

151658

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

151658

**DERECELENDİRİLMİŞ DİKDÖRTGENSEL PLAKLARDA
BAZI STABİLİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ**

Mak. Yük. Müh. Vedat TAŞKIN

**F.B.E. Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 01 Haziran 2004
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Uğur GÜVEN
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ayşegül AKDOĞAN
: Prof. Dr. Yılmaz ÖZTÜRK
: Doç. Dr. Cem PARMAKSIZOĞLU
: Prof. Dr. Günay ANLAŞ

(YTÜ) *Uğur Güven*
(YTÜ) *Ayşegül Akdoğan*
(İTÜ) *Y. Öztürk*
(İTÜ) *Cem Parmaksızoğlu*
(BÜ) *Günay Anlaş*

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	xi
ÖZET	xii
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Konu ve Önemi	1
1.2 Önceki Çalışmalar	4
1.3 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	7
2. TEMEL DENKLEMLER VE VARSAYIMLAR	9
2.1 Gerilme Birim Şekil Değiştirme Bağlılıları	9
2.2 Derecelendirilmiş Malzeme Elastisite Modüllerinin Plak Kalınlığı Boyunca Başlıca Değişim Şekilleri	11
2.2.1 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri	12
2.2.1.1 Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	12
2.2.1.2 Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişme Hali	14
2.2.2 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri	16
2.2.2.1 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişimi	16
2.2.2.2 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişimi	18
2.3 Başlıca Plak Teorileri	23
2.3.1 Klasik Plak Teorisi	23
2.3.1.1 Denge Denklemleri	27
2.3.1.2 Sınır Şartları	28
2.3.1.3 Bünye Denklemleri	29
2.3.2 Kayma Deformasyon Teorileri	31
2.3.2.1 Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi	31
2.3.2.2 Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi	32
2.3.2.3 Denge Denklemleri	36
3. BÜTÜN KENARLARINDAN BASİT DESTEKLİ (BBBB), DERECELENDİRİLMİŞ PLAĞIN MAKRO VE MİKRO MEKANİK YAKLAŞIMLAR İLE İNCELENMESİ	39
3.1 Yükleme ve Destekleme Şekilleri	39
3.2 Bütün Kenarlarından Basit Destekli (BBBB) Plak için Navier Tipi Çözüm	40
3.3 Basit Destekli Plağın Klasik Plak Teorisi ile Navier Tipi Çözümü	44
3.3.1 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri	46

3.3.1.1	Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	46
3.3.1.2	Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişmesi.....	52
3.3.2	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri	59
3.3.2.1	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	59
3.3.2.2	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişmesi	62
3.4	Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Plak Teorisi ile Navier Tipi Çözüm	66
3.4.1	Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi	66
3.4.2	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri	68
3.4.3	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri	70
4.	DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINA SAHİP PLAKLARIN BURKULMASININ LEVY YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ	72
4.1	Derecelendirilmiş Lineer İzotrop Malzemeden Yapılmış Plagın ABAB Şeklinde Desteklenmesi	78
4.1.1	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri	79
4.1.1.1	Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	79
4.1.1.2	Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişmesi.....	83
4.1.2	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri	88
4.1.2.1	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	88
4.1.2.2	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişmesi	90
4.2	Derecelendirilmiş Malzemeden Plagın (BBAB) Şeklinde Desteklenmesi	93
4.2.1	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri	93
4.2.1.1	Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	93
4.2.1.2	Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişmesi.....	97
4.2.2	Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri	101
4.2.2.1	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi	101
4.2.2.2	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişmesi.....	103
5.	GENEL DEĞERLENDİRME, TARTIŞMA VE SONUÇLAR	109
KAYNAKLAR		113
EKLER.....		116
Ek 1	Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzında Değişmesi Durumunda Katılık Matris Değerleri	117
Ek 2	ANSYS Paket Programı ile Uygulama:	118
Ek 3	Mathcad Paket Programı Yardımı ile Derecelendirilmiş Plak İçin (m,n) Değerlerinin Kenar Oranları ile Değişimlerinin İncelenmesi ($R=0$).....	121
Ek 4	Mathcad Paket Programı Yardımı ile Derecelendirilmiş Plak İçin (m,n) Değerlerinin Kenar Oranları ile Değişimlerinin İncelenmesi ($R=1$).....	125
Ek 5	Mathcad Paket Programı Yardımı ile Derecelendirilmiş Plak İçin (m,n) Değerlerinin Kenar Oranları ile Değişimlerinin İncelenmesi ($R= -1$)	129
Ek 6	Klasik Plak Teorisi (Levy Yöntemi) Yardımıyla Plak Burkulma Analizi İçin Hazırlanan Bilgisayar Programının Akış Diyagramı	133
ÖZGEÇMİŞ		134

SİMGE LİSTESİ

a	Plak kenar uzunluğu
A_{ij}	Uzama rijitliği
b	Plak kenar uzunluğu
B_{ij}	Birleşim rijitliği
C_{ij}	Katılık matrisi
D	Plak rijitliği
D_{ij}	Eğilme rijitliği
E_c	Seramik bileşenin elastisite modülü
E_{kenar}	Plağın alt ve üst yüzeylerindeki elastisite modülü
E_m	Metal bileşenin elastisite modülü
E_{oran}	Elastisite modüllerinin oranı
E_{orta}	Plağın orta eksenindeki elastisite modülü
G_c	Seramik bileşenin kayma modülü
G_m	Metal bileşenin kayma modülü
h	Plak kalınlığı
k	Derecelendirme katsayısı
K_c	Seramik bileşenin Bulk modülü
K_{ij}	Katılık matris elemanları
K_m	Metal bileşenin Bulk modülü
m, n	x ve y eksenleri doğrultusundaki yarım dalga sayısı
M_{ij}	Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç momentler ($i, j = x, y$)
N_{ij}	Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç kuvvetler ($i, j = x, y$)
P	Malzeme özellikleri
P_a, P_0	Plağın alt ve üst yüzeyine ait malzeme özellikleri
q	Yayıllı yük
Q_{ij}	Elastik sabitler
R	Yük katsayısı
U_v	Virtüel birim şekil değiştirme enerjisi
U, V, W	Plaktaki her hangi bir noktanın x, y, z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeleri
u_0, v_0, w_0	Plak orta düzleminde bir noktanın x, y, z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeleri
V_v	Virtüel iş
V_c	Seramik bileşenin hacim oranı
V_m	Metal bileşenin hacim oranı
λ	Boyutsuz kritik burkulma parametresi
ν_c	Seramik bileşenin Poisson oranı
ϵ_{ij}	Birim şekil değiştirme tansörü
σ_{ij}	Gerilme tansörü
ν_m	Metal bileşenin Poisson oranı
ϕ_x, ϕ_y	y ve x eksenlerine göre dönme miktarı

KISALTMA LİSTESİ

A	Ankastre Destekli
B	Basit Destekli
KPT	Klasik Plak Teorisi
M-T	Mori-Tanaka
ÜMKDPT	Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Plak Teorisi



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Derecelendirilmiş malzeme ve tabakalı kompozit malzeme yapı örneği	2
Şekil 1.2 Derecelendirilmiş ve tabakalı kompozit malzeme için ısı gerilme karakteristiği.....	2
Şekil 1.3 Derecelendirilmiş malzeme mikro yapıları a) tabakalı yapı b) inclusion/matris yapı	3
Şekil 2.1 Diferansiyel küçük bir hacim elemanında gerilme bileşenleri	9
Şekil 2.2 Derecelendirilmiş malzemeden yapılmış plağın geometrisi	11
Şekil 2.3 Derecelendirilmiş plağın elastisite modülünün simetrik olarak değişimi (Tip A)....	12
Şekil 2.4 Derecelendirilmiş plağın elastisite modülünün simetrik olarak değişimi (Tip B)....	12
Şekil 2.5 Plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişimi (Tip A)	13
Şekil 2.6 Plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişimi (Tip B)	14
Şekil 2.7 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Üstel değişimi (Tip A).....	15
Şekil 2.8 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Üstel değişimi (Tip B).....	15
Şekil 2.9 Plak elastisite modülünün kalınlık boyunca anti simetrik değişimi.....	16
Şekil 2.10 Derecelendirilmiş plağın, Anti Simetrik Reddy tarzına göre hacim oranının k değerleri ile değişimleri	17
Şekil 2.11 Derecelendirilmiş plağın elastisite modülünün, Anti Simetrik Reddy tarzına göre k değerleri ile değişimleri	18
Şekil 2.12 Derecelendirilmiş plağın, hacim oranının Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre k değerleri ile değişimleri	20
Şekil 2.13 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre k değerleri ile değişimleri	21
Şekil 2.14 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında ve Üstel değişimi (Tip A, $E_{oran}=10$).....	21
Şekil 2.15 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında ve üstel değişimi (Tip B, $E_{oran}=0.1$)	22
Şekil 2.16 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün, Anti Simetrik Reddy tarzında ve Mori-Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimi	23
Şekil 2.17 Plak geometrisi ve eksen takımı	24
Şekil 2.18 Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi kabullerine göre şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş plak geometrisi.....	32
Şekil 2.19 Dik normallerin şekil değiştirmeleri a)şekil değiştirmemiş, b)klasik plak teorisi, c)birinci mertebe kayma deformasyon plak teorisi, d)üçüncü mertebe kayma deformasyon plak teorisi	33
Şekil 2.20 Plak sınır şartlarının yazımında kullanılan kenar sıraları	38
Şekil 3.1 Derecelendirilmiş dikdörtgensel plağın geometrisi ve eksen takımı	39
Şekil 3.2 Derecelendirilmiş plaktaki yükleme şekilleri; tek eksenli basınç ($R=0$) , iki eksenli basınç ($R=1$) ve basit basınç-basit çekme ($R=-1$).....	40
Şekil 3.3 Basit destekli plak için sınır şartları.....	41
Şekil 3.4 Burkulma yarı dalgası (m) ile (a/b) kenar oranlarının değişimi ($R=0$)	43
Şekil 3.5 Burkulma yarı dalgası (m) ile (a/b) kenar oranlarının değişimi ($R=1$)	43
Şekil 3.6 Burkulma yarı dalgası (m) ile (a/b) kenar oranlarının değişimi ($R=-1$)	44
Şekil 3.7 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$). 46	
Şekil 3.8 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=1$). 46	
Şekil 3.9 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)47	
Şekil 3.10 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)47	
Şekil 3.11 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında	

değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=1$)	48
Şekil 3.12 BBBB şeklinde destekli plağın, elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)	48
Şekil 3.13 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)	49
Şekil 3.14 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=1$)	49
Şekil 3.15 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=-1$)	50
Şekil 3.16 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=0$)	50
Şekil 3.17 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=1$)	51
Şekil 3.18 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=-1$)	51
Şekil 3.19 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)	52
Şekil 3.20 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=1$)	52
Şekil 3.21 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)	53
Şekil 3.22 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)	53
Şekil 3.23 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=1$)	54
Şekil 3.24 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)	54
Şekil 3.25 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)	55
Şekil 3.26 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=1$)	55
Şekil 3.27 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=-1$)	56
Şekil 3.28 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=0$)	56
Şekil 3.29 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=1$)	57
Şekil 3.30 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=-1$)	57
Şekil 3.31 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=0$)	59
Şekil 3.32 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=1$)	59
Şekil 3.33 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=-1$)	60
Şekil 3.34 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)	60
Şekil 3.35 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=1$)	61
Şekil 3.36 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında	

değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R = -1$)	61
Şekil 3.37 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R = 0$) ..	62
Şekil 3.38 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R = 1$) ..	62
Şekil 3.39 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R = -1$) ..	63
Şekil 3.40 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R = 0$)	63
Şekil 3.41 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R = 1$)	64
Şekil 3.42 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R = -1$)	64
Şekil 3.43 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/h değişimi (Tip A, $R = 0$, $a/b = 1$)	68
Şekil 3.44 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/h değişimi (Tip B, $R = 0$, $a/b = 1$)	68
Şekil 3.45 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/h değişimi (Tip A, $R = 0$, $a/b = 1$)	69
Şekil 3.46 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/h değişimi (Tip B, $R = 0$, $a/b = 1$)	69
Şekil 3.47 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/h değişimi ($R = 0$, $a/b = 1$)	70
Şekil 3.48 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/h değişimi ($R = 0$, $a/b = 1$)	70
Şekil 4.1 Levy yöntemi için dikdörtgensel plak geometrisi ve eksen takımı	72
Şekil 4.2 Nx tahmin değerinin aldığı değerlere göre $\det[D]$ işaret değiştirmesi	78
Şekil 4.3 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R = 0$)	79
Şekil 4.4 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R = -1$)	79
Şekil 4.5 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R = 0$)	80
Şekil 4.6 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R = -1$)	80
Şekil 4.7 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, $R = 0$) ..	81
Şekil 4.8 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, $R = -1$)	81
Şekil 4.9 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, $R = 0$) ..	82
Şekil 4.10 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, $R = -1$) ..	82
Şekil 4.11 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R = 0$)	83
Şekil 4.12 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R = -1$)	83
Şekil 4.13 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R = 0$)	84
Şekil 4.14 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak	

değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)	84
Şekil 4.15 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)	85
Şekil 4.16 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=-1$)	85
Şekil 4.17 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=0$)	86
Şekil 4.18 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=-1$)	86
Şekil 4.19 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=0$)	88
Şekil 4.20 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=-1$)	88
Şekil 4.21 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)	89
Şekil 4.22 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=-1$)	89
Şekil 4.23 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=0$)	90
Şekil 4.24 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=-1$)	90
Şekil 4.25 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)	91
Şekil 4.26 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=-1$)	91
Şekil 4.27 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)	93
Şekil 4.28 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)	93
Şekil 4.29 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)	94
Şekil 4.30 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)	94
Şekil 4.31 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)	95
Şekil 4.32 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b ile değişimi (Tip A, $R=-1$)	95
Şekil 4.33 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b ile değişimi (Tip B, $R=0$)	96
Şekil 4.34 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=-1$)	96
Şekil 4.35 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)	97
Şekil 4.36 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)	97
Şekil 4.37 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)	98
Şekil 4.38 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)	98
Şekil 4.39 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)	99

Şekil 4.40 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $0a/b$ değişimi (Tip A, $R=-1$)	99
Şekil 4.41 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=0$)	100
Şekil 4.42 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip B, $R=-1$)	100
Şekil 4.43 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=0$)	101
Şekil 4.44 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=-1$)	102
Şekil 4.45 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)	102
Şekil 4.46 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=-1$)	103
Şekil 4.47 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=0$)	103
Şekil 4.48 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=-1$)	104
Şekil 4.49 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)	104
Şekil 4.50 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=-1$)	105
Şekil 4.51 BBBB,BBAB,ABAB şeklinde destekli plaklar için Simetrik Reddy tarzına göre kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi ($R=0$, $a/b=1$, Tip A)	106
Şekil 4.52 BBBB,BBAB,ABAB şeklinde destekli plaklar için Simetrik Reddy tarzına göre kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi ($R=0$, $a/b=1$, Tip B)	106
Şekil 4.53 BBBB,BBAB,ABAB şeklinde destekli plaklar için elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy ve Mori Tanaka tarzına göre değişimi ($R=0$, $a/b=1$)	107

ÖNSÖZ

Uzay ve havacılık endüstrisinin gelişmesi ile birlikte hafif, yüksek ısıl dayanım ve çok iyi mekanik özelliklere sahip malzemelere ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyacın karşılanmasında, genellikle seramik ve metal bileşenlerin kullanılmasıyla oluşturulan Derecelendirilmiş Kompozit malzemeler (Functionally Graded Material) çok önemli bir potansiyele sahiptir. Bu çalışmada, derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plakların bazı burkulma problemleri incelenmiştir.

Bu çalışmayı gerçekleştirmem sırasında bir çok kişinin maddi ve manevi katkıları olmuştur. Öncelikle bu konuda çalışmamı sağlayan danışmanım Prof. Dr. Uğur GÜVEN'e çalışmanın her aşamasındaki yardımlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma sırasında, değerli tecrübelerinden faydalandığım Yrd. Doç Dr. Taner TIMARCI ve Yrd. Doç Dr. Metin AYDOĞDU' ya teşekkür ederim.

Doktora yapmam konusunda teşvikleri ile beni cesaretlendiren ayrıca tüm çalışma boyunca maddi, manevi desteğini esirgemeyen Mak. Yük. Müh. Nilhan ÜRKMEZ'e ve her zaman değerli fikirlerinden yararlandığım Yrd. Doç Dr. Doğan ERYENER'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bu günlere gelene kadar gösterdikleri çaba ve harcadıkları kıymetli emekler için annem, babam ve ailemin diğer fertlerine gönülden teşekkür ederim.

Haziran, 2004

Vedat TAŞKIN

ÖZET

Tabakalı kompozit malzemeler mühendislik yapılarında çok kullanılan malzemelerdir. Isıl ve/veya mekanik yükleme altındaki tabakalı yapıda, tabakalar arasında malzeme özelliklerinin ani değişimleri yerel, büyük yer değiştirme değerlerine neden olabilirler ve bunlar yapıda mikro çatlakların oluşması ve yayılmasının başlıca sebeplerindendir. Bu sorunun üstesinden gelmenin bir yolu mikroskobik olarak homojen olmayan ve mekanik özellikleri bir yüzeyden diğerine çok yumuşak olarak, sürekli olarak değişen Derecelendirilmiş Kompozit Malzemeler (Functionally Graded Material-FGM) kullanmaktır. Çoğunlukla seramik ve metal birleşiminden oluşturulan bu malzemelerin değişik kullanım alanları ve çalışma şartları için istenen özelliklere sahip olacak şekilde tasarlanabilmesi nedeniyle araştırmacıların son zamanlarda hızla artarak ilgisini çekmektedir. Üretimi ile ilgili geçmişi 1980'li yılların başına dayanan dereceli malzemeler henüz geliştirilme aşamasında olduğundan teori ve analiz yöntemleri halen tam olarak ortaya konamamıştır.

Bu çalışmada, derecelendirilmiş lineer izotrop malzemedan yapılmış dikdörtgen bir plak ele alınmıştır. Elastisite modülünün plağın kalınlığı boyunca değişimi orta eksene göre, simetrik üstel, simetrik Reddy, anti simetrik Reddy tarzı olmak üzere üç adet makro model ve bir adet mikro model yaklaşımı (Mori-Tanaka) incelenmiştir. Esas olarak, Basit ve Ankastre olmak üzere üç farklı tip destekleme (BBBB, BBAB ve ABAB) ve Eksenel Basınç, İki Eksenli Basınç ve İki eksenli Basınç-Çekme ($R=0$, $R=1$ ve $R=-1$) yükleme tipleri incelenmiştir. İlk olarak Plak için yönetici denklemler ve kullanılabilecek sınır şartları verilmiştir. Uniform düzlem içi kuvvetler etkisinde olan plağın burkulma davranışının incelenmesi, bütün kenarlarından basit desteklenmiş (BBBB) plak için Klasik Plak Teorisi (CPT) ve Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorileri kullanılarak Navier yöntemi ile, karşılıklı iki kenarı basit destekli diğer iki kenarı basit ve ankastre kombinasyonundan (BBBB, BBAB ve ABAB) destekleme tipleri için ise Klasik Plak Teorisi Levy yöntemi ve Durum-Uzay (State Space) yaklaşımı ile yapılmıştır.

Yukarıda bahsedilen tüm durumlar için, boyutsuz kritik burkulma parametreleri, değişik mikro ve makro modellere göre derecelendirilmiş malzemedan plak tipleri için farklı kenar/kenar ve kenar/kalınlık oranları için incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Derecelendirilmiş lineer izotrop malzeme, dikdörtgen plak, burkulma, durum uzay yaklaşımı, Mori-Tanaka mikro mekanik yöntemi

ABSTRACT

Laminated composite materials are commonly used in engineering structures. In the laminated structures that are subjected to thermal and/or mechanical loads, a sudden change in material properties at the interfaces can result in locally large deformations, which may trigger the initiation and the propagation of a micro crack in a lamina. Overcoming this problem may be possible by the use of Functionally Graded Materials (FGM) that are composite materials microscopically non-homogeneous in which the mechanical properties vary smoothly and continuously from one surface to the other. As they can be tailored to different applications and working environments, these materials typically made of isotropic components such as ceramics and metals are progressively pulling the attention of the researchers. As having a relatively short manufacturing history back to the 1980s, the research on methods of the theory and analysis of FGMs are still in progress.

In this study, a rectangular FGM plate is considered. Through-the-thickness variation of the modulus of elasticity with respect to the mid-plane is analysed for three macro models, Symmetric Reddy, Anti-Symmetric Reddy, Symmetric Exponential and a micro model (Mori-Tanaka). Essentially, three different combinations of clamped and simply supported edge boundary conditions (SSSS, SSCS, CSCS) and three loading types, uniaxial compression, biaxial compression, biaxial compression-tension ($R=0$, $R=1$, $R=-1$) are studied. Initially, the governing equations and applicable boundary conditions are given for the plate. The buckling behaviour of a plate subjected to uniform in-plane loading is analysed for the case of being simply supported at all edges (SSSS) by employing Classical Plate Theory (CPT) and Third order Shear Deformation Plate Theory (TSDPT) regarding the Navier Method whereas, the cases of two opposite edges being simply supported while the other two edges taking any combination of simply supported and clamped conditions (SSSS, SSCS, CSCS) are analysed by employing Classical Plate Theory, Levy Method and State-space technique.

For all the cases forementioned, dimensionless critical buckling parameters are investigated with respect to different side-to-thickness ratios, aspect ratios for various types of FGM plates.

Keywords: Functionally graded material, rectangular plate, buckling, state space approach, Mori-Tanaka micromechanical method.

1. GİRİŞ

1.1 Konu ve Önemi

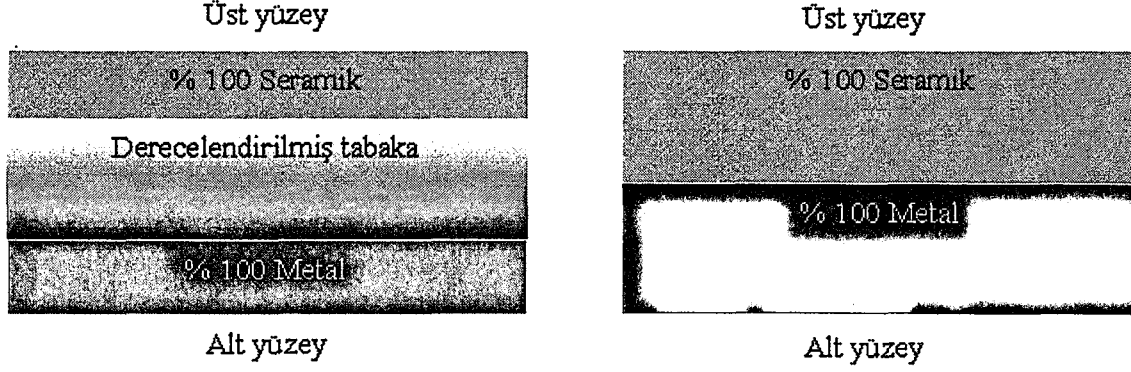
Malzemeler, tarihin başından bu yana uygarlıkların gelişiminde en önemli itici güçlerden biri olmuştur. İlk çağlarda kullanılan ağaç, tahta gibi doğal malzemelerin yerini sonraki dönemlerde bakır, bronz ve demir almıştır. On yedinci yüzyılın ortalarından sonra kullanılabilecek malzeme sayısında çok hızlı bir artış olmuştur ve günümüzde bir mühendisin elinde amacına hizmet edebilecek 40.000 ile 80.000 malzeme çeşidi bulunmaktadır. Polimerler, elastomerler, seramikler ve kompozitler gibi gelişmiş malzemeler günümüzde yeni üretim tekniklerinin de gelişmesi ile daha da hızlı bir şekilde gelişmektedirler. (Wojciechowski, 2000).

