot \underline{G} \cdot \underline{x} = 0$$

2.3.5 Yer Değiştirme Miktarının Hesabı

Borunun x_m noktasındaki yer değiştirme miktarı (2.14) de verilen yaklaşık çözüm serisinde $w_i(t)$ değerlerinin yerine konulmasıyla hesaplanır. $w_i(t)$ fonksiyonun değerleri (2.16) da verilen integralin seçilen titreşim biçimi sayısı için alınmasıyla elde edilen diferansiyel denklemlerin uygun bir yöntemle çözümlenmesiyle elde edilir.

$$y = \underline{C} \underline{w} \quad (2.24a)$$

$$\underline{C} = \left[\sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) \quad \dots \quad \sin\left(\frac{n\pi x_m}{L}\right) \right] \quad (2.24b)$$

$$\underline{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]^T \quad (2.24c)$$

Burada y , x_m noktasındaki yer değiştirme miktarı olup \underline{C} $1 \times n$ boyutunda vektördür. \underline{w} ise $n \times 1$ boyutunda titreşim biçimi yer değiştirme vektörüdür. Yukarıda ve bundan sonraki bölümlerde $[\]^T$ gösterimi matrisin devriği anlamında kullanılmıştır. Sitemin ilk titreşim biçimi dikkate alındığında ($n=1$) \underline{C} ve \underline{w} vektörü aşağıda görüldüğü gibidir.

$$\underline{C} = \left[\sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \right] \quad (2.25)$$

$$\underline{w} = [w_1(t)]$$

\underline{C} ve \underline{w} vektörleri ilk iki titreşim biçimi dikkate alınarak ($n=2$) hesaplanan x_m noktasındaki yer değiştirme için aşağıdaki gibidir.

$$\underline{C} = \left[\sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) \right] \quad (2.26)$$

$$\underline{w} = [w_1(t) \quad w_2(t)]^T$$

x_m noktasındaki yer değiştirme ilk üç titreşim biçimi kullanılarak ($n=3$) hesaplanmak istendiğinde \underline{C} ve \underline{w} vektörleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\underline{C} = \left[\sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) \quad \sin\left(\frac{3\pi x_m}{L}\right) \right] \quad (2.27)$$

$$\underline{w} = [w_1(t) \quad w_2(t) \quad w_3(t)]^T$$

2.4 Kritik Akış Hızı

Basit mesnetli borundan akan akışkan , borunun kayar mesnetli ucundan, açık atmosfere boşalmaktadır. Bu mesnet noktasında akışkan impuls ve momentumdan dolayı bir tepki kuvveti oluşturur. Oluşan bu kuvvet boruyu basıya zorlar. Kuvvet belli bir değere ulaştığında boru geri çekilir ve burkular. Boruyu burkılmaya zorlayan kritik kuvvet değerinin

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.28)$$

olduğu bilinmektedir. Burada E , boru malzemesinin elastiklik modülü I , borunun atalet momenti, L ise borunun boyudur. Bu denklem literatürde Euler denklemi [3] olarak adlandırılmaktadır. Akışkanın oluşturduğu tepki kuvveti impuls ve momentumdan aşağıdaki denklemle hesaplanabilmektedir.

$$F = \rho A v^2 \quad (2.29)$$

F kuvveti kritik bası kuvvetine ulaştığı andaki akışkanın akış hızına kritik akış hızı adı verilir. Denklem (2.28) yukarıdaki denkleme eşitlenirse kritik akış hızını veren denklem elde edilmiş olur.

$$V_c = \frac{\pi}{L} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

2.5 Temel Kritik Frekans

Akışkan taşıyan basit mesnetli borunun titreşim denklemi akış hızı sıfıra eşit olduğunda basit mesnetli kirişe ait titreşim denklemi ile aynı olmaktadır. Sistemin sürekli sistem olması nedeniyle sonsuz sayıda titreşim biçimi ve kritik frekansı vardır. Galerkin yöntemi yardımıyla elde edilmiş olan (2.22) denklemlerinde, akış hızı sıfır alınarak

$$\left| \underline{M}\omega^2 - \underline{K} \right| = 0 \quad (2.31)$$

denkleminde, (2.23b) ve (2.23d) matrisleri yerine konularak ω değerleri çözümlendiğinde sistemin ilk üç kritik frekansı elde edilir.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EI}{M} \right)^{1/2} \\ \omega_2 &= 4 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EI}{M} \right)^{1/2} \\ \omega_3 &= 9 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EI}{M} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dikkat edilirse ω_3 ve ω_2 , ω_1 'in katı olarak yazılabileceği görülmektedir.

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 4\omega_1 \\ \omega_3 &= 9\omega_1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

ω_2 ve ω_3 kritik frekansları ω_1 kritik frekansının harmoniğidir. Borunun en düşük kritik frekansı olan ω_1 'e borunun temel kritik frekansı denir ve ω_n ile gösterilir .

$$\omega_n = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EI}{M} \right)^{1/2} \quad (2.34)$$

2.6 Hareket Denklemlerinin Durum Uzayında İfadesi

Yukarıda elde edilen diferansiyel denklemler , durum değişkenleri adı verilen dönüşüm operatörleri yardımıyla durum uzayında birinci dereceden diferansiyel denklemlere dönüşür. Durum uzayında ifade edilen denklemler genel olarak aşağıda belirtilen matris formunda gösterilir..

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} \\ y &= \underline{C} \underline{x} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Burada \underline{A} $2n \times 2n$ boyutunda sistemin karakteristik matrisi , \underline{C} $1 \times 2n$ boyutunda sisteme ait çıkış vektörüdür. \underline{x} , $2n \times 1$ boyutunda durum değişkenleri vektörü, y ise sistemin x_m noktasındaki yer değiştirme miktarıdır.

Denklemler durum uzayında ifade edilirken iki yeni tanımlamadan yararlanarak denklemlerin daha basit halde yazılmasına çalışılmıştır. Bunlardan bir tanesi kütle oranıdır. Borunun birim uzunluğundaki akışkanın ve borunun toplam kütlelerinin akışkanın kütlesine oranıdır.

$$\alpha = \frac{\rho A}{M} \quad (2.36)$$

Yapılan diğer tanımlama ise hız oranıdır. Hız oranı kritik akış hızının akış hızına oranı olarak tanımlanır.

$$\beta = \frac{v}{V_c} \quad (2.37)$$

2.6.1 İlk Titreşim Biçimi

İlk titreşim biçimi dikkate alınarak elde edilmiş (2.18) denklemi aşağıda tanımlanan dönüşüm operatörleri kullanılarak denklem durum uzayında ifade edilir ve (2.39) de görülen birinci dereceden diferansiyel denklemler elde edilir.

$$x_1 = w_1 \quad (2.38)$$

$$x_2 = \dot{w}_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.39)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_n(1-\beta^2)x_1$$

Denklemler matris formunda düzenlendiğinde aşağıdaki katsayı matrisleri elde edilir.

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2]^T \quad (2.40a)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n(1-\beta^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40b)$$

2.6.2 İlk İki Titreşim Biçimi

Yukarıda ilk iki titreşim biçimi dikkate alınarak elde edilen (2.19) diferansiyel denklemlerinin durum uzayında ifade edilebilmesi için aşağıda tanımlanan dönüşüm operatörleri kullanılır.

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 & x_3 &= \dot{w}_1 \\ x_2 &= w_2 & x_4 &= \dot{w}_2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Tanımlanan dönüşüm operatörleri ile ilk iki titreşim biçimi için elde edilen denklemler aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\omega_n^2(1-\beta^2)x_1 + \frac{16}{3\pi}\omega_n\beta\alpha^{1/2}x_4 \\ \dot{x}_4 &= -16\omega_n^2(1-0.25\beta^2)x_2 - \frac{16}{3\pi}\omega_n\beta\alpha^{1/2}x_3 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Denklemler matris formunda düzenlendiğinde x durum değişkenleri vektörü ve \underline{A} karakteristik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad (2.43a)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & \frac{16}{3\pi}\omega_n\beta\alpha^{1/2} \\ 0 & -16\omega_n^2(1-0.25\beta^2) & -\frac{16}{3\pi}\omega_n\beta\alpha^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43b)$$

2.6.3 İlk Üç Titreşim Biçimi

İlk üç titreşim biçimini dikkate alınarak elde edilen (2.22) diferansiyel denklemleri durum uzayında ifade edebilmek için gerekli dönüşüm operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned}
 x_1 &= w_1 & x_4 &= \dot{w}_1 \\
 x_2 &= w_2 & x_5 &= \dot{w}_2 \\
 x_3 &= w_3 & x_6 &= \dot{w}_3
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

İlgili diferansiyel denklemleri dönüşüm operatörleri kullanılarak düzenlendiğinde aşağıdaki birinci dereceden diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_4 \\
 \dot{x}_2 &= x_5 \\
 \dot{x}_3 &= x_6 \\
 \dot{x}_4 &= -\omega_n^2 (1 - \beta^2) x_1 + \frac{16}{3\pi} \omega_n \beta \alpha^{1/2} x_5 \\
 \dot{x}_5 &= -16 \omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{4} \beta^2\right) x_2 - \frac{16}{3\pi} \omega_n \beta \alpha^{1/2} x_4 + \frac{48}{5\pi} \omega_n \beta \alpha^{1/2} x_6 \\
 \dot{x}_6 &= -81 \omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{9} \beta^2\right) x_3 - \frac{48}{5\pi} \omega_n \beta \alpha^{1/2} x_4
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Denklemler matris formunda düzenlediğinde \underline{x} durum değişkenleri vektörü ve \underline{A} karakteristik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T \tag{2.46a}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -g_1 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega_n^2 (1 - \beta^2) & g_1 &= \frac{16}{3\pi} \omega_m \beta \alpha^{1/2} \\ k_2 &= 16 \omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{4} \beta^2\right) & g_2 &= \frac{48}{5\pi} \omega_m \beta \alpha^{1/2} \\ k_3 &= 81 \omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{9} \beta^2\right) \end{aligned} \quad (2.46b)$$

2.6.4 Durum Uzayında Yer Değiştirme Miktarının Hesabı

Borunun x_m noktasındaki yer değiştirme miktarının hesabı bölüm 2.3.5 de anlatılmıştı. Durum uzayında aynı yöntemle hesaplanır. Aralarında tek fark vektörlerin boyutlarıdır.

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} \quad (2.47)$$

$$\underline{C} = \left[\begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) & \sin\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) & \dots & \sin\left(\frac{n\pi x_m}{L}\right) \end{bmatrix}_{1 \times n} \quad \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n} \right] \quad (2.47b)$$

$$\underline{x} = \left[\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}_{n \times 1} \right]^T \quad (2.47c)$$

\underline{x} vektörünün ilk n elemanı $w_i(t)$ fonksiyonlarına, diğer n elemanı $\dot{w}_i(t)$ fonksiyonlarının birinci türevlerine karşılık gelmektedir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T &\equiv \begin{bmatrix} w_1(t) & w_2(t) & \dots & w_n(t) \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}^T &\equiv \begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) & \dot{w}_2(t) & \dots & \dot{w}_n(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.48)$$

\underline{C} ve \underline{x} vektörleri ilk titreşim biçimi dikkate alınarak ($n=1$) yapılan hesaplamalar için aşağıdaki gibidir.

$$\underline{C} = \left[\text{Sin}\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \quad 0 \right] \quad (2.49)$$

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2]^T$$

\underline{C} ve \underline{x} vektörleri ilk iki titreşim biçimi dikkate alınarak ($n=2$) elde edilen denklemler için aşağıda görülmektedir.

$$\underline{C} = \left[\text{Sin}\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \quad \text{Sin}\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) \quad 0 \quad 0 \right] \quad (2.50)$$

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

İlk üç titreşim biçiminin dikkate alınarak ($n=3$) elde edilen denklemler için \underline{C} ve \underline{x} vektörleri aşağıda görüldüğü gibi olur.

$$\underline{C} = \left[\text{Sin}\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \quad \text{Sin}\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) \quad \text{Sin}\left(\frac{3\pi x_m}{L}\right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (2.51)$$

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$$

BOLÜM 3

SİSTEM DİNAMİĞİNİN İNCELENMESİ

3.1 Giriş

Bu bölümde sistemin serbet titreşim hareketi incelenmiştir. Sistem başlangıç şartlarından tahrik edilerek similasyonu yapılmıştır. Bu bölümde ve ileriki bölümlerde yapılan similasyon ve hesaplamalarda alimünyumdan yapılmış bir boruya ait veriler kullanılmıştır. Akışkan olarak su seçilmiştir. Boru ve akışkana ait veriler aşağıdaki gibidir.

$$\rho A = 0.383 \quad \text{kg/m}$$

$$E = 6.895 \cdot 10^{10} \quad \text{N/m}^2$$

$$M = 0.714 \quad \text{kg/m}$$

$$L = 3.2 \quad \text{m}$$

$$I = 8.97621 \cdot 10^{-9} \quad \text{m}^4$$

Burada ρA birim uzunluk başına düşen akışkan kütlesi, E elastite modülü, M birim uzunluk başına düşen boru ve akışkanın toplam kütlesi, L borunun uzunluğu, I eğilmede atalet momentidir.

3.2 Sistemin Karakteristik Denklemi

Bölüm 2.5 de elde edilen , durum uzayında ifade edilen diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü uygulanarak sistemin s-uzayında denklemleri elde edilir.

