

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

84915

DİKDÖRTGEN KESİTLİ KANAL İÇERSİNDE  
BASINÇLI ORTAMLARIN AKIŞININ  
İNCELENMESİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Mak. Müh. Metin AKYOL

F.B.E. Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Enerji Makinaları Programında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ



84915

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İbrahim GENTEZ

Doç. Dr. Muhittin SOĞUKOĞLU

Doç. Dr. Ahmet D. ALKAN





İSTANBUL, 1999

## İçindekiler Listesi

Simge listesi.....	iii
Özet.....	v
Abstract.....	vi
1. DİKDÖRTGEN KESİTLİ KANAL İÇERSİNDE BASINÇLI ORTAMLARIN AKIŞININ İNCELENMESİ.....	1
1.1. GİRİŞ.....	1
2. SIKIŞTIRILABİLİR VİSKOZ AKIŞKAN ORTAMLARIN AKIMI .....	2
2-1 Coutte Akımı .....	2
2-2 Sabit Kesitli Borulardan Stasyoner Akım .....	13
2-3 Sıkıştırılabilir Akışkan Ortamların Akımında Laminar Sınır Tabaka Denklemleri .....	25
2-4. Laminar Sınır Tabaka İçerisinde Hız Ve Sıcaklık İlişkisi.....	34
2-5. Sınır Tabaka Akımında İntegral Teoremi .....	41
2-6. Momentum İntegral Denklemi Sınır Tabaka Alanına Uygulanması .....	47
3. UYGULAMALAR.....	53
Kaynaklar.....	69
Özgeçmiş .....	70

## Simge Listesi

- $C_h$  : Isı transfer katsayısı  
 $C_f$  : Cidar sürtünmesi  
 $C_p$  : Sabit basınçta spesifik ısı  
 $D$  : Boru çapı  
 $f(u)$  : Entalpi veya sıcaklık fonksiyonu  
 $h(1)$  : İki levha arasındaki uzaklık (açıklık) veya  
(2) : birim kütle başına entalpi  
 $k$  : Termal iletkenlik  
 $L_{max}$  : Fanno akımında max. Uzunluk  
 $m$  : üs sayısı  
 $\dot{m}$  : kütleli debi  
 $M$  : Mach sayısı  
 $M_\infty(1)$  : Hareketli levhanın Mach sayısı veya  
(2) : Potansiyelli akımın Mach sayısı  
 $P$  : Basınç  
 $Pr$  : Prandtl sayısı  
 $q$  : Isı akısı  
 $q_w$  : Cidarda ısı akımı  
 $v$  : Akımın hız alanı  
 $R$  : Gaz sabiti  
 $Re_x$  : Reynolds sayısı  
 $r, \theta, z$  : Silindirik koordinatlar  
 $S$  : Birim kütle için entropi  
 $T$  : Sıcaklık  
 $T_\infty$  : (1) Hareketli levhanın sıcaklığı veya  
(2) Potansiyelli akımın sıcaklığı  
 $Tr$  : İyileşme sıcaklığı  
 $t$  : zaman  
 $U$  : (1) Hareketli levhanın sabit hızı veya  
(2) Potansiyelli akımın hızı

Y. İ. TÜRKİYE KÖĞRETİM KURULU  
BOKÜMAN KÜLTÜR MERKEZİ

- $U_{\infty}$  : Potansiyelli akımın hızı  
 $u, v, w$  : Kartezyen koordinatlarda hız alanının bileşkeleri  
 $v_r, v_{\theta}, v_z$ : Silindirik koordinatlarda hız alanının bileşkeleri  
 $x, y, z$  : Kartezyen koordinatlar  
 $\delta$  : Sınır tabaka nominal sıcaklığı  
 $\delta_t$  : Termal sınır tabaka kalınlığı  
 $\delta^*$  : Sınır tabaka yer değiştirme kalınlığı  
 $\eta$  : Boyutsuz değişken  
 $Q$  : Sınır tabaka momentum kalınlığı  
 $k$  : spesifik ısıların oranı  
 $\mu$  : Mutlak viskozite katsayısı  
 $\tau_w$  :  $(\tau_{yx})_w$  : Cidar kayma gerilmesi

#### Alt indisler

- $( )_1$  : Potansiyelli akım koşulları  
 $( )_0$  : Durma noktası koşulları  
 $( )_w$  : Cidardaki koşullar

## Özet

Bu tez çalışmasında, sıkıştırılabilir vizkoz akışkan ortaların akımında süreklilik, momentum, enerji ve hal denklemleri genelde inceleme konusu yapılarak, cidar sürtünmesinin söz konusu olduğu sabit kesitli bir boru içerisinde akım olayı göz önüne alınmıştır. Daha önce verilen kuramsal bilgilerden istifade edilerek, burada akım olayı ile ilgili teknik öneme haiz hava soğutmalı elektronik ünitelerdeki kanal içerisinde yer alan modül dizisinde basınç düşüşü konu edilmiştir. Sonuç olarak, kanal içerisinde akış esnasında modül dizisindeki basınç düşüşü boyutsuz formda düzenlenerek akımın Reynolds sayısına göre grafik olarak sunulmuştur. Ayrıca, bir modül dizisine bariyerin sokulması durumu, bariyersiz duruma göre kıyaslanmıştır. Bariyersiz durum ve üç değişik yükseklikteki bariyerin dizide yer alması durumunda basınç düşüşü değişimi de grafik olarak verilmiştir.



TEC. YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU  
ERKÜMAN  
ON MERKEZİ

## Abstract

In this study; continuity, momentum, energy and state equations in the current of surroundings of compressible, viscose, fluid have been examined thoroughly and the current affair in the wall friction which takes place from the inside of a steady sectional pipe has been taken into consideration. By using the other theoretical data given before, the lowering of pressure which have the technical importance and which is found in the module catena in the channel of the air cooled electronic unities concerning the current affair has also been presented here. Consequently, the lowering of pressure in the module catena, in the channel, during flow has been regulated in the form of without dimension and it has been shown in a graph according to the Reynolds number of the current. The condition of putting the barrier in a module catena has been compared with the condition without the barrier. The variation in the lowering of the pressure which may result from the condition without the barrier and the condition of taking place of three barriers in different heights in the catena have been shown in a graph.



**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU**  
**DOKÜMAN İZLENİMLERİ**

# **1. DİKDÖRTGEN KESİTLİ KANAL İÇERSİNDE BASINÇLI ORTAMLARIN AKIŞININ İNCELENMESİ**

## **1.1. GİRİŞ**

Dikdörtgen kesitli kanal içerisinde akım olayının incelenmesinde akışkan ortam sıkıştırılamayan türden gaz olarak göz önüne alınacaktır. Ortamın viskoz ve sıkıştırılabilir olması nedeniyle sıkışmadan kaynaklanan sıcaklık değişiminin yanında viskozite varlığından kaynaklanan sürtünmeden ileri gelen ısı da göz önünde tutulmalıdır.

Ayrıca viskozitenin sıcaklıkla değişiminin etkileri de akım olayında hesaba katılması gerekir. Ortamın temel fiziksel büyüklükleri olan yoğunluk ve viskozitesinin sıcaklığa bağımlılığı viskoz sıkıştırılabilir akışkanların akımındaki problemi sıkıştırılamayan türden sıvı viskoz akışkanların akımındaki problemlerden daha zor hale getirir.

Yapılan tez çalışmasında sıkıştırılabilir viskoz akışkan ortamların akımında süreklilik, momentum, enerji ve hal denklemleri genelde inceleme konusu yapılarak dikdörtgen kesitli kanal içerisinden akım olaylarına ait uygulamalar verilecektir.

## 2. SIKIŞTIRILABİLİR VİSKOZ AKIŞKAN ORTAMLARIN AKIMI

Bu tür akışkan ortamların akımında sıkıştırılabilirlik, viskozite ve ısı iletiminin birlikte olaydaki etkileri problemi karmaşık hale getirmektedir. Bu nedenle problemi anlaşılabilir hale getirebilmek gayesiyle 2.1 de Coutte Akımı ele alınacak olup Mach sayısının ve Prandtl sayısının hız dağılımı ve sürtünme faktörünün üzerindeki etkileri verilecektir.

2.2 de sabit kesitli bir boru içerisinde stasyoner akım ele alınacaktır. Burada sürtünme parametresi ve entropi değişimi Mach sayısının fonksiyonu olarak çıkarılacak olup sürtünmenin termodinamik özellikler üzerindeki etkileri gösterilecektir.

2.3 de sıkıştırılabilir ortamların laminar sınır tabaka denklemleri Navier-Stokes ve genel enerji denkleminde elde edilecektir.

2.4 de basınç gradyansız ve Prandtl sayısının  $Pr=1$  olması durumunda laminar sıkıştırılabilir sınır tabaka içerisinde hız ve sıcaklık bağıntıları verilecektir.

2.5 de sıkıştırılabilir akışkan ortamlarda sınır tabaka için momentum integral teoremi çıkarılmış ve integral formda enerji denklemi de ayrıca sunulacaktır.

2.6 da momentum integral denkleminin laminar sınır tabaka problemlerine uygulanması irdelenme konusu yapılacak ve yöntemin açıklık kazanması için sayısal bir örnek verilecektir.

### 2-1 Coutte Akımı

Akışkanlar Mekaniği bilim dalında birbirine paralel iki düzlemsel arasından akım olayı Coutte Akımı olarak isimlendirilmekte olup levhaların her ikisi de sabit olacağı gibi (ki; bu olay basit Coutte Akımı olarak da adlandırılır) levhalardan biri sabit, diğeri sabit hızla hareket edebilir. Veya her iki levha da sabit hızla hareket edebilir. Burada ele alacağımız



problemde levhalardan biri sabit, diğeri sabit bir U hızı ile hareket ediyor olacaktır. Burada problem kanaldaki gaz ortamın akımının incelenmesidir.

Stasyoner rejimde akım olayı kartezyen koordinat sisteminde göz önüne alınacak olur ise; X doğrultusu akımın yönü, Y akıma dik doğrultu ve Z yönü paralel levhaların genişliğini ifade edecektir. Levhalar arasındaki açıklık h mesafesi, levhaların genişliğine kıyasla çok küçüktür.

Viskoz, sıkıştırılabilir ortamlar için iki boyutlu akımda hareket (Navier-Stokes) denklemlerinin izdüşümleri  
X doğrultusunda:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot q) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad 2-1.1a$$

Y doğrultusunda:

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[ 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot q) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad 2-1.1b$$

Süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad 2-1.2$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Enerji denklemi ise

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot q)^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 =$$

$$\rho u \frac{\partial C_p T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_p T}{\partial y} - \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad 2-1.3$$

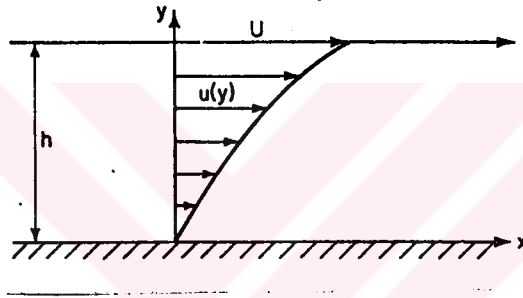
Mükemmel gaz için hal denklemi

$$p = \rho RT \quad 2-1.4$$

Yukarıdaki ifadelerde hız alanı  $\vec{V} = \vec{\mu}$  olup  $v=0, w=0$  düzlemsel hareketten dolayı  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  ve basınç değişiminin söz konusu olmadığı ( $p=st$ ) göz önünde bulundurulursa şekil 2-1.1 den cidar şartları:

$$y=0 \quad \text{için} \quad u=0, v=0, q=q_w, (\tau_{yx}) = \tau_w$$

$$y=h \quad \text{için} \quad u=U, v=0, q=q_\infty \text{ olup}$$



Şekil 2-1.1

2-2 nolu denklemden öngörülen koşullarda hız bileşeni  $u$  akım yönünden bağımsızdır ( $u \neq u(x)$ ). Böylece  $u = u(y)$  dir. Bundan dolayı 2-1a ve 2-1b nolu denklemler

$$\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right) = 0 \text{ olarak yazılabilir.} \quad 2-1.5a$$

Bu ifadenin integralinden

$$\mu \frac{du}{dy} = \text{sabit olur.} \quad 2-1.5b$$

Hız bileşeni  $u$  ise;

$$u = \tau_w \int_0^y \frac{dy}{\mu} \quad 2-1.6$$

2-1.6 nolu ifade de integral sabiti  $\tau_w$  sabit levha yüzeyinde ki kayma gerilmesi olup

$$\tau_w = \mu_w \left( \frac{du}{dy} \right)_w = \mu \frac{du}{dy} \quad 2-1.7$$

Olayda hüküm süren akım şartları altında enerji denklemi ( $\tau \sim 1/\rho \sim u$ ),

$$\frac{d}{dy} \left( k \frac{dT}{dy} \right) = -\mu \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad 2-1.8a$$

olarak yazılabilir.

2-1.7 nolu ifadeyi 2-1.8a ifadesine yerleştirirsek

$$\frac{d}{dy} \left( k \frac{dT}{dy} \right) = -\frac{\tau_w^2}{\mu} \quad 2-1.8b$$

elde edilir.

2-1.8b nin integrali yapılacak olursa

$$k \left( \frac{dT}{dy} \right) = -\tau_w^2 \int_0^y \frac{dy}{\mu} + C = -\tau_w u + C = -\mu u \frac{du}{dy} + C \quad 2-1.8c$$

elde edilir.

Bu ifadede yer alan integral sabiti, sabit levha yüzeyinde

$$C = k_w \left( \frac{dT}{dy} \right)_w = -q_w \quad 2-1.8d$$

olarak bulunur.

Bu ifadede yer alan negatif işaret konvansiyoneldir. Bir diğer ifadeyle  $q_w$  (birim zamanda duvar boyunca sıcaklık akım) nin  $(dT/dy)_w$  negatif iken pozitif olduğunu göstermek içindir.

2-1.8d ifadesiyle 2-1.8c yi

$$k \left( \frac{dT}{dy} \right) + \mu u \frac{du}{dy} = -q_w \quad 2-1.9$$

olarak yazabiliriz.

Gaz ortamların basit kinetik teorisinden veya ampirik bağıntılardan  $\mu$  mutlak (dinamik) viskozite büyüklüğü, mutlak sıcaklığın belli bir kuvveti olarak iyi bir yaklaşımla ifade edebiliriz.

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^m \quad 2-1.10$$

Normal sıcaklıktaki bir hava için üst sayısı  $m$  genellikle 0,76 olarak alınır. Sıcaklık yükseldikçe  $m$  0,5'e doğru iner. Prandtl sayısı  $Pr$  bütün gazlar için neredeyse sabittir.  $C_p$  de hemen hemen sabit olduğundan normal sıcaklıklar etrafında genişçe bir sıcaklık aralığı için ısı iletimi katsayısı  $k$ , doğrudan  $\mu$  ile orantılıdır. Bunlardan dolayı 2-1.9 nolu denklem

$$\mu \frac{d}{dy} \left( \frac{C_p}{Pr} T + \frac{1}{2} u^2 \right) = -q_w \quad 2-1.11$$

olarak yazılabilir.

Bu ifadenin integrali yapılacak olur ise

$$C_p T + \frac{1}{2} \text{Pr} u^2 = -\text{Pr} q_w \int_0^y \frac{dy}{\mu} + C \quad 2-1.12$$

elde edilir.

Burada  $C = C_p \cdot T_w$  ve  $T_w$  sabit levhadaki sıcaklıktır. 2-1.6 nolu ifadeyi 2-1.12 nolu ifadeye yerleştirecek olursak

$$C_p T + \frac{1}{2} \text{Pr} u^2 = -\text{Pr} \frac{q_w}{\tau_w} u + C \quad 2-1.13$$

bulunur.

Coutte Akımında sabit hızla hareket eden levhanın sıcaklığı  $T_\infty$  ile gösterilirse 2-1.13 ifadesindeki integral sabiti sınır şartlarından

$$C = C_p T_\infty + \frac{1}{2} \text{Pr} U^2 + \text{Pr} \frac{q_w}{\tau_w} U$$

olarak bulunur.

C'nin bu değeri ile 2-1.13 nolu denklem

$$C_p (T - T_\infty) = \text{Pr} \frac{q_w}{\tau_w} (U - u) + \frac{1}{2} \text{Pr} (U^2 - u^2) \quad 2-1.14$$

olarak yazılır.

2-1.14 nolu ifadeye  $C_p \cdot T_\infty$  ile bölününce  $\frac{u^2}{C_p \cdot T_\infty} = (k-1)M_\infty^2$  olduğu hatırlanacak olur ise

Coutte akımındaki sıcaklık dağılımını veren ifade

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \text{Pr} \frac{q_w}{\tau_w} \frac{(\kappa-1)}{U} M_\infty^2 \left(1 - \frac{u}{U}\right) + \text{Pr} \frac{(\kappa-1)}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) \quad 2-1.15$$

olarak elde edilir.