Özellikle havacılık ve uzay endüstrisinin gelişmesi ile birlikte çok yüksek sıcaklıklarda kullanılabilecek yüksek ısıl dayanıma sahip, hafif ve çok iyi mekanik özelliklere sahip malzemelere ihtiyaç duyulmaktadır. Genelde uzay araçlarının dış yüzeylerindeki sıcaklık yaklaşık 2100 °K'e ulaşır ve yüzeyler arasındaki sıcaklık 1600 °K civarındadır. Yüzey kaplama malzemesinin bu sıcaklığa dayanması gerekir. Böyle yüksek sıcaklıkların bulunduğu ortamlarda ani ve büyük sıcaklık değişimlerinin olması, takviye ve matris malzemelerinin ısıl genleşme katsayılarının farklılıklarından dolayı yapılarda keskin gerilme dağılımları oluşmasına sebep olur, ara yüzeylerde oluşan bu gerilme yığılmaları çatlak oluşumunun önde gelen sebeplerinden biridir (Koizumi, 1996). Bu şekilde özel mühendislik problemlerinde ortaya çıkan sakıncaların giderilmesi için yüksek sıcaklığın olduğu tarafta, ısıya dayanıklı seramiklerden, düşük sıcaklığın olduğu tarafta, yüksek ısıl iletkenliği özelliğine sahip metallerden oluşan ve seramikten metale doğru yumuşak bir derecelendirilmiş geçiş ile oluşturulan yeni bir kompozit malzemenin tasarlanması fikri 1984 yılında ısıl kalkan malzemesi üretimi hazırlıkları sırasında Dr. Niino ve arkadaşları tarafından ileri sürülmüştür.

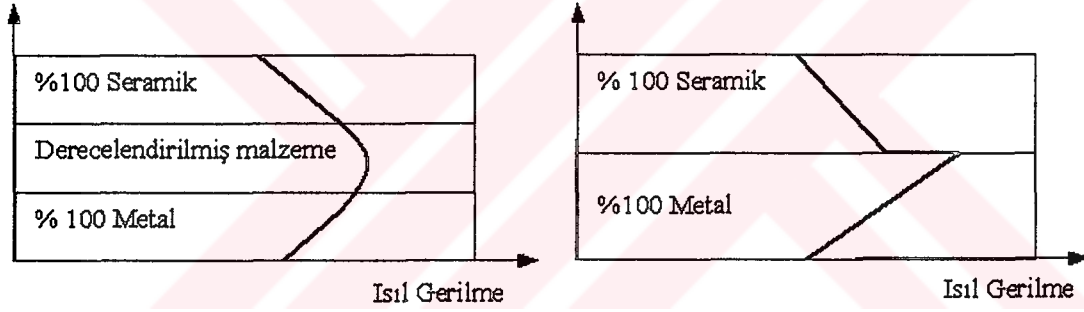
Derecelendirilmiş malzemelerin (Functionally Graded Material-FGM) üretilmesi için 1987 yılında Sendai/Japonya araştırma laboratuvarında "Isıl gerilmelerin azaltılması için derecelendirilmiş malzemelerin üretilmesi üzerine basit teknolojilerin geliştirilmesi" adı altında bir proje başlatılmış ve 1992 yılında bu çalışma bitirildiğinde 300x300 mm. kare kabuk ve 50 mm. çapında yarım küre şeklinde SiC-C Derecelendirilmiş malzemeden yapılmış numuneler elde edilmiştir (Cho, 2000).

Bu malzemelerin bileşen, mikro yapı ve bazı mekaniksel özelliklerinin yapı boyunca yumuşak

bir değişiminin tasarımcıya istenen mekanik ve ısı özellikte bir malzeme üretimi konusunda büyük yararlar sağladığı görülmüştür. Örnek olarak klasik tabakalı kompozitler ile derecelendirilmiş malzemeler arasında ısıl gerilme dağılımının karşılaştırılması Şekil 1.1 ve Şekil 1.2’de gösterilmiştir.



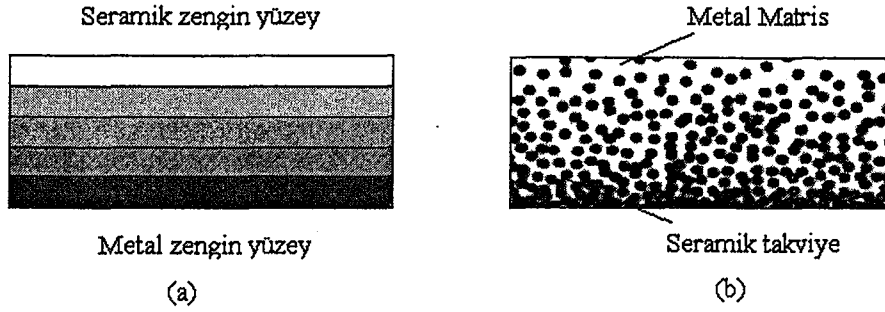
Şekil 1.1 Derecelendirilmiş malzeme ve tabakalı kompozit malzeme yapı örneği



Şekil 1.2 Derecelendirilmiş ve tabakalı kompozit malzeme için ısıl gerilme karakteristiği

Genellikle, Derecelendirilmiş malzemeler seramik ve metal karışımından yapılırlar. Derecelendirilmiş malzemenin yapıldığı seramik bileşen düşük ısıl iletkenlik katsayısına sahip olmasıyla çevre şartlarından oluşan yüksek sıcaklıklara daha iyi ısıl direnç oluştururken metal bileşen seramik bileşene göre daha sünek yapısı ile kuvvetli bir mekanik dayanım özelliği sağlamaktadır. Değişik oranlarda takviye malzemesi katılarak oluşturulan tabakaların birlikte sinterlenmesi ile elde edilen yapıda istenen derecelendirme şeklinin verilmesi daha kolaydır. (Şekil 1.3a) fakat bu tabakalı yapıda, ara yüzeylerdeki süreksizlik yüzünden istenmeyen ani sıcaklık değişimleri meydana gelebilir. Şekil 1.3b’de gösterilen yapı metal ve seramik karışımının döküm, metal emdirme gibi yöntemler kullanılarak oluşturulduğu yapıdır. İstenen derecelendirme şeklinin verilmesi daha zor olmasına rağmen, malzemenin

sürekli bir değişim göstermesi sayesinde gerilme dağılımları yumuşatılarak ara yüzey problemleri ortadan kaldırılmış olur (Bao, 1997).



Şekil 1.3 Derecelendirilmiş malzeme mikro yapıları a) tabakalı yapı b) inclusion/matris yapı

Malzeme özelliklerinin değişik uygulamalara ve çevre şartlarına uygun şekilde derecelendirilmiş olarak tasarlanarak üretilmesi Derecelendirilmiş malzemelerin en önemli tercih edilme nedenlerinden biridir. Bu malzemeler, birbirinden farklı mekanik özelliklere sahip iki ayrı malzemenin çapraz bir ara yüzey oluşturduğu elyaf takviyeli kompozit malzemelerden mikro yapılarının sürekli olarak ve yumuşak bir şekilde değişmeleri ile farklılık gösterirler.

Derecelendirilmiş malzemelerin asıl uygulamaları yüksek sıcaklıklara sahip ortamlar içindir fakat bu malzemeler aynı zamanda değişik mekaniksel özelliklere sahip malzemelerin geliştirilmesi için de kullanılmaya başlanmıştır. Derecelendirilmiş malzemeler otomotiv alanında, motor pistonları kaplamalarında, elektronik ve bilgisayar alanı ile ilgili olarak manyetik depolama birimlerinde, nano ve mikro elektro mekanik sistemlerde, tıp alanında kalça ve diz gibi eklemli protezlerde, ayrıca savunma sanayinde zırh yapımı gibi yerlerde kullanılarak hafiflik dayanıklılık gibi çok avantajlı tasarımların yapılabilmesine imkan sağlamaktadırlar (Suresh, 2001).

Genel olarak kompozit malzemeler, uzay ve havacılık endüstrisi (uçak mekik yapımında), kara ve deniz taşımacılığında (gemi yapımında), petrol ve petrokimya alanında (basınçlı kaplar, boru hatları), spor malzemeleri ve tıp alanında çok geniş bir kullanım alanına sahiptirler. Yukarıda bahsedilen alanlarda kompozit malzemeler genellikle kiriş, kabuk veya plak yapı elemanı olarak kullanılırlar. Bu yapı elemanlarının farklı yüklemeler altında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, tasarımın güvenliği açısından çok önemlidir.

Plaklar, birbirine paralel iki düz yüzey (dikdörtgensel plaklarda en ve boy, dairesel plaklarda

çap) ve bu yüzeylere dik bir yan yüzeyden (plağın kalınlığı) oluşan katı cisimlerdir ve plak kalınlığının diğer plak boyutlarına oranı $1/100$ mertebesinde ise ince plaklar olarak adlandırılır ve ince plakların analizi, düzlem gerilme kabulü ile, iki-boyutlu teoriler temelinde yapılabilmektedir (Reddy, 1984).

Çalışma şartlarına bağlı olarak plaktaki kenar kuvvetleri tek eksenli basınç, iki eksenli basınç veya iki eksenli yükleme durumunda bir yönde basınç diğer yönde çekme yüklemesi şeklinde olabilir ve bu kuvvetler belli bir değere eriştiği anda plağın dengesi stabil olmaktan çıkabilir. Bu düzlem denge konumunun yanı sıra ona sonsuz yakın fakat kubbeleşmiş en az bir denge konumunun daha mevcut olması halinde plağın dengesi farksız olur. Bu takdirde plak bu kritik yük değerleri ile kendi stabilite sınırlarına erişir. Kritik yüklemenin aşılması halinde ise düzlem plağın dengesi artık stabil değildir. Bu halde en küçük bir sarsıntı denge konumunu bozabilir ve plak sonlu yakın, kubbeleşmiş ve stabil bir denge konumuna erişir, yani burkulur. Bu olayın gerçekleştiği en küçük kuvvet değerine kritik burkulma yükü denir. Bu yükün bilinmesi tasarım açısından önemlidir.

Genellikle bir plak, kenar kuvvetlerin kritik değerleri aşması halinde, buna bir miktar daha dayanabilir. Buna benzer bir durum eksenel olarak yüklenmiş elastik bir burkulma çubuğunda da vardır. Fakat çubukta pratik olarak kuvvetin, stabilite sınırını ancak çok küçük bir miktar aşması mümkündür, çünkü en küçük kuvvet artımlarında eğilmeler ve ek eğilme gerilmeleri çok hızlı bir şekilde büyür. Plaklarda ise genellikle, taşıma yeteneğini tam olarak kaybetmeden önce, plak önemli bir miktar kuvvet artmasını karşılayabilir. Kritik üstü olan bu bölgenin uçak tasarımı gibi ince plakların çok kullanıldığı yerlerde pratik bir önemi vardır. Fakat yüksek yapı ve köprü inşaatlarında, plakların taşıma yeteneklerinin sınırı olarak stabilite sınırı göz önüne alınmalıdır (Tameroğlu, 1991).

1.2 Önceki Çalışmalar

İnce plaklar ve kabuklar için geliştirilen pek çok lineer ve non-lineer teori, Love-Kirchhoff teorisinin ilk yaklaşımına (deforme olmayan dik doğrultular) dayanmaktadır. Bu teori düşey yöndeki kayma deformasyonlarını dikkate almadığından çökme, burkulma yükü ve doğal frekansların tahmininde hatalara sebep olmaktadır. Plakların, iki boyutlu teoriler ile statik ve dinamik analizlerinin yapıldığı daha önceki çalışmalar ya klasik plak teorilerine (Classical Plate Theory-CPT) ya da kayma deformasyonlu plak teorilerine (Shear Deformation Plate Theory-SDPT) dayanmaktadır.

Klasik plak teorilerinin dayandığı varsayımlar;

- Plak incedir,
- Yer değiştirme ve dönmeler küçüktür,
- Geometrik olarak plağın ortasında bulunan referans düzlemine deformasyondan önce dik olan doğrular deformasyondan sonra dik kalırlar,
- Düşey normal birim şekil değiştirme ihmal edilebilir,

şeklindedir (Szilard, 1974).

Klasik Plak Teorisi'ni kullanarak Whitney ve Leissa, 1969 ve Jones, 1973, tüm kenarlarından basit desteklenmiş dik-katmanlı kompozit plakların burkulma ve titreşim problemini analitik olarak çözmüştür. Yine Whitney ve Leissa, 1970, basit desteklenmiş plakların eğilme, burkulma ve titreşim problemini Fourier serileri yöntemiyle çözmüştür. Dickinson ve Blasio, 1985, Baharlou ve Leissa, 1987, Leissa ve Narita, 1989, Narita ve Leissa, 1990, Qatu, 1991, Narita ve Leissa, 1992, Al-Obeid ve Cooper, 1995 kompozit plakların burkulma ve titreşim problemlerini değişik sınır koşullarında incelemişlerdir. Klasik Plak Teorisi ile elde edilen sonuçların deneysel sonuçlardan farklı olmalarından dolayı kayma deformasyonu etkilerinin de göz önüne alındığı yeni çalışmalar yapılmıştır. Yang vd, 1966 tarafından, düşey kayma birim şekil değiştirmelerini göz önüne almayan Klasik plak teorisindeki bu eksikliği ortadan kaldırmak amacıyla düşey kayma birim şekil değiştirmelerini plak kalınlığı boyunca sabit olarak kabul eden Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi (First order Shear Deformation Plate Theory-FSDPT) nerilmiştir. Whitney ve Pagano, 1970 kompozit plakların statik ve dinamik davranışlarını Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi çerçevesinde incelemişlerdir. Reddy, 1984, Phan ve Reddy, 1985, Reddy ve Phan, 1985, Reddy ve Khdeir, 1989 yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi kapsamında sonlu elemanlar ve Levy tipi çözüm yöntemlerini kullanarak kompozit plakların statik ve dinamik davranışlarını incelemişlerdir.

Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Plak teorisine göre düşey kayma birim şekil değiştirmeleri veya gerilmeleri her bir katman boyunca sabit olarak kabul edildiğinden, düşey kayma dayanımını ayarlamak için kayma düzeltme faktörlerinin kullanılması gerekmektedir. Bundan dolayı Birinci mertebe Kayma Deformasyon Teorisi'nin geçerli olduğu alan büyük ölçüde kayma düzeltme faktörünün doğruluğuna bağlıdır.

Düzlem içi yer değiştirmelerin kalınlık ile yüksek mertebeden değiştiği teoriler Reddy, 1984 ve Bhimaraddi ve Stevens, 1984 tarafından önerilmiştir. Reddy, 1984 düzlem içi yer

değiştirme bileşenlerini plak yüzeylerinde kayma gerilmelerinin sıfır olması şartını sağlayacak şekilde düşey koordinatın parabolik fonksiyonu olarak seçmiştir (Aydoğdu, 2003).

Homojen olmayan ortamlar ile ilgili olarak; 1960'lı yıllarda Gibson (1967) tarafından toprak yapısının homojen olmayan bir malzeme gibi modellendiği analitik çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra elastik özelliklerin çatlak yönünde üstel olarak değiştiği sonsuz bir düzlemdeki çatlak problemi Delale ve Erdoğan (1983) tarafından incelenmiştir (Anlaş vd., 2000). Yeni üretim teknolojilerinin kullanılması ile daha hassas ve ekonomik olarak üretilebilen bu malzemeler araştırmacıların son zamanlarda giderek daha da fazla ilgisini çekmektedir.

(Vel ve Batra, 2002a ; 2002b) Mekanik ve ısı yükleri altında basit destekli derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dikdörtgenel bir plaktaki üç boyutlu yer değiştirmeler, gerilmeler ve silindirik eğilme titreşimleri üzerinde çalışmıştır. Metal ve seramikten oluşan iki bileşenli kompozit plak malzemesinin analizinde bileşenlerin hacim oranlarının plak kalınlığı doğrultusunda bir güç serisi formunda değiştiğini kabul ederek bir noktadaki malzeme özelliklerinin etkili değerini Self-consistent ve Mori-Tanaka mikro mekanik yaklaşımları ile hesaplamış, mekanik ve ısı yüklemesi altında plağın değişik noktalarındaki gerilme ve yer değiştirmelerin bulunmasında Klasik Plak Teorisi, Birinci ve Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorilerini (Third order Shear Deformation Plate Theory-TSDPT) kullanmıştır.

(Cheng ve Batra, 2000a) Elastik zemine oturan derecelendirilmiş malzemeden yapılmış basit destekli, düzlem içi yükler etkisindeki dikdörtgenel plakların titreşim ve burkulmasını, plak malzemesinin Elastisite modülü ve Poisson oranının plak kalınlığı boyunca değiştiğini kabul ederek Reddy'nin Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon teorisini kullanarak incelemiştir.

(Reddy ve Cheng, 2001) Basit destekli derecelendirilmiş malzemeden yapılmış ısı ve mekanik yükler etkisi altındaki dikdörtgenel bir plakta oluşan yer değiştirme ve gerilmeleri asimptotik yaklaşım ile incelemiştir. Etkin malzeme özelliklerinin hesaplanmasında Mori-Tanaka mikro model yaklaşımını kullanmıştır. Değişik hacim oranlarına karşılık elde ettiği sonuçları iki boyutlu plak teorileri sonuçları ile karşılaştırmıştır.

(Liew ve Yang, 2003) Piezoelektrik derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, düzlem içi yüklemesi etkisi altında dikdörtgenel bir plağın değişik elektriksel gerilim etkileri altında burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi ile incelemiştir.

(Almajid vd., 2001) Tabakalı piezoelektrik plakların düzlem dışı yer değiştirmelerinin ve

oluşan gerilmelerin hesaplanmasında Klasik Laminasyon Teorisi (Classical Lamination Theory–CLT) Theory kullanmıştır. Derecelendirilmiş plak malzemesine ait elektro elastik özelliklerin plak kalınlığı yönünde değiştiği kabul edilerek en az gerilme değerine karşılık elde edilebilecek en fazla düzlem dışı deplasmanı sağlayan piezoelektrik özellik değişim şekillerini incelemiştir.

(Yang ve Shen, 2003a) Yarı analitik yaklaşım kullanarak plak düzlemine dik ve düzlem içi yükler etkisi altında, karşı iki kenarı ankastre diğer kenarları basit veya ankastre olmak üzere değişik şekillerde desteklenmiş, elastik zemine oturan derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plağın büyük yer değiştirmeleri ve burkulma sonrası davranışlarını incelemiştir.

(Reddy, 2000) Derecelendirilmiş malzemedan yapılmış bütün kenarlarından basit destekli dikdörtgensel bir plağın malzeme özelliklerinin plak kalınlığı boyunca bir güç serisi şekline uyacak şekilde değiştiğini kabul ederek, ısı ve mekanik yükleme etkisi altında oluşan yer değiştirme ve gerilmeleri derecelendirme oranı ve şeklini göz önüne alarak Birinci ve Üçüncü Kayma Deformasyon Teorileri ile incelemiştir.

(Javaheri ve Eslami, 2002a ; 2002b) Isıl yükler etkisindeki derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plak için Klasik Plak Teorisi ve Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi kullanarak kritik burkulma yükleri ile kritik burkulma sıcaklığı arasındaki ilişkileri derecelendirme katsayısı ve plak geometrisini dikkate alarak incelemişlerdir.

(Javaheri ve Eslami, 2002c) Düzlem içi yükler etkisinde kenarlarından basit destekli derecelendirilmiş malzemedan yapılmış dikdörtgensel bir plağın kritik burkulma parametresinin değişik kenar/kalınlık oranları ve derecelendirme katsayısına bağlı değişimini Klasik Plak Teorisi kullanarak incelemiştir.

1.3 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Klasik metal ve alaşımları, özellikle uzay ve havacılık teknolojisinin ihtiyaç duyduğu daha yüksek mekanik, ısı, elektriksel özelliklere sahip malzeme ihtiyacını istenen ölçüde karşılayamamışlar ve bunun sonucunda yapılan araştırmalar ve geliştirilen yeni malzeme üretim tekniklerinin yardımıyla bileşenlerinin oranları ve dağılım şekilleri kullanım amacına göre belirlenebilen Derecelendirilmiş malzemelerin üretimi mümkün olmuştur. Literatür araştırmalarından bu tür malzemeler ile ilgili yapılan çalışmaların çok büyük bir kısmının malzeme üretimi ile ilgili olduğu ve burkulma analizi ile ilgili çalışmaların daha az sayıda kaldığı görülmüştür.

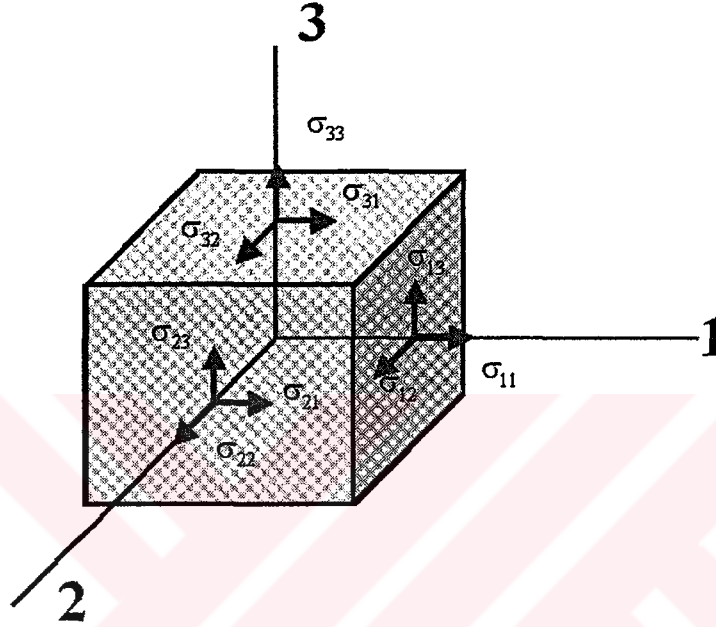
Bu çalışmada, sadece plak kalınlığı (z) yönünde ve plak orta eksenine göre simetrik, anti simetrik değişik makro ve mikro yaklaşımlara sahip olduğu kabul edilen derecelendirilmiş lineer izotrop malzemeden yapılmış dikdörtgensel geometriye sahip plaklar göz önüne alınmıştır. Düzlemsel yükler etkisinde ve çeşitli destekleme durumlarında boyutsuz kritik burkulma katsayıları hesaplanarak, bu katsayıların plak kenar/kenar oranları ve derecelendirmeyi oluşturan parametrelere göre değişimleri ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu incelemeler düşey kayma deformasyonlarını dikkate almayan Klasik Plak Teorisi ve özellikle kalın plaklarda etkili olan düşey kayma deformasyonlarını dikkate alan Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorileri kullanılarak yapılmıştır.