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}\underline{X}(s) \quad (3.1)$$

$$Y(s) = \underline{C}\underline{X}(s)$$

Burada $\underline{x}(0)$ vektörü sistemin başlangıç şartları vektörüdür. Denklemleri düzenlenerek aşağıdaki denklemleri elde edilir.

$$\underline{X}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{x}(0) \quad (3.2)$$

$$Y(s) = \underline{C}\underline{X}(s)$$

Bir matrisin tersinin aşağıdaki hesaplanabildiği bilinmektedir [7].

$$[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}(s\underline{I} - \underline{A})}{|s\underline{I} - \underline{A}|} \quad (3.3)$$

Denklemler tekrar düzenlenerek yazıldığında

$$Y(s) = \underline{C} \frac{\text{adj}(s\underline{I} - \underline{A})}{|s\underline{I} - \underline{A}|} \underline{x}(0) \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir. (3.4) denkleminin paydası sıfıra eşitlendiğinde sistemin karakteristik denklemini elde edilir.

$$|s\underline{I} - \underline{A}| = 0 \quad (3.5)$$

İncelediğimiz sistemin karakteristik denklemini aşağıdaki şekilde elde edilir. Burada ilk üç titreşim biçimi ($n=3$) dikkate alınmıştır.

$$s^6 + a_2 s^4 + a_1 s^2 + a_0 = 0$$

$$a_2 = -\frac{2}{225} \omega_n^2 \left(\left(1575 - \frac{13568}{\pi^2} \alpha \right) \beta^2 - 11025 \right)$$

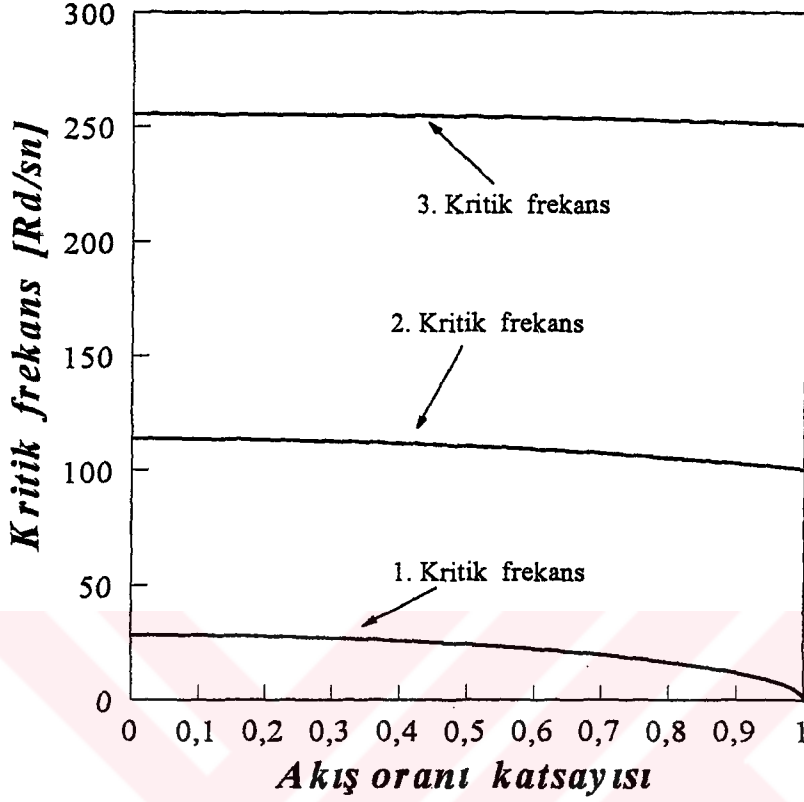
$$a_1 = -\frac{1}{25} \omega_n^4 \left(\left(\frac{8704}{\pi^2} \alpha - 1225 \right) \beta^4 + \left(14450 - \frac{59904}{\pi^2} \alpha \right) \beta^2 - 34825 \right) \quad (3.6)$$

$$a_0 = -36 \omega_n^6 (\beta - 1)(\beta - 2)(\beta - 3)(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)$$

Sistemin karakteristik denkleminde de anlaşılacağı gibi incelediğimiz sistemde sönüm yoktur. Karakteristik denklemin kökleri imajiner eksen üzerindedir. Sistem nötr kararlıdır.

Karakteristik denklemin a_2, a_1, a_0 katsayıları temel kiritik frekans ω_n , kütle oranı α ve hız oranı β ya bağlıdır. Temel kritik frekans, ω_n , sistemin fiziksel özelliklerine bağlıdır. Kütle oranı, α , akışkan yoğunluğunun fonksiyonudur. Hız oranı, β , ise akış hızına bağlıdır. Sistemin karakteristik denkleminin kökleri akışkan yoğunluğuna ve akış hızına bağlı olarak değişmektedir. Karakteristik denklemin köklerinin modülü sistemin kritik frekansları olduğu hatırlanırsa [5] sistemin kritik frekanslarında hız oranına ve kütle oranına bağlı olarak değişeceği açıktır.

Şekil-3.1 de görülmekte olan grafikte akış hızı oranının değişmesiyle sistemin kritik frekanslarının aldığı değerler görülmektedir. Sistemin kritik frekansları akış hızının artımı ile ters orantılı olarak azalmaktadır. Kritik akış hızına ulaşıldığında ($\beta=1$) birinci kritik frekansın değeri sıfır olmaktadır. Bu noktada sistemin kararlılığı bozulmaktadır. Bu durum karakteristik denklemdende açıkça görülmektedir.



Şekil 3.1 Kritik Frekanslar

Sistemin kritik frekansları akış oranına bağlı olarak değiştiği gibi kütle oranına bağlı olarak da değişmektedir. Kütle oranı içeren terimler sisteme etki eden Coriolis kuvvetlerinin etkisini ifade etmektedir. Coriolis kuvvetleri sisteme ait kritik frekansların değişmesine neden olmaktadır. Şekil-3.2 de kütle oranının alabileceği en düşük ve en yüksek değerleri arasında 1. kritik frekansının gösterdiği değişim görülmektedir.

Coriolis kuvvetlerinin 1. kritik frekans üzerindeki etkisinin kritik frekansını artırma yönünde olduğu Şekil 3.2 den görülmektedir. Kritik frekanslardaki Coriolis kuvvetlerinden dolayı oluşan değişimin ihmal edilmesi durumunda yapılan hatanın büyük olmayacağı yine şekil 3.2 den görülmektedir.

Sistemde akış hızının artımı ile sistemin kritik frekanslarının azalmasının nedeni Coriolis kuvvetlerinin etkisi ihmal edildiğinde daha kolaylıkla anlaşılabilir. Coriolis kuvvetlerinin etkisi ihmal edilirse sistemin reel kritik frekansları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\omega_1 = \omega_n^2 (1 - \beta^2)$$

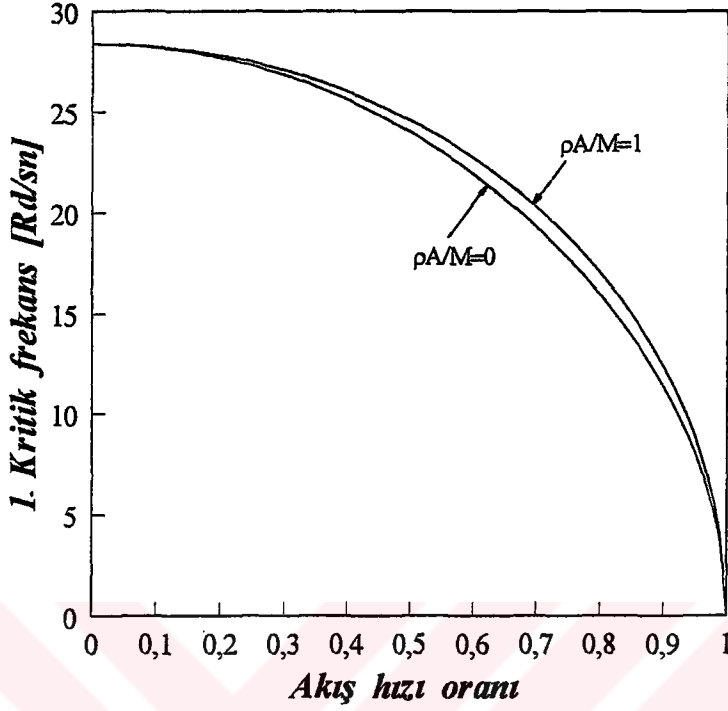
$$\omega_2 = 16\omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{4}\beta^2\right) \quad (3.46b)$$

$$\omega_3 = 81\omega_n^2 \left(1 - \frac{1}{9}\beta^2\right)$$

Kritik frekansların temel kritik frekansın fonksiyonu olduğu görülmektedir. Temel kritik frekansın sistemin fiziksel özelliklerine bağlı olduğu hatırlanacak olursa akış hızının artması ile sistemin rijitliğinin değiştiği söylenebilir.

$$\omega_n = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{E \cdot I}{M}\right)^{1/2} \quad (3.34)$$

Akış hızının artımı ile boru içinden birim zamanda geçecek akışkan miktarı artacaktır fakat bütün akış hızlarında her t anı için sistemdeki kütle miktarı sabit kalacaktır. Bu durumda sistemdeki kütle miktarı değişmediğine göre akış hızının değişmesiyle sistemin rijitliğinin değiştiği sonucuna varılır.



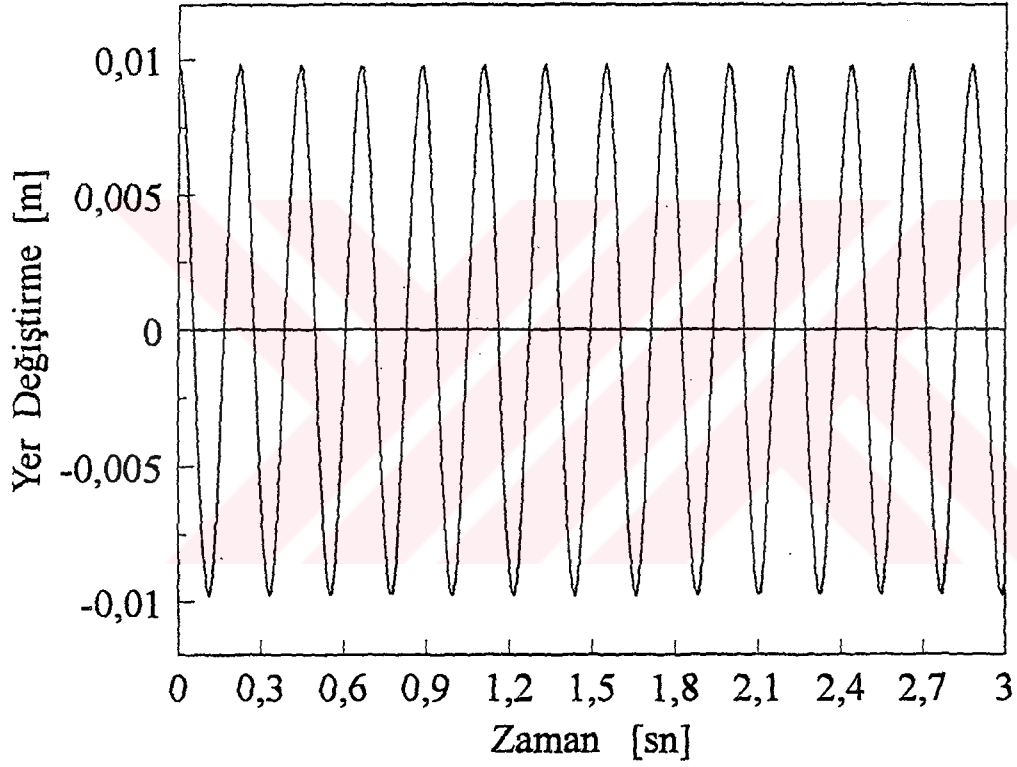
Şekil 3.2 Kütle Oranının Değişimiyle Kritik Frekansın Değişimi

3.3 Sistemin Similasyonu

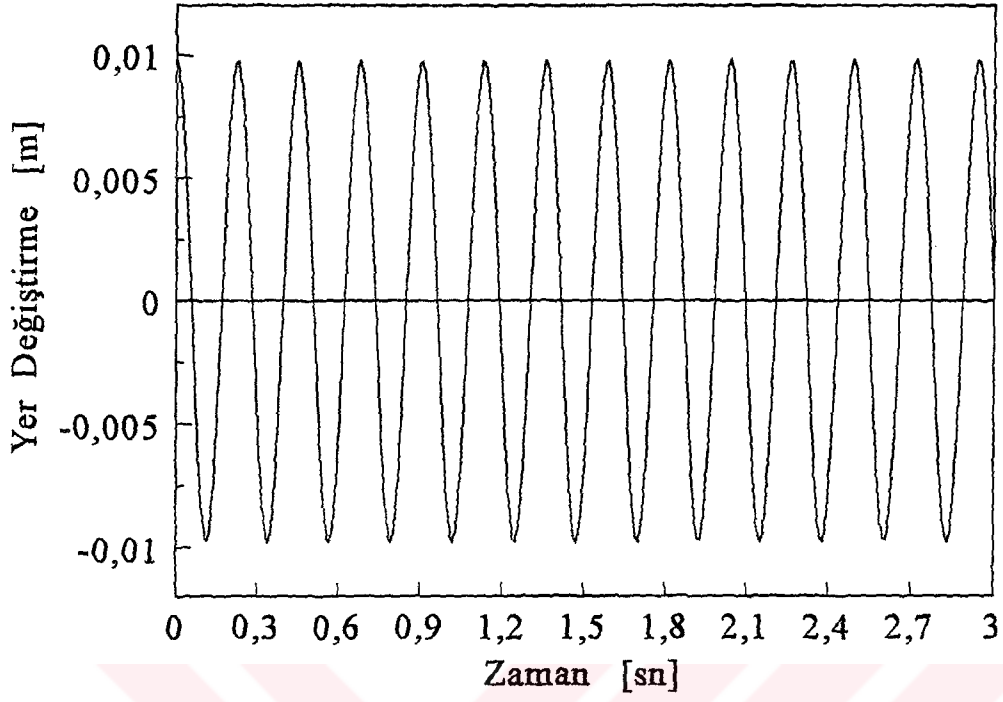
Sisteminin farklı β değerleri için x_m noktasında meydana gelen yer değiştirme miktarı hesaplanmıştır. Zaman bağı olarak oluşan yer değiştirme miktarı değişimi Şekil 3.3a-g de görülmektedir. Şekil 3.3a-g de görülmekte olan grafiklerin incelenmesi neticesinde elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

- Sistem nötr kararlıdır. Sistemin genliği zamanla değişmemektedir. Karakteristik denklemin incelenmesi sonucunda yapılan yorumlar doğrudur. Sistemde sönüm yoktur.
- Akış hızının artırılmasıyla sistemin periyodunun arttığı görülmektedir. Periyodun artması sistemin kritik akış hızına yaklaştıkça kararsızlaştığını göstermektedir.

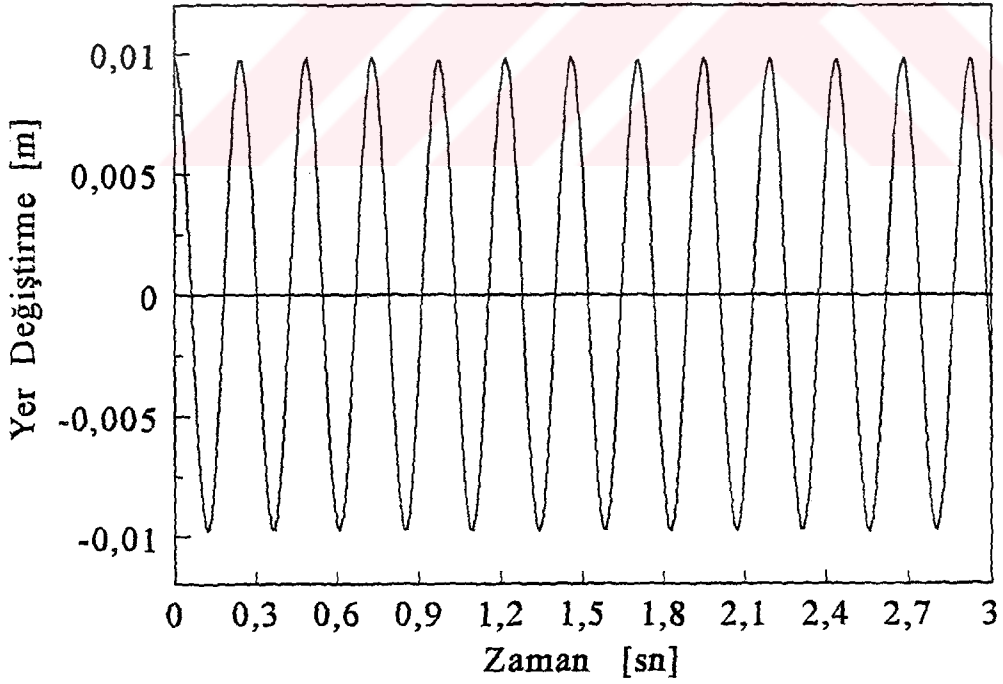
- Kritik akış hızında sistem matematiksel olarak kararsızlaşmaktadır. Fiziksel olarak ise borunun iki ucu birbirine yaklaşarak boru burkulmakta yani deforme olmaktadır.