Coutte akımında hız dağılımını veren ifade ise; 2-1.7 nolu denklemden

$$\tau_w y = \int_0^u \mu du \quad 2-1.16$$

olup

2-1.10'daki  $\mu$  (viskozite) bağıntısı ve 2-1.15'deki  $T$  (sıcaklık) bağıntısı ile yukarıdaki ifade

$$\frac{\tau_w y}{\mu_\infty} = \int_0^u \left[ 1 + \text{Pr} \frac{q_w}{\tau_w} \left(\frac{\kappa-1}{U}\right) M_\infty^2 \left(1 - \frac{u}{U}\right) + \text{Pr} \frac{(\kappa-1)}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) \right]^m du \quad 2-1.17$$

olarak yazılabilir.

Burada  $m$ 'in değişken bir değeri için 2-1.17'deki integral nümerik olarak değerlendirilmelidir.

Örneğin;  $m=1$  ise 2-1.17 nolu denklem

$$\frac{\tau_w y}{\mu_\infty U} = \frac{u}{U} + \text{Pr} \frac{q_w}{\tau_w} \left(\frac{\kappa-1}{U}\right) M_\infty^2 \left[ \frac{u}{U} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{U}\right)^2 \right] + \text{Pr} \frac{(\kappa-1)}{2} M_\infty^2 \left[ \frac{u}{U} - \frac{1}{3} \left(\frac{u}{U}\right)^3 \right] \quad 2-1.18$$

olacaktır.

Adyabatik duvar (cidar) durumu için  $q_w=0$  olacağından 2-1.18 nolu ifade

$$\frac{\tau_w y}{\mu_\infty U} = \frac{u}{U} + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{(\kappa-1)}{2} \left[ \frac{u}{U} - \frac{1}{3} \left( \frac{u}{U} \right)^3 \right] \quad 2-1.19$$

olarak yazılır.

Kayma gerilmesi  $\tau_w$ , 2-1.19 nolu denklemden elde edilebilir. Bunun için ifadeye  $y=h$  için  $u=U$  olduğu hatırlanacak olursa,

$$\frac{\tau_w h}{\mu_\infty U} = 1 + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{(\kappa-1)}{3} \quad 2-1.20$$

olarak yazılabilir.

2-1.19 nolu ifadeyi 2-1.20 ye bölünce

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{1 + \text{Pr} M_\infty^2 (\kappa-1)/3} \left[ \frac{u}{U} + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{(\kappa-1)}{2} \left\{ \frac{u}{U} - \frac{1}{3} \left( \frac{u}{U} \right)^3 \right\} \right] \quad 2-1.21$$

elde ederiz.

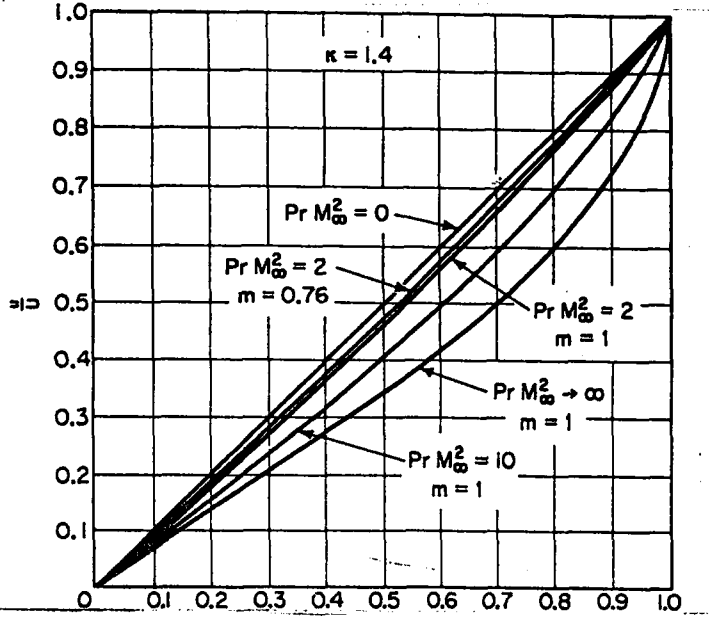
Burada  $M_\infty^2 \rightarrow \infty$  iken

$$\frac{y}{h} = \frac{3}{2} \frac{u}{U} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{u}{U} \right)^2 \right] \quad 2-1.22$$

elde edilir.

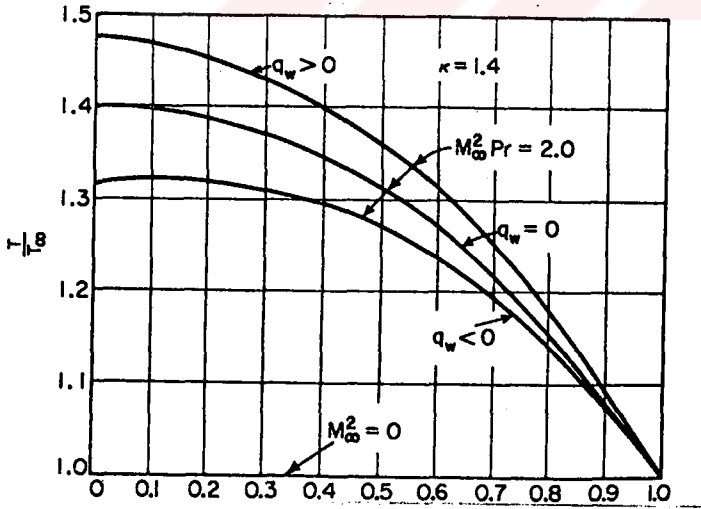
Coutte Akımındaki hız dağılımı değişik Mach (M) ve Prandtl (Pr) sayıları için hareketsiz (sabit) levha cidarından itibaren mesafenin bir fonksiyonu olarak Şekil 2-1.2 de çizilmiştir. Açıkça görülüyor ki Mach sayısının Coutte Akımı üzerindeki etkisi sabit levha yüzeyindeki hız gradyenini azaltacak ve hareketli levha yüzeyinde arttıracak şekildedir.

Prandtl sayısı Mach sayısı ile birlikte akışkana ısı transferini artırır. Bu nedenle hız dağılımı üzerinde Prandtl sayısı Mach sayısı gibi etkiye sahiptir.



Şekil 2-1.2

Denklem 2-1.10 göz önüne alınarak  $m=1$  ve  $m=0,76$  için hız dağılımlarının bir karşılaştırılması da Şekil 2-1.2 de gösterilmektedir. Couette akımında sıcaklık dağılımı, hız dağılımı bulununca kolaylıkla denklem 2-1.15'den hesaplanır. Adyabatik levha yüzeyi ( $q_w=0$ ), ısıtılmış levha cidarı ( $q_w<0$ ) ve soğutulmuş levha yüzeyi ( $q_w>0$ ) için Couette akımındaki tipik sıcaklık profilleri Şekil 2-1.3 de gösterilmektedir.



Şekil 2-1.3



Sıkıştırılmayan türden akışkan ortamlar (sıvı) için, sıcaklığın değişmemesi ilginçtir. Ayrıca adyabatik cidarlı sıkıştırılabilir akışkan ortamların (gaz) akımında sıcaklık gradyeni sıfır olur. Sabit yalıtılmış yüzeyde (adyabatik cidarda) sıcaklık geri kazanım sıcaklığı olarak adlandırılır. Ve  $T_r$  ile gösterilir. 2-1.15 denklemine göre  $q_w=0$  ve  $u=0$  alınarak  $T_r$ 'yi

$$\frac{T_r}{T_\infty} = 1 + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{(\kappa - 1)}{2} \quad 2-1.23$$

olarak yazılabilir.

Sabit cidarda ( $q_w=0$  koşulunda) sürtünme katsayısı 2-1.20 eşitliğinden

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_\infty (U^2 / 2)} = \frac{1 + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{\kappa - 1}{3}}{\text{Re} / 2} \quad 2-1.24$$

elde edilebilir.

Burada Reynolds sayısı  $\text{Re} = \frac{U \cdot h}{\nu_\infty}$  olur.  $M_\infty \rightarrow 0$  iken 2-1.20 nolu denklemde yer alan

kayma gerilmesi sıkıştırılmayan türden akışkan ortamların benzer Couette akımındaki ifadeye dönüşür. Sıkıştırılabilir akışkanlar için hız gradyeninin sabit cidardan hareketli yüzeye doğru değiştiğine dikkat edilmelidir (bak. Şekil 2-1.2). Bu nedenle 2-1.20 denkleminde verilen kayma gerilmesi Couette akımında bir sabittir. Couette akımında kayma

gerilmesinin sabit olması hız gradyeninden  $\tau_w = \mu_w \left( \frac{du}{dy} \right)_w = \mu_\infty \left( \frac{du}{dy} \right)_\infty$  ile gösterilebilir.

Yukarıdaki bu açıklamaya göre sadece 2-1.25 ifadesine gerek vardır. Ortam viskozitesi 2-1.10 ile verilmekte ve 2-1.25 yardımıyla  $q_w=0$  iken

$$\frac{\mu_w}{\mu_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} = 1 + \text{Pr} \cdot M_\infty^2 \frac{(\kappa - 1)}{2} \quad 2-1.26$$

şeklinde yazılabilir.

2-1.19 nolu ifadenin türevini akıma dik doğrultu  $y$ 'ye göre alacak olursak  $y=0$  için

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_w = \frac{\tau_w}{\mu_\infty} \frac{1}{1 + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{\kappa - 1}{2}} \quad 2-1.27a$$

$y=h$  için

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_\infty = \frac{\tau_w}{\mu_\infty} \quad 2-1.27b$$

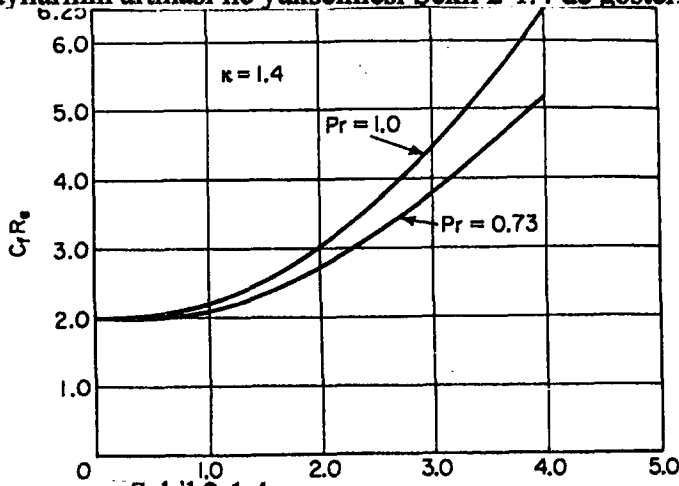
elde ederiz.

2-1.27a ve 2-1.17b denklemlerindeki hız gradyenlerinin oranı

$$\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)_\infty}{\left(\frac{du}{dy}\right)_w} = 1 + \text{Pr} M_\infty^2 \frac{(\kappa - 1)}{2} \quad 2-1.28$$

olur.

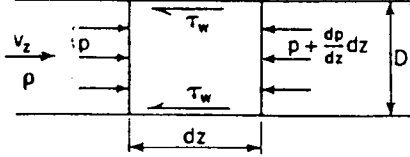
Bundan dolayı da 2-1.25 nolu denklem ispatlanmış olur ve kayma gerilmesi Couette akımında sabittir. Sabit (hareketsiz) levhadaki cidar sürtünme katsayısının  $q_w=0$  iken  $M$  ve  $\text{Pr}$  sayılarının artması ile yükselmesi Şekil 2-1.4 de gösterilmektedir.



Şekil 2-1.4

## 2-2 Sabit Kesitli Borulardan Stasyoner Akım

Genelde, cidar sürtünmesinin söz konusu olduğu sabit kesitli boru içerisinde sıkıştırılabilir bir akışkanın akım problemi pratikte oldukça önemli bir konudur. Bu problemin çözümü çok karmaşık olduğundan, burada yapılacak incelemede ısı transferinin olmadığı sabit kesitli bir boru içerisinde akımı göz önüne alacağız.



Şekil 2-2.1

İnceleme kolaylığı bakımından problem silindirik koordinatlarda ele alınacak olup; Z boru eksenini boyunca olan akım yönü ve r, Z ekseninden dışa doğru ölçülen radyan yönü gösterecektir. Hız alanı bileşenleri sırasıyla  $V_r$ ,  $V_\theta$  ve  $V_z$  olup mevcut akım şartları altında

$$v_z = v_z(z) \quad v_\theta = v_r = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad 2-2.1$$

söz konusudur.

Bu şartlar altında süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\rho v_r}{r} = 0$$

olup

$$d\left(\frac{\rho v_z}{dz}\right) = 0 \quad \text{dan} \quad 2-2.2a$$

BU YERDEKİ ...  
GÖRÜŞÜMÜZ ...

$$\rho v_z = \dot{m} = \text{sabit} \quad 2-2.2b$$

olur.

Hareket denklemi (Navier-Stokes) akım yönünde:

$$\begin{aligned} p \left( \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) = & p x_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla q \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \text{olup} \end{aligned} \quad 2-2.3a$$

öngörülen koşullar altında ifade,

$$\rho v_z \frac{dv_z}{dz} = - \frac{dp}{dz} - 4C_f \frac{\rho v_z^2}{2D} \quad 2-2.3b$$

formuna indirgenir.

Bu ifade de,  $C_f$ : Cidar Sürtünme Sayısı ve  $D$  boru iç çapıdır. Ayrıca bu ifadenin sağ tarafındaki 2. terim sıkıştırılmayan akışkan ortamların aynı koşullar altında düz bir boru içerisinde akımında (ki, buna Hagen-Poiseuille akımı da denir) sürtünmeden dolayı meydana gelen basınç düşüşünü ifade etmektedir. Bu basit sürtünme terimi 2-2.3a denklemiindeki karmaşık viskoz (sürtünme) terimlerinin yerini almaktadır.

Borudan veya boruya hiç iş yapılmadığı ve ısı transferinin olmadığı (adyabatik) akım için enerji denklemi:

$$\frac{D}{Dt} \left( h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad 2-2.4a$$

$$\frac{d}{dz} \left( C_p T + \frac{v_z^2}{2} \right) = 0 \quad 2-2.4b$$

olup

Cp'nin sabit olduğu düşünülürse

$$C_p \frac{dT}{dz} + v_z \frac{dv_z}{dz} = 0 \quad 2-2.4c$$

olur.

Mükemmel bir gaz için hal denklemi:

$$p = \rho RT \quad 2-2.5a$$

veya

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad 2-2.5b$$

olarak yazılabilir.

Sabit kesitli bir boru içerisinde tek boyutlu akımda akışkan ortam özelliklerinin değişimi yukarıda verilen süreklilik, hareket, enerji ve hal denklemi yardımıyla elde edilebilir. Sıkıştırılabilir akışkan ortamların akımında söz konusu olan Mach sayısının tanımından

$M^2 = \frac{v_z^2}{\kappa RT}$  olup, bu ifadenin logaritmik olarak türevi alındığında

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv_z}{v_z} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad 2-2.6$$

olur.

Yukarıda verilen 2-2.4c nolu enerji denklemi

$$\frac{\kappa R}{\kappa - 1} dT + v_z dv_z = 0 \text{ olup,}$$

$$\frac{dT}{T} = (1 - \kappa) M^2 \frac{dv_z}{v_z} \quad 2-2.7$$

olarak yazılabilir.

2-2.2b ve 2-2.5b nolu ifadeler birleştirilince

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dv_z}{v_z} \quad 2-2.8$$

elde edilir.

Boru içerisinde hız alınının değişimi 2-2.6 ve 2-2.7 nolu ifadelerden sıcaklık terimlerini elemine etmek suretiyle

$$\frac{dv_z}{v_z} = \frac{\frac{dM}{M}}{\frac{\kappa-1}{2}M^2 + 1} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad 2-2.9a$$

olur ki

$$\frac{dv_z}{v_z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{M^2} - \frac{1}{M^2 + \frac{2}{\kappa-1}} \right] dM^2 \quad 2-2.9b$$

olarak da yazılabilir.

Bu ifadenin integrali alınacak olur ise

$$\frac{v_z}{v_{z_1}} = \frac{M}{M_1} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2}M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 2-2.9c$$

elde edilir.

Böylece ortamın yoğunluğunun değişimi 2-2.2b ve 2-2.9b nolu ifadelerden

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{M_1}{M} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 2-2.10$$

elde edilir.