Bu amaçla çalışmanın bundan sonra gelen 2. Bölümünde; gerilme birim şekil değiştirme arasındaki bağıntılar verildikten sonra, derecelendirilmiş malzemeden yapılmış plakta malzeme özellikleri değişiminin sadece z yönünde olduğu kabul edilerek plağın orta eksenine göre simetrik ve anti simetrik olmak üzere değişik makro ve mikro yaklaşımlara göre değişimleri verilmiştir. Daha sonra Klasik Plak Teorisi ve Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorileri ile plağın burkulma davranışını yöneten denklemler ve sınır şartlarının ifadeleri verilmiştir. 3. Bölümde, kenarlarından basit destekli, değişik makro ve mikro yaklaşımlar kullanılarak derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dikdörtgensel bir plak ele alınarak farklı düzlem içi yüklemeler altında plağın burkulma davranışı klasik plak teorisi ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi çerçevesinde Navier tipi yöntem ile incelemiştir. 4. Bölümde; değişik sınır şartlarına sahip derecelendirilmiş plağın burkulma davranışının incelenmesi Klasik Plak Teorisi ile Levy Yöntemi ve Durum–Uzay (State–Space) yaklaşımı kullanılarak yapılmıştır. Son olarak 5. Bölümde, elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

2. TEMEL DENKLEMLER VE VARSAYIMLAR

2.1 Gerilme Birim Şekil Değiştirme Bağınıtları

Bu çalışmada plakların burkulma davranışları inceleneceğinden ilk önce mekanik özellikler göz önüne alınacaktır. Bu amaçla genel durumda elastik bir cisimde gerilme birim şekil değiştirme bağıntılarının verilmesi gerekir.



Şekil 2.1 Diferansiyel küçük bir hacim elemanında gerilme bileşenleri

Elastik sınırlar içinde homojen ve izotrop bir cisimde bir noktadaki üç-boyutlu en genel gerilme durumu, Şekil 2.1’de gösterildiği gibi 9 gerilme bileşeni σ_{ij} ($i,j=1,2,3$) ile verilir. Burada σ_{ij} , $i=j$ olduğunda normal gerilmeye, $i \neq j$ ise kayma gerilmesine karşılık gelir. Her bir gerilme bileşenine karşılık bir birim şekil değiştirme bileşeni mevcuttur ve ϵ_{ij} birim şekil değiştirme tansörü ile gösterilir.

Bir malzemenin özellikleri, malzemenin her noktasında aynı ise homojen, konumun bir fonksiyonu olması durumunda ise heterojen olarak adlandırılır. Anizotropi, malzeme özelliklerinin doğrultuya bağlı olmasıdır. İzotropik malzemelerde bütün doğrultulardaki noktalarda malzeme özellikleri aynı değerlere sahiptir. İzotropik ve anizotropik malzemeler homojen veya homojen olmayan malzeme özelliklerine sahip olabilirler. En genel durumda elastik bir cisimde bir noktadaki gerilmeler ile 9 birim şekil değiştirme bileşeni arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33}) \quad (2.1)$$

burada f_{ij} fonksiyonu non-linear olabilir. Lineer elastik en genel anizotropik durum için Denklem (2.1) bağıntısı aşağıdaki gibi verilen genelleştirilmiş Hooke yasasına dönüşür.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

bu eşitlikteki $[C]$ matrisi (9×9) katılık matrisi adını alır. Elastik sabitlerdeki ilk iki alt indis gerilmeyi, son iki alt indis birim şekil değiştirmeyi ifade etmektedir. 81 olan elastik sabitlerin sayısı bir takım simetri koşullarının kullanılması ile birlikte azalır.

Elastik sabitlerin sayısı gerilme ve birim şekil değiştirmelerin simetrik olması sebebiyle $(\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji})$ sırasıyla önce 54'e sonrada 36'ya düşer. Bu durumda sıkıştırılmış sisteme göre

Gerilmeler,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2 \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Birim şekil değiştirmeler

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_1 \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_2 \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_3 \\ 2\epsilon_{23} &= 2\epsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \epsilon_4 \\ 2\epsilon_{13} &= 2\epsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \epsilon_5 \\ 2\epsilon_{12} &= 2\epsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \epsilon_6 \end{aligned} \quad (2.4)$$

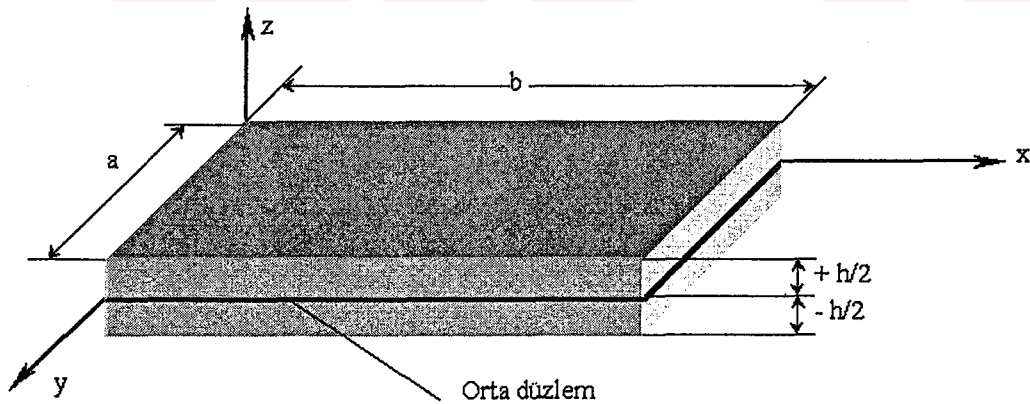
şeklinde gösterilebilir.

Elastik sabitlerin sayısı birim şekil değiştirme enerjisi yoğunluk fonksiyonunun kullanılmasıyla 21'e düşer (Gibson, 1994).

Katılık matrisinin bundan sonra yapılabilecek basitleştirilmesi ancak malzemenin kendisinin bir takım simetri düzlemlerine sahip olması ile mümkündür. Gerilme ve birim şekil değiştirme bileşenleri, koordinat sistemlerinin seçimi ile değiştiğinden katılık matrisinin elemanları da seçilen koordinat takımı ile değişir. Bazı durumlarda C_{ij} katsayıları, verilen bir koordinat dönüşümünde göz önüne alınan ortamın simetrisine bağlı olarak invariant (değişmez) kalabilir. Eğer bir noktadaki elastik sabitler, belirli bir düzleme göre, birbirlerinin tamamen aynadaki yansımaları şeklinde olan iki koordinat takımı için eşitse, bu düzleme bu noktanın elastik simetri düzlemi adı verilir. Eğer referans düzlemden eşit uzaklıktaki malzeme özellikleri aynı değerlere sahipse oluşan yapı simetrik plak, farklı değerlere sahipse anti simetrik plak adını alır (Reddy, 1984).

2.2 Derecelendirilmiş Malzeme Elastisite Modüllerinin Plak Kalınlığı Boyunca Başlıca Değişim Şekilleri

En, boy ve toplam kalınlığı sırasıyla a , b ve h olan kalınlık boyunca malzeme özellikleri değişen derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plağın geometrisi ve koordinat sistemi Şekil 2.2 de gösterilmiştir.

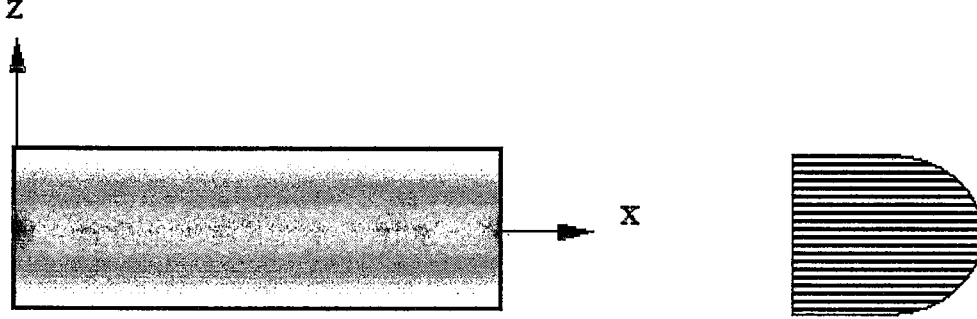


Şekil 2.2 Derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plağın geometrisi

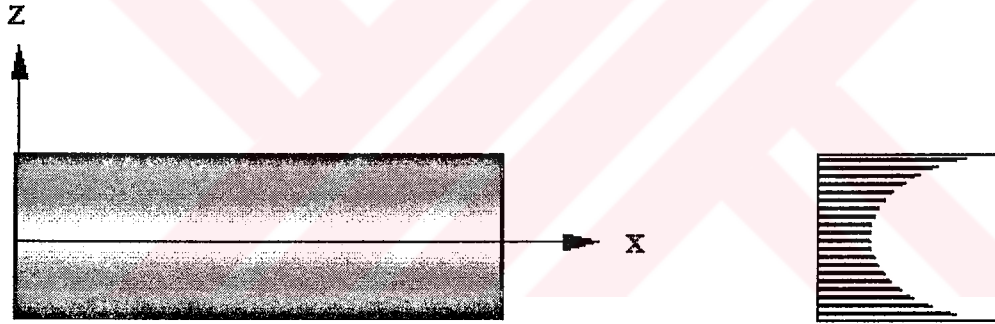
Derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plakta malzeme özellikleri değişiminin sadece z yönünde olduğu kabul edilmiştir ve bu değişimlerin plağın orta eksenine göre simetrik ve anti simetrik olmak üzere değişik tarzlara göre değişimleri incelenmiştir.

2.2.1 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri

Derecelendirilmiş malzemeden yapılmış plağın malzeme özelliklerinin plak kalınlığı boyunca orta eksene göre simetrik değişimleri Şekil 2.3 ve Şekil 2.4'te gösterilmiştir. Örneğin Tip A şeklindeki değişimde plak orta ekseninde ($z = 0$) seramik yoğun, dış yüzeylerinde ($z = \pm h/2$) metal yoğundur



Şekil 2.3 Derecelendirilmiş plağın elastisite modülünün simetrik olarak değişimi (Tip A)



Şekil 2.4 Derecelendirilmiş plağın elastisite modülünün simetrik olarak değişimi (Tip B)

2.2.1.1 Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi

Plak malzemesinin bileşimi bir yüzeyden diğer yüzeye orta eksene göre simetrik olarak değişmektedir ve hacim oranlarının değişimi

$$V = \left(\frac{2z}{h} + 1 \right)^k \quad (2.5)$$

şeklinde değişmektedir. Burada z kalınlık koordinatı ($-h/2 \leq z \leq h/2$) ve k malzemenin derecelendirme oranını belirleyen üstel bir katsayıdır. Plak malzemesinin elastisite modülünün (E) kalınlık boyunca z doğrultusunda değiştiği ve Poisson oranının sabit kaldığı

kabul edilmiştir. Derecelendirilmiş malzemeden yapılmış plağın elastisite modülünün değişimi

$$E(z) = E_{orta} \left(\frac{2z}{h} + 1 \right)^k \quad (2.6)$$

şeklinde verilmiştir. Bu denklemde

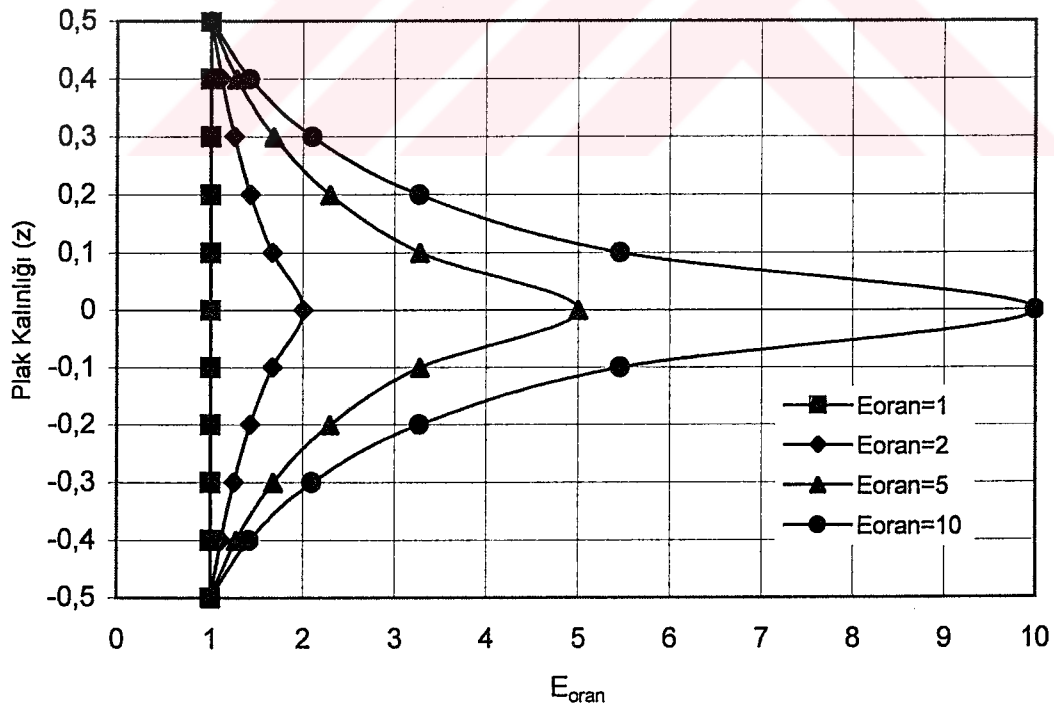
E_{orta} : Plağın ($z = 0$) orta eksenindeki elastisite modülü

E_{kenar} : Plağın ($z = \pm h/2$) mesafelerindeki elastisite modülü

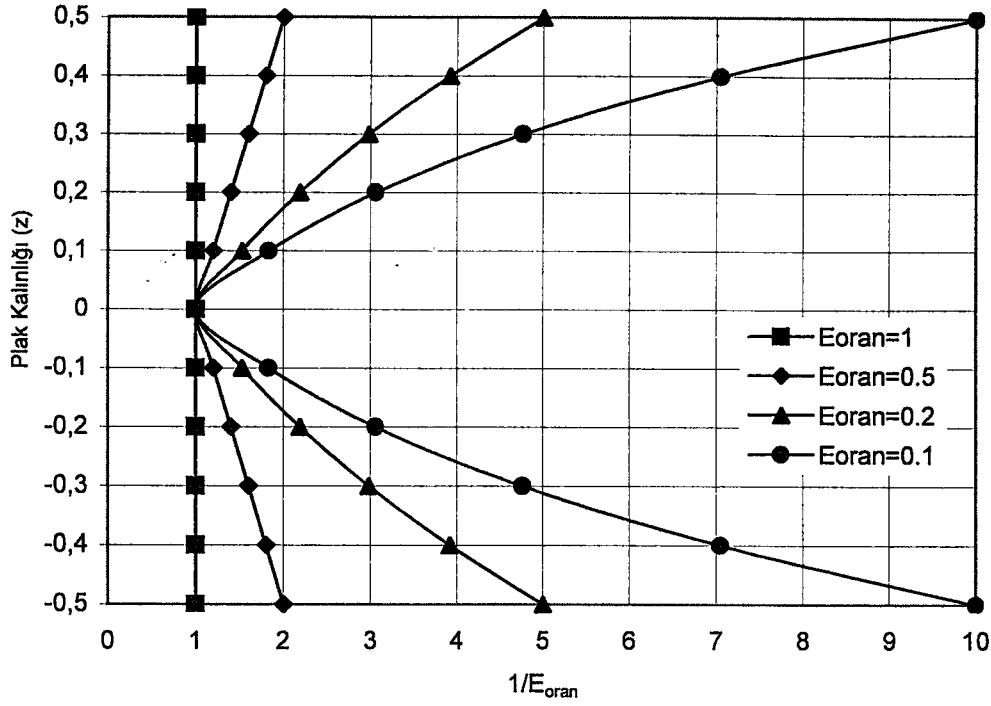
olmak üzere

$$E_{oran} = \frac{E_{orta}}{E_{kenar}} = \frac{E_{(0)}}{E_{(h/2)}} \quad (2.7)$$

olarak gösterilmiştir. Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da derecelendirilmiş plak malzemesinin elastisite modülünün kalınlık boyunca simetrik Reddy tarzına göre değişimleri gösterilmiştir. $E_{oran}=1$ ve $k=0$ değeri homojen plağı göstermektedir.



Şekil 2.5 Plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişimi (Tip A)



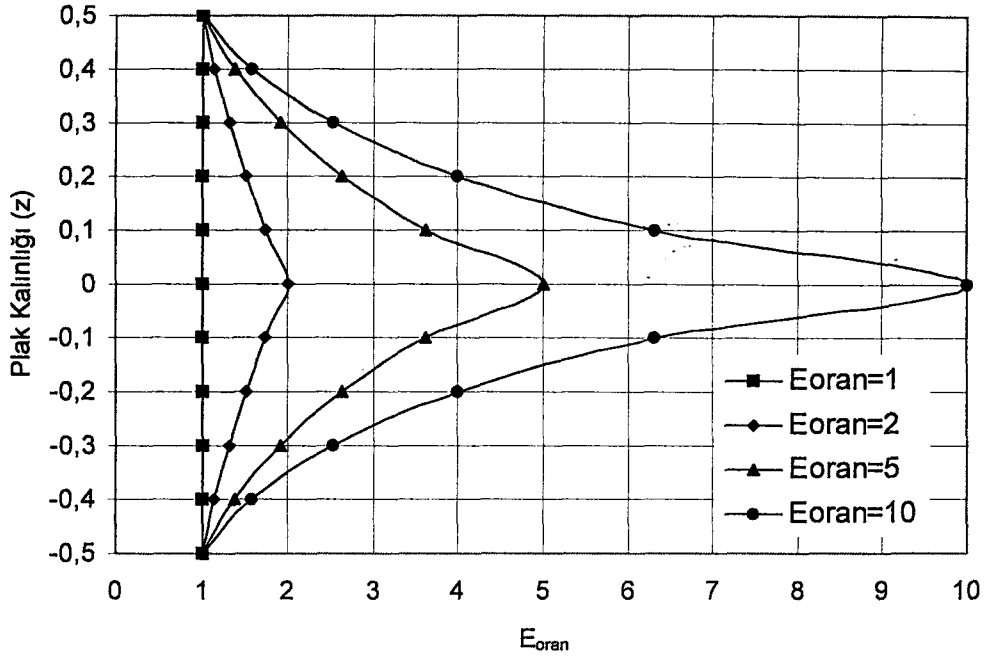
Şekil 2.6 Plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişimi (Tip B)

2.2.1.2 Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişme Hali

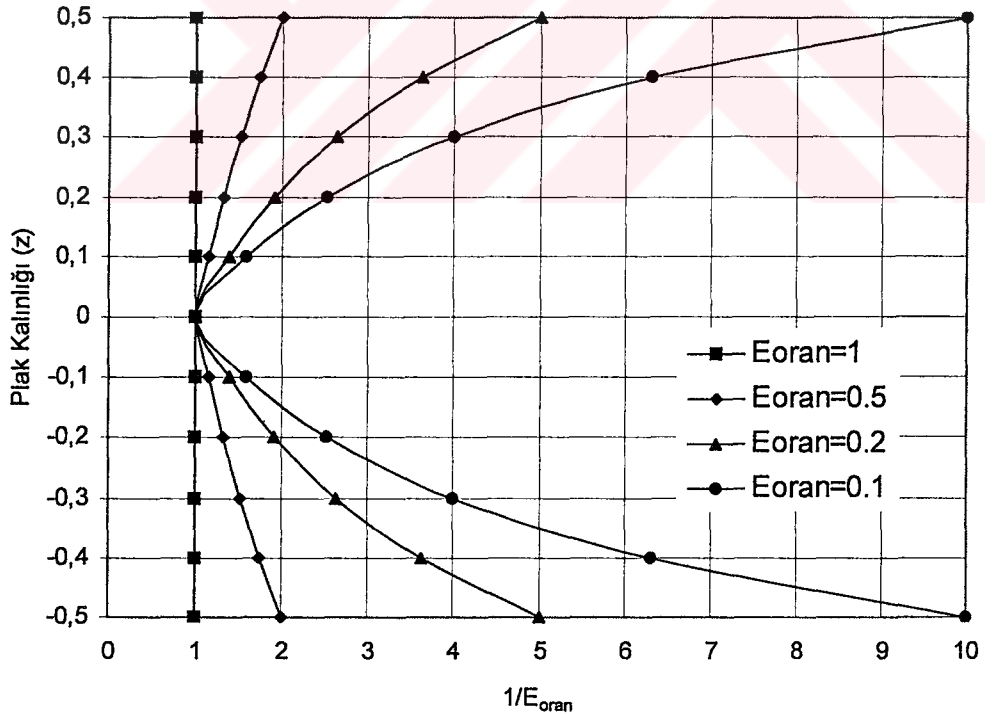
Derecelendirilmiş malzemelerdeki özelliklerin değişimini ifade etmek için kullanılan yaklaşımlardan bir tanesi de üstel olarak değişim yaklaşımıdır. Bu yaklaşımda malzemenin elastik özelliklerinin $c_{ij} = (c_{ij})^0 \cdot e^{\lambda z}$ biçiminde değiştiği kabul edilmektedir. Bir çok araştırmacı elastisite problemlerini incelerken bu biçimi kullanmışlardır. Örneğin, Delale ve Erdoğan (1983) homojen olmayan çatlaklı cisimlerdeki çatlak tipleriyle gerilme alanlarını incelerken sabit bir Poisson oranı için kayma modülünün (μ) değişimini $\mu = \mu_0 \cdot e^{(\alpha x)}$ biçimiyle vermiştir.

Zhong ve Shang (2003) piezoelektrik derecelendirilmiş malzemedan yapılmış kenarlarından basit desteklenmiş plakta mekanik ve elektriksel özelliklerin değişimini kalınlık boyunca üstel bir fonksiyona uyacak şekilde kabul etmiştir. Derecelendirilmiş plak malzemesinin elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik üstel olarak değişimleri Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'de gösterilmiştir.

$$E(z) = E_{\text{orta}} \left(e^{k \left(\frac{2z}{h} \right)} \right) \quad (2.8)$$



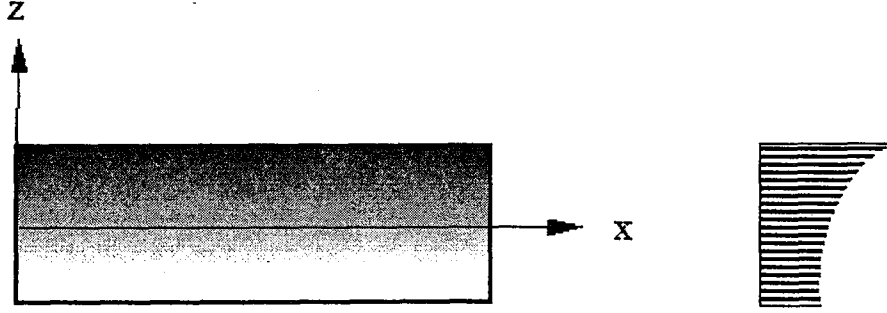
Şekil 2.7 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Üstel değişimi (Tip A)



Şekil 2.8 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Üstel değişimi (Tip B)

2.2.2 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri

Derecelendirilmiş malzeme bileşimi Şekil 2.9'da gösterildiği gibi plak kalınlığı boyunca bir yüzeyden diğer yüzeye doğru orta eksene göre anti simetrik olacak şekilde sürekli olarak değişmektedir, örneğin $z = +h/2$ üst yüzeyinde plak seramik yoğun, $z = -h/2$ alt yüzeyinde ise metal yoğundur.