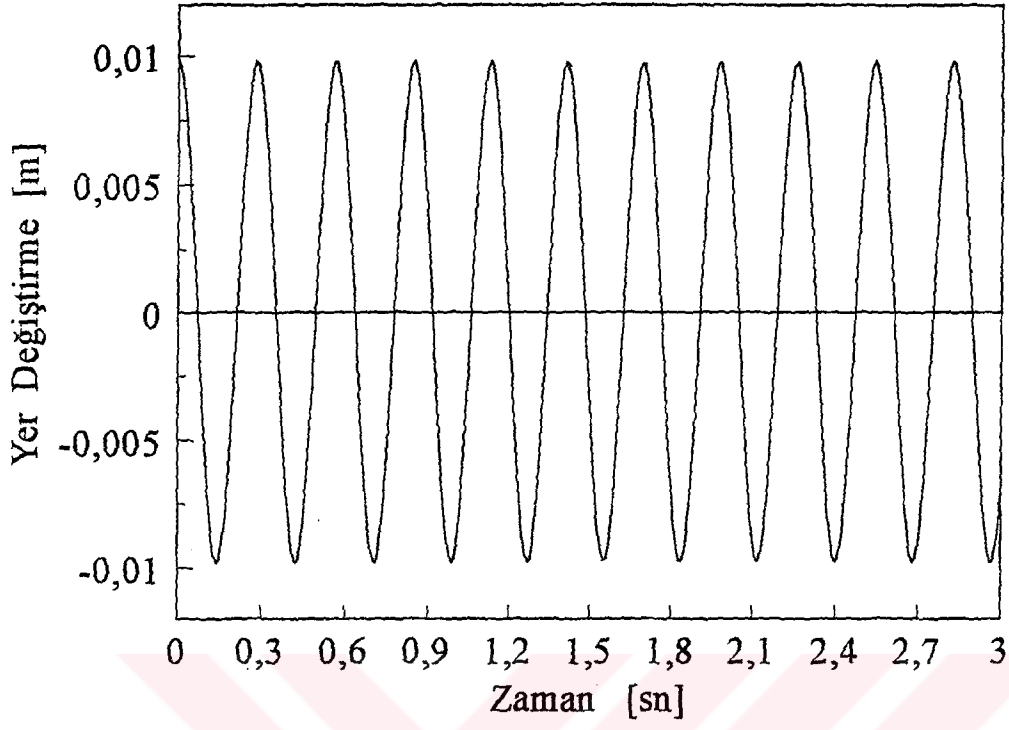
Şekil 3.3a $\beta=0$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme



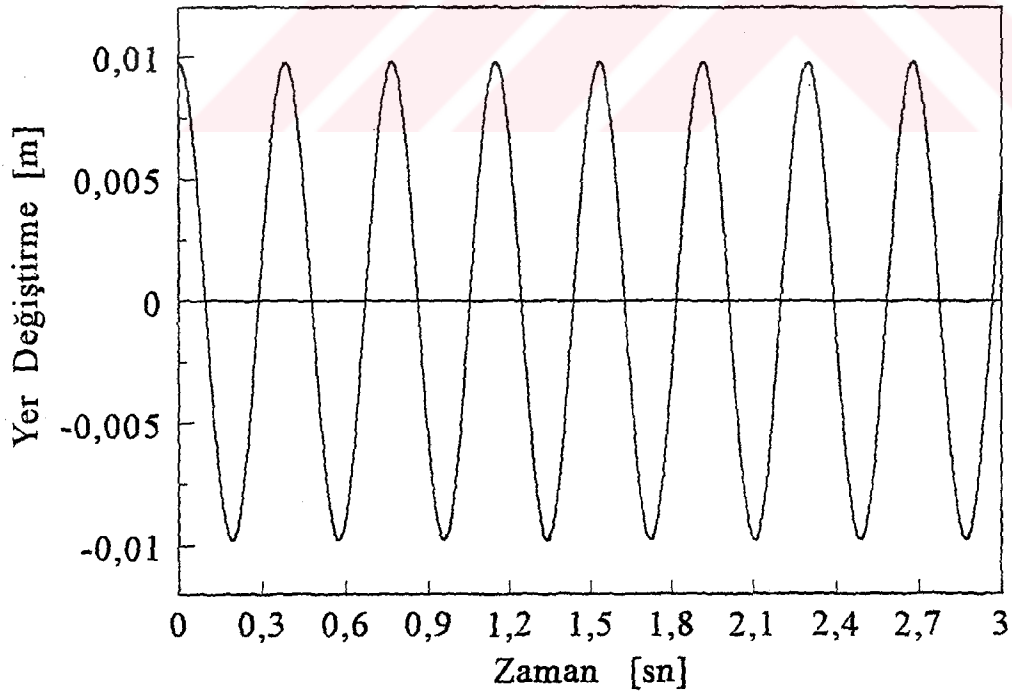
Şekil 3.3b $\beta=0.2$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme



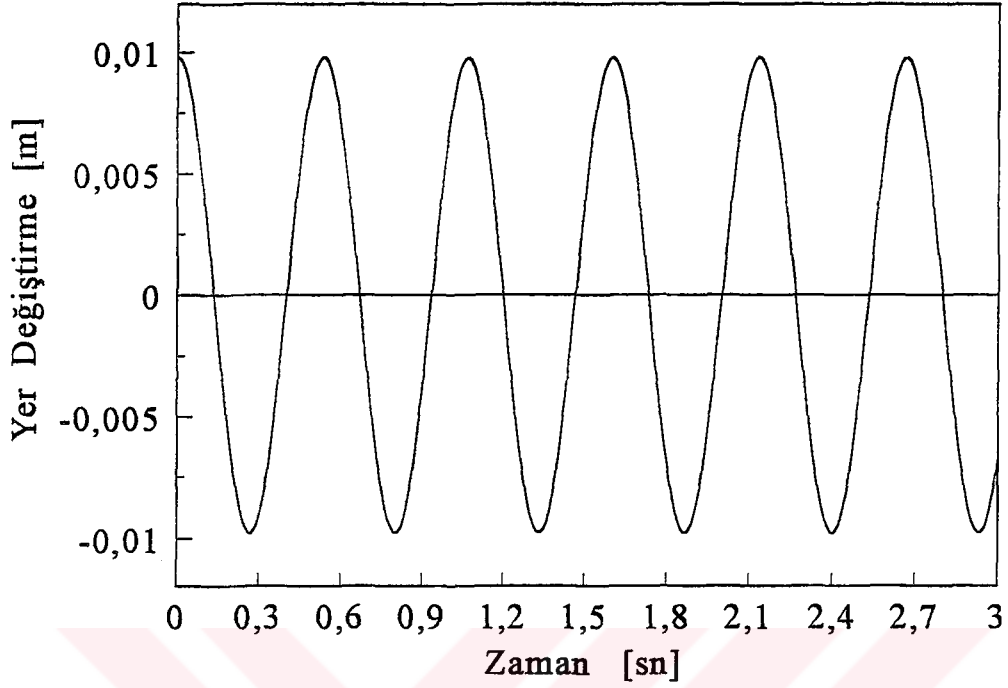
Şekil 3.3c $\beta=0.4$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme



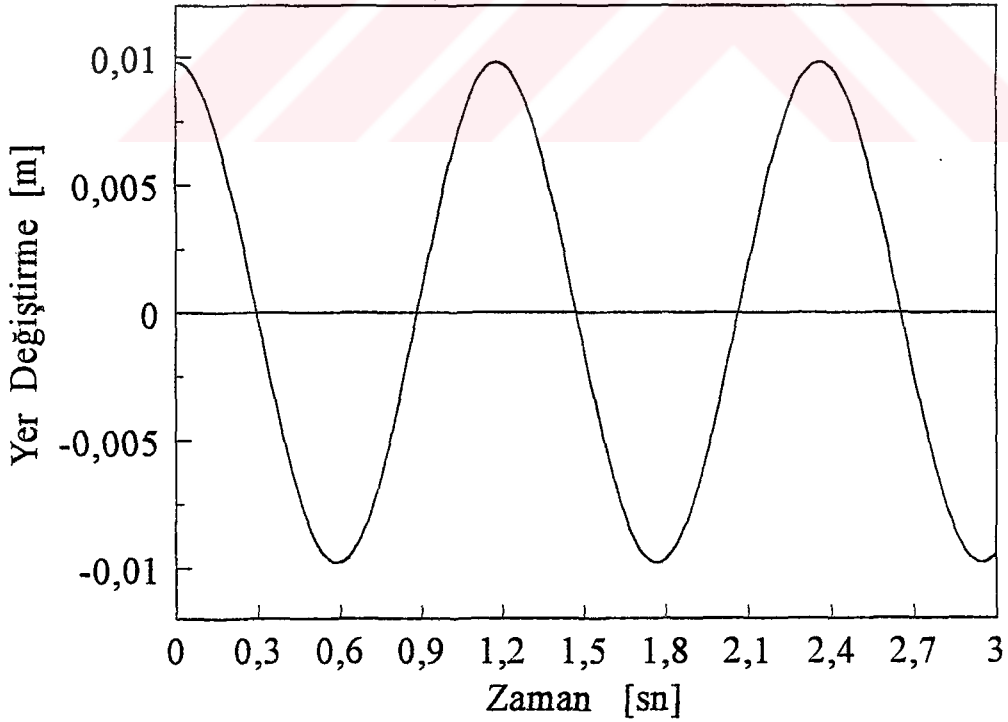
Şekil 3.3d $\beta=0.6$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme



Şekil 3.3e $\beta=0.8$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme



Şekil 3.3f $\beta=0.9$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme



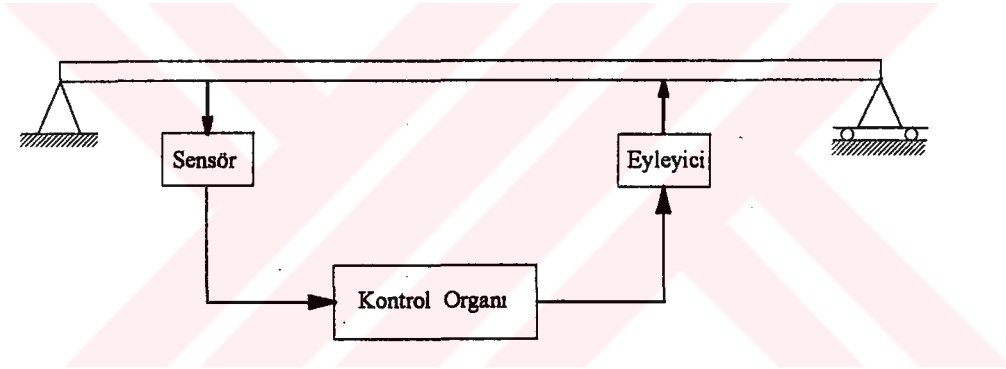
Şekil 3.3g $\beta=0.98$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme

BOLÜM 4

AKTİF TİTREŞİM KONTROLU

4.1 Giriş

Bu bölümde sistemde oluşan istenmeyen titreşimler aktif kontrol yöntemleri yardımıyla sönümlendi. Sönümleme borunun üzerine yerleştirilen eyleyicinin oluşturacağı kontrol kuvveti yardımıyla gerçekleştirildi. Kontrol uygulanmış sistemin basit bir şeması Şekil 4.1 de görülmektedir.



Şekil 4.1 Aktif Kontrol Sistemi

Bu çalışmada akışkan taşıyan boruda oluşan titreşimleri sönümlemek amacıyla tasarlanan kontrol sistemi 3 temel elemandan oluşmaktadır. Birinci eleman x_m noktasından gerekli verileri ölçmeye yarayan ölçme aygıtıdır. Ölçme aygıtına genel olarak sensör adı verilir. İkinci eleman kontrol organı olarak adlandırılır. Sensör tarafından ölçülen verileri kullanarak gerekli hesaplamaları yapar ve kontrol sisteminin üçüncü elemanı olan eyleyiciyi (Actuator) yönlendirir. Eyleyici kontrol organının yönlendirmesine uygun olarak akışkan taşıyan boruya kuvvet etki ettirir.

Bu çalışmada tasarlanan kontrol organları durum değişkenlerini kullanarak eyleyicinin uygulayacağı kuvveti belirlemektedirler. Bu nedenle bütün durum değişkenlerinin ölçülebilmesi gerekmektedir. Bütün durum değişkenlerini pratik uygulamalarda her zaman ölçebilmek mümkün olamamaktadır. Bu durumda sensör ile ölçülemeyen durum değişkenlerinin tahmin edici bir eleman yardımıyla yardımıyla hesaplanması gerekmektedir.

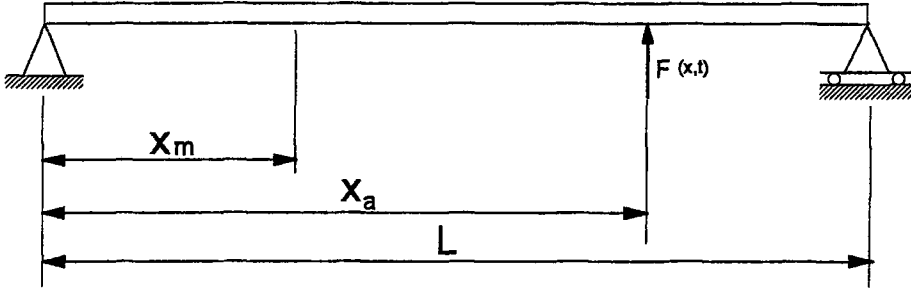
Sistemde durum değişkenlerinin ölçülmesi ile eyleyicinin boruya kuvvet etki ettirmesi anına kadar bir süre geçecektir. Bu gecikme süresi aşağıda tasarımı yapılan kontrol sistemlerinde ihmal edilmiştir. Ayrıca sensör ve eyleyicinin dinamik etkileri de ihmal edilmiştir.

Eyleyici ve sensörün boru üzerinde yerleştirildikleri noktalar kontrol sisteminin etkinliği yönünden oldukça önemlidir. Eyleyici ve sensörün yerleştirildikleri noktalar titreşim biçimlerinin düğüm noktaları olmamalıdır. Düğüm noktaları titreşim hareketi sırasında yer değiştirmemektedir. Sensör bir titreşim biçiminin düğüm noktasına yerleştirilecek olursa o titreşim biçimine ait etkileri ölçemez. Eyleyici de eğer düğüm noktasına yerleştirilecek olursa o titreşim biçimine etki edemez.

Kontrol sistemi, titreşimleri sistem dinamiğini değiştirmek suretiyle sönmektedir. Sisteme uygulanan kontrol, sistemin kritik frekanslarını ve sönmü değerlerini değiştirmektedir. Böylelikle sistemin fiziksel özellikleri üzerinde değişiklik yapmaksızın sistemin uygun kritik frekans ve sönmü değerlerine sahip olması sağlanabilmektedir. Bu durum günümüzde gelişen malzeme bilimi sayesinde yeni elde edilen kompozit ve elastik malzemelerin kullanımında bir güçlük olan istenmeyen titreşimlerin önlenmesi açısından da önemlidir.