Eğer, 2-2.9a nolu ifadeyi 2-2.7 nolu ifadeye yerleştirecek olursak boru boyunca sıcaklık değişimini veren ifade,

$$\frac{dT}{T} = \frac{(1-\kappa)M dM}{\frac{\kappa-1}{2} M^2 + 1} = -\frac{dM^2}{M^2 + \frac{2}{\kappa-1}} \quad 2-2.11$$

elde edilir.

Bu ifadenin integrali alınacak olur ise,

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \quad 2-2.12$$

olur.

Sonuç olarak akış esnasında basınç değişimi 2-2.9a ve 2-2.11 nolu ifadeler yardımıyla 2-2.5b'den

$$\frac{dp}{p} = \frac{\left[ -\frac{1}{M} + (1-\kappa)M \right] dM}{\left[ (\kappa-1)/2 \right] M^2 + 1} = -\left[ \frac{1}{M} + \frac{M}{M^2 + 2/(\kappa-1)} \right] dM \quad 2-2.13$$

olarak elde edilir.

Bu ifadenin integralini alacak olursak,

$$\frac{p}{p_1} = \frac{M_1}{M} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 2-2.14$$

olarak yazılabilir.

Yukarıdaki ifadeler yardımıyla hareket denklemi olarak 2-2.3b nolu ifadeden sürtünme parametresini hesaplayabilmek için

$$dp = -4C_f \frac{\rho v_z^2}{2D} dz - \rho v_z dv_z \quad 2-2.15a$$

veya

$$\frac{dp}{p} = -4C_f \frac{v_z^2}{2D} \frac{\rho}{p} dz - \frac{\rho}{p} v_z dv_z \quad 2-2.15b$$

yazılabilir.

$a^2 = \kappa(p/\rho)$  ilişkilerini 2-2.15b nolu denklemde göz önüne alacak olursak sonuçta

$$4C_f \frac{dz}{2D} \kappa M^2 = -\frac{dp}{p} - \kappa M^2 \frac{dv_z}{v_z} \quad 2-2.15c$$

elde edilir.

2-2.9a, 2-2.13 ve 2-2.15c nolu denklemleri birleştirince

$$4C_f \frac{dz}{D} = \frac{2(1-M^2)dM}{\kappa M^3 \left( \frac{\kappa-1}{2} M^2 + 1 \right)} = \frac{2}{\kappa} \left[ \frac{1}{M^3} - \frac{\frac{\kappa+1}{2}}{M} + \frac{\frac{\kappa+1}{2} M}{M^2 + \frac{2}{\kappa-1}} \right] dM \quad 2-2.16$$

elde ederiz.



2-2.16 nolu ifadenin integrali

$$4C_f \frac{z}{D} = -\frac{1}{\kappa} \frac{1}{M^2} - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \ln M^2 + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \ln \left( M^2 + \frac{2}{\kappa-1} \right) + C \quad 2-2.17a$$

veya

$$4C_f \frac{z - z_1}{D} = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \ln \frac{M_1^2}{M^2} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2} \right] \quad 2-2.17b$$

olur.

Bu ifadede  $M_1$  başlangıç koşulundaki Mach sayısı olup,  $M$  akımının herhangi bir akış kesitindeki Mach sayısıdır. Sürtünme parametresi  $4C_f(L_{\max}/D)$ , 2-2.17b nolu denklemde  $M=1,0$  alınmak suretiyle

$$4C_f \frac{L_{\max}}{D} = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{M_1^2} - 1 \right) + \frac{\kappa+1}{2\kappa} \ln \frac{[(\kappa+1)/2]M_1^2}{1 + [(\kappa-1)/2]M_1^2} \quad 2-2.18$$

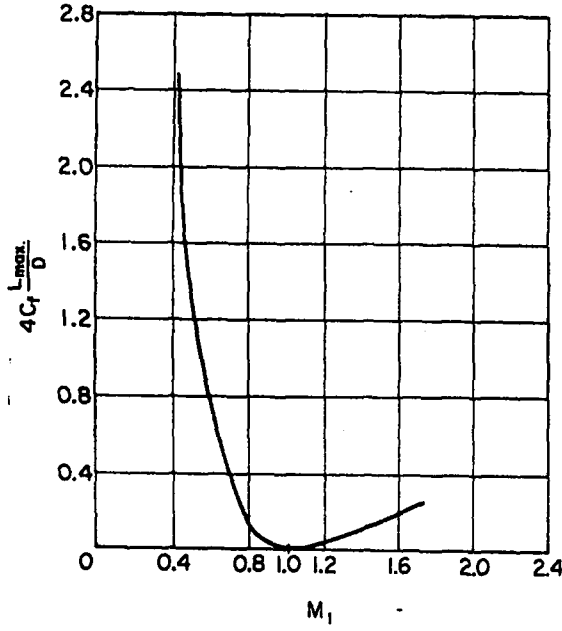
olarak bulunur.

2-2.18 nolu ifade doğru bir ifadedir. Çünkü  $M=1$  için gerekenden öte entropi artması mümkün değildir. Şekil 2-2.2 de sürtünme parametresinin Mach sayısı ile değişimi görülmektedir.

Sabit akış kesitli bir kanal içerisinde sıkıştırılabilir viskoz bir akışkanın stasyoner rejimde adyabatik akımı Fanno akımı olarak da adlandırılır. Bu nedenle bölüm (2-2)de verilen denklemler Fanno denklemleri olarak da isimlendirilebilir. Süreklilik denklemini 2-2.2b yardımıyla tekrar yazacak olur isek

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{m}{\rho^2} \frac{d\rho}{dz} \quad 2-2.19$$

elde ederiz.



Şekil 2-2.2

2-2.19 nolu ifadeyi 2-2.4c'ye yerleştirilmesi suretiyle

$$C_p \frac{dT}{dz} - \frac{m^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dz} = 0 \quad 2-2.20$$

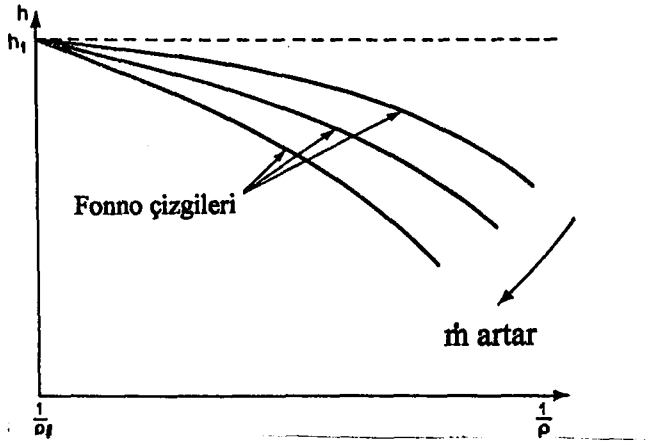
elde edilir.

2-2.20 nolu denklem, akışkan ortamın yoğunluğu ve entalpisi arasındaki ilişkiyi verecek şekilde integrali alınabilir. Ve bu durumda

$$h = h_1 - \frac{m^2}{2} \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \quad 2-2.21$$

olur.

Elde edilen bu ifade Fonno çizgisinin denklemi olarak adlandırılır. Zira, Şekil 2-2.3 de görüldüğü gibi entalpi ve yoğunluk bağıntıları eğriler kümesi veya Fonno Çizgileri ile gösterilmektedir.



Şekil 2-2.3

Adyabatik, fakat geri dönüştürülemez termodinamik proses için sürtünmeden kaynaklanan bir entropi artması söz konusudur. Termodinamiksel ilişkiden entropi değişikliği

$$TdS = dh - \frac{dp}{\rho} \quad 2-2.22a$$

formunda veya

$$dS = R \left[ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right] \quad 2-2.22b$$

yazılabilir.

$\frac{dT}{T}$  için verilen 2-2.11 ve  $\frac{dp}{p}$  için verilen 2-2.13 nolu ifadeleri 2-2.22b nolu ifadeye

koyarsak entropi değişimi ve Mach sayısı arasından bir bağıntı

$$dS = \frac{R}{\frac{\kappa-1}{2} M^2 + 1} \left[ -\kappa M + \frac{1}{M} - (1-\kappa)M \right] dM \quad 2-2.23a$$

veya

$$\frac{dS}{dM} = \frac{R(1-M^2)}{M\left(\frac{\kappa-1}{2}M^2 + 1\right)} \quad 2-2.23b$$

elde edilebilir.

2-2.23b nolu denklem  $M=1,0$  iken entropinin max olacağı  $\left(\frac{ds}{dM} = 0\right)$  nı verir. Bu ifadeyi

$$\frac{dS}{R} = \left[ \frac{1}{M} - \frac{\frac{\kappa+1}{2}M}{\frac{\kappa-1}{2}M^2 + 1} \right] dM \quad 2-2.23c$$

formda tekrar yazıp integre edersek, entropi ifadesini Mach sayısının bir fonksiyonu olarak,

$$\frac{S}{R} = \ln M - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right) \ln \left( M^2 + \frac{2}{\kappa-1} \right) + C \quad 2-2.24$$

elde ederiz.

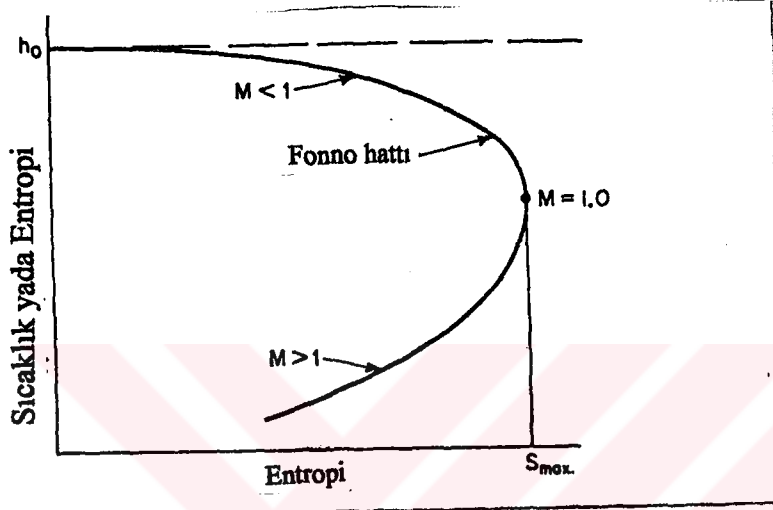
Entropi değişimi

$$\frac{S - S_1}{R} = \ln \frac{M}{M_1} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2} \right]^{(\kappa+1)/2(\kappa-1)} \quad 2-2.25$$

olarak yazılabilir.

2-2.25 denklemini 2-2.12 nolu denklem ile birlikte değişik Mach sayıları için bir T-S diyagramı (veya h-S diyagramı) yapmak için kullanılabilir. Verilen bir kütleli debi için bu eğri (Fanno Çizgisi) genel görünümü Şekil 2-2.4 de gösterilmektedir. Fanno çizgisinin üst kolu akımın subsonic olduğunu göstermekte ve entropi arttıkça akım hızı artmaktadır. Entropi değeri max değeri  $S_{max}$ 'na ulaştığında akımın max sayısı 2-2.23b nolu ifadeye gösterildiği gibi bir ( $M=1,0$ ) olur. Diğer taraftan supersonic akım Fanno çizgisinin alt kolu

tarafından temsil edilmektedir. Yine entropi  $M=1$  de max olur. Fakat bu durumda Mach sayısı entropi arttıkça azalır. Görülüyor ki sürtünmenin etkisi, akım süpersonik iken yavaşlatmak subsonic iken hızlandırmaktadır. Kanalda yeterli sürtünme var ise akımın Mach sayısı her iki durumda da (subsonic veya supersonic)  $M=1,0$ 'in sınırlandırıcı (limit) durumuna yaklaşacaktır. Entropi max olduktan sonra da sürtünme var olmaya devam ederse akımda şok olarak isimlendirilen boğulma olayı ortaya çıkacaktır. Bu durum akım başlangıçta supersonic ise söz konusu olabilir. Ve boğulmadan önce akımda bir şok dalgası oluşur.



Şekil 2-2.4

Sabit Akış Kesitli bir kanal içerisinde artma eğilimi gerçekleştiren akışkan ortamın termodinamik özellikleri üzerinde sürtünmenin etkisi bu bölümde elde edilen denklemler yardımıyla ifade edilebilir.

2-2.15c, 2-2.8 ve 2-2.7 nolu denklemler birleştirilerek Fonno hattı boyunca basınç değişimi sürtünmenin fonksiyonu olarak

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\kappa M^2 [1 + (\kappa - 1)M^2]}{2(1 - M^2)} \left( 4C_f \frac{dz}{D} \right) \quad 2-2.26$$

bulunur.

Hız ve yoğunluk değişimleri 2-2.26 ve 2-2.15c nolu denklemlerden

$$\frac{dv_z}{v_z} = -\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\kappa M^2}{2(1-M^2)} \left( 4C_f \frac{dz}{D} \right) \quad 2-2.27$$

olarak elde edilir.

2-2.7 ve 2-2.27 nolu denklemlerden sıcaklık değişimini veren ifade

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\kappa(\kappa-1)M^4}{2(1-M^2)} \left( 4C_f \frac{dz}{D} \right) \quad 2-2.28$$

olur.

Son olarak entropi değişimi 2-2.26 ve 2-2.28 nolu denklemlerin 2-2.22b'ye yerleştirilmesi suretiyle

$$\frac{dS}{R} = \frac{\kappa M^2}{2} \left( 4C_f \frac{dz}{D} \right) \quad 2-2.29$$

elde edilir.

2-2.26 ve 2-2.29 nolu denklemlerdeki ifadelerle bağlantılı olarak sürtünmenin termodinamik ve akım özellikleri üzerindeki etkisi aşağıdaki Tablo 2-2.1 de özetlenmiştir.

TABLO 2-2.1

Özellik	Sürtünme etkisi	
	Başlangıçta subsonik akış	Başlangıçta süpersonik akış
Basınç	Azalı	Artar
Yoğunluk	Azalı	Artar
Sıcaklık	Azalı	Artar
Entropi	Artar	Artar
Hız	Artar	Azalı

### 2-3 Sıkıştırılabilir Akışkan Ortamların Akımında Laminar Sınır Tabaka Denklemleri

Sıkıştırılmayan türden viskoz bir akışkanın herhangi bir katı yüzey ile temasında yüzey başlangıcından itibaren cidar yakınında ortam viskozitesinin varlığından dolayı hız gradyeninin olduğu (sınır tabaka akım bölgesi) ve hız gradyeninin söz konusu olmadığı akım bölgesi (potansiyelli akım sahası) olarak akım olayını ele alıp inceleme yapma fikri ilk defa Prandtl tarafından (1904) önerilmiş olup akışkanlar mekaniğindeki problemlere çözüm, bu önerinin 1930 senesinde benimsenmesiyle mümkün olabilmektedir.

Sınır tabaka akım sahasında hüküm süren denklemler önce ortamın sıkıştırılmayan türden (sıvı) olduğu göz önünde bulundurularak ifade edilecek ve daha sonra ortamın sıkıştırılabilir olması durumu konu edilecektir.

#### Sınır Tabaka Akım Bölgesinde Hüküm Süren Denklemler

Bu kısımda Newtonyen türden bir akışkanın düzlemsel bir levha etrafında gelişen sınır tabaka akım bölgesi içerisinde hüküm süren denklemler ifade edilecektir. Levha başlangıcından itibaren gelişen (bak. Şekil 2-3.1) sınır tabaka akım bölgesi içerisinde  $0 \leq y \leq \delta$  olayda mevcut sınır şartları hareket düzlemsel olması nedeniyle hız alanı

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad u=u(x, y, t) \text{ ve } v=v(x, y, t) \text{ olacağından } y=0 \text{ için, } \frac{\partial}{\partial z}=0, w=0 \rightarrow u=0 \text{ } v=0$$

$y > \delta$  için  $u=U_\infty$ ,  $v=V_0$  alındığında ( $U_\infty \gg V_0$ )

$V_0$   $U_\infty$  yanında ihmal edilebilir.