Şekil 2.9 Plak elastisite modülünün kalınlık boyunca anti simetrik değişimi

2.2.2.1 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişimi

Derecelendirilmiş plak malzeme özellikleri plak orta düzlemine göre anti simetrik olarak

$$P(z) = (P_u - P_a)V + P_a \quad (2.9)$$

şeklinde değişmektedir. Burada, $P(z)$ modüller gibi malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca değişimini, P_u ve P_a sırasıyla plağın üst ve alt yüzeyindeki malzeme özelliklerini göstermektedir. V hacim oranının değişimidir ve

$$V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (2.10)$$

olarak tanımlanmıştır. k sıfırdan büyük veya eşit değerler alabilen üstel bir katsayıdır. Plak malzemesine ait Poisson oranının sabit kaldığı kabul edilmiştir. Denklem 2.9 ve Denklem 2.10'dan yararlanarak derecelendirilmiş malzemedan yapılmış plağın elastisite modülünün değişimi

$$E_{cm} = E_c - E_m \quad (2.11)$$

olmak üzere

$$E(z) = E_{cm} V + E_m \quad (2.12)$$

olarak verilmiştir. Bu denklemlerde

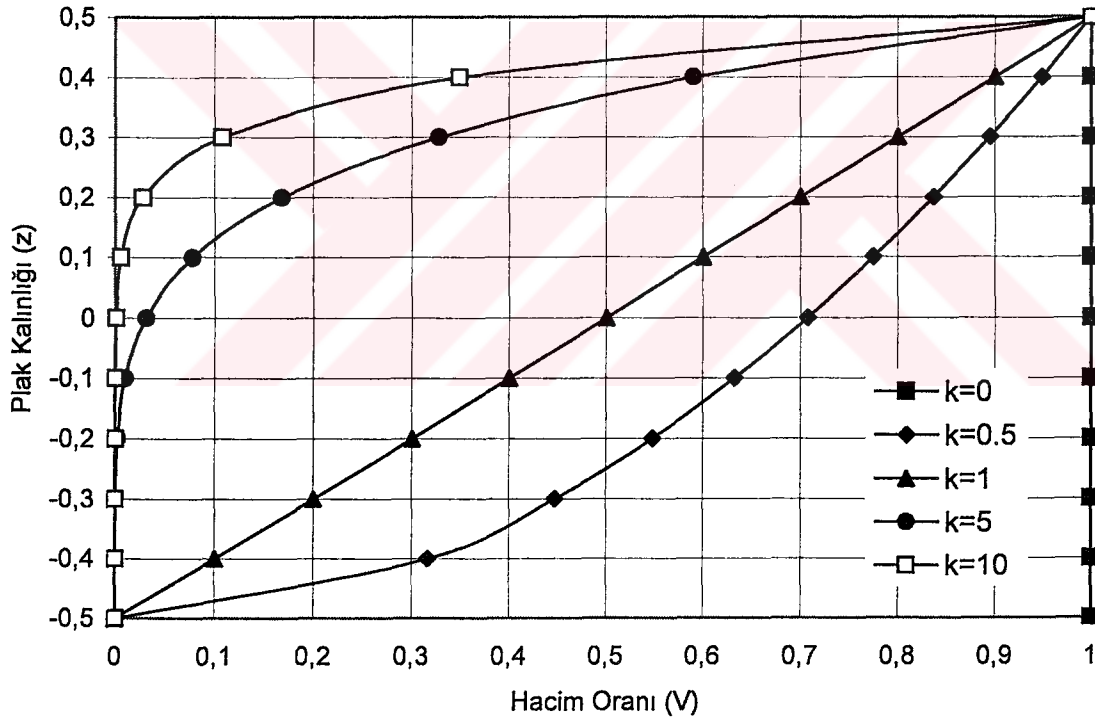
E_c = Seramik bileşenin Elastisite modülü

E_m = Metal bileşenin Elastisite modülü

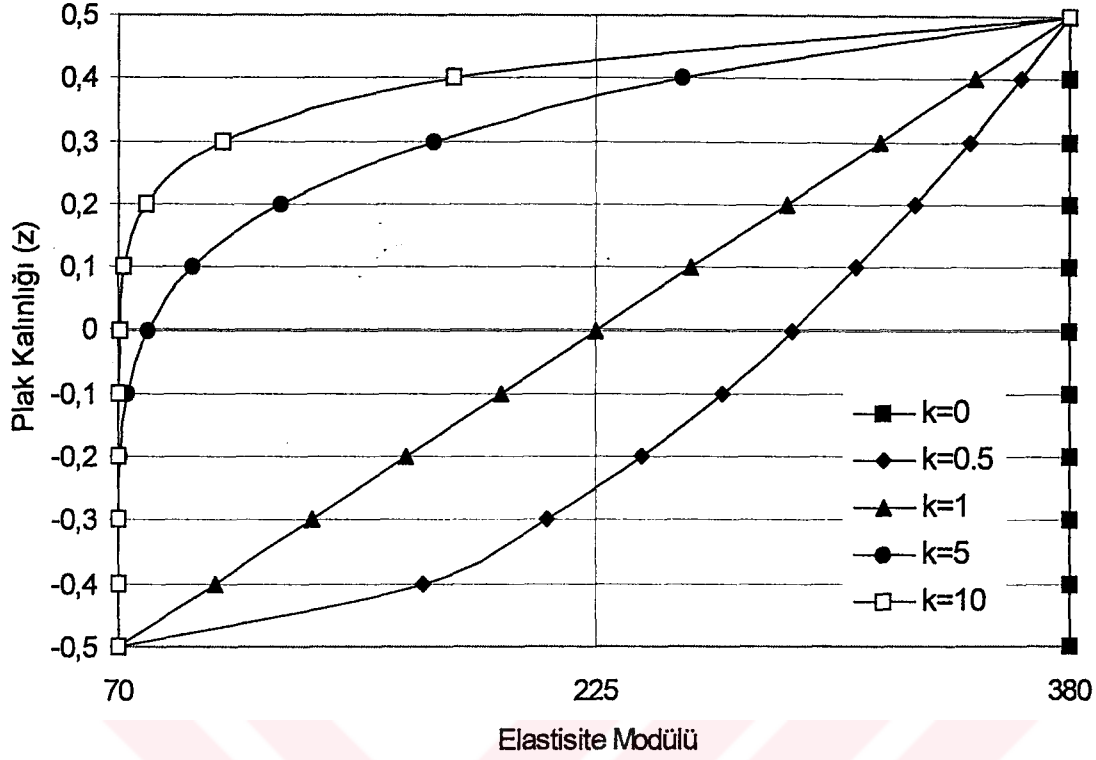
z = kalınlık koordinatı olmak üzere $(-h/2 \leq z \leq h/2)$

şeklinde tanımlanmıştır.

$k=1$ değeri için seramik ve metal kompozisyonunun değişimi doğrusaldır. $k=0$ değeri plağın tamamen seramikten yapıldığını göstermektedir. (m) ve (c) alt indisleri sırası ile metal ve seramik bileşenleri göstermektedir. Plak kalınlığı boyunca hacim oranının ve elastisite modülünün anti simetrik Reddy tarzına göre değişimi Şekil 2.10 ve Şekil 2.11’de gösterilmiştir.



Şekil 2.10 Derecelendirilmiş plağın, Anti Simetrik Reddy tarzına göre hacim oranının k değerleri ile değişimleri



Şekil 2.11 Derecelendirilmiş plağın elastisite modülünün, Anti Simetrik Reddy tarzına göre k değerleri ile değişimleri

2.2.2.2 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişimi

Mikro mekanik analiz, kompozit malzemeleri oluşturan bileşenlerin bilinen özelliklerini ve bu bileşenlerin birbirleri ile etkileşim özelliklerini kullanarak malzemenin tamamının davranışı hakkında fikir edinmemize yardımcı olur. Ayrıca mikro mekanik yaklaşımlar yardımıyla homojen olmayan bir kompozit malzeme yapısı, anizotropik özellikleri belirlenebilen homojen bir yapı şeklinde modellenebilir.

Elastik matris yapısını güçlendirmek amacı ile küresel takviye bileşenlerinin malzeme içinde tesadüfi bir şekilde dağıldığı kompozit malzemelerde, etkili modüllerin hesaplanabilmesi için Voigt modeli, Reuss modeli, Hills modeli, Self-consistent modeli, diferansiyel model gibi bir çok mikro model yaklaşımı geliştirilmiştir. Mori-Tanaka modeli de bu yaklaşımlardan biridir ve bu teoride; elastik küresel takviye parçacıkların elastik matris malzemesi içinde izotropik olarak bulunduğu kabul edilmektedir (Aboudi, 1991; Gasik, 1998).

Genellikle takviye malzemesi olarak kullanılan küresel seramik parçacıkların boyutları, şekilleri ve yapıdaki dağılımları hakkında çok hassas bir bilgiye sahip olunmadığından etkili

elastisite modülünün hesaplanmasında takviye bileşenine ait hacim oranı dağılımından yararlanan, çoğunlukla sürekli matris malzemesinin içinde süreksiz takviye malzemesinin olduğu yapılar için kullanılabilen Mori–Tanaka mikro mekanik modeli kullanılmıştır. Ayrıca plak malzemesine ait Poisson oranının takviye bileşenine ait hacim oranı dağılımına bağlı olarak kalınlık boyunca değiştiği de kabul edilmiştir. (m) ve (c) alt indisleri sırası ile mikro yapının metal ve seramik bileşenlerini göstermektedir.

E_m = Metal Bileşenin Elastisite modülü,

E_c = Seramik Bileşenin Elastisite modülü,

ν_m = Metal Bileşenin Poisson oranı,

ν_c = Seramik Bileşenin Poisson oranı,

K_m = Metal Bileşenin Bulk modülü,

K_c = Seramik Bileşenin Bulk modülü,

G_m = Metal Bileşenin Kayma modülü,

G_c = Seramik Bileşenin Kayma modülü

V_c = Seramik bileşenin hacim oranı

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (2.13)$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (2.14)$$

$$\nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \cdot V_c + \nu_m \quad (2.15)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (2.16)$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad (2.17)$$

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} \quad (2.18)$$

$$K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)} \quad (2.19)$$

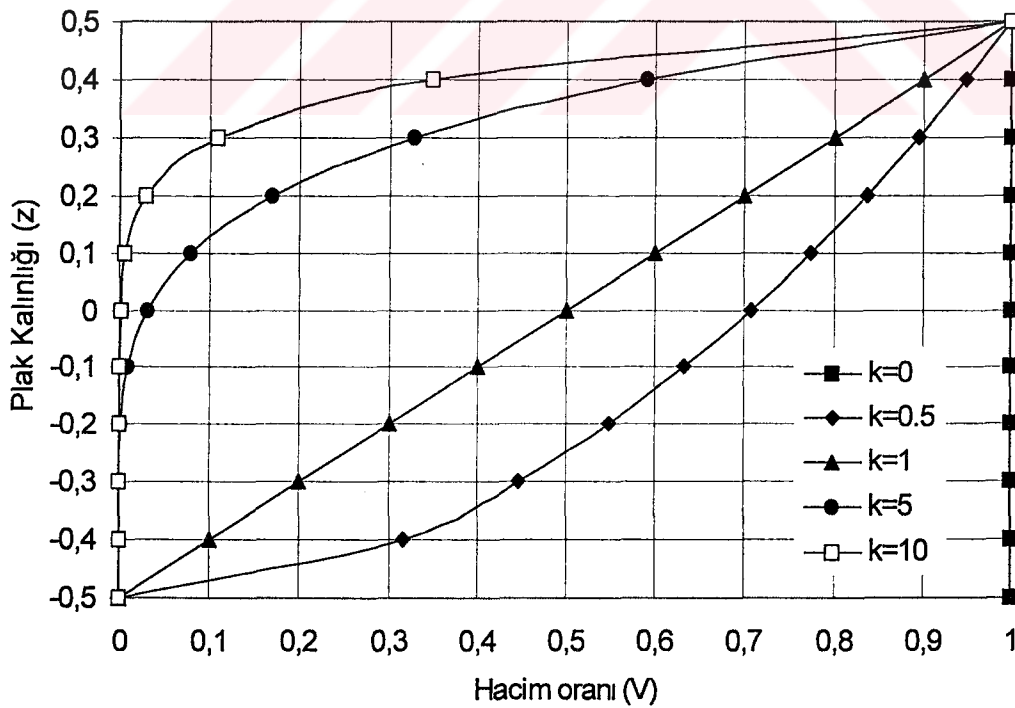
$$f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (2.20)$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{G_c - G_m}{G_m + f_m}} \quad (2.21)$$

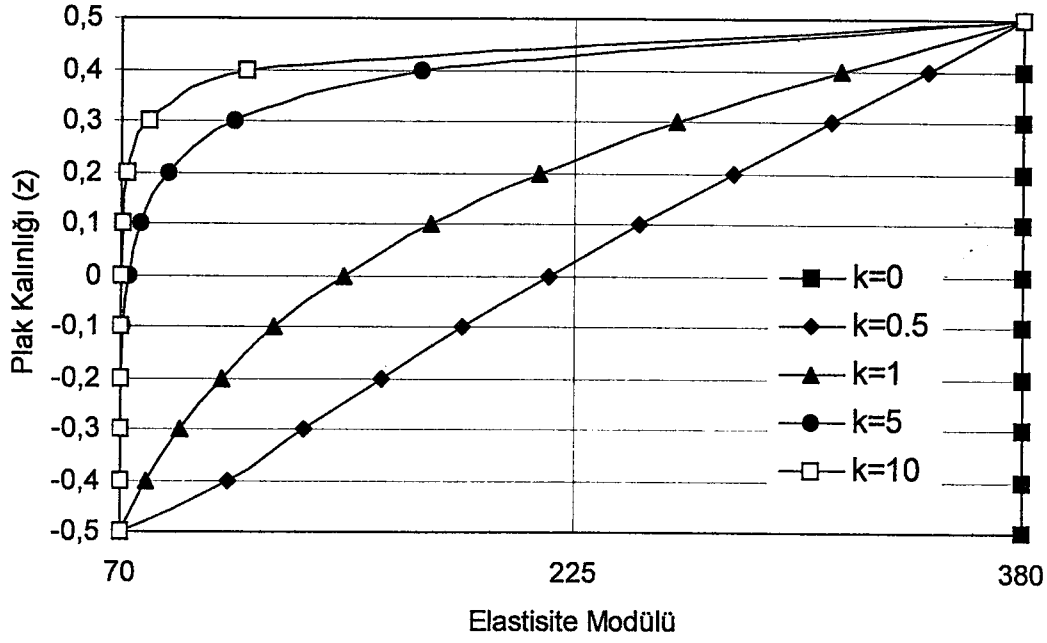
İzotropik matris malzemesinin içinde izotropik takviye parçacıkların dağıldığı bir kompozit malzemenin etkili Bulk modülü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Reiter vd., 1997; Vel ve Batra, 2002a, 2002b).

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{G_c - G_m}{K_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (2.22)$$

Şekil 2.12 ve Şekil 2.13'te Mori-Tanaka mikro model yaklaşımına göre hacim oranı ve elastisite modülünün değişik derecelendirme katsayılarına göre değişimi gösterilmiştir.

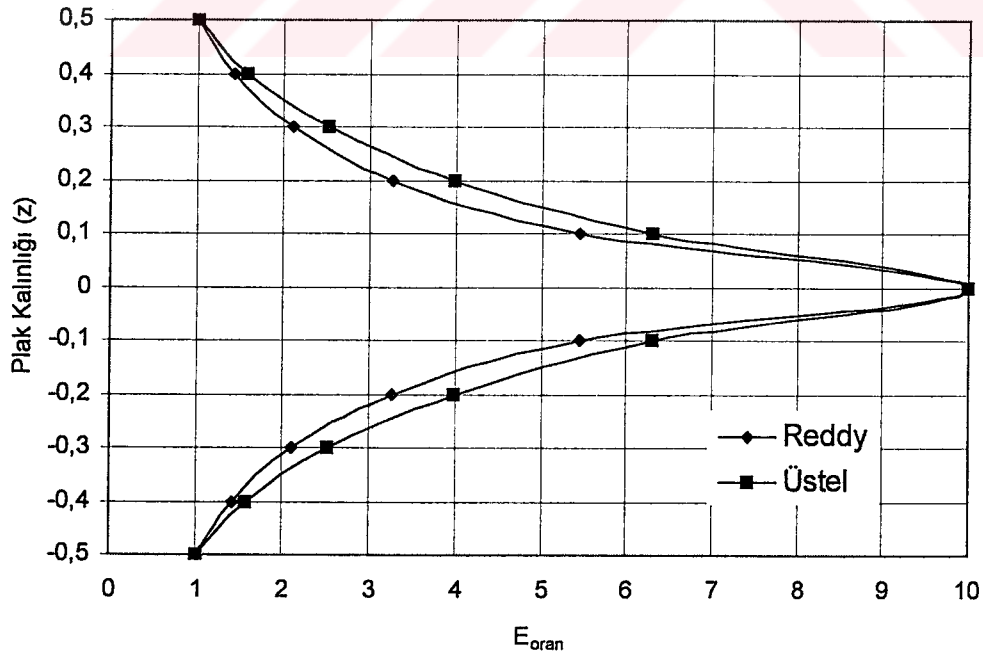


Şekil 2.12 Derecelendirilmiş plağın, hacim oranının Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre k değerleri ile değişimleri

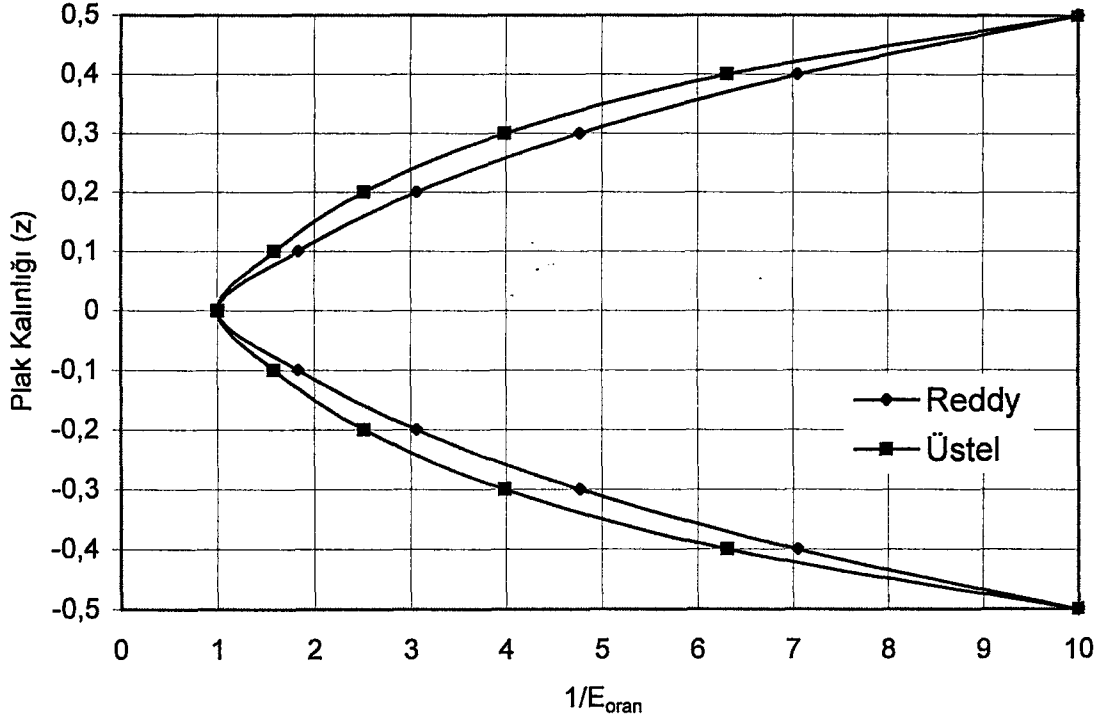


Şekil 2.13 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre k değerleri ile değişimleri

Şekil 2.14 ve Şekil 2.15'te derecelendirilmiş plak malzemesi elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy tarzı ve simetrik üstel olarak değişimi gösterilmiştir.

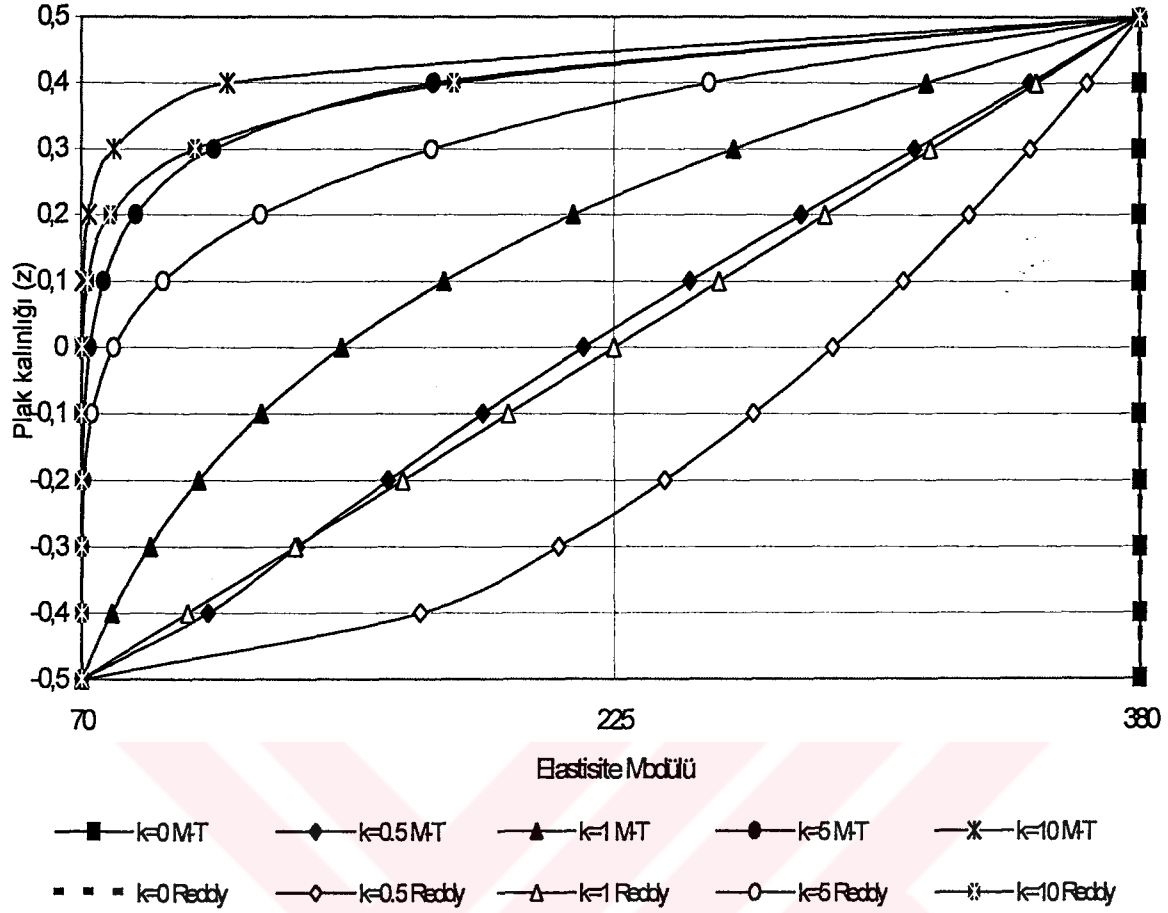


Şekil 2.14 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında ve Üstel değişimi (Tip A, $E_{oran}=10$)



Şekil 2.15 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında ve üstel değişimi (Tip B, $E_{oran}=0.1$)

Şekil 2.16'da derecelendirilmiş plak malzemesi elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori-Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimi gösterilmiştir. Her iki model için de $k=0$ plağın tamamen seramikten yapıldığını göstermektedir. k derecelendirme katsayısının artması ile birlikte malzemedeki seramik miktarı azalmaktadır.