4.2 Eyleyicinin Yerleştirilmesi

Akışkan taşıyan boru üzerine yerleştirilecek eyleyici Şekil 4.1 de görüldüğü gibi $F(x,t)$ kuvvetini boruya etki ettirecektir.



Şekil 4.2 Akışkan taşıyan boru ve eyleyici

Bölüm 1 de sistemin titreşim denkleminin elde edilmesi için izlenen yöntem uygulanarak sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (4.1)$$

Borunun üzerine x_a noktasından etki ettirilen kuvvet Dirac Delta fonksiyonu yardımıyla matematiksel olarak aşağıda görüldüğü gibi ifade edilir [6].

$$F(x, t) = u(t)\delta(x - x_a) \quad (4.2)$$

Burada $u(t)$ yalnızca zamana bağlı kuvvet fonksiyonudur. $\delta(x - x_a)$ fonksiyonu yalnızca boyuta bağlı olup Dirac delta fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

$$\delta(x - x_a) \begin{cases} x = x_a & 1 \\ x \neq x_a & 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\int_0^L u(x) \delta(x - x_a) \cdot dx = u(x_a) \quad (4.4)$$

Eyleyici boru üzerinde $x_a = 9L/16$ noktasına yerleştirilmiştir.

4.3 Hareket Denklemleri

Yukarıda elde edilen (4.1) denklemi bölüm 2 de açıklanan Galerkin yöntemi ile titreşim biçimlerine ayrıştırılabilir. Elde edilen denklemler durum uzayında birinci dereceden diferansiyel denklemlere dönüştürüldüğünde sisteme etki ettirilen kuvvetten dolayı ek terimler gelecektir. Denklemler (2.35) olduğu gibi matris formunda yazılmak istendiğinde aşağıdaki matris düzenlemesiyle yazılabilecektir.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u(t) \quad (4.5)$$

$$y = \underline{C}\underline{x}$$

Burada (2.35) de belirtilen düzenlemeden farklı olarak \underline{B} vektörü gelmektedir. Bu vektör $n \times 1$ boyutunda giriş vektörü olarak adlandırılmaktadır. $u(t)$ fonksiyonu ise (4.2) de tanımlanmış olan zamanla şiddeti değişebilen eyleyici kuvvetidir. Bu kuvvete bundan sonra kontrol kuvveti adını vereceğiz. Değişik $u(t)$ fonksiyonları tanımlamak suretiyle çeşitli kontrol organı tasarımı yapılacaktır.

Denklemler yukarıdaki matris düzenlemesiyle yazıldığında \underline{A} ve \underline{C} matrisleri bölüm 2.5 de tanımlanmış olan matrislerle aynı olacaktır. Farklı olarak \underline{B} vektörleri vardır ki bu vektörler de aşağıda tanımlanmıştır.

Sadece ilk titreşim biçimi ($n=1$) dikkate alınarak elde edilen denklemlerde \underline{B} vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\underline{B} = \left[0 \quad \frac{2}{ML} \sin\left(\frac{\pi x_a}{L}\right) \right]^T \quad (4.6)$$

Sadece ilk iki titreşim biçimi ($n=2$) dikkate alınarak elde edilen denklemlerde \underline{B} vektörü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\underline{B} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{2}{ML} \sin\left(\frac{\pi x_a}{L}\right) \quad \frac{2}{ML} \sin\left(\frac{2\pi x_a}{L}\right) \right]^T \quad (4.7)$$

Sadece ilk üç titreşim biçimi ($n=3$) dikkate alınarak elde edilen denklemlerde \underline{B} vektörü aşağıdaki şekilde elde edilir.

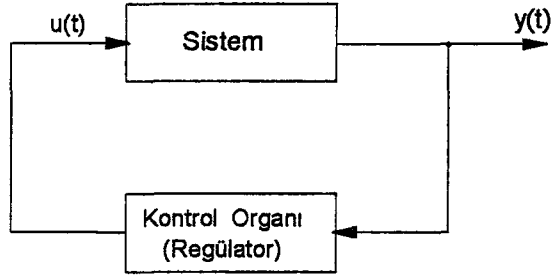
$$\underline{B} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{ML} \sin\left(\frac{\pi x_a}{L}\right) \quad \frac{2}{ML} \sin\left(\frac{2\pi x_a}{L}\right) \quad \frac{2}{ML} \sin\left(\frac{3\pi x_a}{L}\right) \right]^T \quad (4.8)$$

4.4 Kontrol Organı Tasarımı

Aşağıda yapılmış olan tüm kontrol organı tasarımları durum değişkenlerinin uygun bir $u(t)$ fonksiyonu seçilerek geri beslenmesi esasına dayanmaktadır. Seçilen $u(t)$ fonksiyonu kontrol kanunu olarak da adlandırılır.

Titreşimlerin sönümlenmesi için tasarlanacak olan kontrol organı sistemin başlangıçtaki denge konumuna geri gelmesini sağlayacaktır. Başka bir anlatımla sistemin dinamik davranışını düzenleyecektir. Bu nedenle bu tip kontrol organlarına genel olarak düzenleyici anlamına gelen regülatör adı verilmektedir. Şekil 4.1 de kontrol sisteminin basit bir şeması görülmektedir.

Aşağıda iki değişik tip regülatör tasarımı yapılmıştır. Birinci regülatör tasarımında tüm durum değişkenleri kazanç vektörü ile çarpılıp sistemin girişine beslenmiştir. Genel olarak tüm durum değişkenlerinin geri beslenmesi (Full state feedback) yöntemi olarak adlandırılmaktadır. İkinci yapılan regülatör tasarımında hız geri beslenmiş olup bu yöntem hızın geri beslenmesi (Direct velocity feedback) yöntemi adı verilmektedir.



Şekil 4.3 Kontrol Sisteminin Basit Şeması

4.4.1 Regülatör Tasarımı -1

Burada tüm durum değişkenlerinin geri beslenmesi yöntemi kullanılarak regülatör tasarımı yapılmıştır. Bu yöntemde tüm durum değişkenleri sabit kazançlar ile çarpılarak sistemin girişine geri beslenir. Kontrol kanunu olarak aşağıdaki kontrol kuvveti fonksiyonu seçilir.

$$u(t) = -\underline{K}x \quad (4.9)$$

Burada \underline{K} sabit kazanç vektörü olup $1 \times n$ elemana sahiptir. Kazanç vektörünün elemanlarının tesbiti regülatör tasarımının esasını teşkil etmektedir. Yukarıdaki kontrol kanunu (4.5) te yerine konulup düzenlenirse kontrol edilmiş sistemin dinamik denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{BK})\underline{x} \quad (4.10)$$

$$y = \underline{C}\underline{x}$$

Sistemin yeni karakteristik matrisi matrisi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\underline{A}_k = \underline{A} - \underline{BK} \quad (4.11)$$

\underline{A}_k matrisinin karakteristik denkleminin kökleri başka bir anlatımla karakteristik matrisin öz değerleri kazanç vektörünün fonksiyonudur. Kazanç vektörü uygun olarak belirlenmek suretiyle sistemin kökleri atanabilir.

Sistemin köklerinin rastgele atanmanın önemli bir şartı vardır ki bu sistemin kontrol edilebilir olma şartıdır. Eğer sistemin durum değişkenleri belli bir değerden istenilen değere sonlu zamanda getirilebiliyorsa bu tip sistemlere kontrol edilebilir denir. Bunun matematiksel ifadesi referans [9] da aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\underline{S}_c = [\underline{B} \quad \underline{AB} \quad \underline{A^2B} \quad \dots \quad \underline{A^{n-1}B}] \quad (4.12)$$

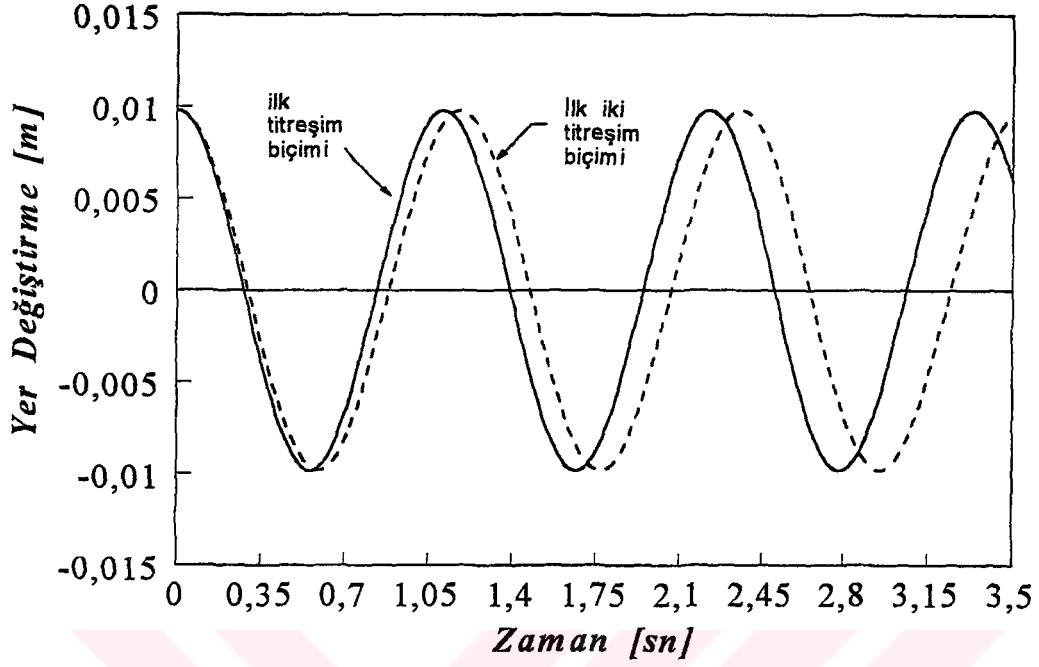
Burada \underline{S}_c matrisi kontrol edilebilirlik matrisi olarak bilinir. Eğer kontrol edilebilirlik matrisinin rankı sistemin durum değişkeni sayısına eşit ise sistemin kontrol edilebilir olduğu söylenir. Kontrol organı tasarımını yaptığımız sistem kontrol edilebilirdir.

Sistemin köklerinin atanmasında dikkat edilmesi gereken bir hususta köklerin imajiner eksenden çok fazla uzakta olacak şekilde seçilmemesidir. Köklerin imajiner eksenden uzak atanması için gerekli kazanç değerleri çok büyük olacaktır. Dolayısıyla gerekli kontrol kuvvetinin aşırı artmasına neden olacaktır. Gerekli kuvvetin eyleyici tarafından sağlanması sorun olabileceği gibi sistem kontrol edilmeye çalışılırken sisteme fiziksel zarar verilebilmesi de mümkündür.

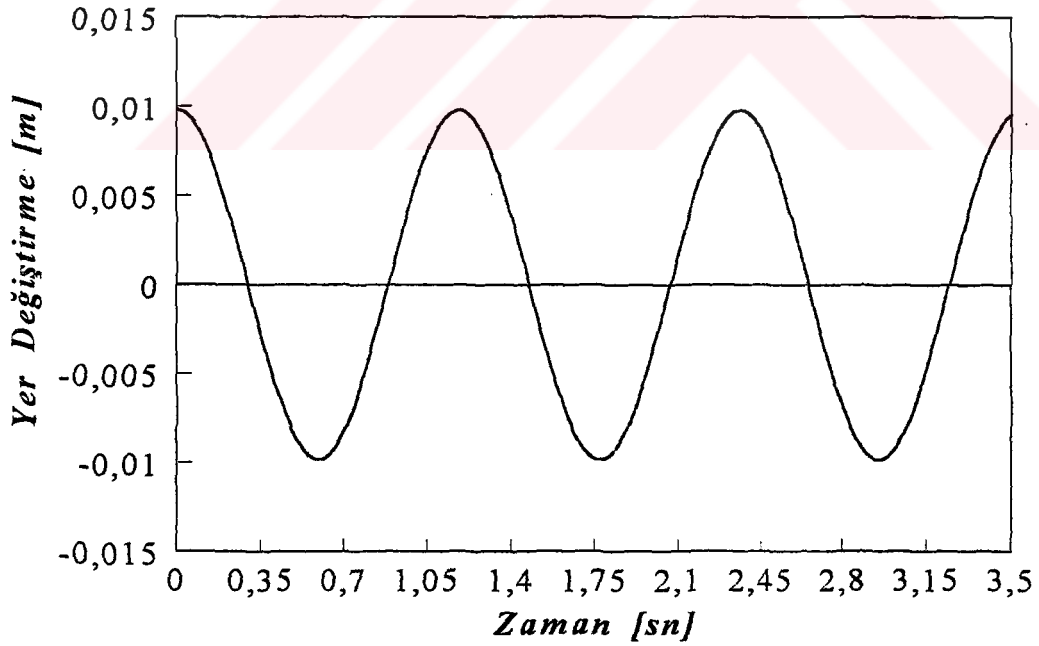
Yapılan similasyon çalışmaları sonucu uygun kaza vektörü aşağıda görüldüğü gibi bulunmuştur.

$$\underline{K} = [30 \ 30 \ 5 \ -9] \quad (4.13)$$

Burada kaza vektörünün boyutunun 1×4 olduğu görülmektedir. Kontrol organın tasarımında sistemin ilk iki titreşim biçiminin kullanıldığı anlaşılmaktadır ve akla neden ilk iki titreşim biçiminin kullanılarak regülator tasarımı yapıldığı sorusunu getirmektedir. İlk iki titreşim biçiminin sistemi kontrol etmek için yeterli olduğuna yapılan similasyonlar sonucu karar verilmiştir. Şekil 4.4 de görülmekte olan similasyonlardan Şekil 4.4a sistemin ilk titreşim biçimi ve ilk iki titreşim biçimi kullanılarak birinci titreşim biçiminden tahrik edilmiş sistemdeki serbest yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Görülmektedir ki iki eğri birbirinden farklıdır. Aynı işlem ilk iki titreşim biçimi ile ilk üç titreşim biçimi arasında da yapılmış ve elde edilen similasyon sonucu Şekil 4.4b de görülmektedir. İki eğri st üste akişmıştır. Elde edilen similasyon sonuçlarına bakılarak ilk iki titreşim biçiminin kullanılmasının yeterli olduğuna daha fazla titreşim biçiminin dikkate alınmasına gerek olmadığına karar verilmiştir. Ayrıca kontrol organı tasarımında gözönüne alınmayan diğer titreşim biçimlerinin etkisi ayrı bir bölümde incelenecek ve uygun titreşim biçimi sayısı tekrar tartışılacaktır.