Bu sınır şartlarının hüküm sürdüğü harekette hareket denklemi Navier-Stokes ortamın birim kütlesi için

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{V}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V})$$

TE. YÜKSEK İKTİSADİ VE İŞLETİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
DOKÜMAN YAYIN MERKEZİ

2-3.1

Diğer taraftan kütlenin konumu (süreklilik denklemi) göz önüne alındığında

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad \text{dır.} \quad 2-3.2$$

Newtonien ortamın sıkılaştırılmayan türden olduğu varsayıldığında,  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  olacağından

$\rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$  olup, sürekli ortamlarda ( $\rho \neq 0$ ),  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  olur ki,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad 2-3.2a$$

olur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad 2-3.3a$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad 2-3.3b$$

2-3.1a, 2-3.1b ve 2-3.2a nolu denklemlerin çözümü mevcut sınır şartları ile çözülemez. Zira, bilinmeyen değişken sayısı için ifadelerin sadeleştirilmesi, bir diğer ifadeyle gerekli kısaltmaların yapılması gerekmektedir. Bu işlem esnasında herhangi bir hataya sebebiyet vermemek için ifadenin boyutsuz olarak düzenlenmesi ve bu düzenleme sonunda ifadede yer alan terimlerin mertebeleri saptanmalıdır. Bu uygulama teknikte mertbe analizi olarak isimlendirilir. İfadenin boyutsuz hale dönüştürülebilmesi için, olayda mevcut karakteristik parametrelerden istifade edilir.

$u_\infty$  : Levha öncesi düzgün akışkanın hızı

$x$  : Levha başlangıcından itibaren alınan yol olup, levha uzunluğu  $L$  ise

$$\frac{x}{L} = x_0 \approx 1 \rightarrow x = x_0 \cdot L$$

TC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ



$y$  : Akıma dik doğrultu olup sınır tabaka nominal kalınlığı  $\delta$  ise  $\frac{y}{\delta} = y_0 \approx 1 \rightarrow y = y_0 \cdot \delta$

$$u_0 = \frac{u}{u_\infty} \approx 1 \rightarrow u = u_\infty \cdot u_0$$

$$v_0 = \frac{v}{V_0} \approx 1 \rightarrow v = v_0 \cdot V_0$$

$\frac{L}{u_\infty} = T$  : Potansiyelli akım içindeki partikülün  $L$  yolunu almak için geçirdiği zaman

$$t_0 = \frac{t}{T} = \frac{t}{L/u_\infty}$$

$$t = t_0 \frac{L}{u_\infty}$$

$$p_0 = \frac{p}{p_\infty} \rightarrow p = p_0 p_\infty$$

Böylece bilinen parametreler cinsinden boyutsuz değerlerle denklemlerimizi tekrar yazabiliriz.

$$\frac{\partial(u_0 u_\infty)}{\partial\left(t \frac{L}{u_\infty}\right)} + u_0 u_\infty \frac{\partial(u_0 u_\infty)}{\partial(x_0 L)} + v_0 V_0 \frac{\partial(u_0 u_\infty)}{\partial(y_0 \delta)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p_0 p_\infty)}{\partial(x_0 L)} + \nu \frac{\partial^2(u_0 u_\infty)}{\partial(x_0 L)^2} + \nu \frac{\partial^2(u_0 u_\infty)}{\partial(y_0 \delta)^2}$$

Bilinen değerleri dışarı çıkartırsak;

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU**  
**DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

$$\frac{L}{u_\infty^2} \left\{ \frac{u_\infty^2}{L} \frac{\partial u_0}{\partial t_0} + \frac{u_\infty^2}{L} \cdot u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{V_0 u_\infty}{\delta} \cdot v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_\infty}{L} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\nu u_\infty}{L^2} \frac{\partial u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\nu u_\infty}{\delta^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}$$

İfadenin her iki tarafını  $\frac{L}{u_\infty^2}$  ile çarpalım

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{V_0 L}{u_\infty \delta} \cdot v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_\infty}{u_\infty^2} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\nu}{L \cdot u_\infty} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\nu L}{\delta^2 u_\infty} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2}$$

İfade boyutsuz hale gelmiştir. Bütün boyutsuz değişkenlerimizin mertebesi  $\sim 1$  dir.  $\frac{\delta}{L}$  oranına, çok çok küçük olduğundan  $\delta_0$  denilebilir.

$$\frac{\delta}{L} = \delta_0 < 1 \quad \frac{L}{\delta} = \frac{1}{\delta_0} > 1$$

$$\frac{V_0}{u_\infty} < 1 \quad \frac{V_0}{u_\infty} \approx \delta$$

$$u_\infty > V_0 \rightarrow \frac{u_\infty}{V_0} > 1$$

Denkleminin sol tarafındaki terimlerin mertebeleri  $\sim 1$ , yani oynadıkları roller eşit durumda

$$\frac{\delta}{x} \cong \frac{1}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \rightarrow \frac{\delta}{L} \cong \frac{1}{(\text{Re}_L)^{1/2}} \rightarrow \delta_r^2 \cong \frac{1}{\text{Re}_L}$$

Görüldüğü gibi denklem mertebeleri sonucu soldaki terimler  $\sim 1$  mertebede, sağ tarafta ise 1. ve 3. terim  $\sim 1$  mertebede 2. terim ise çok küçük olduğundan ihmal edilebilir. Dolayısıyla ifade

$$\frac{\partial v_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{V_0 L}{u_\infty \delta} \cdot v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_\infty}{u_\infty^2} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\nu L}{\delta^2 u_\infty^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}$$

olur ki, tekrar boyutlu forma getirildiğinde, 2-3.3a nolu ifade

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 2-3.4a$$

olur.

Benzer işlemler 2-3.3b nolu denklem için yapılacak olursa

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

2-3.3b nolu ifade, mertebe analizi sonucu

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad 2-3.4b$$

olur.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p = p(y) \quad \text{dir ki,}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

olarak yazılır. Süreklilik denkleminde mertebe analizi yaparsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(u_0 u_\infty)}{\partial(x_0 L)} + \frac{\partial(v_0 V_0)}{\partial(y_0 \delta)} = 0$$

$$\frac{u_{\infty}}{L} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{V_0}{\delta} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{V_0}{u_{\infty}} \cdot \frac{L}{\delta} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$$

2-3.2a nolu ifade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{aynen kalır.}$$

2-3.4b nolu ifadeyi 2-3.4a da göz önüne alacak olursak, hareket denkleminin mertebe analizi sonucu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 2-3.4$$

olur.

2-3.2a ve 2-3.3 nolu ifadeler Prandtl Sınır Tabaka denklemleri olarak da isimlendirilir.

Potansiyel akımın söz konusu olduğu bölgede  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  olduğundan çevrinti yoktur, ve

dolayısıyla sürtünme kuvveti yoktur. Bu durumda Navier-Stroke denklemi yerine Euler hareket denklemi geçerli olur.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Euler denklemindeki F dış kuvvet söz konusu olmadığından

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{dir.}$$

$u=u_\infty$   $x<0$  (yüzey levha öncesi)

$u=u_0(x_{it})$   $x\geq 0$

$$\frac{Du_0}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$$

2-3.5

olur.

1.Eğer hareket stasyonel ise  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$$

2.Hareket stasyonel ve basınç değişimi yok ise;

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad -\frac{dp}{dx} = 0 \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (u \neq 0 \text{ akım var})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(x) \rightarrow u = \text{sabit} = u_\infty$$

$u=u_\infty$  demek için hareketin stasyoner (daimi) olması ve basınç değişimi olmaması gerekir.

Sonuç olarak yukarıda ifade ettiğimiz potansiyelli akım sahası içinde basınç değişimi yardımıyla sınır tabakada hareket denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

olarak yazılabilir.

Sıkıştırılmayan türden akışkan ortamların düzlemsel, stasyoner ve laminer rejimde sınır tabaka akım sahası içerisinde karakteristik parametreler  $u, \sim, x, y$  nin mertebeleri sırası ile  $\sim 1, \delta_0, \sim 1, \sim \delta_0$  olduğu bilinmektedir. Ortamın benzer koşullar altında sıkıştırılabilir olması söz konusu ise, sıkıştırılabilir etkiler probleme dahil edildiğinde  $T$  ve  $\phi$  büyüklükleri ilave değişkenler olarak problemde göz önünde tutulmalıdır. Bu ilave büyüklüklerin mertebeleri de sırası ile  $\sim 1$  ve  $\sim \delta_0$  olacaktır. Zira sıcaklık  $T$  hız bileşeni  $U$  aynı mertebeden bir büyüklüktür. Yoğunluk  $\phi$  ise mükemmel gaz için hal denklemi ve sınır tabaka akım sahası içerisinde akım boyunca basınç  $P$  nin bağıl sabitliğinden dolayı ( $P \neq P(y)$ )  $T$  ile ters orantılıdır. Sıkıştırılabilir akışkan ortamların laminer sınır tabaka akım sahası içerisinde hüküm süren denklemler,  $x$  eksenini cidar doğrultusu ve  $y$  eksenini cidara dik doğrultuyu temsil edecek şekilde göz önüne alındığında hareket denklemi (Navier-Stokes)  $x$  doğrultusunda

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad 2-3.1a$$

$y$  doğrultusunda

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad 2-3.1b$$

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad 2-3.2b$$

Enerji denklemi

TC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMAN İZLEME BİREK...

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \theta \\ & = \rho \frac{\partial(C_p T)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} + \rho w \frac{\partial(C_p T)}{\partial z} - \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ve

$$-\frac{2}{3}\mu(\nabla q)^2 + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] = \theta$$

denklemlerinden istifade edilerek,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} \quad 2-3.5$$

olur.

Bir gazın Prandtl Sayısının ( $Pr = \mu C_p / k$ ) mertebesi 1 olduğundan ve  $C_p$  düşük sıcaklıktaki gazlar için hemen hemen sabit olduğundan  $\mu$  ve  $k$  aynı kuvvette (etkide) büyüklükler olarak düşünülebilir. Yukarıda sıkıştırılamayan türden akışkan ortamların hareket denklemi süreklilik ifadesinde yapılan mertbe analizi benzer düşünceyle 2-3.1a, 2-3.1b, 2-3.2b ve 2-3.5 nolu ifadelerde yapılacak olursa sırası ile

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left[ 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad 2-3.6a$$

$$= \rho \frac{\partial(C_p T)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad 2-3.6b$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad 2-3.7$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad 2-3.8$$

elde edilir. Elde edilen; 2-3.6a, 2-3.6b, 2-3.7 ve 2-3.8 nolu denklemler sıkıştırılabilir türden bir akışkanın düzlemsel (iki boyutlu) akım için sınır tabakası denklemleri olarak adlandırılır.

Sıkıştırılabilir türden bir akışkanın düzlemsel ve stasyoner akımından sınır şartları:

$$\rho \frac{\partial(C_p T)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \quad 2-3.9$$

$$\begin{array}{llll} y=0 & \text{için} & u=v=0 & T=T_w(x) & p=p_1(x) \\ y=\infty & \text{için} & u=U(x) & T=T_1(x) & p=p_1(x) \end{array}$$

Burada alt indis w : Cidar koşulunu, 1 ise sınır tabakasının dışında potansiyelli akım sahasındaki konumu ifade etmektedir.

Yukarıdaki ifadeler yüzeyin düzlemsel olması durumunda ifade edilmiş olup yüzeyin eğriselliği söz konusu ise; eğriliğin yarıçapı sınır tabaka kalınlığına kıyasla daha büyük olduğundan eğrisel yüzeyler için de geçerlidir.

#### 2-4. Laminar Sınır Tabaka İçerisinde Hız Ve Sıcaklık İlişkisi

Sıkıştırılabilir türden bir akışkanın düzlemsel ve stasyoner akım durumu göz önüne alındığında sınır tabaka akım sahasında hüküm süren denklemler

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad 2-4.1$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

**TC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU**  
**DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

2-3.6b



$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad 2-4.2$$

ve

$$\rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad 2-4.3$$

olur.

Genelde, yukarıdaki denklem sistemlerinin çözümü; U(x) (potansiyelli akım sahasından elde edilir) ve  $T_w(x)$ ' in bilinen değerleri için ve mükemmel gaz hal denklemi ile birlikte ele alınarak gerçekleştirilebilir. Fakat  $Pr=1,0$  iken (ki; özel durumdur) sınır tabaka denklemlerin integrali daha da basitleşir.  $Pr$  sayısının bire eşit olduğunu varsayarsak,

$$\mu C_p = k \quad 2-4.4a$$

Ve sıcaklık T'nin sadece hız bileşeni U'nun bir fonksiyonu olduğunu farz edersek

$$C_p T = f(u) \quad 2-4.4b$$

2-4.3 nolu ifadeyi

$$\begin{aligned} \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{df(u)}{du} &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{df(u)}{du} \right] + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{df(u)}{du} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left[ \frac{d^2 f(u)}{du^2} + 1 \right] \end{aligned} \quad 2-4.5$$

olarak yazabiliriz.

Görülüyor ki 2-4.5 nolu ifade

$$\frac{df(u)}{du} = -u \quad 2-4.6a$$

ve

$$\frac{d^2 f(u)}{du^2} = -1 \quad 2-4.6b$$

olduğu zaman 2-4.1 nolu ifade elde edilir. Bu şartlara göre 2-4.4b denklemini

$$C_p T = \text{Sabit} - \frac{u^2}{2} \quad 2-4.7a$$

haline gelir. İntegral sabiti potansiyelli akımın durma noktasındaki entalpisi olmak zorundadır. Yani,

$$C_p T_0 = C_p T_1 + \frac{U^2}{2} \quad 2-4.7b$$

olur.

Böylece 2-4.7a nolu ifade tekrardan

$$C_p T = C_p T_0 - \frac{u^2}{2} \quad 2-4.8$$

yazılabilir.

Bu ifade, sınır tabakası boyunca entalpi ve kinetik enerjinin toplamının sabit olduğunu göstermektedir. Cidardan veya cidara ısı transferi (bak. 2-1.8d)

$$-q_w \sim \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \sim \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad 2-4.9$$

olur ki, bu adyabatik cidar durumudur. Bu nedenle  $Pr=1,0$  ve  $q_w=0$  ise durma noktası sıcaklığı cidar sıcaklığına eşittir.

$$T_0 = T_w \quad 2-4.10$$

Sıkıştırılmayan türden bir akışkanın düzlemsel ve stasyoner akımında basınç gradyeni sıfır olduğunda sınır tabaka akım bölgesinde hüküm süren denklemlerde  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  alınmak suretiyle denklem sistemleri daha da basitleştirilebilir.

Bu denklemler

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad 2-4.11$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad 2-4.12$$

ve

$$\rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad 2-4.13$$

olur.

Prandtl sayısı  $Pr=1,0$  için sıcaklık ve hız bağıntısı 2-4.4b de verildiği gibi 2-4.13 nolu denklemi tekrar

$$\left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{df(u)}{du} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{df(u)}{du} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left[ \frac{d^2 f(u)}{du^2} + 1 \right] \quad 2-4.14$$

olarak yazılabilir.

2-4.14 nolu denklem, 2-4.6b nolu ifade söz konusu ise 2-4.1 nolu denkleme indirgenebilir.

Bu durumda integral işlemi gerçekleştiğinde

$$C_p T = f(u) = C_1 + C_2 u - \frac{u^2}{2} \quad 2-4.15$$

elde edilebilir.

Burada  $C_1$  ve  $C_2$  integral sabitleridir. Bu iki sabitin belirlenebilmesi için sınır şartları:

$$\begin{array}{lll} y=0 \text{ için} & u=v=0 & T=T_w = \text{sabit} \\ y=\infty \text{ için} & u=U_\infty & T=T_\infty = \text{sabit} \end{array} \quad 2-4.16$$

Yukarıdaki koşullar 2-4.15 nolu denklemde göz önüne alınacak olur ise

$$C_p T_w = C_1 \quad 2-4.17$$

ve

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU**  
**DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

$$C_p T_\infty = C_1 + C_2 U_\infty - \frac{U_\infty^2}{2} \quad 2-4.18$$

olup  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri belirlenir. Ve değerleri 2-4.15 nolu denklemde yerine yerleştirilince

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_\infty} &= \frac{T_w}{T_\infty} = \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty}\right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{1}{2C_p T_\infty} (U_\infty - u)u \\ &= \frac{T_w}{T_\infty} + \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty}\right) \frac{u}{U_\infty} + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \frac{u}{U_\infty}\end{aligned}\quad 2-4.19$$

elde ederiz.

Burada  $C_p T_\infty = a_\infty^2 / (\kappa - 1)$  ve  $M_\infty = U_\infty / a_\infty$  olup potansiyelli akım sahasındaki Mach sayısıdır. Şekil 2-4.1 de değişik Mach sayıları için sıcaklık ve hız ilişkileri gösterilmiştir.

Cidardaki kayma gerilmesi ve birim zamanda birim alana cidarda ısı iletimi aşağıda verilen denklemler yardımıyla tanımlanmaktadır. Sırasıyla

$$\tau_w = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad 2-1.7$$

ve

$$q_w = \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad 2-1.8d$$

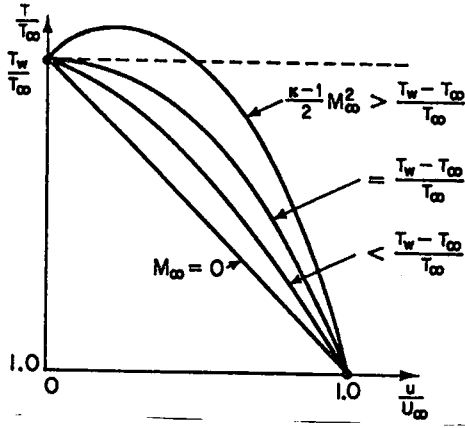
dir.