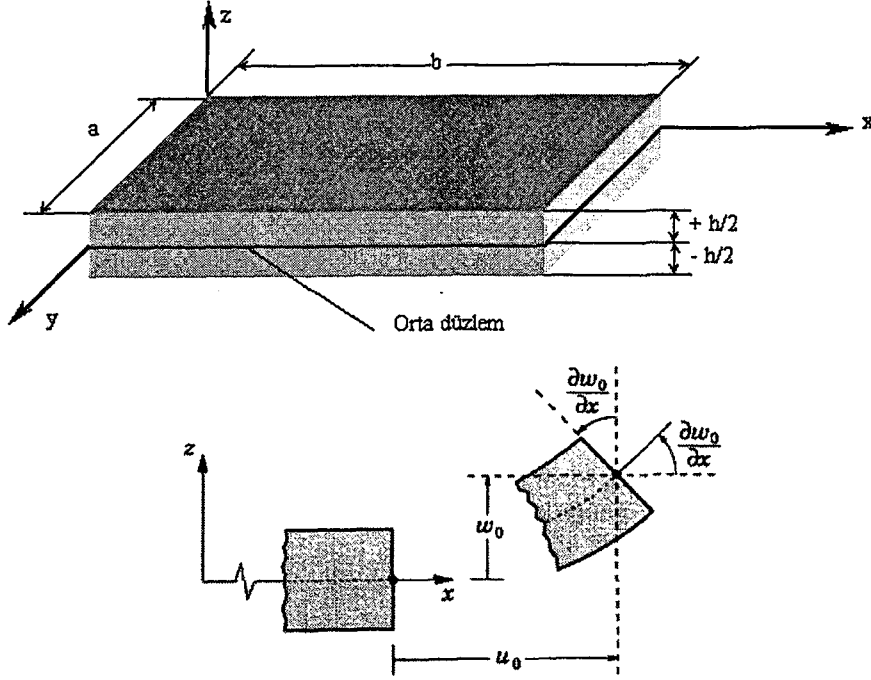


Şekil 2.16 Derecelendirilmiş plak elastisite modülünün, Anti Simetrik Reddy tarzında ve Mori-Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimi

2.3 Başlıca Plak Teorileri

2.3.1 Klasik Plak Teorisi

Plakların statik ve dinamik davranışlarını açıklayan ilk yaklaşımlardan biri Kirchhoff varsayımlarına dayanır. Bu varsayımlar için kullanılan plak geometrisi ve eksen takımı Şekil 2.17’de verilmiştir.



Şekil 2.17 Plak geometrisi ve eksen takımı

Bu teoriye göre,

- Deformasyondan önce, plak orta yüzeyine dik olan bir doğru, deformasyondan sonra da, doğru olarak ve plak orta yüzeyine dik olarak kalır. Bu kabul gereğince, orta yüzeye paralel yüzeylerde γ_{xz} ve γ_{yz} birim kayma şekil değiştirmeleri aynı kalır yani sıfır olur. Aynı zamanda τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmeleri de sıfır olur.
- Plak orta yüzeyine dik doğrunun deformasyondan sonra boyu değişmez. Orta yüzeye dik doğru üzerindeki bütün noktalar eşit miktarda yer değiştirir. Böylece plak kalınlığının deformasyondan sonra değişmediği kabul edilir. Böylece plak ince ise $\epsilon_{zz} = 0$ kabulü yapılabilir.
- Plak orta yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeler ihmal edilebilecek kadar küçüktür yani $\sigma_z = 0$ kabul edilir.

Kirchhoff varsayımları dikkate alınarak birim şekil değiştirme–yer değiştirme bağıntıları orta düzleme dik doğruların x ve y eksenlerine göre dönme miktarları ($\partial w_0/\partial x$ ve $\partial w_0/\partial y$) ihmal edilmeden fakat diğer yüksek mertebe diferansiyel terimleri terk edilerek aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Reddy, 1997).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

$\partial w / \partial z = 0$ bağıntısından plağın düşey yer değiştirmeleri $w = w(x, y)$ şeklinde sadece x ve y 'nin fonksiyonudur. ε_{xz} ve ε_{yz} birim şekil değiştirmelerinin z 'ye göre integrasyonundan;

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial w}{\partial x} z + f(x, y) \\ v &= -\frac{\partial w}{\partial y} z + g(x, y) \end{aligned} \quad (2.29)$$

elde edilir. Burada f ve g integrasyon fonksiyonlarını göstermektedir. $z = 0$ için

$$\begin{aligned} f(x, y) &= u(x, y, 0) \\ g(x, y) &= v(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

yazılabilir. Burada f ve g orta düzlemdeki ($z=0$) sırası ile x ve y doğrultularındaki düzlem içi yer değiştirmelerdir ve u_0 , v_0 şeklinde gösterilmektedir. Denklem (2.30) Denklem (2.29) ifadesinde yerine yazılırsa yer değiştirme alanları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.31)$$

u , v ve w plağa ait bir noktanın sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultusunda yer değiştirmeleri, u_0 , v_0 ve w_0 ise orta düzlemdeki bir noktanın yer değiştirmeleri göstermektedir (Reddy, 1984). Klasik Plak Teorisi, deneysel veriler ve üç boyutlu elastisite çözümleri ile karşılaştırıldığında çökme değerleri daha düşük, burkulma yükü ve doğal titreşim frekanslarını daha yüksek vermektedir.

Birim şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (2.33)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (2.34)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.35)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.36)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (2.37)$$

Bu ifadelere Von Karman Birim şekil değiştirmeleri ve bu terimleri kullanarak kurulan teoriye de Von Karman Plak Teorisi adı verilir. (ϵ_{xz} , ϵ_{yz} , ϵ_{zz}) terimleri Klasik Plak Teorisindeki gibi sıfırdır (Reddy, 1997).

Yukarıdaki denklemler kısaca matris gösterimi ile aşağıdaki gibi de ifade edilebilmektedir

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

yazılabilmektedir. Bu denklemlerde

$$\{\varepsilon^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\{\varepsilon^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Klasik Plak teorisi kabullerine göre dik birim şekil değiştirme tansörünün kayma bileşenleri (ε_{xz} , ε_{yz} , ε_{zz}) ve gerilme tansörünün kayma gerilmeleri (σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz}) sıfır kabul edilmektedir. Bu nedenle bu terimler virtüel iş ifadelerinde yer almaz. Plak ince veya kabul edilebilir bir orta kalınlığa sahipse, düzlem gerilme hali kabul edilerek gerilme birim şekil değiştirme bağıntıları

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.42)$$

$$Q_{12} = \nu Q_{11} \quad (2.43)$$

$$Q_{66} = G_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.44)$$

olarak tanımlanmıştır (Reddy, 1997).

2.3.1.1 Denge Denklemleri

Plakların burkulma davranışını yöneten denklemler Virtüel Yer Değiştirmeler Prensipleri kullanılarak yazılabilmektedir. Virtüel iş prensibi ifadesi, δU_v virtüel birim şekil değiştirme

Enerjisi, δV_v uygulanan kuvvetler tarafından yapılan virtüel iş olmak üzere

$$\delta U_v + \delta V_v = 0 \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Euler–Lagrange eşitliklerine göre plak orta düzleminde tanımlı plak hacim elemanı için, ifadeler δu_0 , δv_0 ve δw_0 katsayılarına göre ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki Virtüel iş bağıntıları elde edilir. Buradan denge denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q &= 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

olarak verilmektedir (Reddy, 1984, 1997, 1999).

2.3.1.2 Sınır Şartları

Sınır şartlarından yer değiştirme bileşenleri (çökme ve dönmeler) ile ilgili olanlar Geometrik, kuvvet ve moment ile ilgili bileşenler ise Doğal sınır şartları olarak adlandırılırlar.

Doğal sınır şartları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} N_{nn} - \hat{N}_{nn} &= 0 \\ N_{ns} - \hat{N}_{ns} &= 0 \\ Q_{nn} - \hat{Q}_{nn} &= 0 \\ M_{nn} - \hat{M}_{nn} &= 0 \\ M_{ns} - \hat{M}_{ns} &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

elde edilir. Bu denklemlerde $\hat{N}, \hat{M}$ 'ler dış yükleri göstermektedir.

Teoriye göre, yer değiştirmelere ve kuvvet bileşenlerine ait değişkenler aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\begin{aligned} u_n, \quad u_s, \quad w_0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial s} \\ N_{nn}, \quad N_{ns}, \quad Q_n, \quad M_{nn}, \quad M_{ns} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Denklem (2.46)'da toplam 8 adet uzaysal diferansiyel terim vardır, buna karşılık toplam 10 adet sınır şartı vardır. Fazla sınır şartları, teğetsel türev ifadelerinin tekrar düzenlenip

elenmesiyle, klasik plak teorisi için kullanılacak sınır şartları

$$\begin{aligned} u_n, \quad u_s, \quad w_0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} \\ N_{nn}, \quad N_{ns}, \quad Q_n, \quad M_{nn} \end{aligned} \quad (2.49)$$

şeklinde elde edilir (Reddy, 1984, 1997, 1999).

2.3.1.3 Bünye Denklemleri

Kuvvet ve moment bileşenleri gerilme ve birim şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi matris formda elde edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Kısa gösterim ile;

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

şekline girer.

Bu denklemlerdeki katsayılar (rijitlikler) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.53)$$

Bu katsayılardan A_{ij} uzama, B_{ij} birleşim, D_{ij} eğilme rijitlikleri adını alır. Denklem (2.46) ile verilen plak denklemleri Denklem (2.52) kullanılarak yer değiştirme bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
& + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \right) \\
& + B_{16} \left(3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y \partial x^3} + 3 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \right) + B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
& + 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + B_{22} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \\
& + 2B_{26} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \right) - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
& + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = 0
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Yüksek mertebeden terimler terk edilerek plak denklemleri yer değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi yazılır (Gibson, 1994; Reddy, 1997, 1999):

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& - \left[B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] = 0
\end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& - \left[B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right] = 0
\end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& - \left[D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right] \\
& + B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = 0
\end{aligned} \quad (2.59)$$

2.3.2 Kayma Deformasyon Teorileri

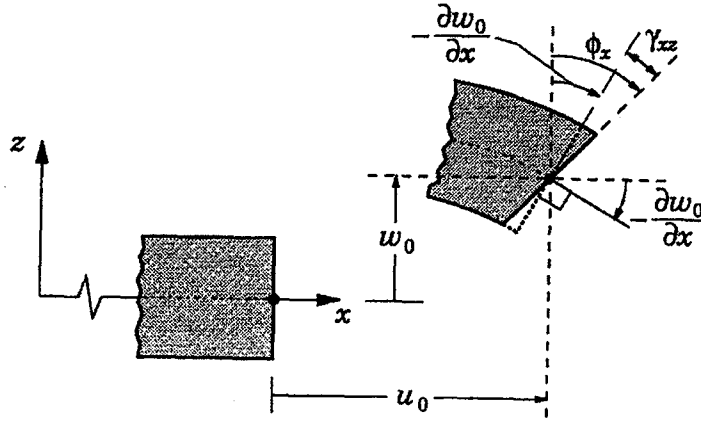
2.3.2.1 Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

Kayma bileşenlerini göz önüne alan çok sayıda teori geliştirilmiştir. Bu teorilerde, Kirchhoff kabullerinde bahsedilen deformasyondan sonra dik normallerin plak orta düzlemine dik kalma şartı yoktur. Kayma deformasyon teorilerinin en basiti düzlem-içi yer değiştirmelerin kalınlık ile lineer değiştiği kabul edilen Birinci Mertebe Kayma Deformasyon teorisidir ve yer değiştirme alanları

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \quad (2.60)$$

olarak tanımlanmıştır;

Burada, $\phi_x = \partial u / \partial z$, $\phi_y = \partial v / \partial z$ sırası ile dik normallerin y ve x eksenlerine göre dönme miktarlarını göstermektedir. (Şekil 2.18)

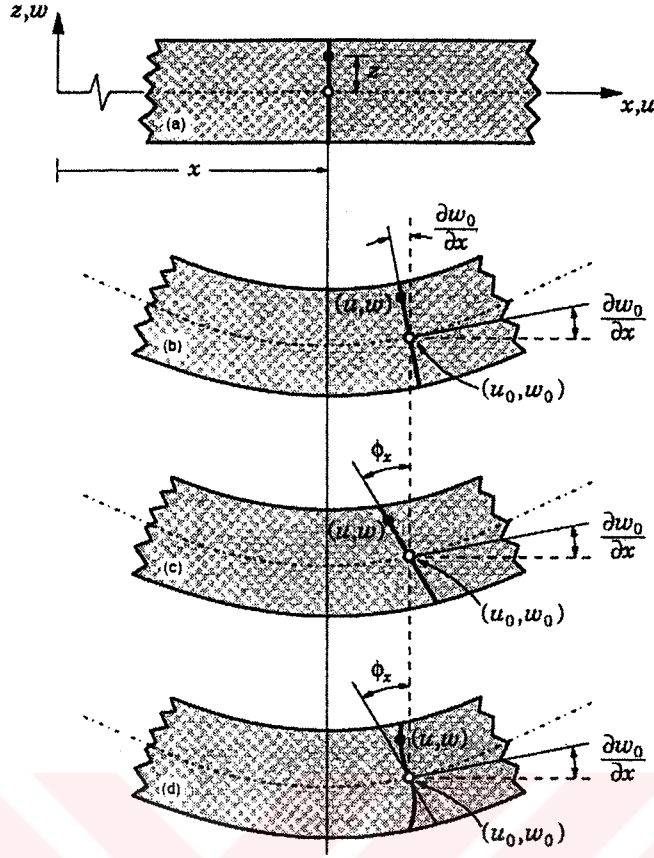


Şekil 2.18 Birinci merteye kayma deformasyon teorisi kabullerine göre şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş plak geometrisi

Birinci Mertebe Kayma Deformasyon teorisi klasik plak teorisi kabullerinden biri olan diklik şartı yerine plak kalınlığı boyunca sabit kayma birim şekil değiştirmelerinin ($\gamma_{yz}=\text{sabit}$, $\gamma_{xz}=\text{sabit}$) ve dolayısıyla dik kayma gerilmelerinin sabit olduğunu kabul eder. Fakat homojen çubuk teorilerinden dik kayma gerilmelerinin çubuk kalınlığı boyunca parabolik olarak değiştiği bilinir. Dik kayma gerilmelerindeki bu değişim tabakalı kompozit çubuk ve plaklarda en az dördüncü mertebededir. Gerçek gerilme ile teoriye göre hesaplanan dik kayma gerilmeleri arasında oluşan bu farkı düzeltmek için, dik kayma kuvveti bileşenlerini (Q_x ve Q_y) yükleme tipine, sınır şartlarına ve geometrik parametrelere bağlı bir düzeltme katsayısı ile çarparak kullanmak gerekmektedir (Reddy, 1997; Reddy ve Wang, 2000).

2.3.2.2 Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisindeki bu eksikliği gidermek amacı ile düzlem-İçi yer değiştirme bileşenlerinin düşey koordinat z 'nin fonksiyonu olduğu Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorileri geliştirilmiştir. Bu teoriler ile dik kayma gerilmelerinin değişimi daha hassas bir şekilde belirlenebilir ve ayrıca kayma düzeltme katsayılarına da gerek yoktur. Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorilerinde yer değiştirme alanlarının ifadesinde terimleri arzu edilen mertebeye kadar genişletmek mümkündür fakat hesaplama güçlükleri de göz önüne alınarak üçüncü mertebeden bir yaklaşım yeteri kadar hassas sonuçlar vermektedir. Şekil 2.19'de plak orta düzlemine dik normallerin deformasyonları klasik plak teorisi, birinci merteye kayma deformasyon teorisi ve üçüncü merteye kayma deformasyon teorisi için gösterilmiştir.



Şekil 2.19 Dik normallerin şekil değiştirmeleri a)şekil değiştirmemiş, b)klasik plak teorisi, c)birinci mertebe kayma deformasyon plak teorisi, d)üçüncü mertebe kayma deformasyon plak teorisi

Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisine göre yer değiştirmeler

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\xi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\xi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

şeklinde kalınlık koordinatının kübik bir fonksiyonu olarak değiştiği kabul edilmiştir. ϕ_x ve ϕ_y orta düzlem normallerinin sırasıyla y ve x eksenlerine göre dönme miktarlarını göstermektedir. ξ_x, ζ_x, ξ_y ve ζ_y fonksiyonları platin üst ve alt yüzeylerinde düşey kayma gerilmelerinin sıfır olma şartından elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) &= 0 \\
 \sigma_{yz}(x, y, \pm h/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Bu şartlar aynı zamanda alt ve üst yüzeylerdeki ilgili birim şekil değiştirmelerinde sıfır olması

demektir ve

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + 2z\xi_x + 3z^2\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + 2z\xi_y + 3z^2\zeta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.63)$$

elde edilir. Bu denklemlerden

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz}(x,y,\pm h/2) &= 0 \\ \varepsilon_{yz}(x,y,\pm h/2) &= 0\end{aligned}\quad (2.64)$$

şartları yardımıyla

$$\xi_x = 0, \xi_y = 0, \zeta_x = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x\right), \zeta_y = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y\right)\quad (2.65)$$

elde edilir. Bu ifadelerin Denklem (2.61)'da yerine yazılmasıyla yer değiştirme alanları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_x(x,y) - z^3\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x(x,y)\right) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_y(x,y) - z^3\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y(x,y)\right) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y)\end{aligned}\quad (2.66)$$

(u_0, v_0, w_0) ve (ϕ_x, ϕ_y) Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisinde olduğu gibi plağın orta düzlemindeki ($z=0$) dik normallerin yer değiştirme ve dönme miktarlarını göstermektedir.

$$\begin{aligned}u_0 &= u(x,y,0), & v_0 &= v(x,y,0), & w_0 &= w(x,y,0) \\ \phi_x &= \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,0), & \phi_y &= \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,0)\end{aligned}\quad (2.67)$$

Denklem (2.66)'de verilen yer değiştirme ifadelerini Denklem (2.23–28) ile verilen birim şekil değiştirme ifadelerinde yerine yazarak aşağıdaki birim şekil değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}\quad (2.68)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(3)} \\ \epsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Burada $c_2=3c_1=4/h^2$ kabul edilmesi ile dik kayma gerilmelerinin (σ_{xz}, σ_{yz}) plağın alt ve üst yüzeylerinde ($z = \pm h/2$) sıfır olması sağlanabilir (Reddy, 1984; 1997,1999).

2.3.2.3 Denge Denklemleri

Denge denklemleri Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi için Plakların Virtüel iş bağıntıları Virtüel Yer Değiştirmeler Prensipleri kullanılarak elde edilir:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} \right) + q = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x = 0$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y = 0$$

Yukarıdaki geçen ifadeler için

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - c_1 P_{\alpha\beta}, \quad \bar{Q}_\alpha = Q_\alpha - c_2 R_\alpha \quad (2.76)$$

$$c_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = 3c_1 \quad (2.77)$$

kısaltmaları ve yüksek mertebe gerilme bileşenleri için;

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (2.78)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (2.79)$$

ifadeleri kullanılmıştır (Reddy, 1984, 1997; Reddy ve Khdeir, 1989).

Virtüel iş bağıntılarının elde edilmesi sırasında ortaya çıkan eğrisel integraller sınır şartlarını

verir.

Geometrik sınır şartları değişkenleri

$$u_n, \quad u_s, \quad w_0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, \quad \phi_n, \quad \phi_s \quad (2.80)$$

Doğal sınır şartları değişkenleri

$$N_{nn}, \quad N_{ns}, \quad \bar{V}_n, \quad P_{nn}, \quad \bar{M}_{nn}, \quad \bar{M}_{ns} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_n \equiv & c_1 \left[\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) n_y \right] + (\bar{Q}_x n_x + \bar{Q}_y n_y) \\ & + \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_x + \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y + c_1 \frac{\partial P_{ns}}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.82)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu çalışmada kenarlar için kullanılacak sınır şartları

$x = 0$ ve $x = a$ kenarlarında,

$$\text{ÜMKDPT} \quad \text{Basit (B)} \quad v = w = \phi_y = N_{xx} = M_{xx} = P_{xx} = 0 \quad (2.83)$$

$$\text{KPT} \quad \text{Basit (B)} \quad v = w = N_{xx} = M_{xx} = 0 \quad (2.84)$$

$$\text{Ankastre (A)} \quad u = v = w = \partial w / \partial x = 0 \quad (2.85)$$

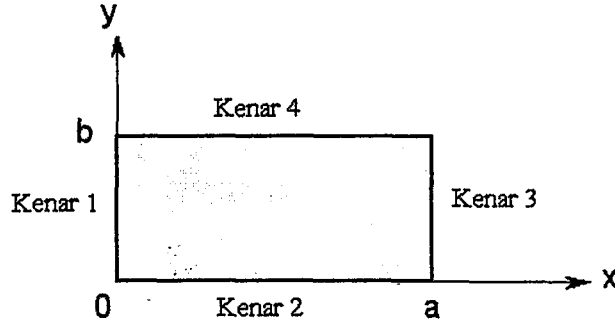
$y = 0$ ve $y = b$ kenarlarında,

$$\text{ÜMKDPT} \quad \text{Basit (B)} \quad u = w = \phi_x = N_{yy} = M_{yy} = P_{yy} = 0 \quad (2.86)$$

$$\text{KPT} \quad \text{Basit (B)} \quad u = w = N_{yy} = M_{yy} = 0 \quad (2.87)$$

$$\text{Ankastre (A)} \quad u = v = w = \partial w / \partial y = 0 \quad (2.88)$$

şeklinde verilmiştir. Plakların sınır şartlarının isimlendirilmesi Şekil 2.20’de gösterilen sıraya göre yapılacaktır.