Şekil 4.4a $\beta=0.98$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme miktarı
(ilk titreşim biçimi ve ilk iki titreşim biçimi için)

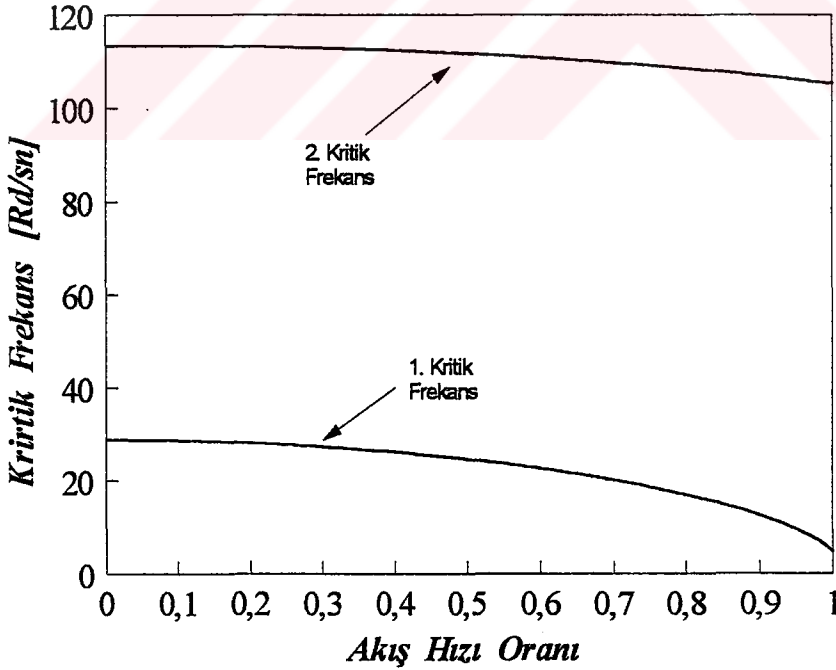


Şekil 4.4b $\beta=0.98$ için $x_m=7L/16$ noktasındaki yer değiştirme miktarı
(ilk iki titreşim biçimi ve ilk üç titreşim biçimi için)

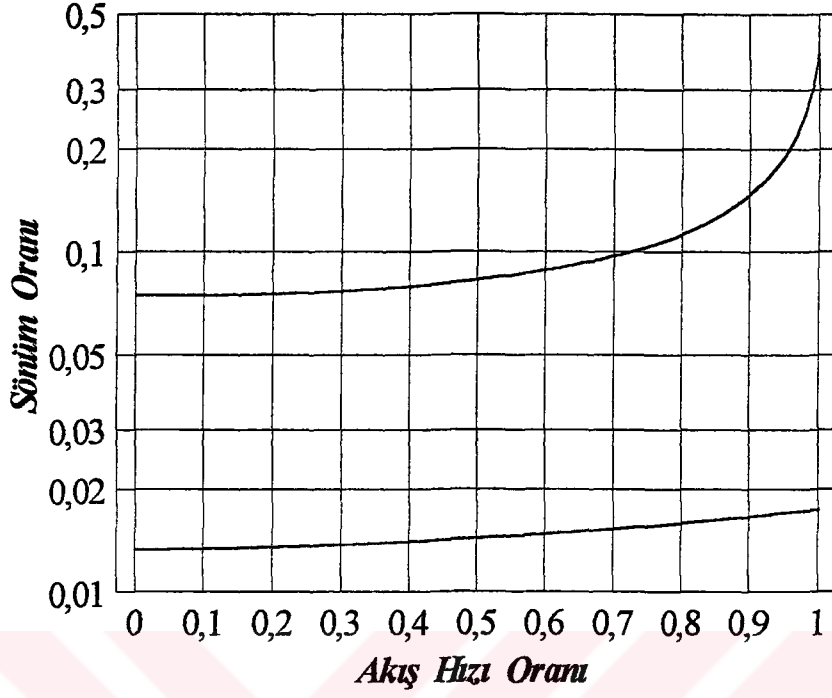
Sistemin ilk iki titreşim biçimi için tasarlanan regülatör, sistemin kritik frekanslarının Şekil 4.5 de görülmekte olduğu gibi değişmesine neden olmaktadır. Kontrol organının ayrıca kritik hıza yakın akış değerlerinde sistemin çalışmasına izin vermektedir.

Sisteme ilave edilen kontrol mekanizması sistemdeki sönüm oranlarını değiştirmek suretiyle titreşimleri sönümlenmektedir. Kontrol uygulanmış sistemin sönüm oranlarının akış hızı oranına göre değişimi Şekil 4.6 da görülmektedir. Eğriden de anlaşılacağı gibi sistemdeki sönüm oranları kritik akış hızına yaklaştıkça aktif kontrol sistemi tarafından artırılmaktadır.

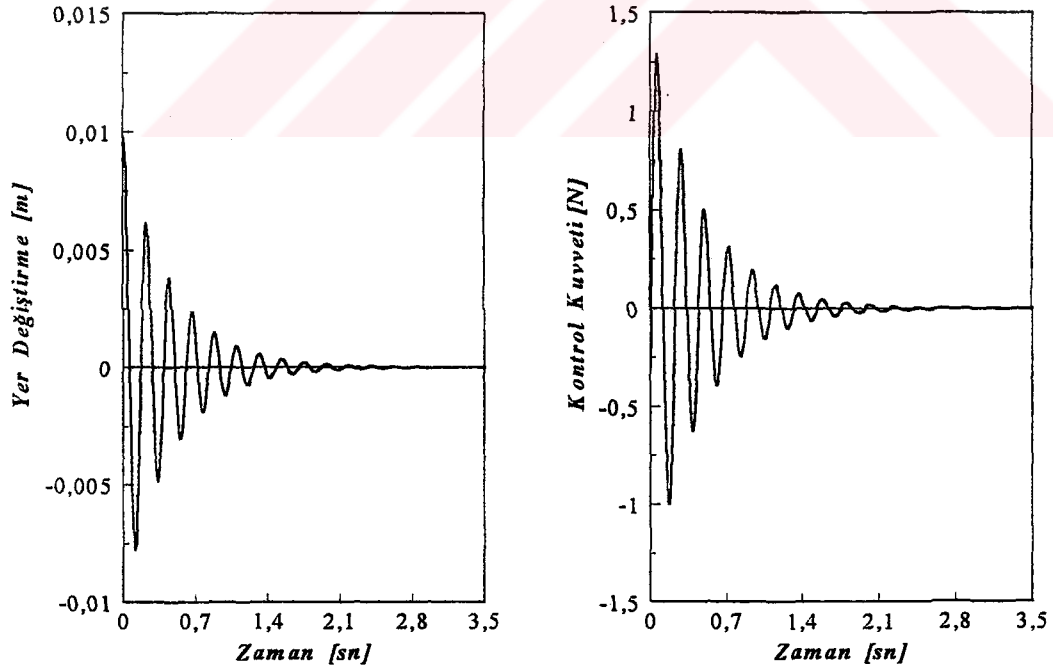
Tasarlanan regülatör kullanılarak kapalı çevrimli sistemin dinamik davranışı incelenmiştir. Şekil 4.7a-g de görüldüğü gibi tasarlanan kontrol organı sistemin titreşimlerini sönümleye yeterli olmaktadır.



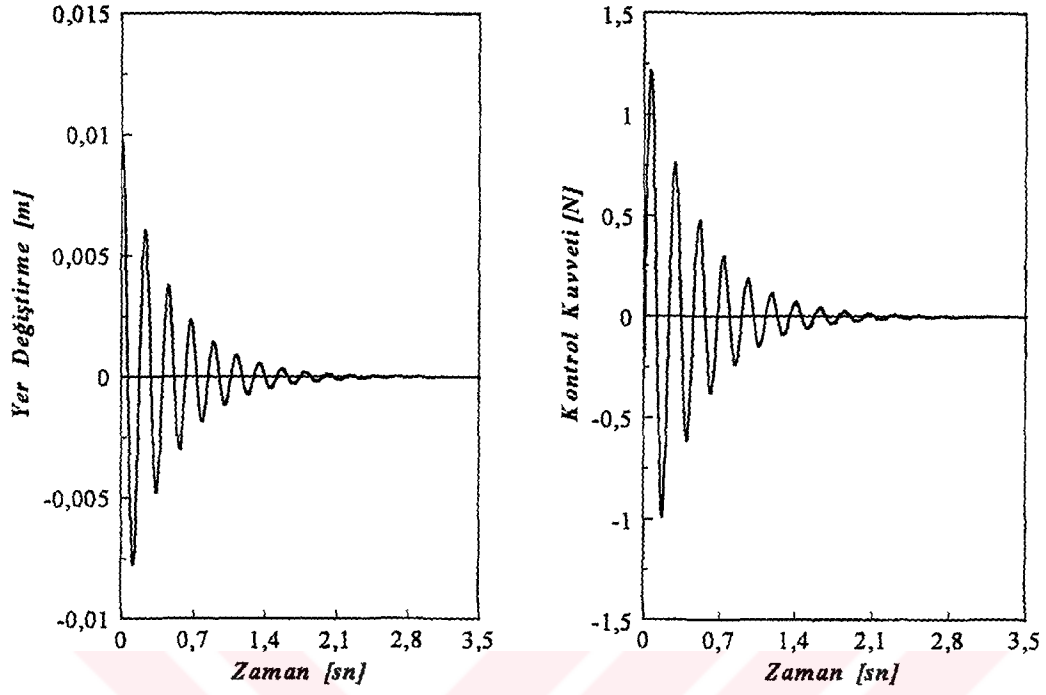
Şekil 4.5 Kritik Frekansın Değişimi



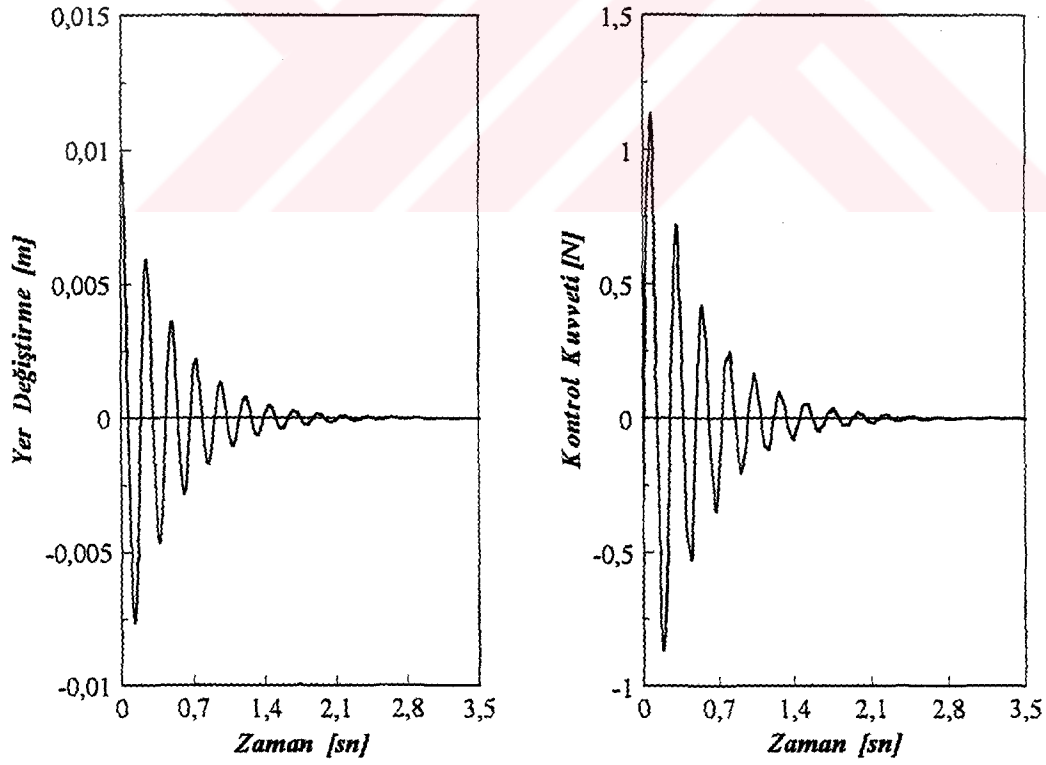
Şekil 4.6 Sönüm Oranının Değişimi



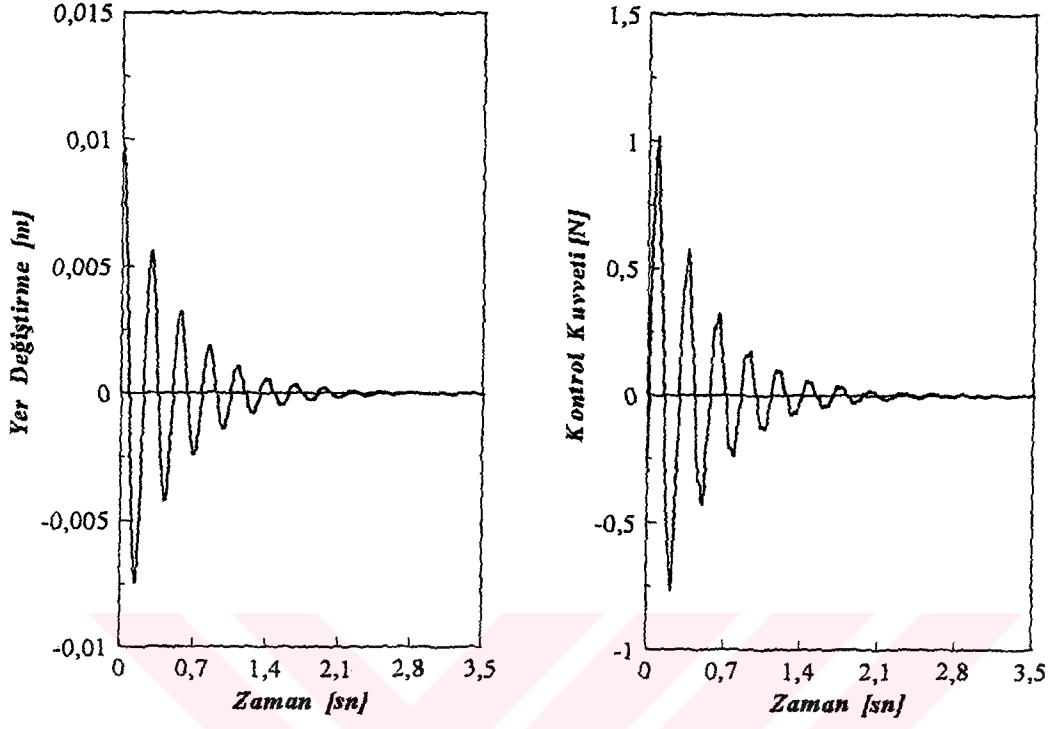
Şekil 4.7a $\beta=0$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti



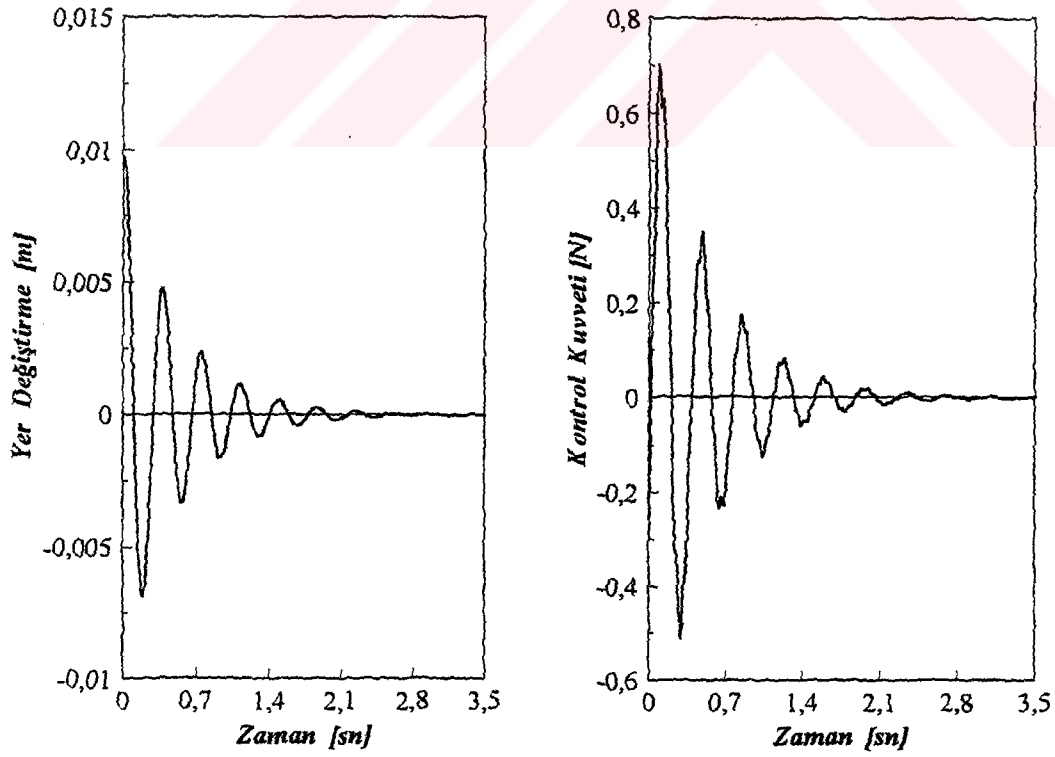
Şekil 4.7b $\beta=0.2$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti



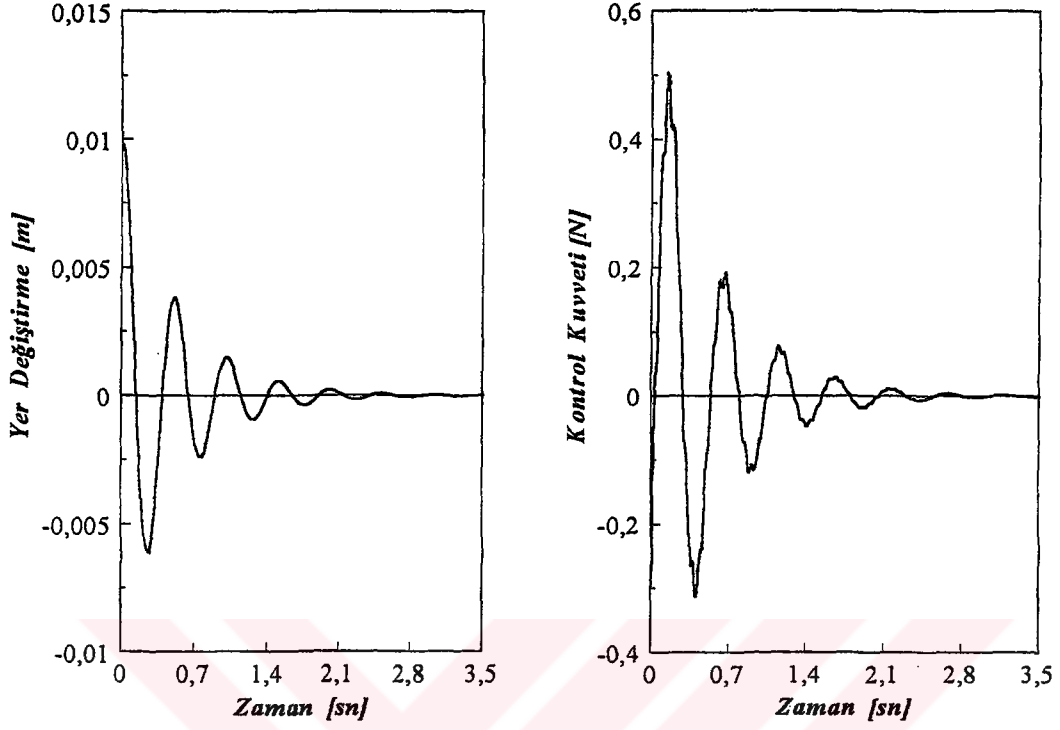
Şekil 4.7c $\beta=0.4$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti



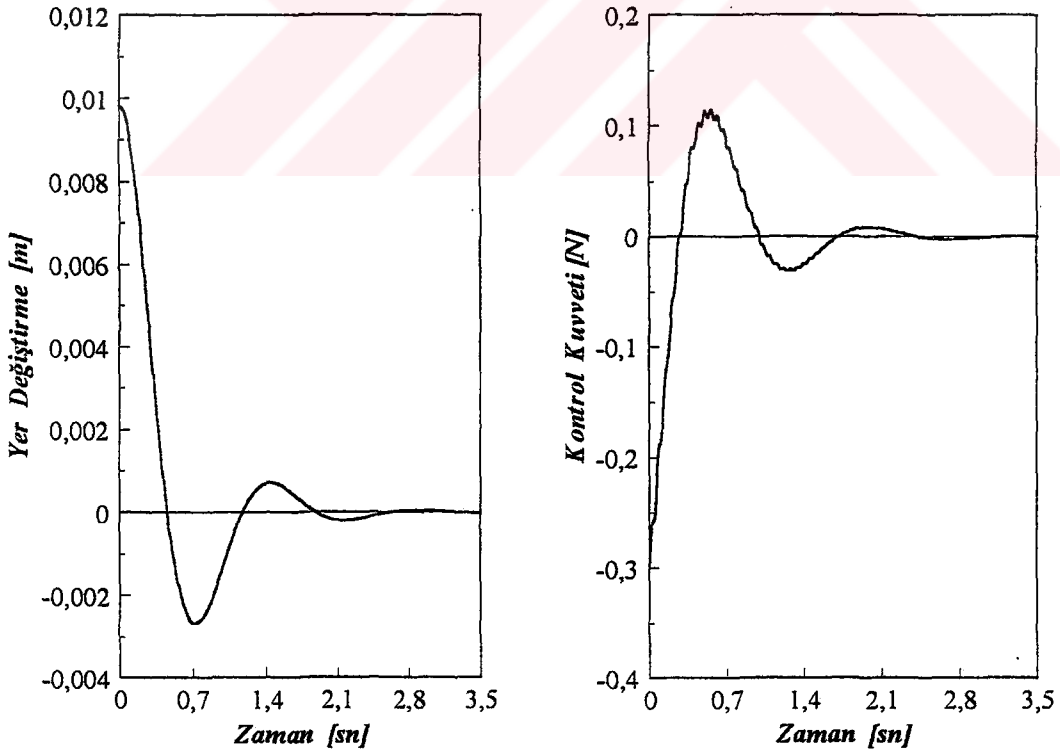
Şekil 4.7d $\beta=0.6$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti



Şekil 4.7e $\beta=0.8$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti

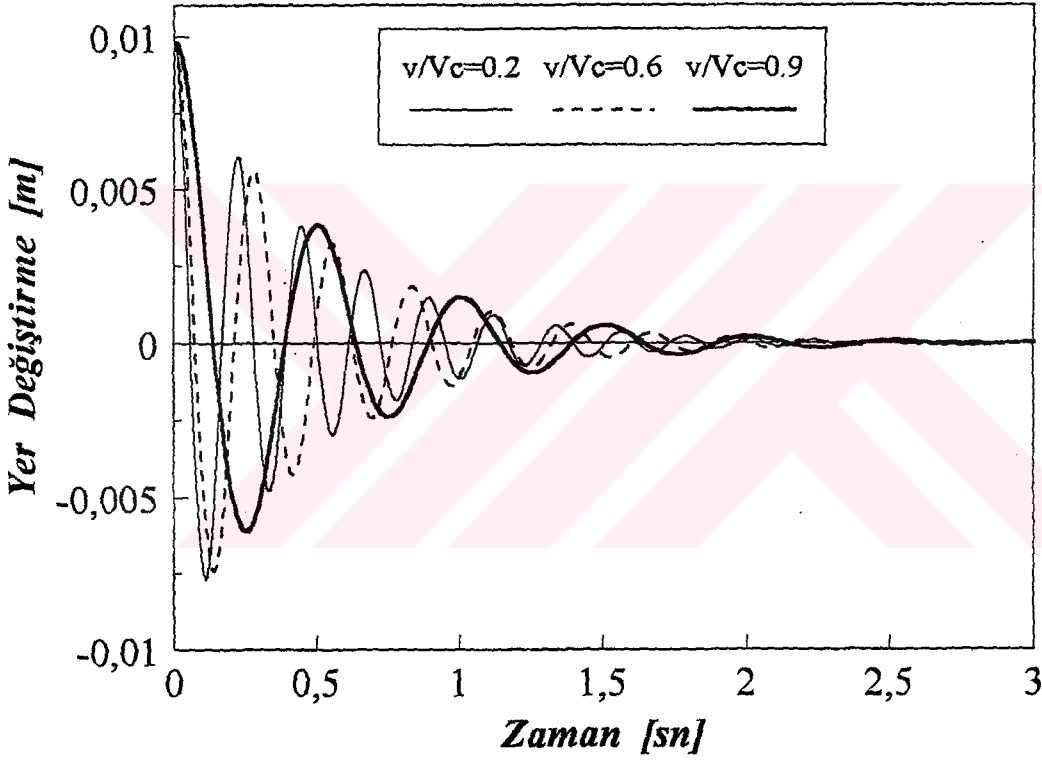


Şekil 4.7f $\beta=0.9$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti



Şekil 4.7g $\beta=1$ akış hızı oranı için sistem cevabı ve kontrol kuvveti

Yukarıda görülen eğrilerde akış hızının değişmesiyle kontrol sisteminin etkinliğinde değiştiği görülmekle birlikte bu açık bir şekilde anlaşılamamaktadır. Üç değişik akış hızı için yapılan simülasyonlarda elde edilen yer değiştirme miktarları Şekil 4.8 de aynı ölçekte çizilmiş olup kontrol sisteminin etkinliğinin nasıl değiştiği daha açık bir biçimde görülmektedir.



Şekil 4.8 $\beta=0.2$, $\beta=0.6$ ve $\beta=0.9$ Akış Hız Oranları İçin Kontrol Edilmiş Sistemin Yer Değiştirme Miktarı ($x_s=9L/16$)

4.4.2 Regülatör Tasarımı -2

Bu bölümde regülatör tasarımında kullanılan yöntem daha önce açıklandığı gibi hızın geri beslenmesi yöntemidir. Tasarlanan regülatör ile kontrol sistemi akışkan taşıyan borunun x_a noktasına klasik bir sönümleyici eleman yerleştirilmiş gibi davranmaktadır. Bu yöntemde sensör ile eyleyici aynı noktaya yerleştirilmektedir. Bu çalışmada sensör ve eyleyici $x_a=x_m=9L/16$ noktasına yerleştirilmiştir. Kontrol kanunu olarak aşağıdaki kontrol kuvveti fonksiyonu seçilmiştir.

$$u(t) = -r\dot{y} \quad (4.9)$$

Burada r sabit bir reel sayı olup hız geri besleme kazancı, \dot{y} ise x_a noktasında borunun yer değiştirme hızıdır. Borunun yer değiştirme hızı bölüm 2 de verilen yaklaşık çözüm serisinin, (2.14), zamana göre türevini almak suretiyle aşağıdaki şekilde bulunacaktır.

$$\dot{Y}_c(x, t) = \sum_{i=1}^n \dot{w}_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (4.10)$$

Borunun yer değiştirme hızı aşağıdaki matris düzenlemesiyle hesaplanabilecektir.

$$\dot{y} = \underline{T}\underline{x} \quad (4.11)$$

Burada \underline{x} $2n \times 1$ boyutunda durum değişkenleri vektörü, \underline{T} ise $1 \times 2n$ boyutunda hız katsayı vektörüdür. Sadece ilk titreşim biçim dikkate alındığında ($n=1$) \underline{T} vektörü aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\underline{T} = \left[0 \quad \sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) \right] \quad (4.12)$$

Sadece ilk iki titreşim biçimi dikkate alınrsa \underline{T} vektörü aşağıdaki gibi olur.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) & \sin\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Sadece ilk üç titreşim biçimi dikkate alınarak hesaplama yapılırsa \underline{T} vektörü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi x_m}{L}\right) & \sin\left(\frac{2\pi x_m}{L}\right) & \sin\left(\frac{3\pi x_m}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Yukarıda tanımladığımız kontrol kanununda (4.11) borunun yer değiştirme hızı denklemini yerine konulduğunda kontrol kanunu aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$u(t) = -r\underline{T}\underline{x} \quad (4.15)$$

Yukarıdaki kontrol kanunu (4.5) de yerine konulup düzenlenirse kontrol edilmiş sistemin dinamik denklemleri matris düzenlemesiyle aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B}r\underline{T})\underline{x} \quad (4.16)$$

$$y = \underline{C}\underline{x}$$

Sistemin yeni karakteristik matrisi aşağıdaki gibi olur.