2-4.19 nolu denklemin türevi alınarak sonucu 2-1.8d nolu denkleme koyarsak

$$q_w = k_w T_\infty \left[ \left(1 - \frac{T_w}{T_\infty}\right) \frac{1}{U_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \frac{1}{U_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \right] \quad 2-4.20$$

elde ederiz.

2-4.4a ve 2-1.7 nolu denklemlerin yardımıyla cidardaki ısı akışı ve cidar kayma gerilmesi arasındaki ilişki  $Pr=1,0$  için elde edilir.



Şekil 2-4.1 Değişik Mach sayılarında sıcaklık ve hız ilişkileri

$$q_w = \frac{C_p T_\infty}{U_\infty} \tau_w \left[ \left( 1 - \frac{T_w}{T_\infty} \right) + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right] \quad 2-4.21$$

Durma noktası sıcaklığı

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \quad 2-4.22$$

2-4.21 nolu denkleme yerleştirilirse ısı akısı  $q_w$  için ifade

$$q_w = \frac{C_p \tau_w}{U_\infty} [T_0 - T_w] \quad 2-4.23$$

olarak yazılabilir.

2-4.23 nolu denklem açık olarak gösteriyor ki; akışkanın dinamik olarak ısınmasından dolayı ısı iletimi için sıcaklık düşmesini hesaplamakta kullanılan referans sıcaklığı gerçekte statik sıcaklığı  $T_\infty$  değil, durma noktası sıcaklığıdır. Ayrıca, 2-4.23 nolu denklem  $T_0 = T_w$  iken adyabatik cidarı ( $q_w = 0$ ) göstermektedir. Isı cidara  $T_0 > T_w$  iken iletilir ( $q_w > 0$ ). Ve  $T_0 < T_w$  iken ise ısı akışkana iletilir ( $q_w < 0$ ). Son olay, genellikle cidarı soğutmak olarak adlandırılır.  $q_w$  ve  $\tau_w$  arasındaki önemli ilişkiyi temsil eden 2-4.23 nolu ifade ısı transferli ve cidar sürtünmeli genelleştirilmiş Reynolds benzeşimi olarak adlandırılır. Sıkıştırılmayan türden akışkan ortam (sıvı) için ( $M=0$ ) ısı transferi ve sürtünme arasında aşağıdaki gibi bir ilişki olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$$C_h = \frac{C_f}{2} \quad 2-4.24$$

Burada, ısı transferi katsayısı

$$C_h = \frac{q_w}{\rho U_\infty C_p (T_\infty - T_w)} \quad 2-4.25$$

olarak tanımlanmaktadır.

## 2-5. Sınır Tabaka Akımında İntegral Teoremi

Bölüm 2-4 de belirtildiği gibi sınır tabaka akım sahasında hüküm süren 2-4.1,2,3 ve 2-2.5a denklem sistemlerinin çözümü genelde çok zordur. Daha önce sıkıştırılmayan türden akışkan ortamlar için ifade edilen Prandtl sınır tabaka denklemleri sınır tabaka akım sahası içerisinde  $0 \leq y \leq \delta(x)$  aralığında  $y$ 'ye göre integrali alınarak elde edilebilen ve momentum integral denklemi olarak isimlendirilen ifade, benzer şekilde sıkıştırılabilir akışkan ortamlar için de çıkarılabilir.

Önce, hareket denklemi 2-4.1 in  $y$ 'ye göre integralini alacak olursak

$$\int_0^\delta \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy - \tau_w \quad 2-5.1$$

elde edilir.

Burada  $y = 0$  iken  $u = 0$

$y = \delta(x)$  iken  $u = U$

ve  $\tau_{xy} = 0$

olduğu varsayılmaktadır (bak. Şekil 2-5.1a). 2-5.1 nolu denklemin sol tarafında yer alan ikinci terim kısımlara ayrılarak integre edilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_0^s \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= \int_0^s \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} dy - \int_0^s u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \\
&= [\rho uv]_0^s - \int_0^s u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \\
&= U \int_0^s \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy - \int_0^s u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy
\end{aligned} \tag{2-5.2a}$$

olur.

Süreklilik denklemi (2-4.2) yardımıyla 2-5.2a nolu ifade

$$\int_0^s \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U \int_0^s \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy + \int_0^s u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy \tag{2-5.2b}$$

olarak yazılır.

2-5.2b nolu ifadeyi 2-5.1 de yerine koyarsak ve 2-3.5 nolu ifadede verilen ilişkiyi kullanarak

$$\int_0^s \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \int_0^s \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy + \int_0^s u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy = \frac{dU}{dx} \int_0^s \rho_1 U dy - \tau_w \tag{2-5.3}$$

elde ederiz.

Fakat,

$$U \int_0^s \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy = \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} (\rho u U) dy - \frac{dU}{dx} \int_0^s \rho u dy \tag{2-5.4a}$$

$$\int_0^s u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy = \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) dy - \int_0^s \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy \tag{2-5.4b}$$

ve 2-5.4a ve 2-5.4b nin sağ tarafında yer alan birinci terim Leibnitz kuralına göre yazılabilir. Bu durumda,



$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u U) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u U dy - \rho_1 U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad 2-5.4c$$

ve

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - \rho_1 U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad 2-5.4d$$

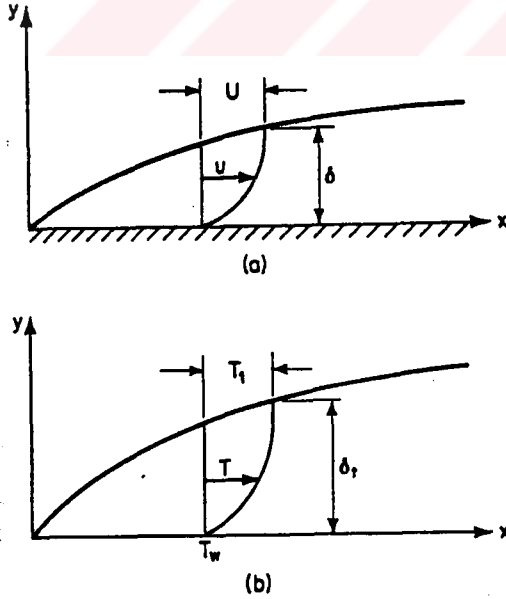
olur.

Böylece 2-5.3 nolu denklem

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u (U - u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (\rho_1 U - \rho u) dy = \tau_w \quad 2-5.5$$

olur.

Elde edilen bu ifade sıkıştırılabilir akışkan ortamların sınır tabaka akım sahası için momentum integral denklemdir. Enerji integral denklemi ise benzer şekilde 2-4.3 nolu ifadeyi y'ye göre  $y=0$  dan  $y=\delta_t$  ye kadar integre edilerek elde edilebilir. Burada,  $\delta_t$  : Termal sınır tabak kalınlığı olarak isimlendirilir (bak. Şekil 2-5.1b).



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Şekil 2-5.1 a- Sınır tabakanın dış kenarı, b- Termal sınır tabakanın kalınlığı

Bu durumda enerji integral denklemi

$$\int_0^{\alpha} \rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} dy + \int_0^{\alpha} \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} dy = \int_0^{\alpha} u \frac{\partial p}{\partial x} + \int_0^{\alpha} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - q_w \quad 2-5.6$$

olarak yazılır.

2-5.6 nolu ifadenin sol tarafındaki ikinci terim

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \rho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} dy &= \int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v C_p T) dy - \int_0^{\alpha} C_p T \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \\ &= C_p T_1 \int_0^{\alpha} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy - \int_0^{\alpha} C_p T \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \\ &= - \int_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (C_p T_1 \rho u) dy + \frac{d(C_p T_1)}{dx} \int_0^{\alpha} \rho u dy + \int_0^{\alpha} C_p T \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy \end{aligned} \quad 2-5.7a$$

olur.

Fakat, potansiyelli akımda enerji denklemi

$\frac{1}{2}(U^2 + v_1^2) + C_p T_1 = \text{sabit}$  olduğundan ; bu ifadenin x'e göre türevi alınır ise;

$$U \frac{dU}{dx} + v_1 \frac{dv_1}{dx} = - \frac{d(C_p T_1)}{dx} \quad 2-5.7b$$

elde edilir.

Akım rotasyonel olmadığından

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad 2-5.7c$$

olur.

2-3.5 ve 2-5.7c nolu denklemler yardımıyla 2-5.7b nolu ifade

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial(C_p T_1)}{\partial x} \quad 2-5.7d$$

olarak yazılır.

Bu ifade 2-4.3 nolu ifadeden doğrudan da türetilir. 2-5.7a ve 2-5.7d nolu denklemleri 2-5.6 nolu denkleme yerleştirdikten sonra

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_1} \rho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} dy - \int_0^{\delta_1} \frac{\partial}{\partial x} (C_p T_1 \rho u) dy + \frac{d(C_p T_1)}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho u dy + \int_0^{\delta_1} C_p T_1 \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy \\ & = \int_0^{\delta_1} \rho_1 u \frac{\partial(C_p T_1)}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_1} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - q_w \end{aligned}$$

ve gerekli basitleştirmeler sonucu,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho u C_p (T_1 - T) dy + \frac{d(C_p T_1)}{dx} \int_0^{\delta_1} u (\rho_1 - \rho) dy + \int_0^{\delta_1} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = q_w \quad 2-5.8$$

bulunur.

Elde edilen 2-5.8 nolu ifade sıkıştırılabilir türden akışkan ortamlarda enerji denkleminin integral formudur. Sınır tabaka akım sahasında hem hız ve hem de sıcaklık için aşağıdaki hallerde profiller farz edilerek problemlere çözüm getirilebilir.

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{için} \quad 0 < y < \delta$$

$$\frac{u}{U} = 1 \quad \text{için} \quad y \geq \delta \quad 2-5.9$$

ve

$$\frac{T}{T_1} = g\left(\frac{y}{\delta_t}\right) \quad \text{için} \quad 0 < y < \delta_t$$

$$\frac{T}{T_1} = 1 \quad \text{için} \quad y \geq \delta_t \quad 2-5.10$$

f ve y fonksiyonları aşağıdaki sınır koşulları için alınabilir.

(a) Sınır tabaka ile potansiyelli akım sahası sınırında

$$y = \delta \quad \text{için} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \dots = 0 \quad 2-5.11a$$

ve

$$y = \delta_t \quad \text{için} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = \dots = 0 \quad 2-5.11b$$

(b) Cidarda (yani  $y=0$  için)

$$u=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_w \quad 2-5.11c$$

ve

$$T = T_w, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]_w = - \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]_w \quad 2-5.11d$$

Uygun f ve g fonksiyonları (ki boyutsuzdur) seçildiği zaman sırasıyla 2-5.5 ve 2-5.8 nolu denklemlere yerleştirilebilir,  $\delta$  ve  $\delta_t$  için iki eş zamanlı birinci dereceden diferansiyel denklemler elde edilebilir. Bu denklemler çözülerek sınır tabaka akım sahasında  $\delta$  ve  $\delta_t$  kalınlıkları,  $\tau_w$  cidar kayma gerilmesi,  $q_w$  cidarda ısı akışı bulunabilir. İfade edilebilir ki genelde termal sınır tabaka kalınlığı  $\delta_t$ , sınır tabaka nominal kalınlığı (ki, hız sınır alanı kalınlığı olarak da verilebilir)  $\delta$ 'dan büyüktür.

## 2-6. Momentum İntegral Denklemini Sınır Tabaka Alanına Uygulanması

Teknik incelemelerde, boyutsuz herhangi bir ifadenin incelenmesi gerektiğinde, herhangi bir hataya imkan tanımamak için ifade boyutsuz formda düzenlenerek irdelenme gerçekleştirilebilir. Bu konuda da daha önce verilen 2-5.5 nolu momentum integral denklemi boyutsuz formda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{2}{U} \frac{dU}{dx}\right) \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U}\right) dy \\ = \frac{\tau_w}{\rho_1 U^2} \end{aligned} \quad 2-6.1$$

olarak yazılabilir.

Sınır tabaka akım teoreminde tanımlanan yer değiştirme kalınlığı:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U}\right) dy \quad 2-6.2$$

ve

Momentum kalınlığı:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad 2-6.3$$

ifadeleriyle birlikte

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU**  
**DOKÜMAN NO: ...**

$$-\rho_1 U \frac{dU}{dx} = \frac{dp}{dx} = a_1^2 \frac{d\rho_1}{dx} \quad 2-6.4$$

ifadesini 2-6.1 nolu ifadeye yerleştirirsek momentum integral denklemi uygun bir formda

$$\frac{d\theta}{dx} + \left(2 - M_1^2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_1 U^2} \quad 2-6.5$$

olarak elde edilebilir.

Bu ifade de,  $M_1=U/a_1$  dir. İncelemede,  $\delta^*$ ,  $\theta$  ve  $T_w$ 'ye değer verirken ortam yoğunluğu  $\rho$  ve mutlak viskozite  $\mu$  için mutlak sıcaklık  $T$ 'nin fonksiyonu olarak ifadelerinin bilinmesi gerekir. Sınır tabaka akım sahası içerisinde akım boyunca herhangi bir akış kesitinde basınç sabit olduğundan mükemmel bir gaz için hal denklemi yardımıyla

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{T_1}{T} \quad 2-6.6$$

yazılabilir.

Daha önce belirtildiği gibi (bak. 2-1.10)  $\mu$  ve  $T$  arasındaki ilişki,

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^m \quad 2-6.7$$

olarak verilebilmektedir.

Prandtl sayısı  $Pr=1$  ve  $dp/dx=0$  için sınır tabaka sahasında sıcaklık profili doğrudan hız profilinden elde edilebilir. Bu ilişki 2-4.19 nolu denklemde verilmektedir.

Örnek olarak, izole edilmiş düzlemsel bir levha üzerinde stasyoner rejimde gelişen bir akım problemini ele alalım. Prandtl sayısı  $Pr=1$  ise, adyabatik cidar için daha önce verilen 2-4.23 nolu ifade, 2-4.19 nolu denklemde kullanıldığında

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{u^2}{U_\infty^2}\right) \quad 2-6.8$$

bulunur.

2-6.6 ve 2-6.7 nolu denklemlere göre yoğunluk ilişkisi

$$\frac{\rho}{\rho_{\infty}} = \frac{T_{\infty}}{T} = \frac{1}{1 + \alpha - \alpha(u^2/U_{\infty}^2)} = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \frac{1}{1 - k \left( \frac{u}{U_{\infty}} \right)^2} \right] \quad 2-6.9$$

olup,  
viskozite ilişkisi

$$\frac{\mu_w}{\mu_{\infty}} = \left( \frac{T_w}{T_{\infty}} \right)^m = \alpha_1^m \quad 2-6.10$$

olur.  
Burada;

$$\alpha = \frac{\kappa - 1}{2} M_{\infty}^2, \quad \alpha_1 = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{\infty}^2 \quad \text{ve} \quad k = \frac{\alpha}{\alpha_1} \text{ dir.}$$

Burada incelemeyi basite indirgemek gayesiyle lineer bir hız profili farz edecek olursak, örneğin;

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \left( \frac{y}{\delta} \right) = \eta \quad 2-6.11$$

gibi

Momentum kalınlığı, 2-6.9 ve 2-6.11 nolu ifadeler yardımı ile 2-6.3 nolu denklemden

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\delta}{\alpha_1} \int_0^1 \frac{\eta(1-\eta)}{1-k\eta^2} d\eta \\
&= \frac{\delta}{\alpha_1} \left[ \frac{1}{k} \int_0^{\sqrt{k}} \frac{z dz}{1-z^2} - \frac{1}{k^{3/2}} \int_0^{\sqrt{k}} \frac{z^2}{1-z^2} dz \right] \\
&= \frac{\delta}{\alpha_1 k} \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln(1-k) - \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right] \\
&= \frac{\delta}{\alpha_1} k_1
\end{aligned} \tag{2-6.12}$$

olarak elde edilir.

Burada  $z = \sqrt{k} \cdot \eta$  ve

$$k_1 = \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln(1-k) - \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \right] \text{ dir.} \tag{2-6.13}$$

2-6.12 ve 2-6.10 nolu denklemlerin 2-6.5 nolu momentum integral denklemine konulması suretiyle sınır tabaka sahasının normal kalınlığını veren ifade

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \sqrt{\frac{2}{k_1}} (\alpha_1)^{(m+1)/2} \tag{2-6.14}$$

elde edilir.