Şekil 2.20 Plak sınır şartlarının yazımında kullanılan kenar sıraları

Birim şekil değiştirmeler cinsinden gerilme ifadeleri matris formunda aşağıdaki gibi verilebilir;

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \\ \{\epsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.91)$$

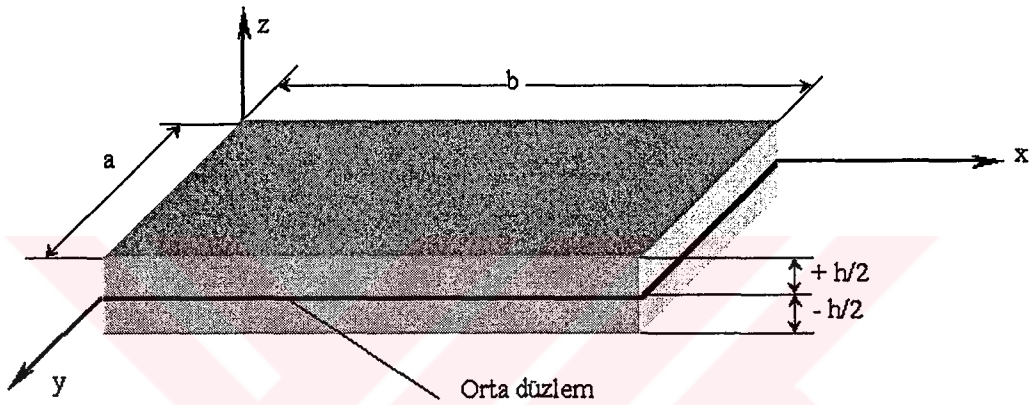
$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z^2, z^6) dz \quad i, j = 4, 5 \quad (2.92)$$

A_{ij} , D_{ij} ve F_{ij} katılıkları $i, j = 1, 2, 6$ ve $i, j = 4, 5$ için, B_{ij} , E_{ij} , ve H_{ij} katılıkları $i, j = 1, 2, 6$ için tanımlıdır. Bu katılıkların gerçek değerleri elastik katsayıların kabul edilen değişim biçimlerine bağlıdır (Reddy, 2000). Plak elastisite modülünün anti simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda elde edilen plak katılıklarının açık ifadeleri Ek 1’de verilmiştir.

3. BÜTÜN KENARLARINDAN BASİT DESTEKLİ (BBBB), DERECELENDİRİLMİŞ PLAĞIN MAKRO VE MİKRO MEKANİK YAKLAŞIMLAR İLE İNCELENMESİ

3.1 Yükleme ve Destekleme Şekilleri

Derecelendirilmiş malzemeden yapılmış tüm kenarları basit destekli plağın burkulma probleminin analitik ifadeleri Navier çözümü ile bulunacaktır. Bu amaçla kenarları a , b boyutlarına sahip kalınlığı h olan dikdörtgen bir plak göz önüne alınmış ve kullanılacak plağın geometrisi ile eksen takımı Şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Derecelendirilmiş dikdörtgensel plağın geometrisi ve eksen takımı

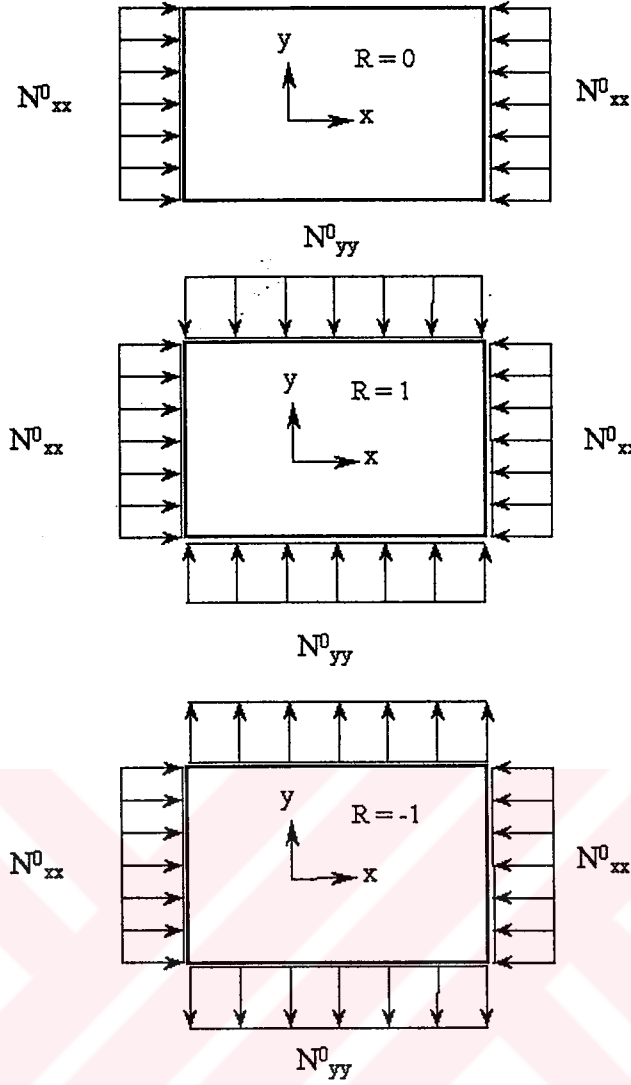
Burkulma analizi çalışmasında plak için üç farklı tip düzlem yükleme hali göz önüne alınmıştır. Tek eksenli ve İki-eksenli yükleme durumlarında, x ve y -eksenlerine paralel doğrultuda plak kenarları boyunca etkiyen düzgün yayılı düzlem-içi kuvvetler aşağıda gösterildiği gibi birbirinin katı cinsinden alınarak inceleme yapılmıştır. (Şekil 3.2)

$$N_y = R \cdot N_x \quad (3.1)$$

$$a) \text{ Basit basınç, } R=0, N_x \neq 0 \quad (3.2)$$

$$b) \text{ İki eksenli basınç, } R=1, N_y = 0 \quad (3.3)$$

$$c) \text{ Basit basınç ve basit çekme, } R=-1, N_y = -N_x \quad (3.4)$$



Şekil 3.2 Derecelendirilmiş plaktaki yükleme şekilleri; tek eksenli basınç ($R=0$) , iki eksenli basınç ($R=1$) ve basit basınç-basit çekme ($R=-1$)

3.2 Bütün Kenarlarından Basit Destekli (BBBB) Plak için Navier Tipi Çözüm

Navier yaklaşımına göre, Denklem (2.57–59) ile yer değiştirmeler cinsinden verilen plak denklemleri, yer değiştirme alanlarının

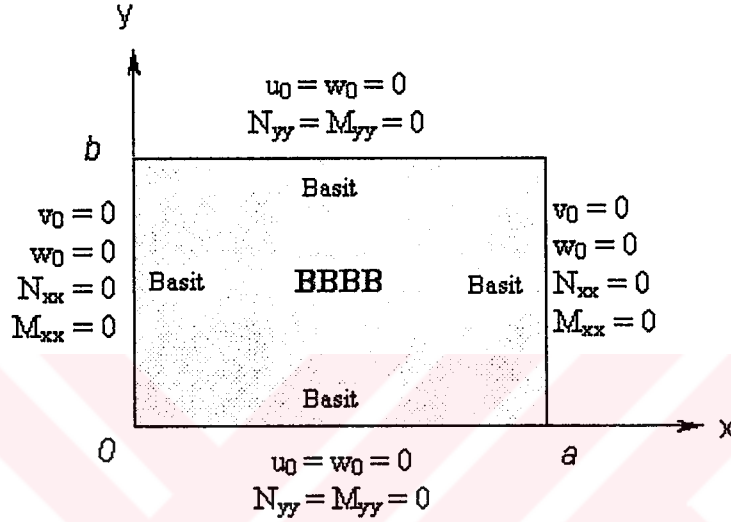
$$\begin{aligned}
 u_0(x,y) &= U_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
 v_0(x,y) &= V_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
 w_0(x,y) &= W_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak trigonometrik fonksiyonlar şeklinde seçilmesi ile aşağıda gösterilen basit desteklenmiş

plak için sınır şartlarını

$$\begin{aligned}
 u_0(x,0) = 0, & \quad u_0(x,b) = 0, & v_0(0,y) = 0, & \quad v_0(a,y) = 0, \\
 w_0(x,0) = 0, & \quad w_0(x,b) = 0, & w_0(0,y) = 0, & \quad w_0(a,y) = 0 \\
 N_{xx}(0,y) = 0, & \quad N_{xx}(a,y) = 0, & N_{yy}(x,0) = 0, & \quad N_{yy}(x,b) = 0 \\
 M_{xx}(0,y) = 0, & \quad M_{xx}(a,y) = 0, & M_{yy}(x,0) = 0, & \quad M_{yy}(x,b) = 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

sağlamaktadırlar. (Şekil 3.3)



Şekil 3.3 Basit destekli plak için sınır şartları

Bu eşitlikte (U_{mn} , V_{mn} , W_{mn}) bilinmeyen katsayıları, m ve n sırasıyla x ve y yönlerindeki yarım dalga sayılarını göstermektedir. Bu yer değiştirme alanı bileşenleri Denklem (2.57–59)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\
 k_{12} &= k_{21} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
 k_{13} &= k_{31} = -B_{11}\alpha^3 - B_{12}\alpha\beta^2 - 2B_{66}\alpha\beta^2 \\
 k_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\
 k_{23} &= k_{32} = -B_{12}\alpha^2\beta - 2B_{66}\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3 \\
 k_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$n_{33} = \beta^2 / a^2, \quad m_{33} = \alpha^2 / a^2$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} - \lambda(m_{33} + Rn_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

özdeğer problemi elde edilir (Reddy, 1997). $U_{mn} \neq 0$, $V_{mn} \neq 0$, $W_{mn} \neq 0$ olması durumunda Denklem (2.57–59)'denklemlerinde çözümün sağlanabilmesi için

$$D = \frac{E_c h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.9)$$

$$\lambda = \frac{N_x a^2}{D} \quad (3.10)$$

olmak üzere

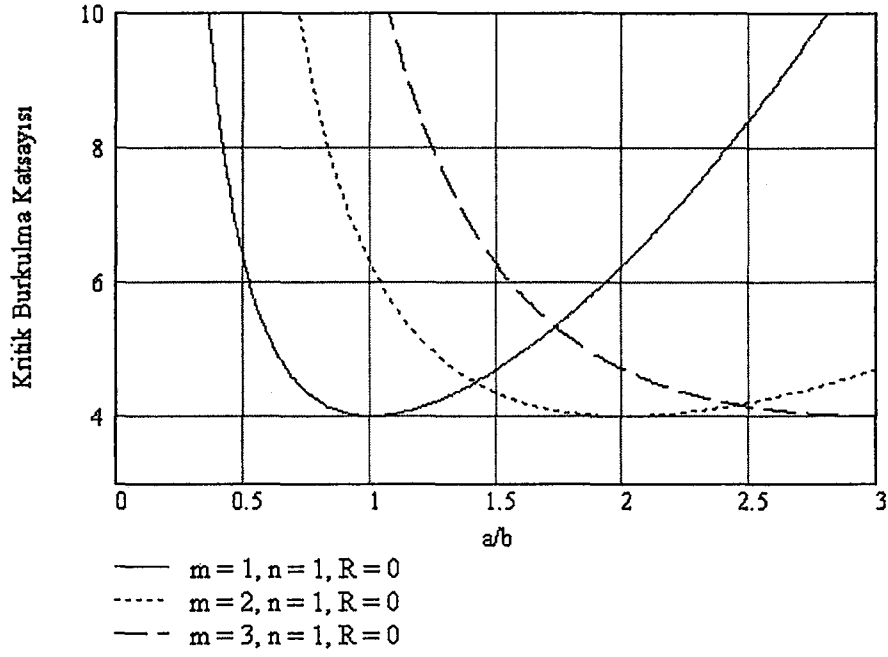
$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} - \lambda(m_{33} + Rn_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

katsayılar determinantının sıfır olması gerekir ve bu denklemi sağlayan en küçük Kritik Burkulma Parametresi (λ) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda = \frac{k_{11}k_{22}k_{33} - k_{31}k_{13}k_{22} - k_{11}k_{23}k_{32} - k_{21}k_{12}k_{33} + k_{21}k_{13}k_{32} + k_{31}k_{12}k_{23}}{(k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12})(n_{33}R + m_{33})} \quad (3.12)$$

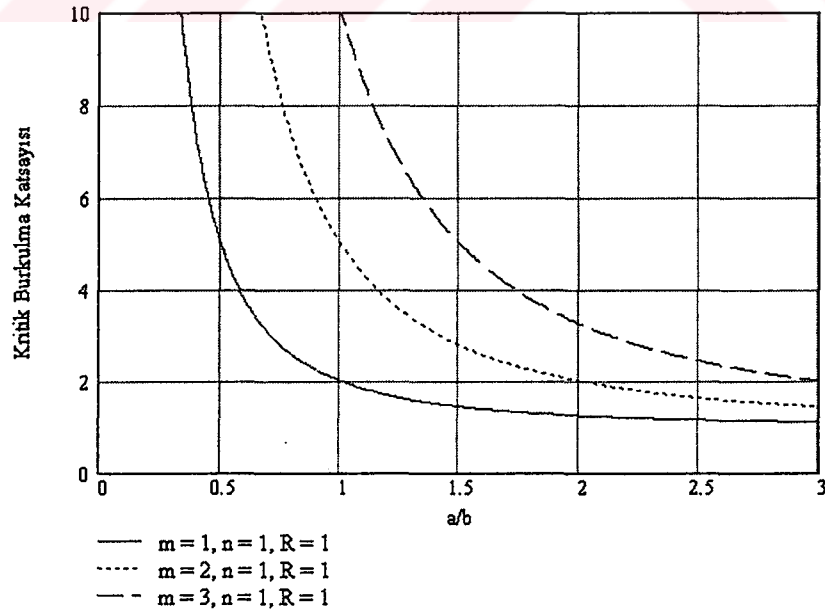
Katsayılar determinantının elemanları ve dolayısıyla Kritik Burkulma Katsayısı, (m,n) yarı dalga sayılarının fonksiyonudur. Homojen plak için değişik kenar oranları (a/b) ve yükleme tipleri (R) için (m,n) değerlerinin farklı değerleri ile elde edilmiş sonuçlar grafik olarak Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da gösterilmiştir. Bu grafiklerden, belli kenar oran aralıkları için Kritik Burkulma Parametresini en küçük yapan (m,n) değerleri görülmektedir.

Şekil 3.4'te homojen plak için, tek eksenli basınç yüklemesi ($R=0$) altında değişik m değerleri ve a/b kenar oranlarına karşılık elde edilen boyutsuz kritik burkulma katsayıları verilmiştir. Grafikten, $0 < (a/b) < 1.4142$ aralığı için $m=1$ değerinin, $1.4142 < (a/b) < 2.4494$ aralığı için $m=2$ değerinin, $2.4494 < (a/b) < 3.4641$ aralığı için $m=3$ değerinin burkulma katsayısının değerini en küçük yaptığı görülmektedir (Timoshenko, 1963). Ek 2'de verilen ANSYS paket programı uygulamasında, tek eksenli basınç yüklemesi altındaki homojen plağın yukarıda bahsedilen kenar oranları aralıklarındaki burkulma yarı dalga sayıları (m) gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Burkulma yarım dalgası (m) ile (a/b) kenar oranlarının değişimi ($R=0$)

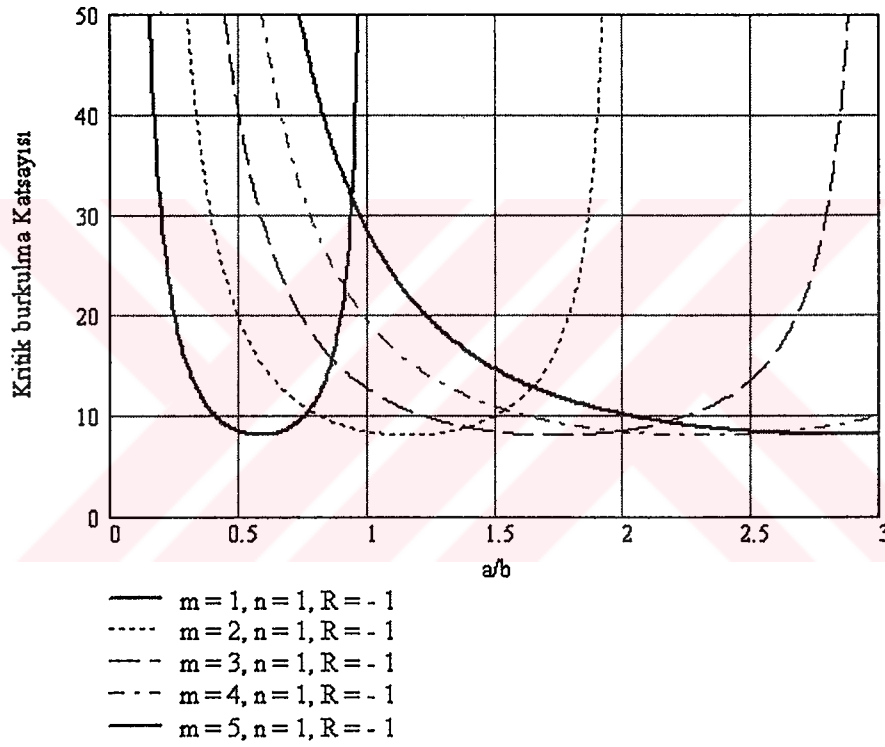
Şekil 3.5'te homojen plak için, iki eksenli basınç yüklemesi ($R=1$) altında değişik m değerleri ve a/b kenar oranlarına karşılık elde edilen boyutsuz kritik burkulma katsayıları verilmiştir. Grafikten, $0 < (a/b) < 3$ aralığı için $m=1$ değerinin burkulma katsayısının değerini en küçük yaptığı görülmektedir.



Şekil 3.5 Burkulma yarım dalgası (m) ile (a/b) kenar oranlarının değişimi ($R=1$)

Şekil 3.6'da homojen plak için, basit basınç-basit çekme yüklemesi ($R=-1$) altında değişik m değerleri ve a/b kenar oranlarına karşılık elde edilen boyutsuz kritik burkulma katsayıları verilmiştir. Grafikten, $0 < (a/b) < 0.7685$ aralığında $m=1$, $0.7685 < (a/b) < 1.3853$ aralığında $m=2$, $1.3853 < (a/b) < 1.9793$ aralığında $m=3$, $1.9793 < (a/b) < 2.5662$ aralığında $m=4$, ve $2.5662 < (a/b) < 3.1495$ aralığında $m=5$ değerinin burkulma katsayısının değerini en küçük yaptığı görülmektedir.

Derecelendirilmiş plak için, değişik kenar oranlarına karşılık burkulma katsayısının değerini en küçük yapan (m,n) değerlerinin Mathcad paket programı (Uysal ve Karahoca, 1997) kullanılarak yapılan ayrıntılı analizi Ek 3, Ek 4 ve Ek 5'te verilmiştir.



Şekil 3.6 Burkulma yarımların sayısı (m) ile (a/b) kenar oranlarının değişimi ($R = -1$)

3.3 Basit Destekli Plakın Klasik Plak Teorisi ile Navier Tipi Çözümü

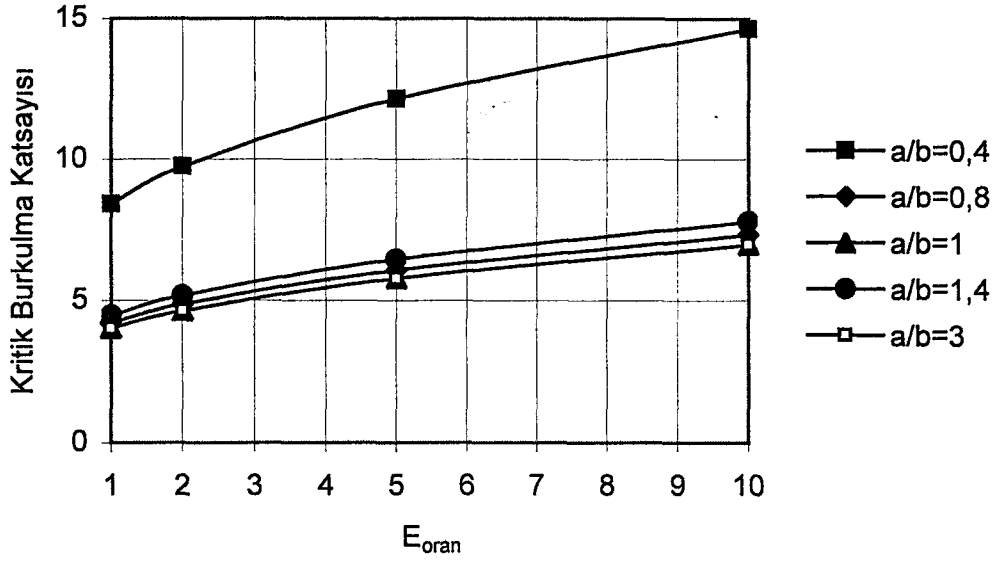
Bu kısımda, Bölüm 3.1'de gösterildiği gibi düzlem içi kuvvetlerin etkisinde, bütün kenarlarından basit desteklenmiş simetrik ve anti simetrik çeşitli mikro ve makro yaklaşımlara göre derecelendirilmiş plakın burkulma analizi sonucunda elde edilmiş sonuçlar verilmiştir. Çözüm, klasik plak teorisi esasları ve Navier tipi yöntem ile yapılmıştır. Düzlem içi kayma gerilmelerinin etkidiği durumlar incelenmemiştir. Boyutsuz kritik burkulma yükü parametresi

$\lambda = N_x a^2 / \pi^2 D$ olarak seçilmiştir. Hazırlanan bilgisayar programı yardımıyla, derecelendirilmiş plak tipleri için kritik burkulma katsayısının değerleri a/b plak kenar oranları ve derecelendirme katsayısına göre elde edilmiş ve bu sonuçlar grafikler yardımıyla gösterilmişlerdir.