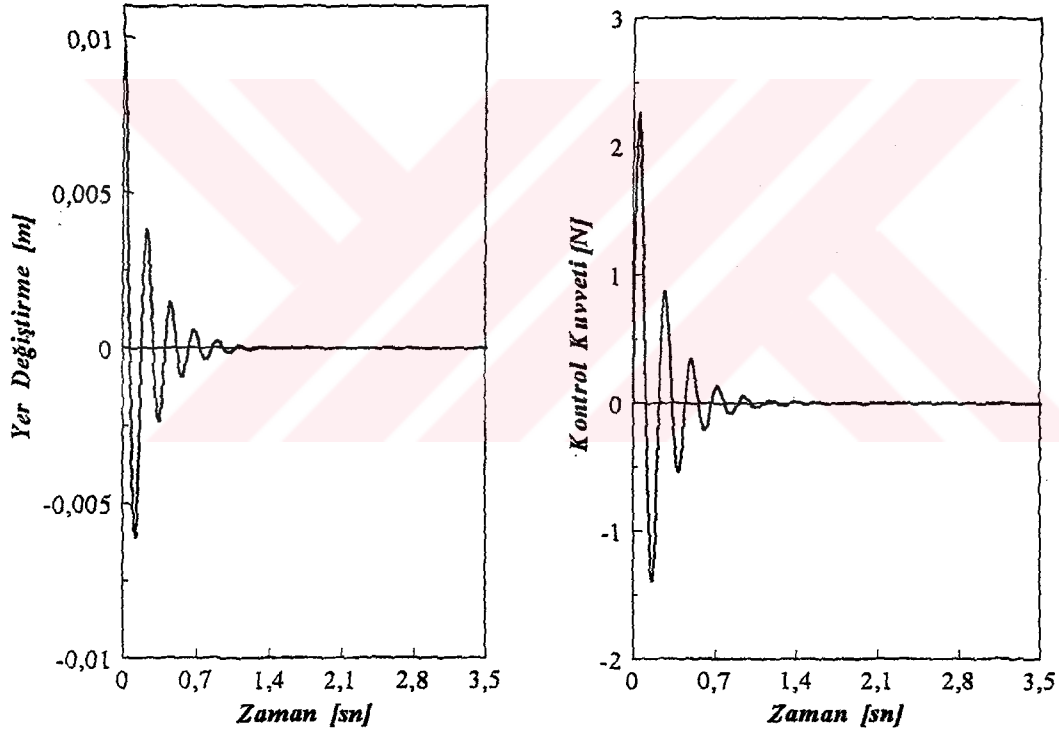
$$\underline{A}_k = \underline{A} - \underline{B}r\underline{T} \quad (4.17)$$

Burada r hız kazancı, sistemi kararlı kılacak ve titreşimleri sönmüleyecek şekilde belirlenmesi gerekmektedir. Yapılan simülasyon çalışmaları sonucunda r , hız kazancı değeri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

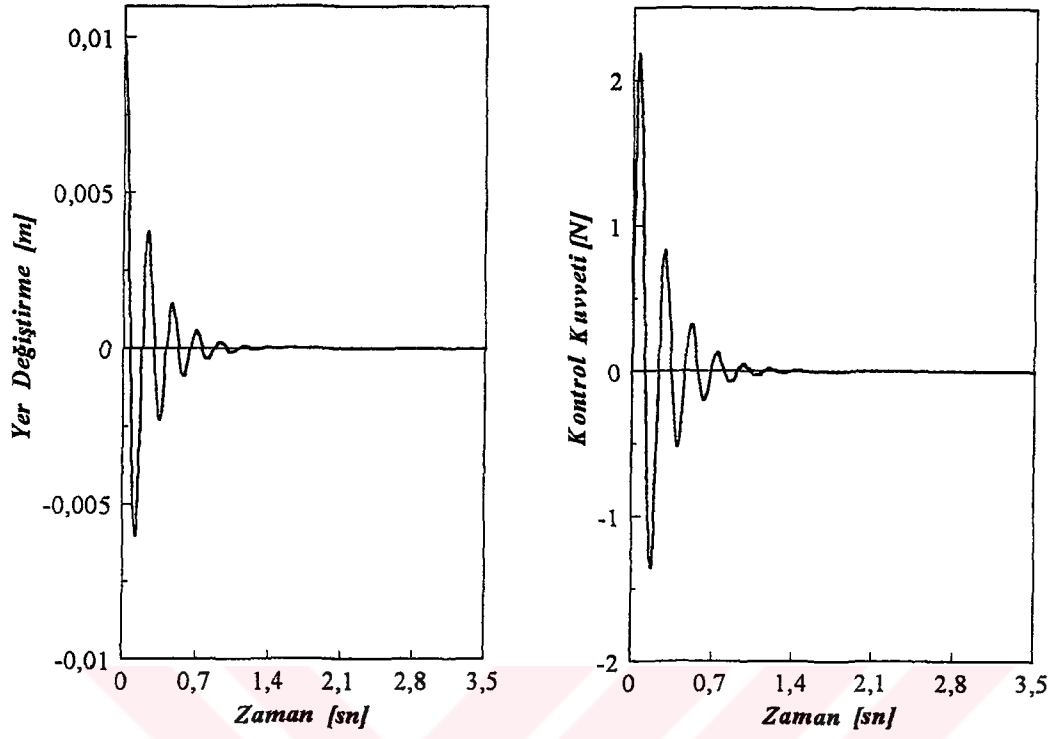
$$r = 10 \quad (4.18)$$

Kontrol edilmiş sistemin çeşitli akış hızları için similasyonu yapılmıştır. Yapılan similasyonlar sonucu elde edilen eğriler Şekil 4.9a-g de görülmektedir. Sistemdeki istenmeyen titreşimler sönümlenmiştir.

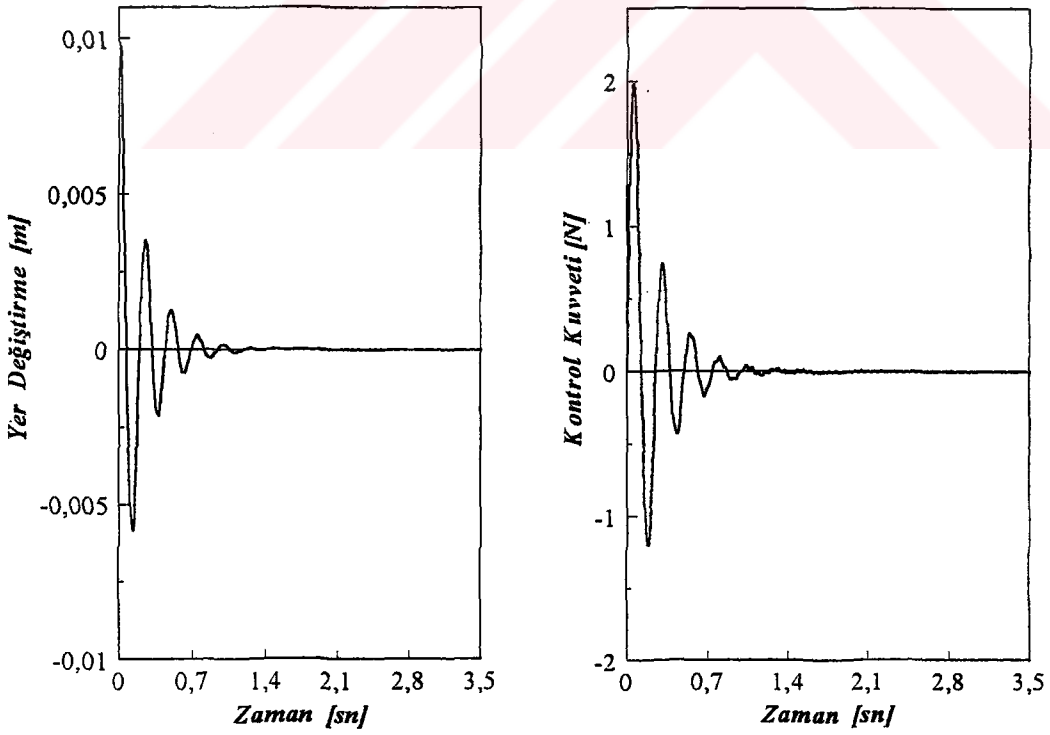
Şekil 4.10 da ise üç değişik akış hızında sistemin similasyonu sonucu elde edilen yer değiştirme miktarının karşılaştırılması yapılmıştır.



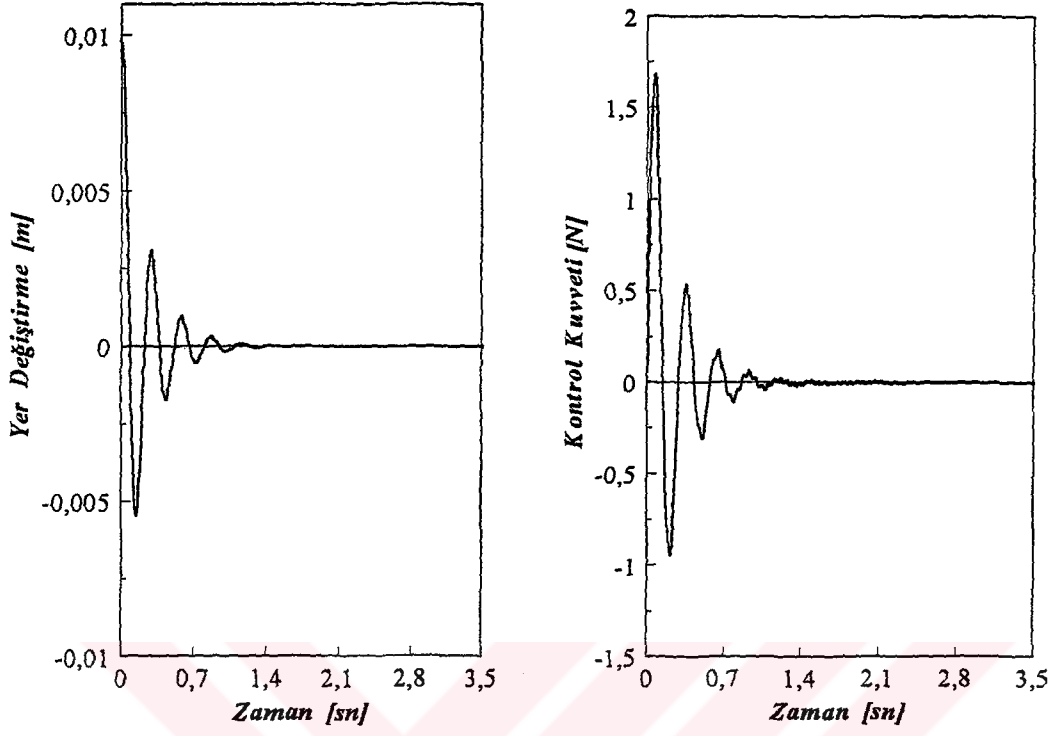
Şekil 4.9a $\beta=0$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değiştirme ve uygulanan kuvvet



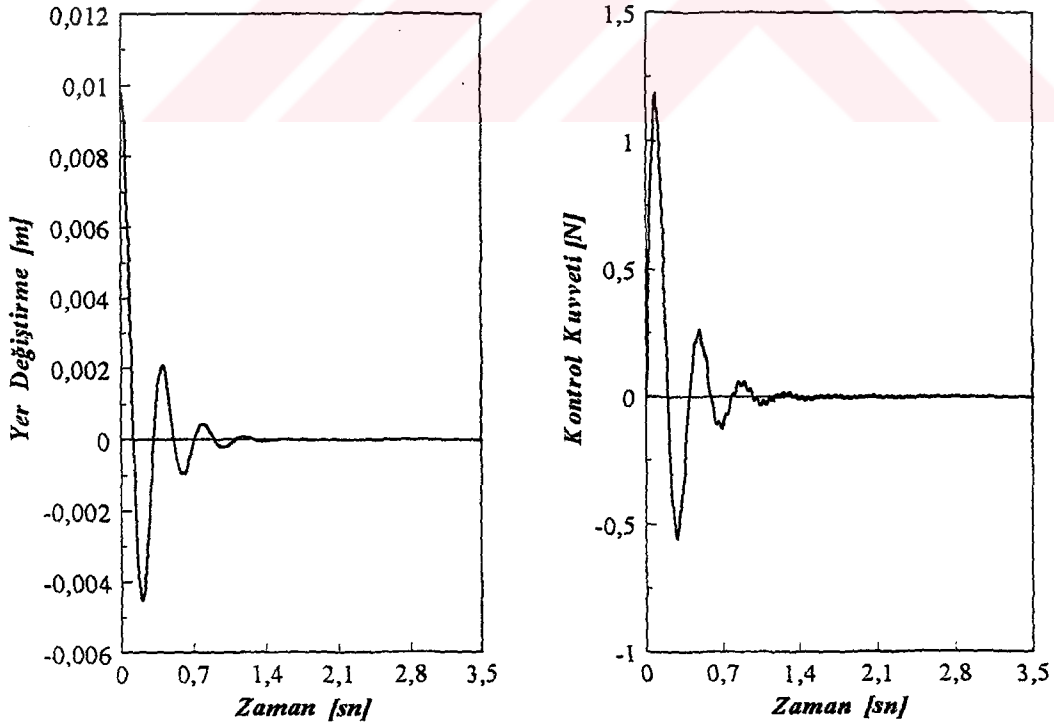
Şekil 4.9b $\beta=0.2$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değişirme ve uygulanan kuvvet



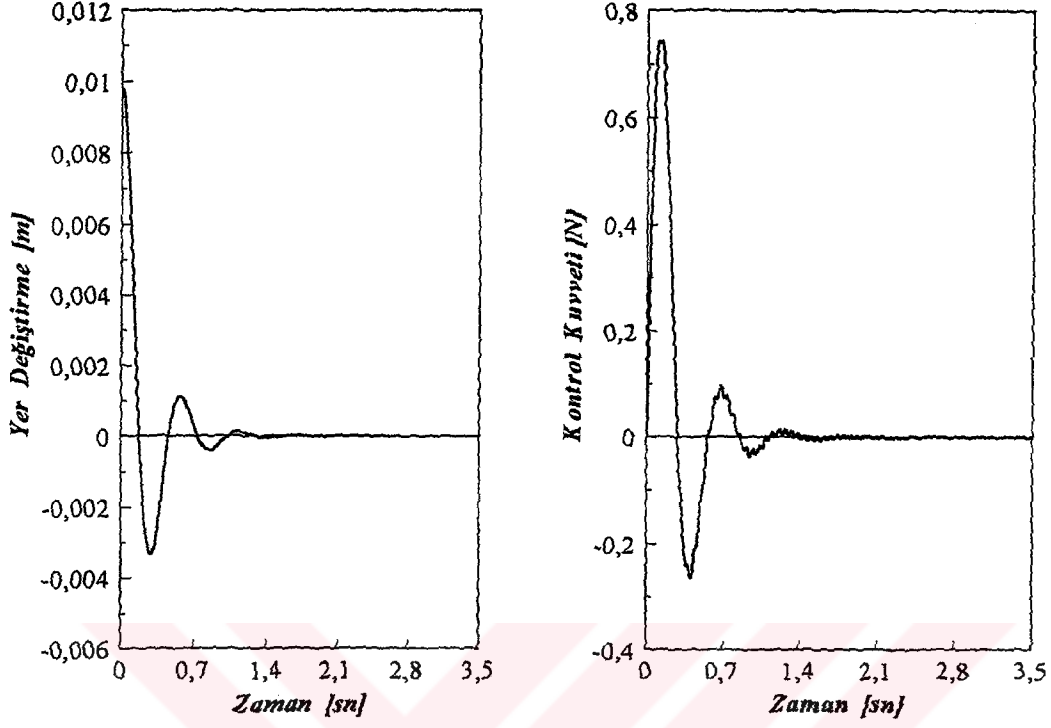
Şekil 4.9c $\beta=0.4$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değişirme ve uygulanan kuvvet