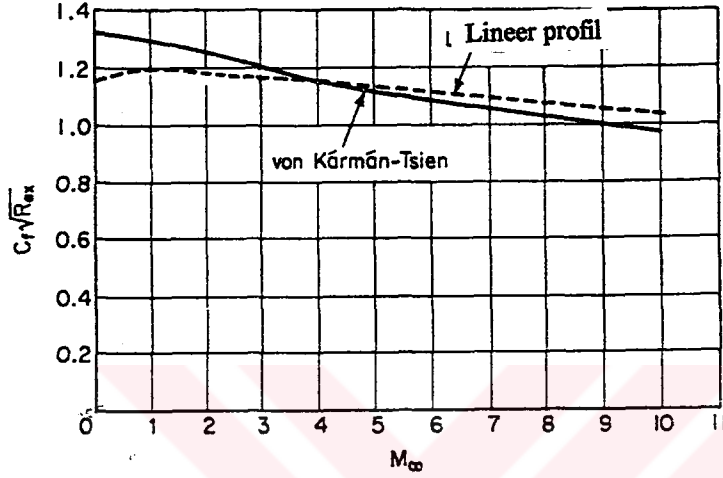
Burada,  $\text{Re}_x = U_\infty x / \nu_\infty$  olup, toplam yerel (lokal) cidar sürtünme katsayısı ise,

$$sC_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty (U^2/2)} = \frac{2\sqrt{2k_1}}{\sqrt{\text{Re}_x}} \alpha_1^{(m-1)/2} \text{ dir.} \tag{2-6.15}$$

Sınır tabaka akım sahasında verilen 2-4.1 nolu hareket denkleminin kesin bir çözümü sabit duvar sıcaklığında düzlemsel bir levha üzerinde gelişen stasyonel akım durumu için kesin bir çözümü Von Karman ve Thisen tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çözümde, Prandtl sayısı  $\text{Pr}=1$  olduğu varsayılp sıcaklık dağılımları 2-4.19 nolu denklemde verilen ifadeden

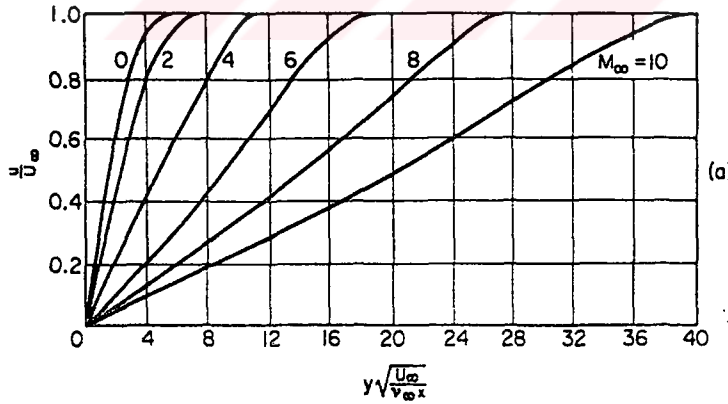


hesaplanmıştır. 2-6.15 nolu denklemde verilen potansiyelli akım sahasındaki Mach sayısı ( $M_\infty$ ) na karşı sürtünme katsayısını Von Karman-Thisen'in sonuçları ile kıyaslama yapmak için her iki durumda da izole cidar ve üst sayısı  $m=0,76$  alınmıştır. Şekil 2-6.1 de görüldüğü üzere lineer hız profili yaklaşımı yüksek Mach sayıları için şaşılacak derecede iyidir. Bu iki incelemedeki iyi uyumun nedeni ise sınır tabaka sahasında hız dağılımının Mach sayısı  $M \geq 6$  olduğunda lineer bir profile yaklaşmasıdır.



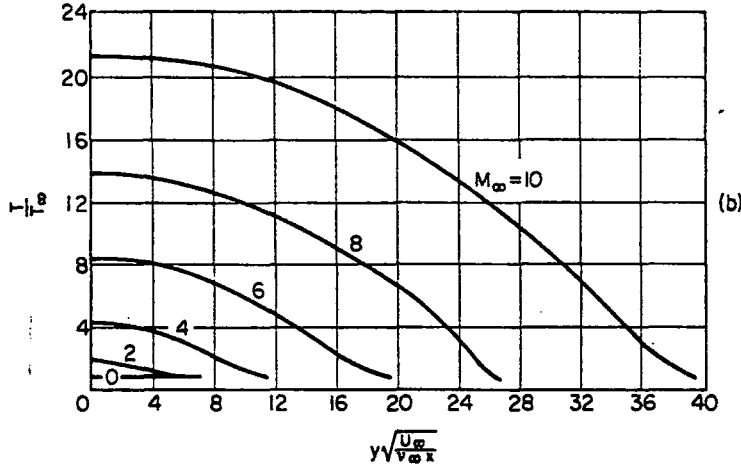
Şekil 2-6.1

İzole cidar koşulu için Von Karman ve Thisen'in sonucu Şekil 2-6.2 de görülebilir.



Şekil 2-6.2

Şekil 2-6.2 de verilen hız dağılımlarına dayanarak sınır tabaka akım sahasında Mach sayısı ile sıcaklık dağılımı Şekil 2-6.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2-6.3

Buraya kadar yapılmış olan kuramsal incelemede akış rejiminin laminar olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Pratikte karşılaşılan akım olaylarında daha ziyade türbülanslı akış durumu söz konusudur. Bugün için türbülanslı akım olayını çözümlen rasyonel bir teori mevcut olmayıp, problemler daha ziyade deneysel olarak ele alınmaktadır. Bu nedenle sıkıştırılabilir türden akışkan ortamların akım olayının söz konusu olduğu sistemlerde bu duruma dikkat etmek gerekir.

### 3. UYGULAMALAR

Bu bölümde daha önce verilen kuramsal bilgilerden istifade edilerek, tez çalışmasının kapsamını ihtiva eden akım olayı ile ilgili teknikte öneme haiz hava soğutmalı elektronik ünitelerdeki kanal içerisinde yer alan modül dizisinde basınç düşüşü konu edilecektir.

Literatür taraması sonucu bu konu ile ilgili birkaç çalışma bulunmuştur.

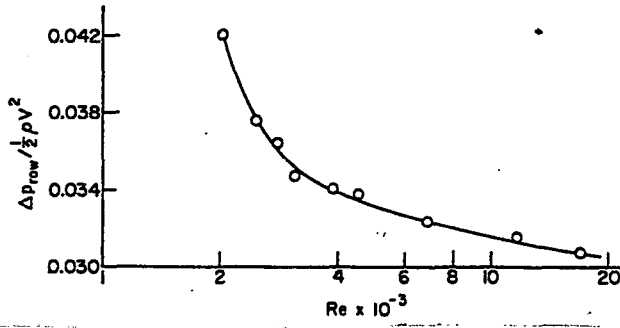
Sparrow (1982,1983) eksik (kayıp) modüllü ve bariyerli dikdörtgen modül dizisinde basınç düşüşü ve ısı transferi üzerine çalışmıştır. Çalışmalarının odak noktası eksik modül ve bariyerlerin modül dizisinde ısı transferi ve basınç düşüşü davranışlarına olan etkisidir.

Elektronik cihazların soğutulmasında çok defa özel geometriler kullanılır. Bu nedenle akış kesitleri genellikle farklı boyutta ve formda bileşenlerle sınırlanmış düzensiz şekillerdir. Bir diğer ifadeyle elektronik cihazların soğutulması problemi hem bir sanat, hem de bir bilgi birikimi gerektirmektedir. Özellikle akış kesitlerinin değişim ve düzensizlikleri nedeni ile ısı transferi alanında araştırmaların elektronik cihazların soğutulması hususundaki çalışmalar diğer uygulama alanlarına nazaran daha azdır. Bu nedenle elektronik cihazların soğutulması problemi ısı transferi araştırmalarının oldukça önemli bir uygulama alanıdır.

Isı transferi açısından olaya bakıldığında ısı transferi artımında en etkili yol olarak modül dizisine bariyer yerleştirilmesinin daha iyi olacağı gösterilmiştir.

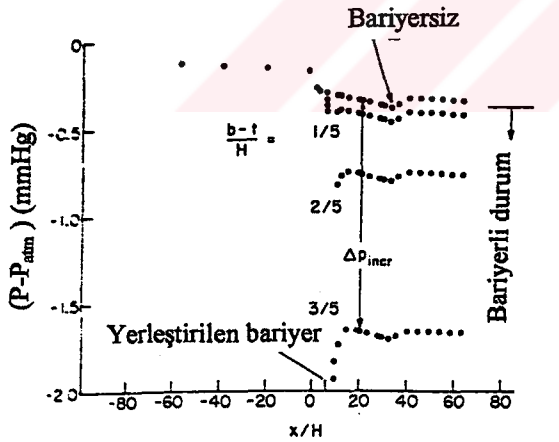
Isı transferinin artışındaki en büyük oran düşük Reynolds sayısında gerçekleşir. Ve artan bariyer yüksekliği ile beraber artar. Kayıp modülsüz ve bariyersiz modül dizisinde basınç düşüşü sonuçları bir tek özel geometri için Reynolds sayısı,  $Re=6900$  için elde edilmiştir. Burada, bu çalışmaya basınç düşüşü açısından bakacak olursak, kanal içerisinden akış esnasında her bir sıradaki basınç düşüşü boyutsuz formda düzenlenerek Reynolds sayısına göre Şekil 3-1 de çizilmiştir.

TC YATIRIM MENKUL DEĞERLER A.Ş.  
DOĞAN YATIRIM MENKUL DEĞERLER A.Ş.



Şekil 3-1 Bariyersiz tam yoğun düzenleme durumundaki her bir satır basınç düşüşü

Şekil 3-1 den görüldüğü gibi basınç düşüşünün değişimi bir kanal içerisinde akış olayındaki sürtünme faktörü ( $C_f$ ) nün davranışına benzer. Zira, Reynolds sayılarının artmasına karşılık her iki davranış da azalma eğilimindedir. Bir modül dizisine bir bariyerin sokulması durumu, bariyersiz duruma göre kayda değer bir basınç kaybına yol açar. Şekil 3-2 bir bariyerin varlığının neden olduğu artan basınç düşüşünü göstermek için hazırlanmıştır. Şekil 3-2 de bariyersiz durumdaki ve üç değişik yükseklikte bariyerin olması durumunda deneysel olarak ölçülmüş basınç düşüşü değişimi gösterilmektedir. Burada,  $H$  : Modül üst kenarı ile karşı cidar arasındaki mesafedir.



Şekil 3-2 Bariyerli ve bariyersiz durumlar için aksenal basınç dağılımı

Elde edilen basınç düşüşü değişimi Reynolds sayısı  $Re=6900$  için elde edilmiştir. Reynolds sayılarının araştırılan tüm konfigürasyonlarında, modülsüz kanal içerisinde ( $x<0$ ) basınç dağılımı aynıdır. Modül dizisi  $x=0$  dan itibaren başlar, ve akışkan ortam (ki havadır) diziyeye

girip akış kesitinde daralma söz konusu olduğundan burada ani bir basınç düşüşü görülür. Bu durum tüm konfigürasyonlar için ortak bir davranıştır. Eksenel konumda yerleştirilen bir bariyerin dizide var olması durumunda Şekil 3-2 de obsiste gösterilmiştir. Akış bariyer tarafından engellenirken sıkışır, ve bu durum, bariyerin boyu büyüdükçe büyüyen keskin bir basınç düşüşüne yol açar. Akım yönünde akışkan ortam daralma pozisyonundan genişlemeye başlayıp, mevcut akış kesitini doldururken yüksek bariyerler için daha fazla olmak koşulu ile basınç düzelir. Buna rağmen bu düzelme bariyerin başlangıçta sebep olmuş olduğu basınç düşüşüne oranla daha küçüktür. Bu nedenle bariyerin sebep olduğu kayda değer bir basınç düşüşü (ki kayıptır) var olmaya devam eder. En yüksek bariyere göre artan basınç düşüşü  $\Delta P_{max}$  Şekil 3-2 de tanımlanmış ve diğer bariyer yükseklikleri için  $\Delta P_{max}$ 'in belirlenmesinde aynı yaklaşım kullanılmıştır. Burada görüldüğü gibi  $\Delta P_{max}$  akım yönünde görülen basınç düzelmesinden sonra hesaplanır. Dolayısıyla  $\Delta P_{max}$  bariyerin sebep olduğu net basınç kaybıdır. Şekil 3-2 de verilen bariyer yüksekliklerini göz önünde bulundurarak Reynolds sayısının 2000.....7000 aralığında  $\Delta P_{max}$ 'in sayısal değeri dinamik basınç yardımı ile boyutsuz formda Tablo 3-1 de özetlenmiştir.

Tablo 3-1 Artan Basınç Kayıplarında Bariyer İlişkisi

Re	(b-B)/H		
	1/5	2/5	3/5
2020	0,45	2,4	7,9
3050	0,46	2,3	7,6
4550	0,43	2,3	7,3
6900	0,42	2,3	7,1

Bu sonuçlara göre Şekil 3-1 de belirtilen bariyersiz durum Tablo 3-1 deki Reynolds sayıları için

$$\frac{\Delta P_{sira}}{\frac{1}{2} \rho v^2} \approx 0,32...0,42$$

REC. YITIRIMCI & Z. ...  
DO.

değerlendirmesi yapılabilir. Bir diğer ifadeyle göz önüne alınan en küçük bariyer için bile basınç kaybı artışı 10 veya daha fazla sıralı bariyersiz dizisinin basınç kaybı ile karşılaştırılabilir.

Bariyerden kaynaklanan basınç kaybı en düşük bariyer için 10 sıralı bariyersiz dizinin basınç kaybına eşittir. Orta yüksekte bir bariyer için basınç kaybı ise 60 sıralı bariyersiz dizinin basınç kaybına eşit olmaktadır. Orta seviyeli bir bariyer en küçük bariyere kıyasla basınç kaybında yaklaşık beş katı kadar bir artış ortaya çıkarır. Bu artışa ilave olarak yaklaşık üç katlık artış ise orta ve en uzun bariyerler arasında oluşur. Tablo 3-1'e göre son bir yorum olarak, belli bir bariyer yüksekliği için basınç kaybı Reynolds sayısının zayıf bir fonksiyonu olarak gözlenebilir. Bu sonuçtan da basınç düşüşünün daha ziyade eylemsizlik etkilerinden ileri geldiği söylenebilir.

Bu konuda, yapılan bir diğer deneysel çalışma da Moffat (1985) tarafından gerçekleştirilmiş olup oldukça uzun geniş aralıklı kübik formda elementlerden (modül) oluşan dizilerde basınç düşüşü sonuçları elde edilmiştir. Seyrek yerleştirilmiş eleman dizileri için basınç düşüşü esas itibarı ile sürükleme formunda tespit edilir. Ve böylece tanımlanan basınç düşüşü Reynolds sayısından bağımsız olarak yorumlanır. (Örneğin, Moffat'ın çalışmasında olduğu gibi). Bunun yanında bazı çalışmalarda (Örneğin; Tai, 1985; Soure Mends, 1987 ve Hollworth, 1987) basınç düşüşü değişimi Reynolds sayısına bağlı olarak sunulmuştur. Burada, uygulama olarak verilecek çalışma M. Molki (1993) tarafından gerçekleştirilmiş olup basınç düşüşü Reynolds sayısının fonksiyonu olarak sunulmuştur.

Dikdörtgen formda eleman dizisi boyunca gelişen akımla ilgili olarak bir diğer önemli konu akım rejimini belirlenmesidir. Garimella (1992), bir makalesinde laminar rejimden türbülanslı rejime geçiş durumunu araştırmıştır. Bu çalışmada, üç boyutlu akımda geçiş sadece akım debisi ve geometriye değil aynı zamanda modül (eleman) dizisindeki konuma da bağlıdır şeklinde sonuca varmaktadır.