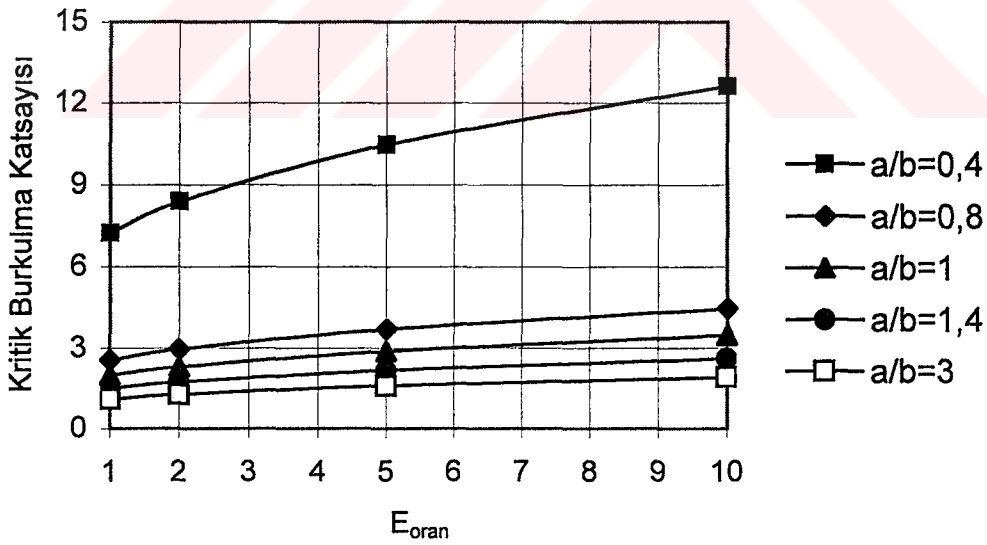


3.3.1 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri

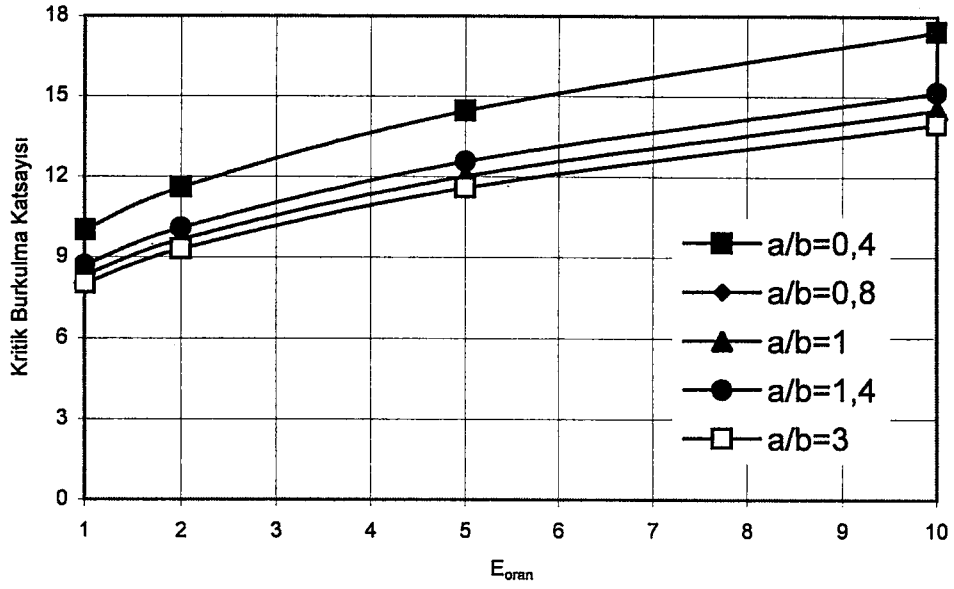
3.3.1.1 Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi



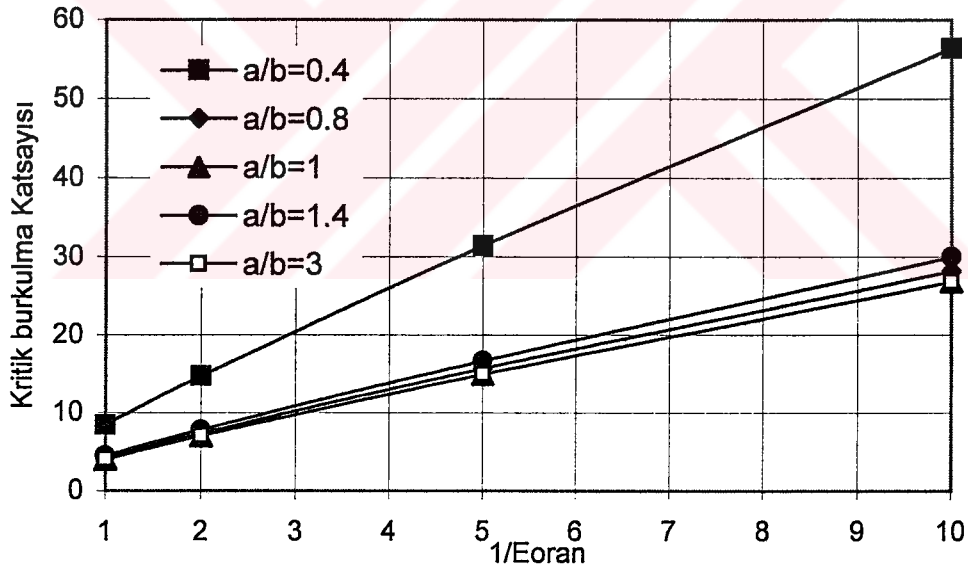
Şekil 3.7 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)



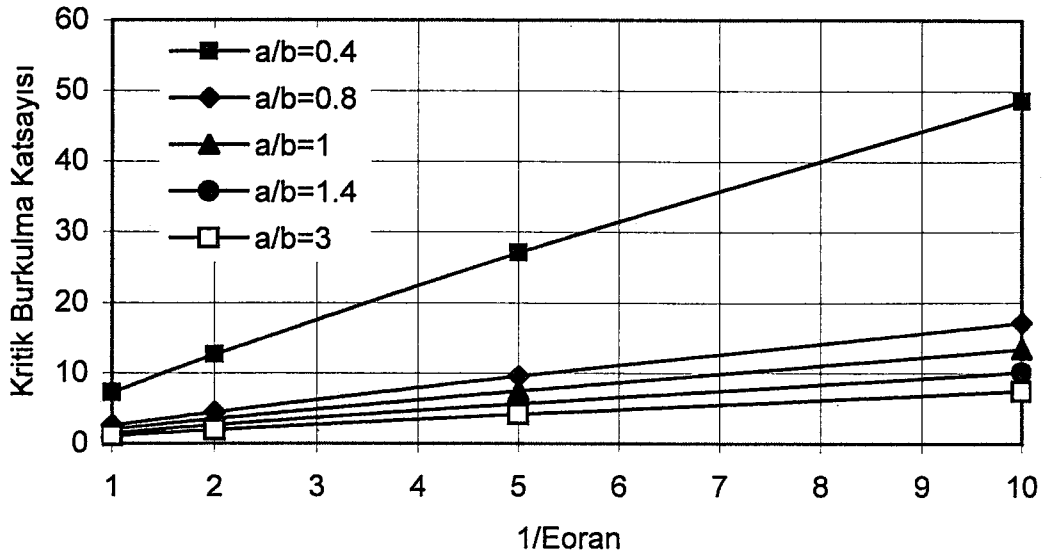
Şekil 3.8 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=1$)



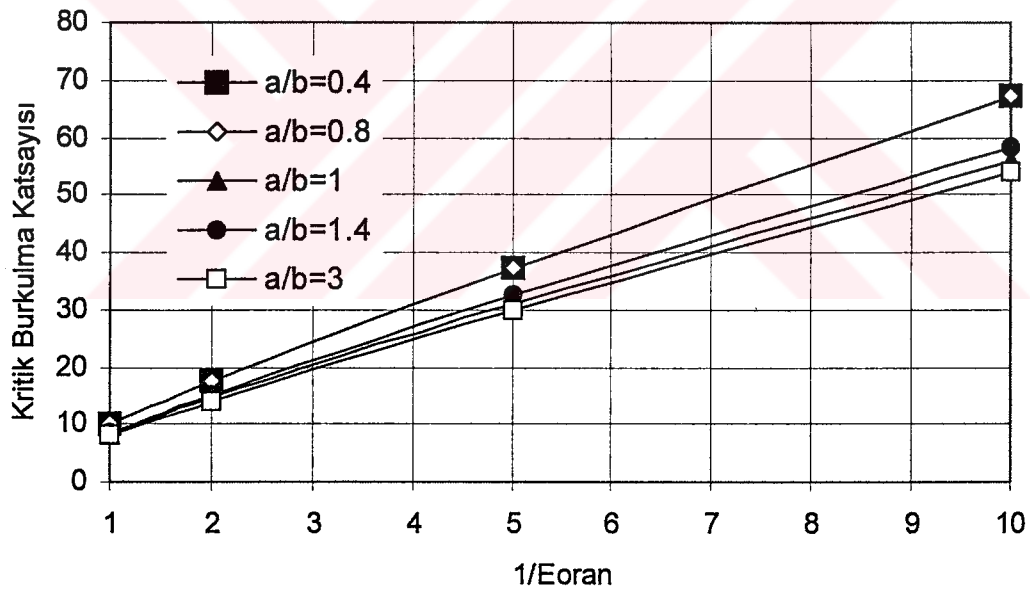
Şekil 3.9 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)



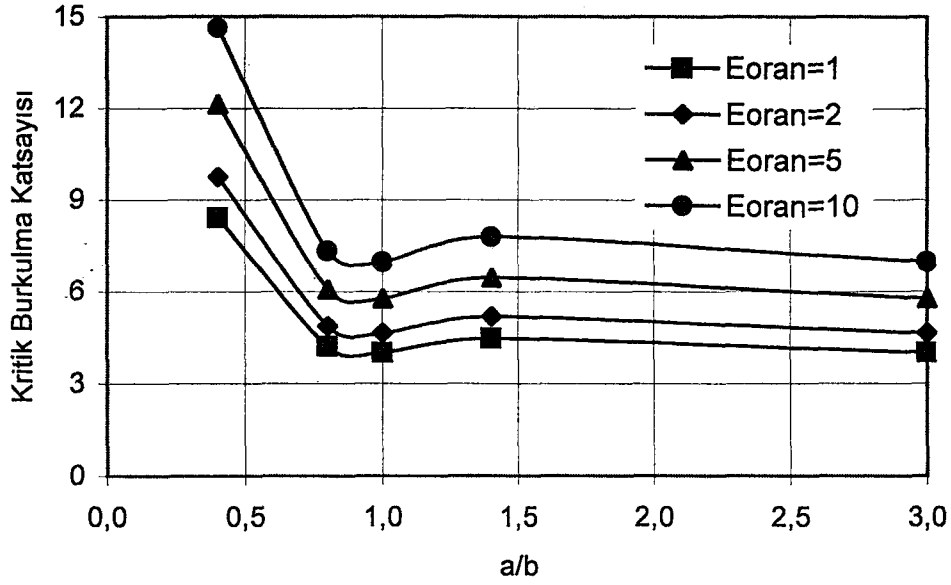
Şekil 3.10 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)



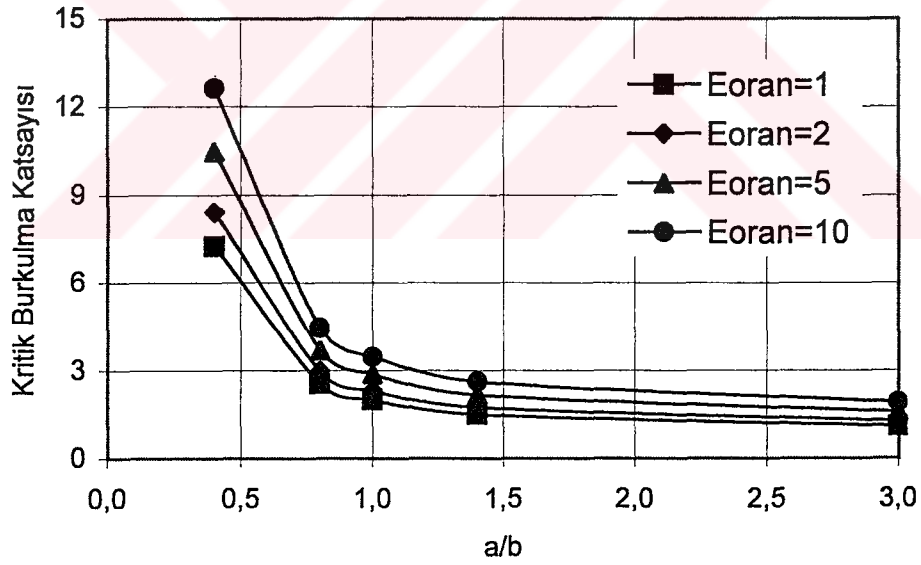
Şekil 3.11 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=1$)



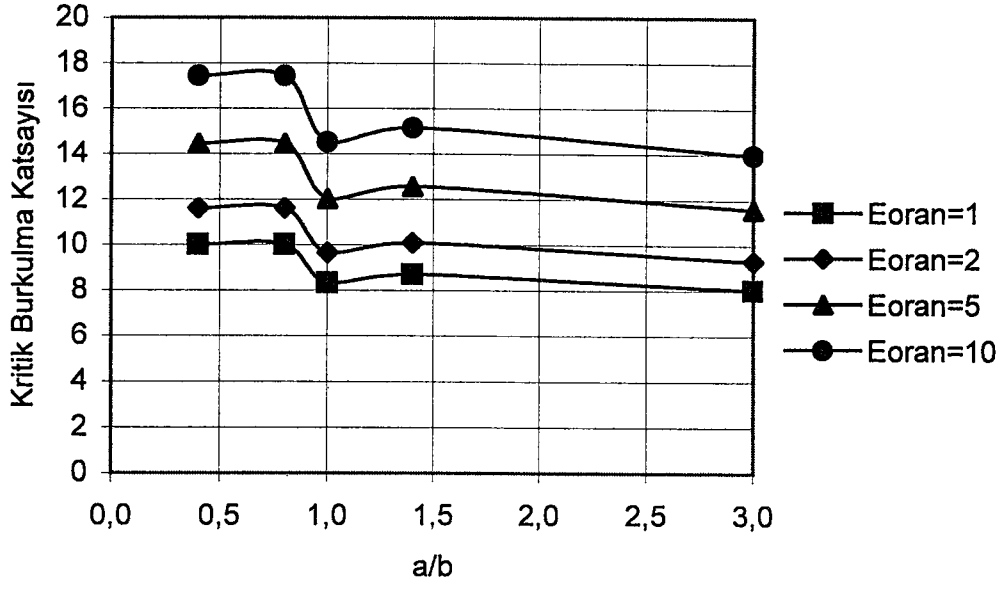
Şekil 3.12 BBBB şeklinde destekli plağın, elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)



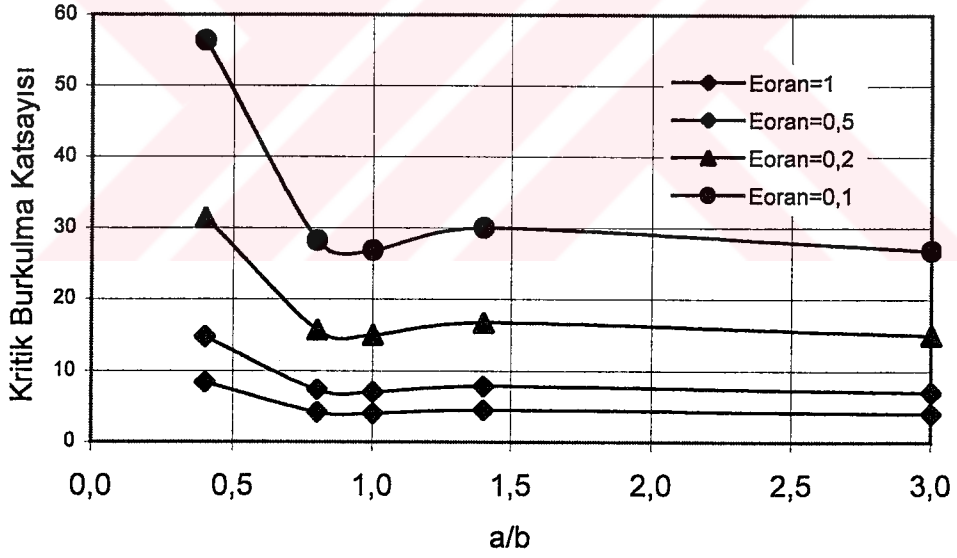
Şekil 3.13 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R= 0)



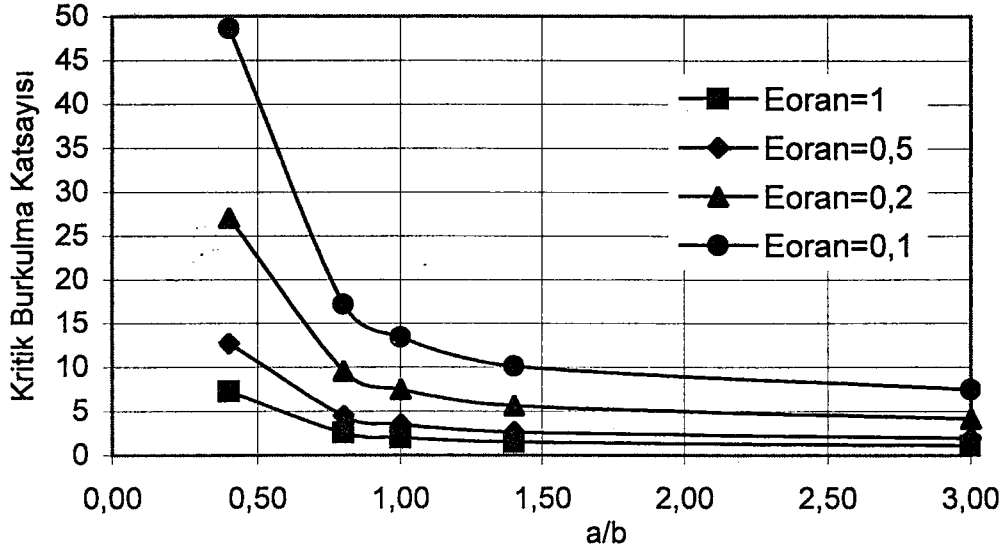
Şekil 3.14 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R= 1)



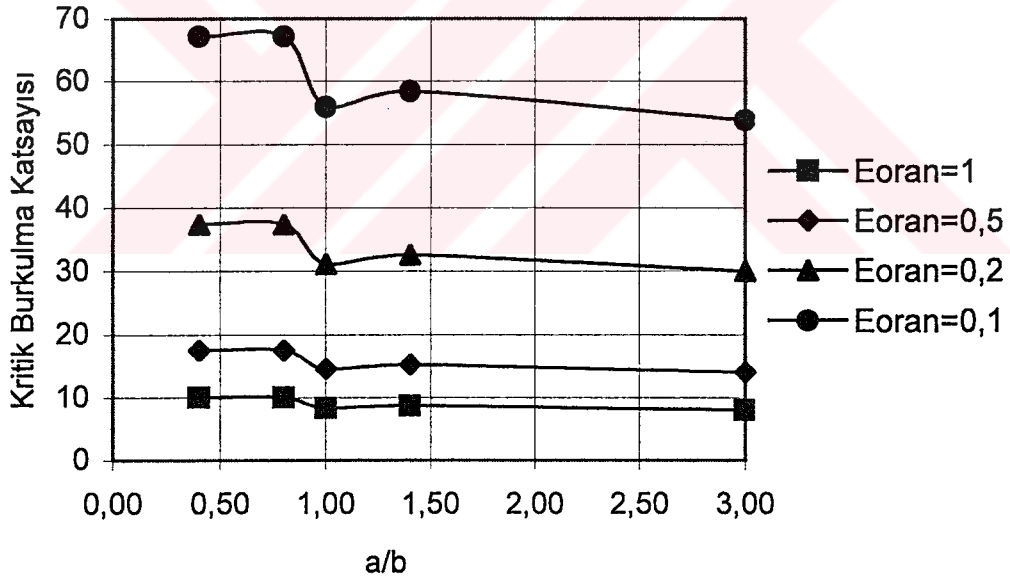
Şekil 3.15 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R=-1)



Şekil 3.16 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R= 0)

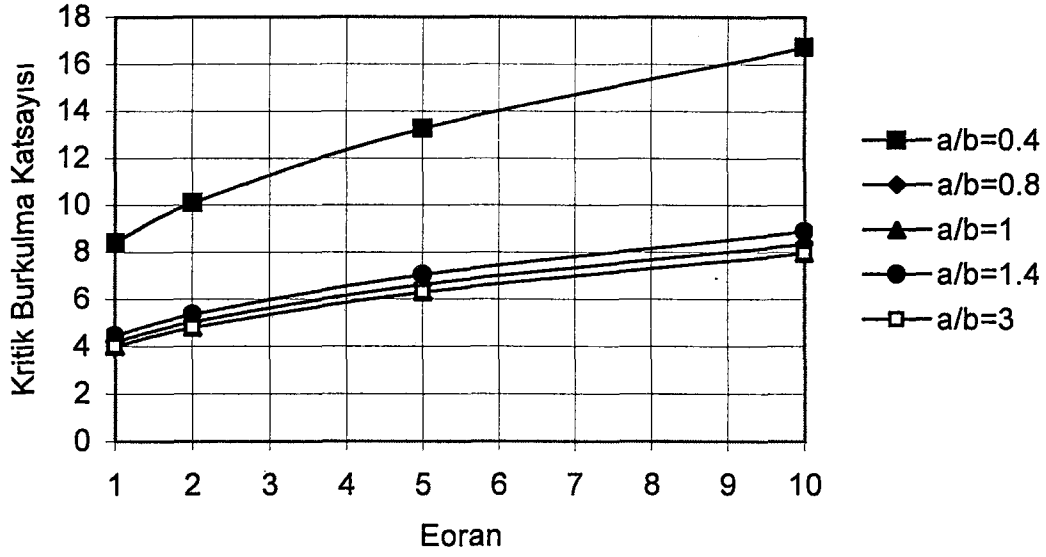


Şekil 3.17 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=1$)

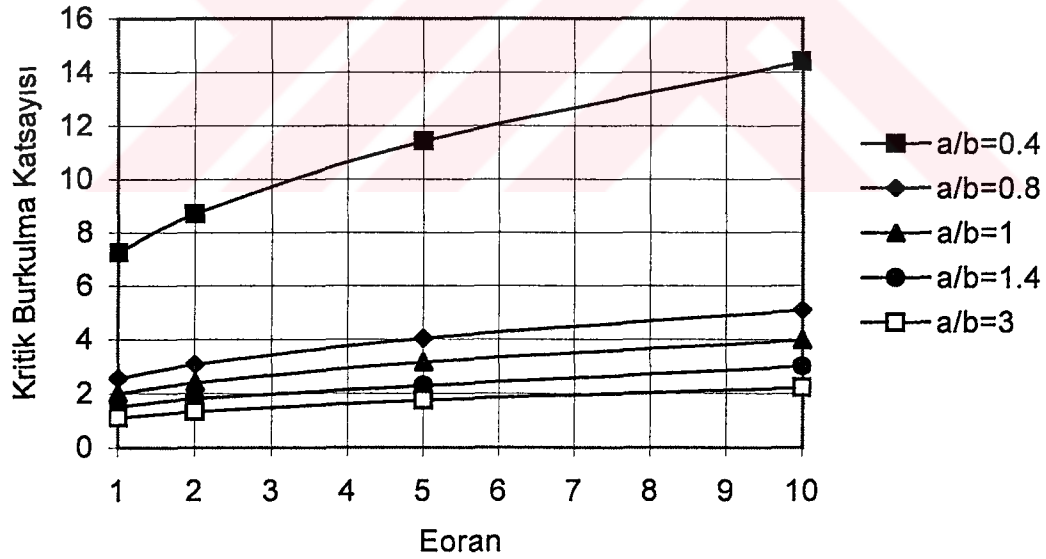


Şekil 3.18 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=-1$)

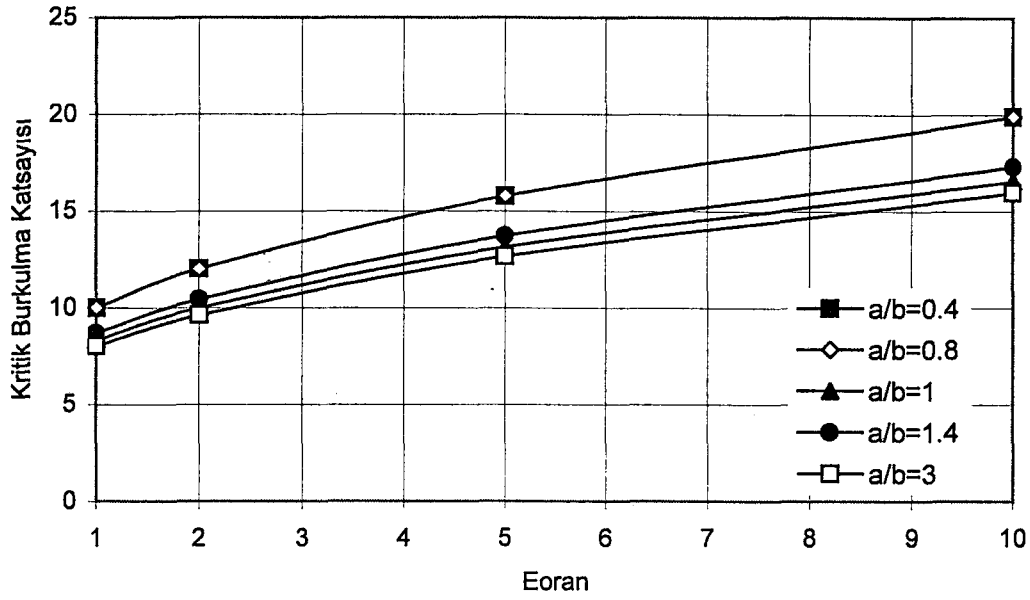
3.3.1.2 Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişmesi