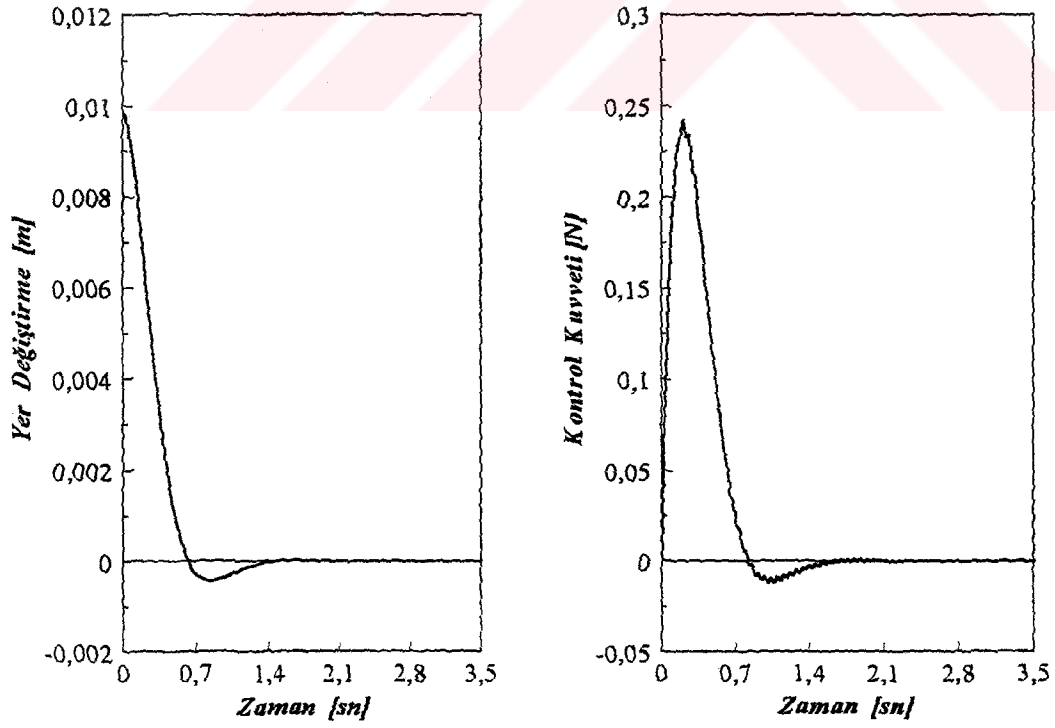
Şekil 4.9d $\beta=0.6$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değiştirme ve uygulanan kuvvet



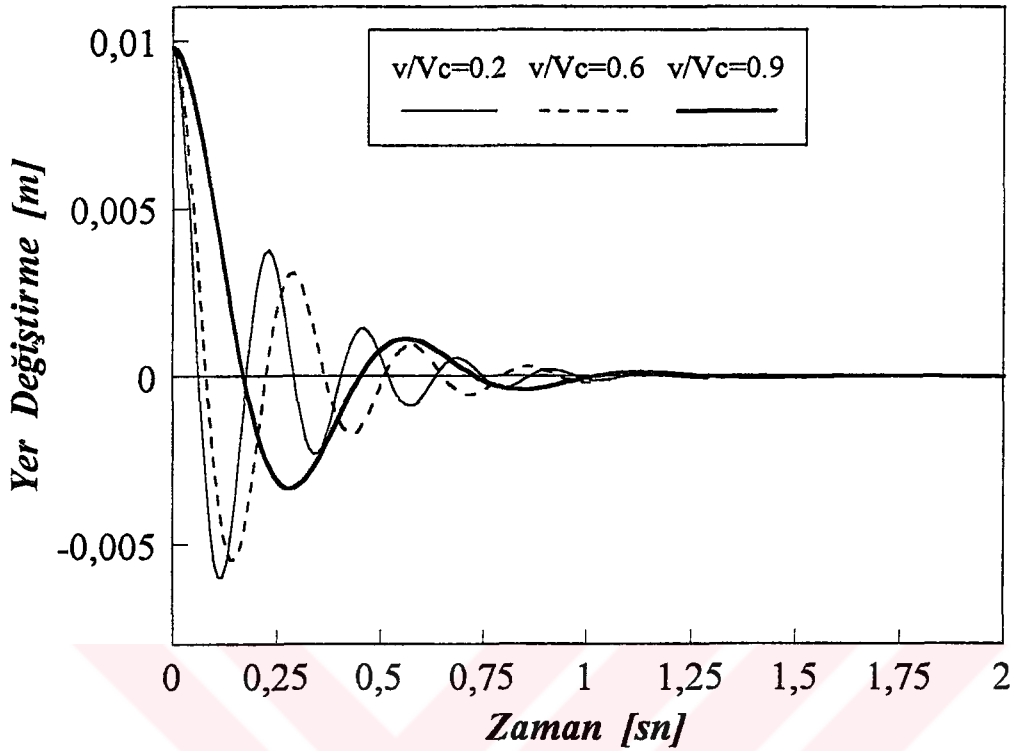
Şekil 4.9e $\beta=0.8$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değiştirme ve uygulanan kuvvet



Şekil 4.9f $\beta=0.9$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değiştirme ve uygulanan kuvvet



Şekil 4.9g $\beta=0.98$ akış hızı oranı için $x=9L/16$ noktasındaki yer değiştirme ve uygulanan kuvvet



Şekil 4.10 $\beta=0.2$, $\beta=0.6$ ve $\beta=0.9$ akış hızı oranları için $x=9L/16$ noktasının yer değişirme grafiği

4.5 İhmal Edilen Titreşim Biçimlerinin Etkisi ve Uygun Titreşim Biçimi Sayısı

Teorik olarak elastik sistemler sonsuz titreşim biçimine sahip sürekli sistemlerdir fakat pratik uygulamalarda sonlu sayıda titreşim biçimine sahip sistemler gibi modellenmesi gerekmektedir. Tüm titreşim biçimlerinin aynı anda aktif olarak kontrol edilmesi gerek donanım sınırlamaları gerekse modelleme hatalarından dolayı mümkün olamamaktadır. Aktif kontrol sisteminin düşük sayıda titreşim biçimi için sınırlandırılması gerekmektedir. Seçilen titreşim biçimleri sistemin en problemlili titreşim biçimleri olmasına yani sistemin genel dinamik davranışını ifade edebilmesine dikkat edilmelidir. Kontrol sisteminin etkinliği için uygun sayıda titreşim biçimi seçilmelidir[8].

Kontrol sistemi tasarlanılırken dikkate alınmayan titreşim biçimleri kontrol sisteminin etkinliğini olumsuz yönde etkileyebilmekte, sistemin kararlılığını bozabilmektedir. Bu problem ihmal edilen titreşim biçimlerinin etkisi (Spillover effect) olarak bilinir.

Yukarıda yapılan regülatör tasarımlarında sistemin ilk iki titreşim biçimi kullanılmıştır. Bunun nedeni yapılan bir dizi simülasyon sonucu sistemin ilk titreşim biçiminden tahrik edildiği takdirde sistemde ihmal edilen titreşim biçimlerinin etkisinin en az düzeyde olduğu ve kontrol sisteminin etkinliğini önemli sayılabilecek ölçüde değiştirmediği görülmüştür. Fakat sistem ikinci titreşim biçiminden herhangi bir şekilde tahrik edilecek olursa seçilen ilk iki titreşim biçimi sistemi ifadeye yeterli olamamaktadır. İhmal edilen titreşim biçimleri aktif kontrol sisteminin etkinliğini bozmaktadır.

Durum değişkenlerinin geri beslenmesi yöntemi kullanılarak titreşimler kontrol edildiğinde ortaya çıkan ihmal edilen titreşim biçimlerinin kontrol sistemi üzerindeki olumsuz etkisi bu yöntemin bir dezavantajıdır. İkinci olarak kullanılan hızın geri beslenmesi yönteminde ihmal edilen titreşim biçimlerinin kontrol sistemini etkilemesi problemi yoktur. Hızın geri beslenmesi yöntemi ile tasarlanan regülatörün etkinliğini göstermek amacıyla yapılan simülasyonlarda ilk iki titreşim biçiminin kullanılmasına rağmen kontrol sisteminin gerçek olarak uygulamasında x_a noktasının yer değiştirme hızı bir sensör tarafından ölçülmekte , ölçülen hız sabit bir hız kazancı ile çarpılarak eyleyici kuvveti belirlenmektedir. Bu yöntemde tüm durum değişkenlerinin bilinmesi gerekmediğinden ihmal edilen titreşim biçimlerinin etkisinden söz edilemez.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

5.1 Giriş

Önceki bölümlerde basit mesnetli akışkan taşıyan bir borunun matematiksel modeli elde edilerek gösterdiği dinamik davranışları incelenmiştir. Boruda meydana gelen titreşimler tasarlanan iki değişik regülatör ile sönülmüştür. Bu bölümde yapılan çalışma özetlenerek ileriki çalışmalarda neler yapılabileceği belirtilmiştir.

5.2 Yapılan Çalışma

İlk bölümde akışkan taşıyan borular konusunda yapılan bazı çalışmalar özetlenerek verilmiştir. Akışkan taşıyan borunun dinamik denklemi bölüm 2 de yapılan kabuller ile Newton'un prensipleri uygulanarak elde edilmiştir. Elde edilen dinamik denklem kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Kısmi türevli diferansiyel denklem Galerkin yöntemi uygulanarak titreşim biçimlerine ayrıştırılmıştır. Sistemin ilk üç titreşim biçimine ait diferansiyel denklemler elde edilmiş ve bu denklemler durum uzayında ifade edilmiştir. Ayrıca kritik akış hızının analitik ifadesi elde edilmiş ve temel kritik frekans tanımlanmıştır.

Bölüm 3 de sistemin dinamiği incelenmiştir. Sistemin kritik frekanslarının akış hızının artması ile azaldığını ve kritik akış hızında en düşük kritik frekansın sıfır değerine ulaşarak sistemin kararsızlaştığı gösterilmiştir. Sistemin simülasyonları yapılarak sistemin nötr kararlı bir sistem olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca sisteme etki eden Coriolis kuvvetlerinin sistem üzerin yaptığı etki incelenerek , sistemin kritik frekanslarını değiştirdikleri gösterilmiştir. G , jiroskopik sönüm matrisinin sistemde bilinenin aksine sönümlenme yapmadığı gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde iki değişik regülatör tasarımı yapılarak sistemdeki titreşimlerin aktif kontrol ile sönmülenebileceği gösterilmiştir.

5.3 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar

Aktif kontrol uygulanarak akışkan taşıyan borunun titreşimlerinin sönmülmesi konusunda yapılan çalışmalar az sayıda olup konu gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Kontrol sistemleri ile ilgili donanımların gelişmesi ile teorik olarak gerçekleştirilen kontrol sistemleri pratiğe uygulanabilmektedir. Yapılabilecek çalışmalar aşağıda kısaca maddeler halinde özetlenmeye çalışılmıştır.

- Burada akışkan taşıyan borunun basit mesnetli olması hali incelenmiştir. Değişik sınır şartlarında sistem modellenerek incelenebilir.
- Sistemin hareket denklemleri elde edilirken yapılan kabuller değiştirilerek dinamik denklemler geliştirilebilir.
- Değişik kontrol organları tasarlanabilir.
- Tasarlanan kontrol sistemleri deneysel olarak gerçekleştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. R. D. B. , *Flow-Induced Vibration* , Litton Educational publishing Inc, La jolla, California , 1977
2. MEIROVITCH L. ,*Elements of Vibration Analysis* ,McGraw-Hill , 1975
3. BALAS M. J. , *Active Control of Flexible Systems* , Journal of Optimization Theory And Aplications , Vol. 25, No. 3 , July 1978
4. ULSOY A. Galip , *Vibration Control in Rotating or Translating Elastic Systems* , Journal of Dynamic Systems , Measurement and Control ,Vol. 106/7 ,March 1984
5. DORF Richard C. , *Modern Control Systems* , Addison-Wesley Publishing Company, Inc ,1989
6. MEIROVITCH L. , *Analytical Methods In Vibrations* , Macmillan Publishing Co., Inc. , New York ,1967
7. KARAALI Salih , *Lineer Cebir* , İSTANBUL ,1986
8. BALAS, M. J., *Feedback Control of Flexible System* , IEEE Transactions on Automatic Control, Vol . AC-23, No. 4 , Aug. 1978 ,pp. 673-679
9. Kuo Benjamin C., *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions,1991
10. PAIDOUSSIS M. P. and ISSID N. T. , *Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid*, Journal of Sound and Vibration , Vol 33(3), 1974, pp. 267-294

11. AITKEN J., *An Account of Some Experiments on Rigidity Produced by Centrifugal Force* , Philosophical Magazine, Vol 5, 1878, pp. 81-105
12. BOURRIERES F. J. *Sur un phenomene d' oscilation auto-antretenue en mecanique des fluides reels.* , Publications Scientifiques et Tecniques du Ministere de l' Air , No. 147 ,1939
13. ASHLEY H. and HAVILAND G. , *Bending Vibrations of A Pipeline Containing Flowing Fluid.* , Journal of Aplied Mechanics ,Vol 17,1950 , pp. 229-232
14. FEODOS'EV V. P. , *Vibrations And Stability of A Pipe When Liquid Flows Through It* , Inzhenernyi Sbornik , Vol 10 , 1951, pp. 169-170
15. HOUSNER G. W. , *Bending Vibrations of A Pipeline Containing Flowing Fluid*, Journal of Applied Mechanics , Vol 19, 1952 , pp. 205-208
16. NIORDSON F. I. , *Vibrations of A Cylindrical Tube Containing Flowing Fluid*, Kungliga Tekniska Högskolans Handlingar , No.73, 1953
17. LONG R. H. , JR. , *Experimantal And Theoretical Study of Transverse Vibration of A Tube Containing Flowing Fluid*, Journal of Applied Mechanics , Vol 22, 1955, pp. 65-68
18. SINGH K. , A. K. MALLIK , *Parametrik Instability of A Periodically Supported Pipe Conveying Fluid* , Journal of Sound and Vibration, Vol 62, 1979, pp. 379-397
19. JHONSON R. O., *The Stability of Simply Supported Tubes Conveying A Compressible Fluid* , Journal of Sound and Vibration, Vol 117, 1987, pp. 335-350

20. TANG D. M. , DOWELL E. H., *Chaotic Oscillation of A Cantilever Pipe Conveying Fluid*, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 2, 1988, pp. 263-283
21. MISRA A. K. , PAIDOUSSIS and VAN K. S. , *On The Dynamics of Curved Pipes Transporting Fluid. Part I : Inextensible Theory* , *Journal of Fluids and Structures* , Vol 2, 1988, pp. 221-244
22. MISRA A. K. , PAIDOUSSIS M. P. and VAN K. S. , *On The Dynamics of Curved Pipes Transporting Fluid. Part II : Extensible Theory* , *Journal of Fluids and Structures* , Vol 2, 1988, pp. 245-261
23. C. SEMLER, LI G. X. and PAIDOUSSIS , *The Non-Linear Equation of Motion of Pipes Conveying Fluid* , *Journal of Sound and Vibration*, Vol 169, 1994, pp. 577-599
24. PAIDOUSSIS M. P. and LI G. X. , *Pipes Conveying Fluid : A Model Dynamical Problem* , *Journal of Fluids and Structures*, Vol 7, 1993, pp. 137-204
25. BAZ A. and POH S., *Experimental Implementation of The Modified Independent Modal Space Control Method*, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 139, 1990, pp. 133-149
26. KANGASPUOSKARI M., LAUKKANEN J., PRAMILA A., *The Effect of Feedback Control on Critical Velocity of Cantilevered Pipes Aspirating Fluid* , *Journal of Fluids and Structures*, Vol 7, 1993, pp. 707-715
27. VENKATRAMAN K. and NARAYAN S., *Active Control of Flow-Induced Vibration*, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, 1993, pp. 43-45

28. BAZ A. and RO J. , *Active Control of Flow-Induced Vibrations of A Flexible Cylinder Using Direct Velocity Feedback*, Journal of Sound and Vibration , Vol. 146, 1991, pp. 33-45