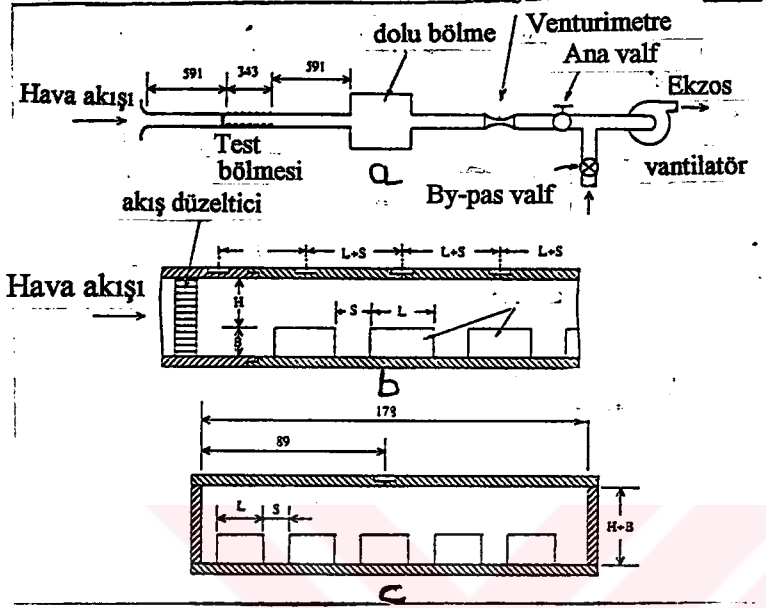
Dahası, geçiş Reynolds sayısının (kanal yüksekliği  $H$ 'a göre tanımlanmış) 700...900 mertebeleri arasında değiştiğini ve elemanlar arasındaki akış aralığı arttığında geçişin daha düşük Reynolds sayılarında gerçekleştiğini belirtmişlerdir.

Burada verilecek uygulama, bir kanaldaki dikdörtgen formda blok (modül) dizisinin basınç düşüklüğü üzerine yapılan deneysel bir çalışmadır. Çalışmanın başlıca odak noktası basınç düşüşü için belli bir korelasyon sunmak, aynı zamanda bu akış bölgesinde hız alanının doğası üzerine kalitatif bilgi sağlamaktır. Araştırılan geometri, elektronik cihazlarda karşılaşılanlara (özellikle bilgisayar endüstrisinde kullanılanlara) benzerdir. Dikdörtgen formda modüllü bir dizi, dikdörtgen kesitli kanalın alt cidarı boyunca yerleştirilmiştir. Geometrik değişkenler; modül kenar uzunluğu ( $L_m$ ), modüller arası açıklık ( $s$ ) olup;  $B/L=0,5$  ;  $S/L=0,125$ ;  $0,33$  ve  $0,5$ ;

$H/L=0,125$ ;  $0,25$ ;  $0,5$ ;  $0,75$ ;  $1$  ve  $1,5$  olarak alınmıştır. Bu büyüklükler bilgisayar endüstrisinde sıkça karşılaşılanlara yakındır. Deneysel çalışmada akışkan ortam hava olup Reynolds sayısı  $Re=V.H/\nu$  olarak tanımlanan değeri 400-1500 arasında değişmektedir. Bu uygulamada deneysel çalışmalar iki yönde sürdürülmüş olup ilki, dikdörtgen modüller dizisinin giriş bölgesindeki basınç düşüşünü ölçmek ve karşılaştırmak, ikincisi ise akımın hız alanının tabiatını daha iyi tanımaktır. Literatür taramasında giriş bölgesinde basınç düşmesi ile ilgili bir korelasyona rastlanmamış olup burada tüm akım parametreleri ve geometrik parametreler, Reynolds sayısı ( $Re$ ), modül dizisi boyunca uzaklık ( $x$ ),  $H/L$  ve  $S/L$  gibi tek bir korelasyonda bir araya getirilmiştir.

Deney düzeneğinin şematik görünümü Şekil 3-2 de gösterilmektedir. Akışkan ortam (hava), deney cihazı içine düzenli rahat giriş temini sağlayarak girer. Ardından akım geliştirme bölümünden geçer (591 mm). Akım düzleştirici, test bölümü, tekrar akım geliştirme bölümü, venturimetre, ana vanadan geçer ve emme işlevini gerçekleştiren vantilatörden akımın devresini terk eder. Hava akımı ana vana tarafından ayarlanır (ki buna debi ayar vanası adı da verilir). Ayrıca daha hassas bir hava akımı kontrolü sağlayan bir by-pass vanası da sistemde mevcuttur. Akım oranı (debi) kalibre edilmiş bir venturimetre yardımıyla ölçülür.

Test bölümü dahil tüm hava kanalı, dikdörtgen kesitli olup genişliği  $w=178$  mm, yüksekliği (Şekil 3-3 de b ve c'de,  $H+B$ ) dizideki modül ölçülerine bağlı olup 12,8 mm...76,2 mm arasında değişmektedir. Dörtgen formda modüller bir hat boyunca test bölümünün alt cidarı boyunca dağılmıştır. (Şekil 3-1(b) ve (c) de görüldüğü gibi).



Şekil 3-3 Test yerleşiminin şematik görünüşü (ölçeksiz)

a- Genel görünüş, b- test bölümünün yan görünüşü

c- Test bölümünün enine kesiti. Bütün ölçüler (mm) dir

Burada;

$s=6,4$  mm ve  $3,4$  mm

$H=6,4$  mm,  $12,7$ mm,  $19,1$  mm ve  $25,4$  mm

$L= 12,7$  mm,  $25,4$  mm,  $50,8$  mm ve

$B=6,4$  mm,  $12,7$ mm ve  $25,4$  mm'dir.

Bu geometrik büyüklüklerin kombinasyonundan oluşturulan 9 adet test bölgesi üretilmiş ve Tablo 3-2 de sunulmuştur. Tüm şartlarda  $B/L=0,5$  olup dikdörtgen formdaki modüllerin sayısı test bölümü sayısına bağlıdır. (1-3), (4-6), (7-9) test bölümleri için test bölümü boyunca modül sayıları sırası ile  $5 \times 3$ ,  $8 \times 5$  ve  $15 \times 9$  dur.



Tablo 3-2 Test bölmesinin geometrik ölçüleri

Test bölüm No	B/L	S/L	H/L	B (mm)	L (mm)	H (mm)	S (mm)
1	0,5	0,125	0,125	25,4	50,8	6,4	6,4
2	0,5	0,125	0,25	25,4	50,8	12,7	6,4
3	0,5	0,125	0,5	25,4	50,8	25,4	6,4
4	0,5	0,33	0,25	12,7	25,4	6,4	8,4
5	0,5	0,33	0,5	12,7	25,4	12,7	8,4
6	0,5	0,33	0,75	12,7	25,4	19,1	8,4
7	0,5	0,5	0,5	6,4	12,7	6,4	6,4
8	0,5	0,5	1	6,4	12,7	12,7	6,4
9	0,5	0,5	1,5	6,4	12,7	19,1	6,4

Deney düzeneğinde basınç prizi kanalın üst cidarına yerleştirilmiştir. Şekil 3-1(b) de gösterildiği gibi ilk basınç prizi ile akım yönünde ikinci basınç prizi arasında l kadar mesafe söz konusudur. l mesafesi test bölümüne bağlı olup;

L=50,8 mm için l= 28,6 mm'dir.

L=25,4 mm için l=19,1 mm'dir.

L=12,7 mm için l=38,1 mm'dir.

Uçtan uca basınç prizleri test bölgesinin ortasına yerleştirilen merkez modülün üzerine gelecek şekilde konmuştur. (Şekil 3-3(c)). İlk basınç prizinden itibaren uzaklık cinsinden bütün basınç prizlerinin konumu Tablo 3-3 de verilmiştir. (1-3) test bölümleri için basınç prizi sayısının Şekil 3-3(b) de gösterildiğinden daha fazla olduğuna dikkat edilmelidir. Bir diğer ifadeyle basınç prizlerinin tam yerinin belirlenmesi için Tablo 3-3'e bakmak gerekir.

Tablo 3-3 Basınç valflerinin yerleşimi

Valf no	Test bölümleri 1, 2, 3 X (mm)	Test bölümleri 4, 5, 6 X (mm)	Test bölümlerim 7, 8, 9 X (mm)
1	0	0	0
2	14,3	19,1	38,1
3	28,6	50,9	57,2
4	42,9	82,7	76,3
5	57,2	114,5	95,4
6	71,4	146,3	114,5
7	85,7	178,1	133,6
8	100,0	209,9	152,7
9	114,3	241,7	171,8
10	128,6	273,5	190,9
11	142,9		210
12	157,2		229,1
13	171,5		248,2
14	185,7		267,3
15	200,0		286,4
16	214,3		305,5
17	228,6		324,6
18	242,9		
19	257,2		
20	271,5		

Deneysel çalışmaya başlamadan önce dış ortamdan havanın kanal içerisine sızmasını engellemek için tüm bağlantılar silikon ile sıvanır ve sabun çözeltisi yardımıyla sızıntı olup olmadığı test edilmelidir. Kanaldan belli bir akış debisinde (debi ayar vanasının belli bir konumunda) belli bir süre akışın rejim haline gelmesi beklenecek basınç ölçümleri okunmaya hazır hale gelir. Basınç sinyalleri plastik tüp üzerinden (1 ve 10 torr) basınç transducerden elektronik manometreye iletilir, ve IBM PS ile etkileşir. Bilgisayar 22 saniye süresince basınç sinyallerini tarar. Ve bu düzenleme basınçları  $10^{-5}$  mm Hg mertebesine kadar çözümleyebilir. Her ölçüm 2 kez tekrarlanır. Ve iki sonuçtan bir ortalama değer elde edilir. Bu çalışmada 1420 veri noktası elde edilmiş ve basınç düşüşü korelasyonu elde etmek için kullanılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha önce de belirtildiği gibi Reynolds sayısı yardımıyla sunulmuştur. Basınç düşüşü dinamik basınç yardımıyla boyutsuz olarak düzenlendiğinde,

$$K = \frac{P_0 - P_1}{0,5\rho V^2} \quad 3-1$$

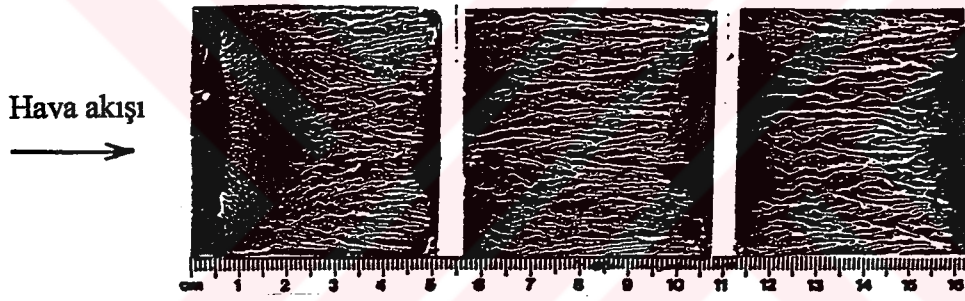
olarak yazılabilir.

Burada,  $v$  : Test bölgesinde modül üzerinden geçen hava akımının ortalama hızıdır.

Tam gelişmiş akım bölgesinde basınç düşüşleri sürtünme faktörü yardımıyla,

$$C_f = \frac{-\left(\frac{dP}{dx}\right)2H}{0,5\rho V^2} \quad 3-2$$

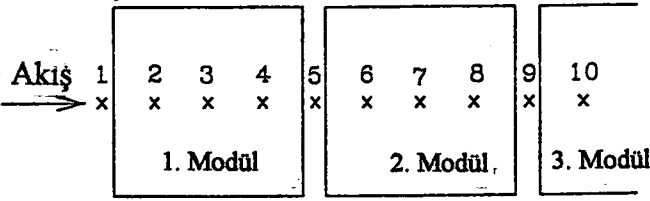
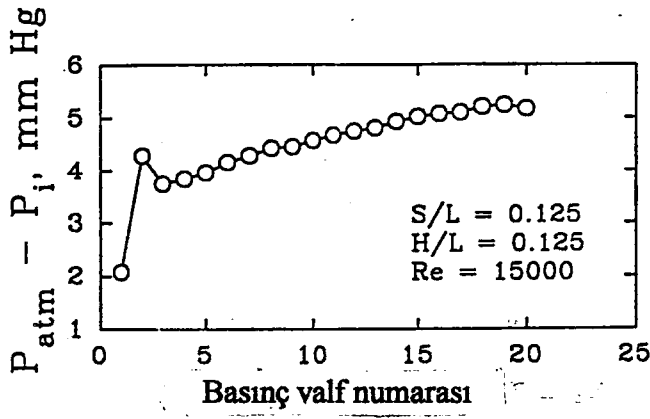
olarak tanımlanmıştır.



Şekil 3-4 Akış görüntüleme diyagramı ( $Re=15000$ ,  $L=50,8$  mm,  $S/L=0,125$ ,  $H/L=0,125$ )

Deneysel çalışmada  $S/L=0,125$  ;  $H/L=0,125$  ( $L=50,8$  cm) geometrik değerlerine haiz modül dizisinde gerçekleşen akımda Reynolds sayısı  $Re=15000$  için akım boyunca elde edilen basınç dağılımı Şekil 3-5 de gösterilmiştir. Bu şekildeki alt diyagram, basınç prizlerinin ( $x$ 'le işaretlenmiştir) modüllere göre yerleşimlerini göstermek için hazırlanmıştır. Görüldüğü gibi ilk basınç prizi ile modülün akıma göre ön kenarının hemen hemen üstündedir. Şekil 3'deki ordinatta dış ortam basıncı ( $P_{atm}$ ) ile test bölgesindeki basınç ( $P_i$ ) arasındaki fark ( $P_{atm}-P_i$ ) ordinattaki bir artma, kanaldaki bir basınç düşüşünü ifade eder.

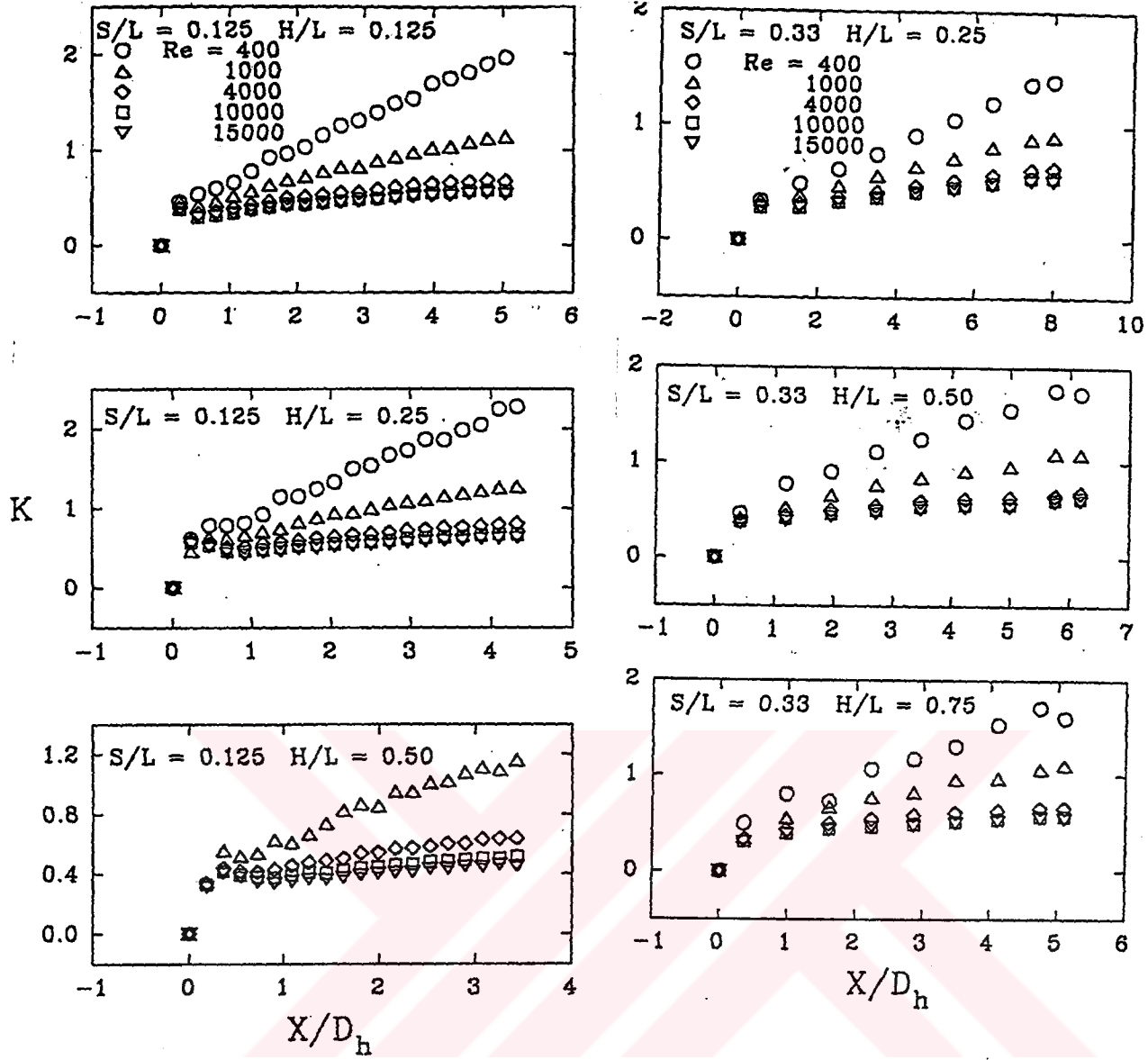
EC YIKI  
DOKU



Şekil 3-5  $Re=15000$ ,  $S/L=0,125$  ve  $H/L=0,125$  şartlarında valf numaraları ile ilgili basınç dağılımı

Grafik incelendiğinde basıncın ilk prizden ikincisine oldukça keskin hızlı bir şekilde azaldığı görülür. Daha sonra ikinci ve üçüncü basınç prizleri arasında zayıf bir basınç düşüşü iyileşmesi söz konusudur. Üçüncü basınç prizinden itibaren kanal içerisinde hava basıncı ( $P_i$ ), sürekli olarak azalır. Birinci ve ikinci prizler arasındaki ani basınç düşüklüğü, akımın cidardan ayrıldığı ve sürüklenen bölgenin hava akımının etkili akış kesitini azalttığı bir noktada meydana gelir. Bu noktadan sonra esas akımın akış kesiti genişler ve basınç bir dereceye kadar iyileşir.

Akım yönünde basınç dağılımı Şekil 3-6,7 ve 8'de gösterilmektedir.

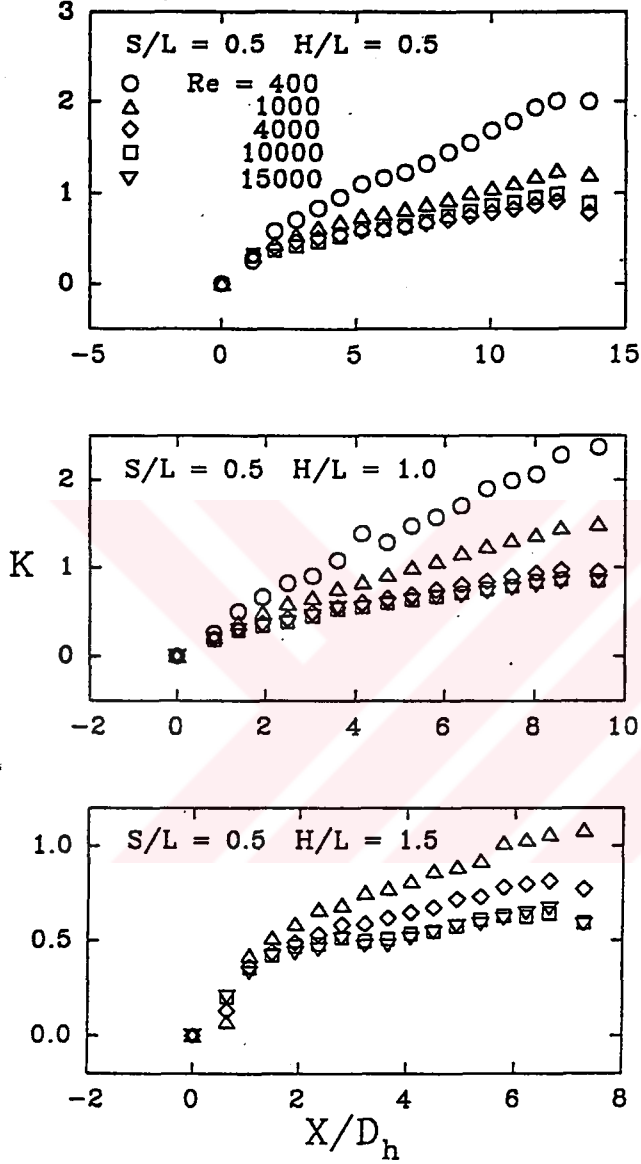


Şekil 3-6  $S/L=0,125$  için eksenel uzaklık şartlarındaki basınç düşüş katsayısının dağılımı

Şekil 3-7  $S/L=0,33$  için eksenel uzaklık şartlarındaki basınç düşüş katsayısının dağılımı

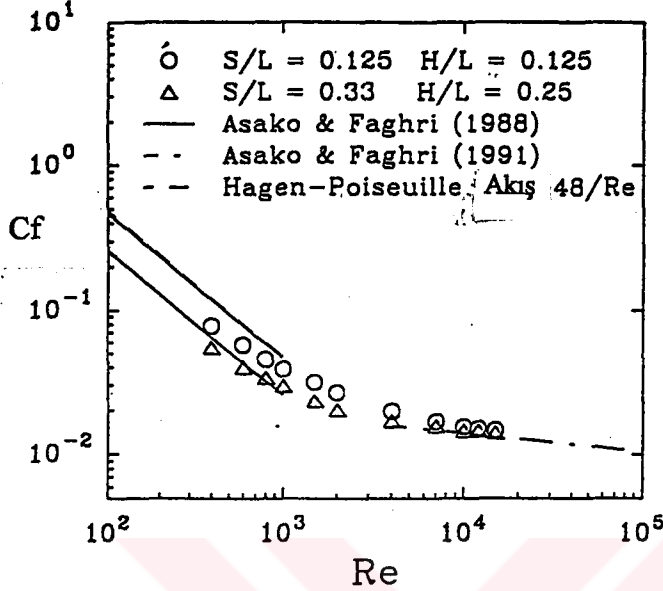
Bu şekillerde ilk basınç prizinde itibaren olan eksenel mesafe ( $x$ ), kanalın hidrolik çapı  $D_h=2w(H+B)/(w+H+B)$  olup, ordinatta 3-1 nolu denklemle tanımlanan boyutsuz basınç düşüşü gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden açıkça görüldüğü gibi, hava akımının modül dizisine girmesiyle hava basıncında hızlı bir düşüş söz konusudur. Daha sonra, akım doğrultusunda basınçlar lineer olarak azalma gösterir. Ardışık konumda bulunan basınç prizlerinden okunan basınç değerleri incelendiğinde (1,2,3), (4,5,6) ve (7,8,9) nolu test bölgelerinde sırası ile 2.,3. Ve 4. Modüllerden sonra basınç değişiminin tamamen gelişmiş bir değişim arz ettiği gözlenmektedir. Şekil 3-9'da tamamen gelişmiş basınç düşüşleri

sürtünme katsayısı cinsinden ifade edilmiştir. Bu anlamda modül dizisindeki basınç düşmesine sebep olan iki neden vardır. Bunlar, sürüklenme ve cidar sürtünmesi olarak verilebilir. Daha geniş modüller arası boşlukta akımın sürüklenme tarafından yönetileceği öngörülür.



Şekil 3-8  $S/L=0,5$  için aksel uzaklık şartlarındaki basınç düşüş katsayısının dağılımı

Küçük aralık söz konusu olduğunda ise cidar sürtünmesi daha baskındır. Şekil 3-9'daki veri noktaları, S/L arttıkça  $C_f$  değerleri Reynolds sayısından daha az bağımlı hale gelir ve böylece daha önce yapılan tahminler doğrulanır.



Şekil 3-9 Sürtünme faktörü ve literatürle karşılaştırılması

Ayrıca Şekil 3-9'da Asoko ve Faghri'nin (1988) laminar akım sonuçları ( $B/L=0,735$ 'te 0,5 ile karşılaştırılarak) ve türbülanslı akım sonuçları (1991)  $B/L=0,5$  için ve ayrıca iki paralel levha arasından laminar akım (Hagen Pouille akım) sonuçları  $48/Re$  için gösterilmiştir. Genelde sonuç verileri arasında iyi bir yaklaşım vardır. Ancak laminar bölgede görülen küçük farklılıklar öngörülen  $B/L$  değerindeki farktan kaynaklanabilir. Basınç verileri için bir korelasyon elde etme aşamasında ilk adım olarak Şekil 3-10'da gösterildiği gibi farklı  $H/L$  değerleri ile boyutsuz basınç düşüşü  $K$  birlikte ele alınmalıdır. Deneysel verilere ek olarak elde edilen eğrilere en küçük koreler yöntemi yardımı ile denklem uydurulabilir. Bu eşitlikler

$$K \left( \frac{H}{L} \right)^{-0,0723} = 165,33 \frac{\left( \frac{X}{D_h} \right)}{Re} + 0,518$$

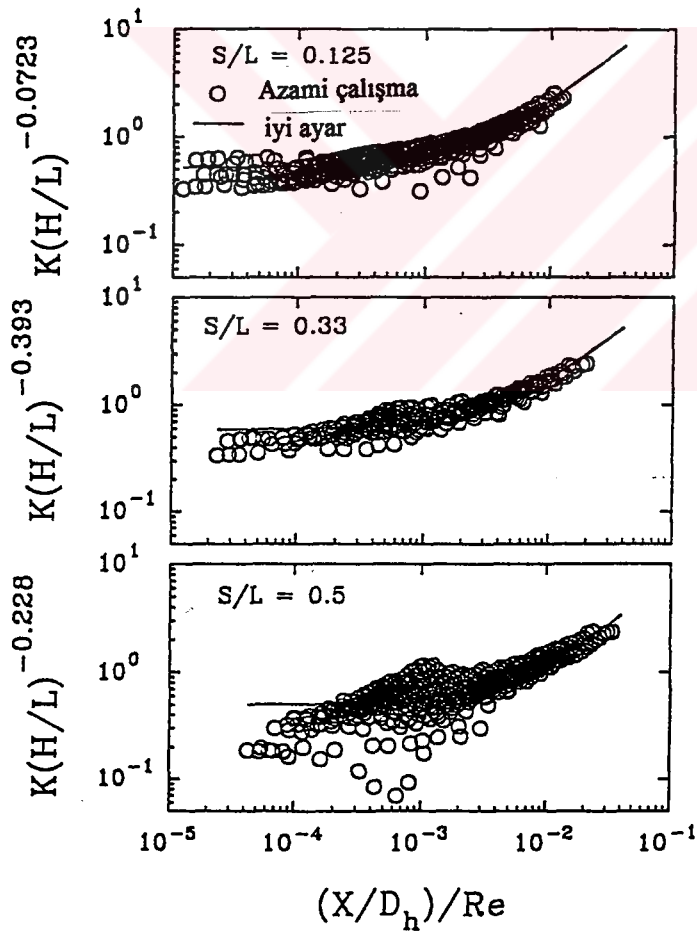
TCY  
NO

$$K\left(\frac{H}{L}\right)^{-0,393} = 114,21 \frac{\left(\frac{X}{D_h}\right)}{Re} + 0,588 \quad 3-4$$

$$K\left(\frac{H}{L}\right)^{-0,228} = 71,68 \frac{\left(\frac{X}{D_h}\right)}{Re} + 0,498 \quad 3-5$$

olarak yazılır.

Şekil 3-10'daki grafiklerdeki veri noktaları yukarıdaki eşitliklerle çok iyi korele edilmiştir. Bütün veri noktalarını korele etmek ve onları tek bir denklemden ifade edebilmek için boyutsuz basınç düşüşünü;



Şekil 3-10  $S/L=0,125, 0,33$  ve  $0,5$  verilerindeki basınç ilişkisinin birinci kademesi



$$K^* = K \left( \frac{H}{L} \right)^{2,559} \left( \frac{S}{L} \right)^{2,81}$$

3-6

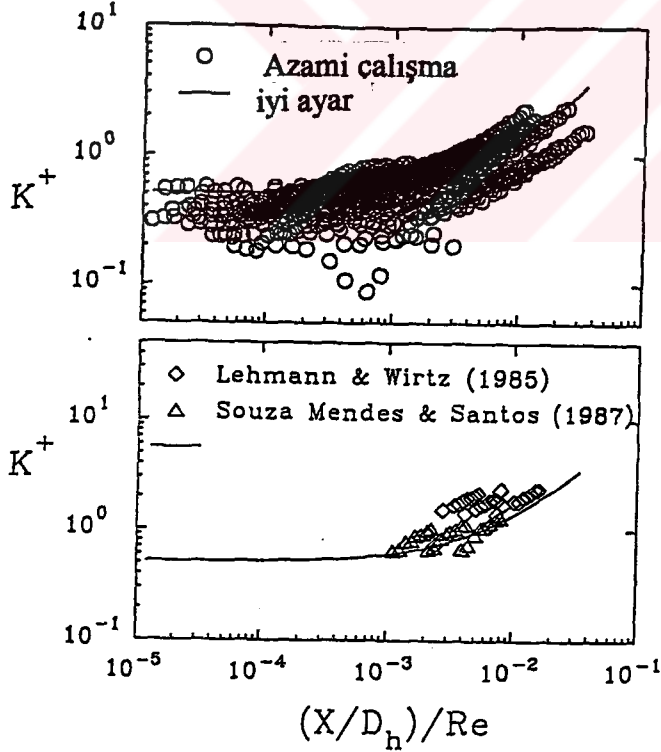
şeklinde tanımlamak gerekir.

Şekil 3-11'de üst grafikte toplam 1420 adet veri noktası sunulmaktadır ve veri noktaları iyi bir şekilde bir araya getirilmiştir. Veri değişimleri için,

$$K^* = 87,223 \frac{\left( \frac{X}{D_h} \right)}{Re} + 0,515$$

3-7

denklemini ile temsil edilirler.



Şekil 3-11 Bütün veri noktaları için değiştirilmiş basınç düşüş katsayısı

87,223 ve 0,515 sabit değerlerinin standart sapmaları sırası ile  $\delta_1=1,493$  ve  $\delta_2=0,6579 \cdot 10^{-2}$ , buna karşılık belirsizlik  $\pm 2\delta_1/87,223 = \pm \%3,4$  ve  $\pm 2\delta_2/0,6579 \cdot 10^{-2} = \pm \%2,6$  dir. Bu denklem dörtgen formda blok (modül) dizisinin giriş bölgesinde  $400 \leq Re \leq 15000$ ,  $B/L=0,5$ ,  $0,125 \leq S/L \leq 0,5$  ve  $0,125 \leq H/L \leq 1,5$  iken basınç düşüşünü tahmin etmemize imkan sağlar. Bu korelasyonu literatür bilgileri ile karşılaştırmak için Lehmann(1985) ve Souza Mendes (1987)'nin basınç düşüşü sonuçları Şekil 3-11 de alt grafikte gösterilmiştir. Ancak, bu araştırmalar arasında az ad olsa farklılıklar mevcuttur. Zira Lehmann,  $B/L=0,25$ ,  $0 \leq S/L \leq 1$  ve  $0,25 \leq H/L \leq 0,75$  koşullarında çalışmıştır. Bu değerler, burada verilen uygulamanın geometrik parametrelerinden biraz farklıdır. Buna ek olarak test bölgesi geometrisi de iki boyutludur. Souza-Mendes tarafından bildirilen basınç sonuçları  $B/L=3/8$ ,  $S/L=0,25$  ve  $H/L=5/8$  içindir. Bütün bu farklılıklara rağmen Şekil 3-11 de görülen kabul edilebilir mertebe seviyesi oldukça iyidir.



**Kaynaklar**

Asako, Y., and Faghri, M., 1988, "Three-Dimensional Heat Transfer and Fluid Flow Analysis of Arrays of Square Blocks Encountered in Electronic Equipment," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 481-498

Asako, Y., and Faghri, M., 1991, "Parametric Study of Turbulent Three-Dimensional Heat Transfer of Arrays of Heated Blocks Encountered in Electronic Equipment," *Heat Transfer in Electronic Equipment*, HTD-Vol. 171, pp. 135-141.

Molki, M., Faghri, M., and Ozbay, O., 1993, "A New Correlation for Pressure Drop in arrays of Rectangular Blocks in air Cooled Electronic Units," *General Papers in Heat Transfer Natural and Forced Convection-ASME*, HTD-Vol. 237, pp. 75-81.

Souza Mendes, P. R., and Santos, W. F. N., 1987, "Heat Transfer and Pressure Drop Experiments in air Cooled Electronic Component arrays," *J. Thermophysics*. Vol. 1, pp. 373-378.

Sparrow, E. M., Niethammer, J. E., and Chaboki, A., 1982, "Heat Transfer and Pressure Drop Characteristics of Arrays of Rectangular Modules Encountered in Electronic Equipment," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, pp. 961-973.

Yuan, S. W., 1970, "Foundations of Fluid Mechanics," Prentice-Hall International, Inc., London, 1970.

"Introduction to Viscous Compressible Flow", pp. 493-525

## **Özgeçmiş**

- Doğum tarihi** : 15.06.1959
- Doğum yeri** : İstanbul
- Lise** : 1973-1976 Fenerbahçe Lisesi
- Lisans** : 1978-1985 Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fak.  
Makine Mühendisliği Bölümü
- Yüksek Lisans** : 1994-1998 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enst.  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Enerji Makinaları  
Programı
- Çalıştığı kurumlar** : 1986- Y.T.Ü. Makine Fak. Mekanik Anabilim Dalı  
Araştırma görevlisi