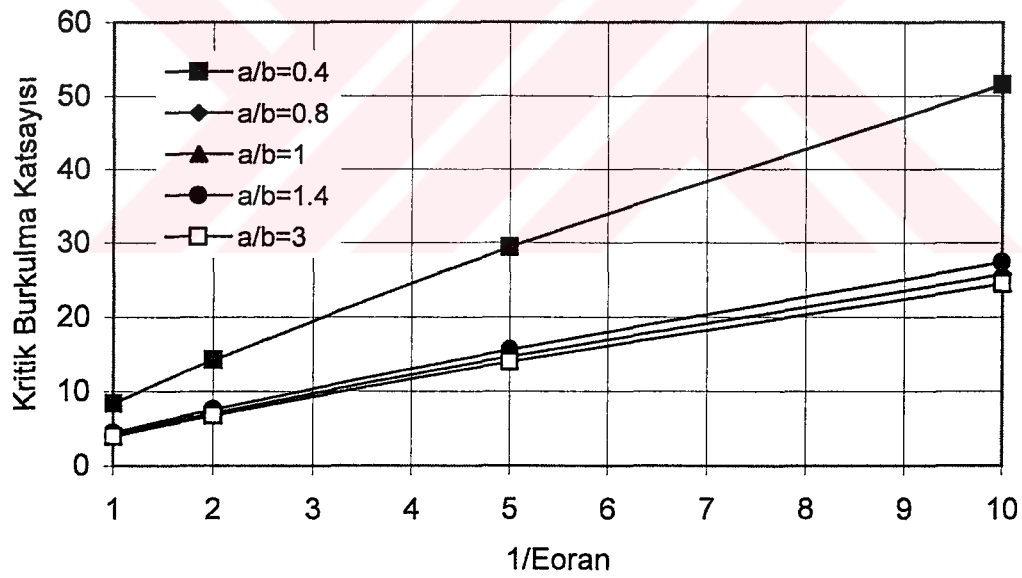
Şekil 3.19 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)



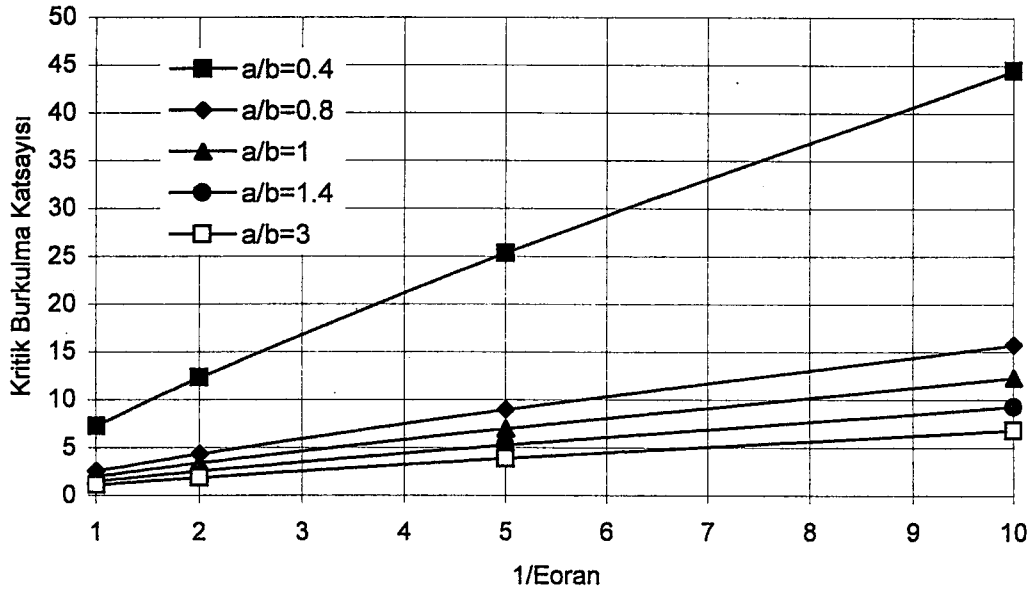
Şekil 3.20 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=1$)



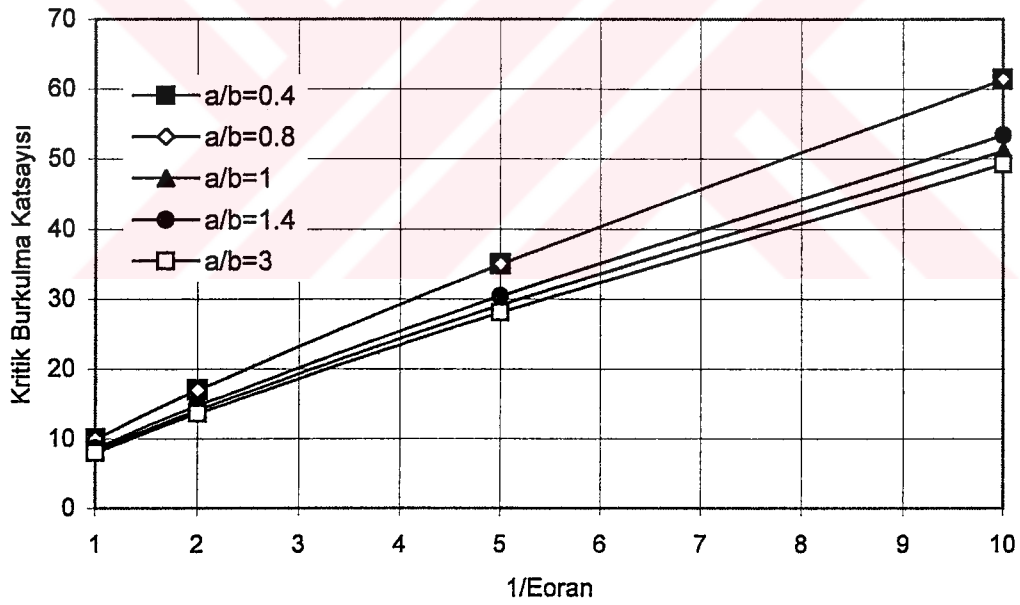
Şekil 3.21 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R = -1$)



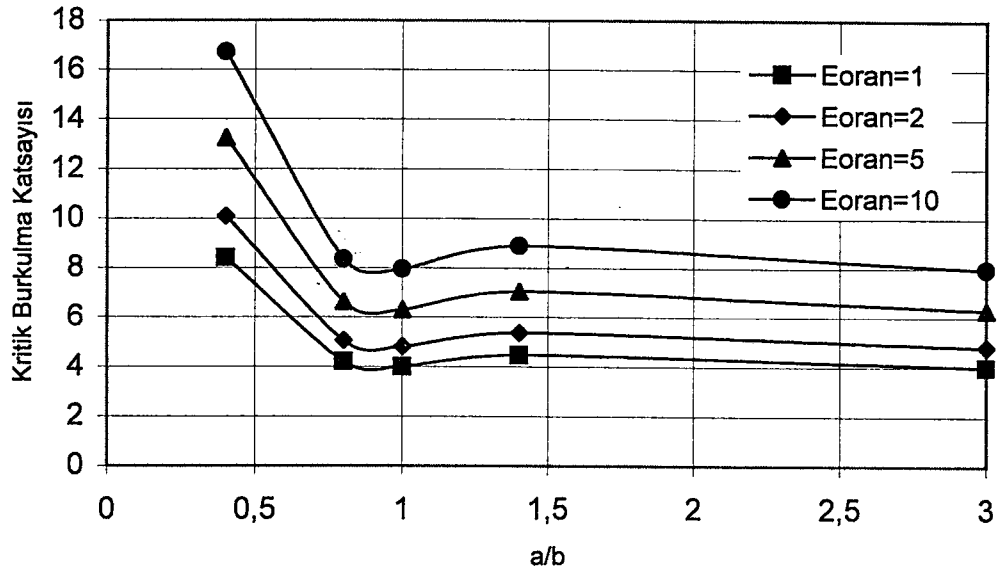
Şekil 3.22 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R = 0$)



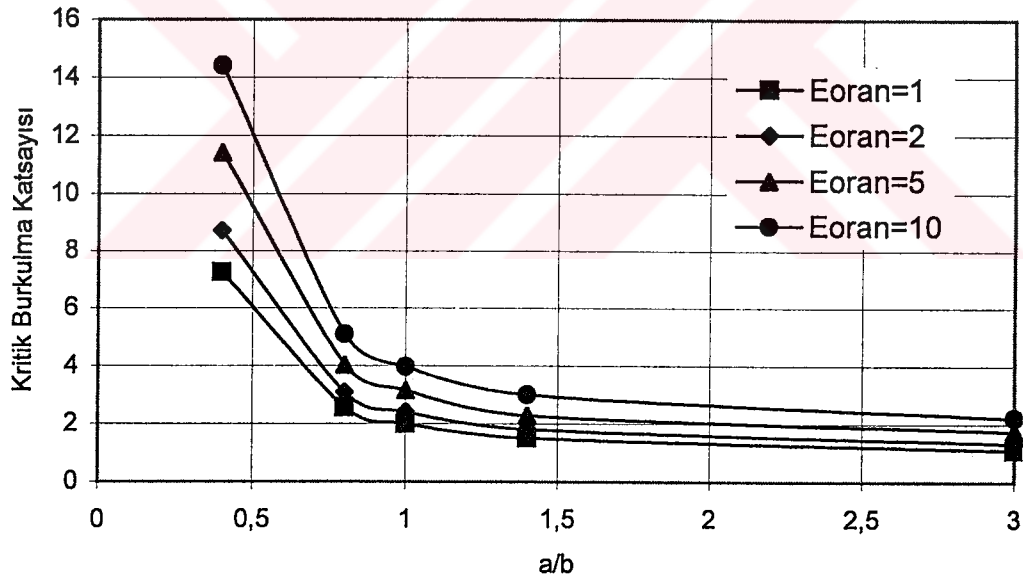
Şekil 3.23 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=1$)



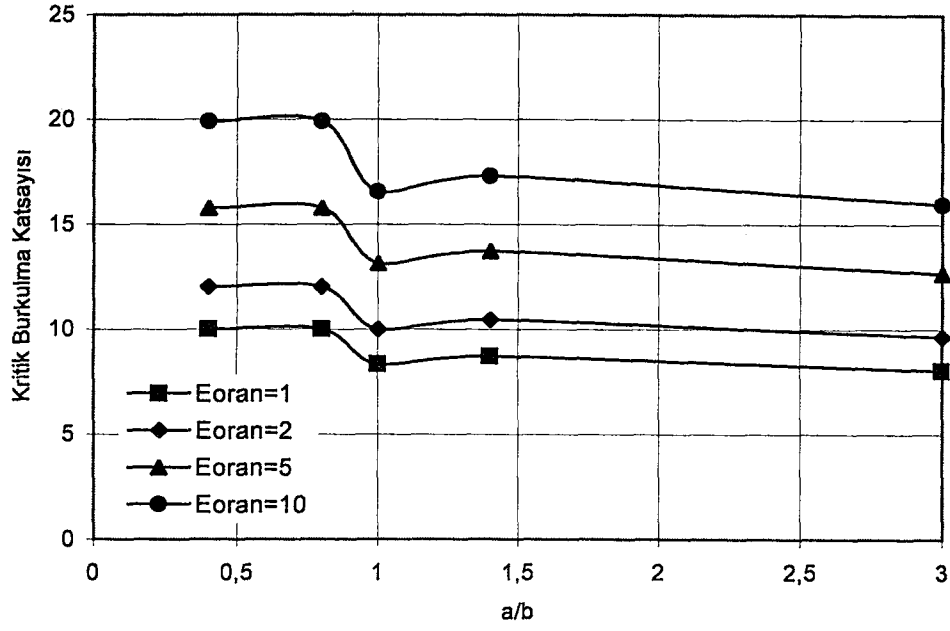
Şekil 3.24 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)



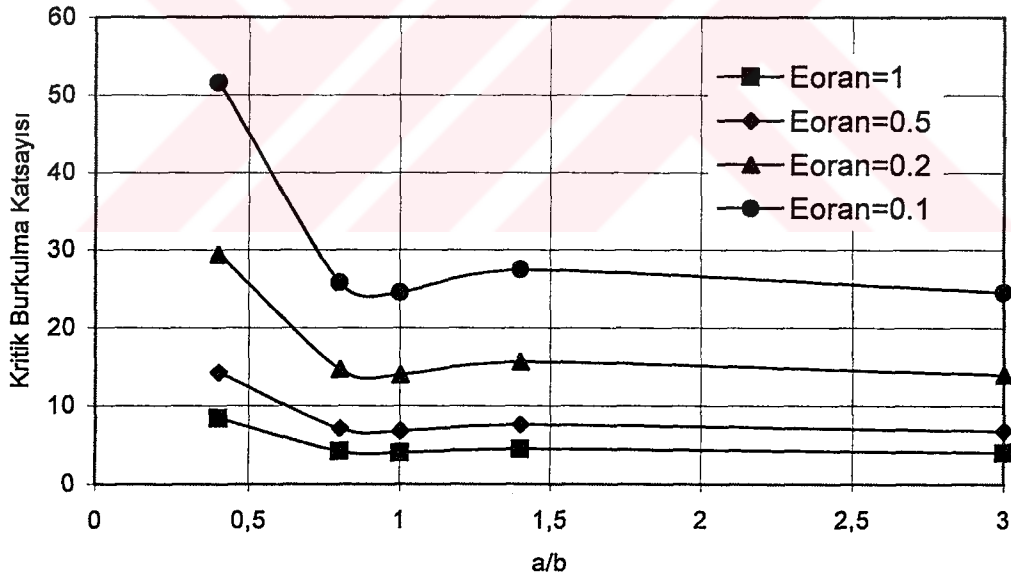
Şekil 3.25 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)



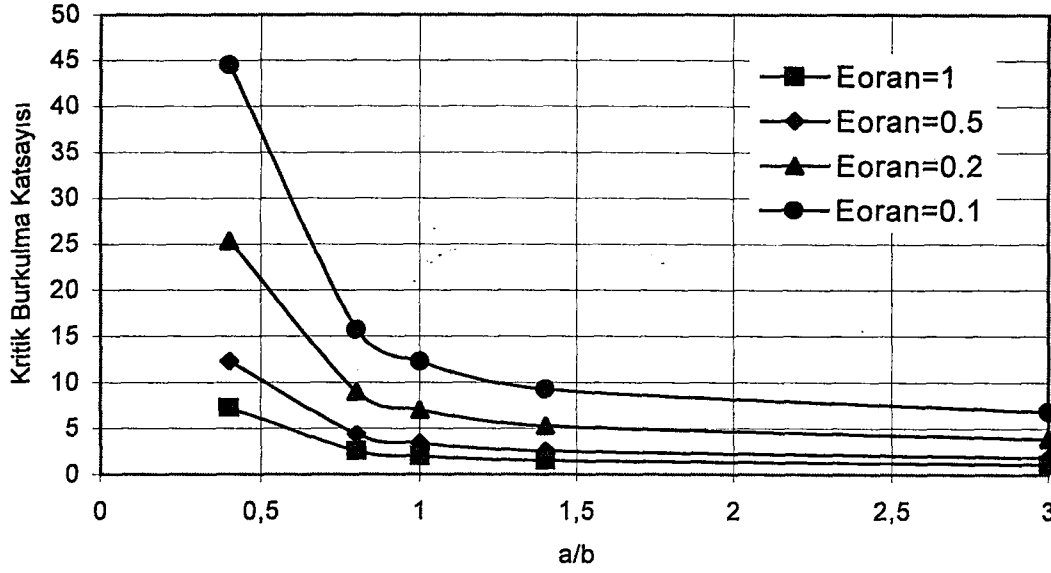
Şekil 3.26 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=1$)



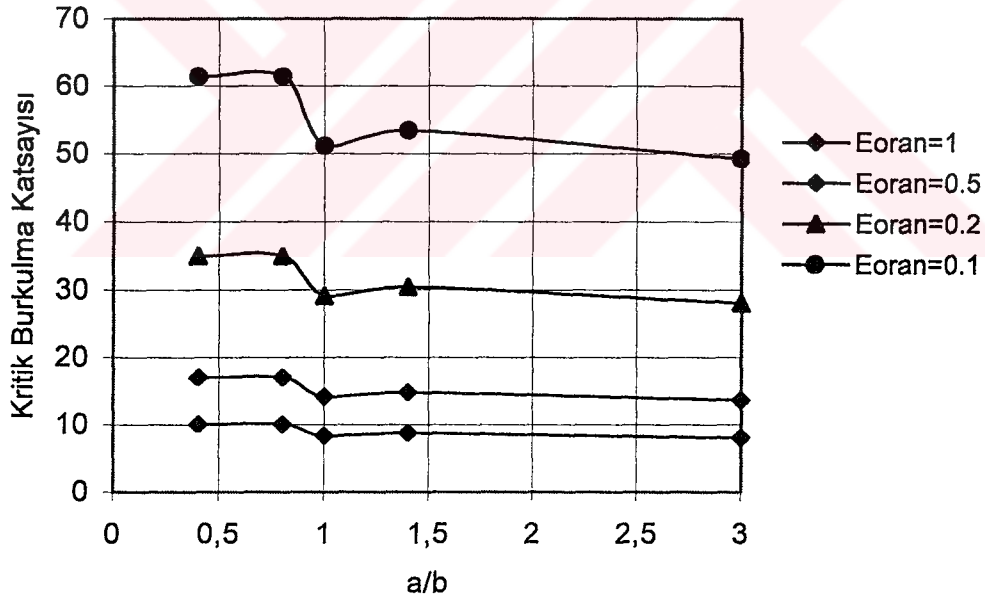
Şekil 3.27 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, $R = -1$)



Şekil 3.28 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, $R = 0$)



Şekil 3.29 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R= 1)



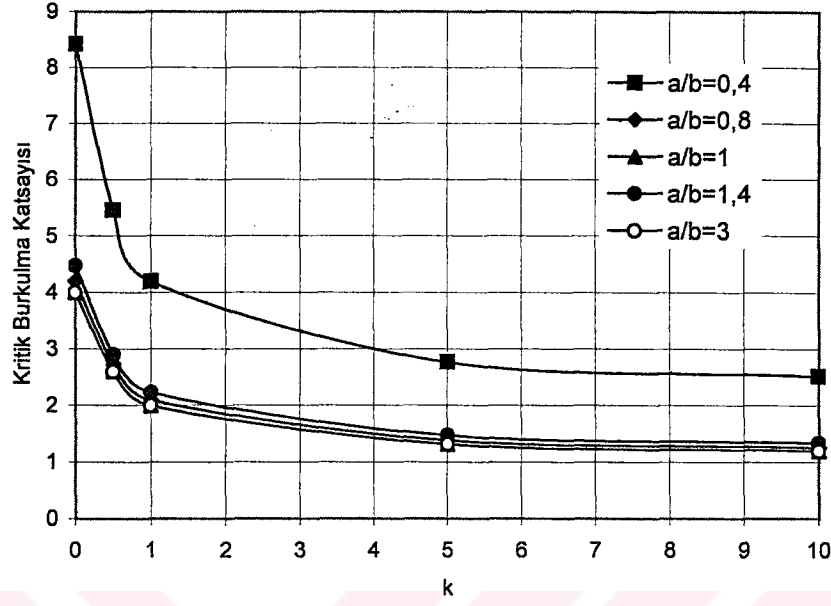
Şekil 3.30 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R= -1)

Bütün kenarlarından basit desteklenmiş (BBBB), elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy tarzı ve simetrik üstel olarak değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (3.7–3.30)'da gösterilmiştir. Grafiklerden, bütün durumlarda,

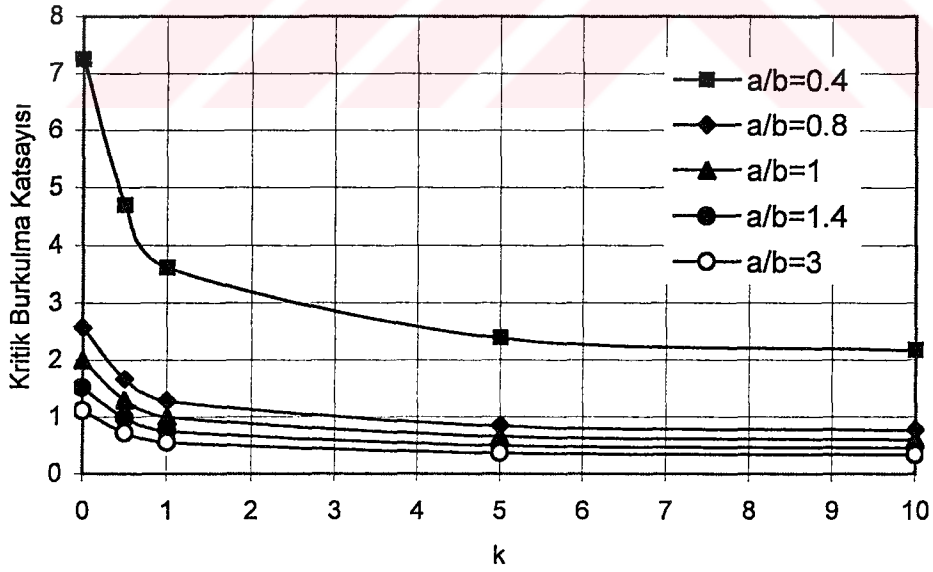
- (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır.
- A tipi plaklarda E_{oran} , B tipi plaklarda $1/E_{oran}$ parametresinin artması ile kritik burkulma katsayısının artmaktadır.
- Birbirine dik şekilde etkiyen düzlem içi basma yüklerinin, hem homojen hem de derecelendirilmiş plaklarda eğilme rijitliğinin azaltmasından dolayı, $R=1$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısının $R=0$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısından küçük olmaktadır.
- $R=1$ tipi yüklemenin aksine $R= -1$ tipi yüklemde y eksenine doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır.
- Derecelendirilmiş ve homojen plaklarda A ve B tipi kare ($a/b=1$) plaklarda $R=0$ tipi yüklemde oluşan kritik burkulma katsayısının $R=1$ tipi yüklemde oluşan burkulma katsayısının iki katıdır.
- Bütün yükleme tiplerinde, A tipi plaklarda, simetrik üstel değişimlerde elde edilen burkulma katsayısı değerleri Simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır, fakat B tipi plaklarda bunun tersi olmaktadır.
- Derecelendirme tipleri karşılaştırıldığında, B tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma katsayılarının A tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen kritik burkulma katsayılarından bütün yükleme tipleri için büyük olduğu ve E_{oran} parametresinin artması ile bu farkın üstel bir şekilde arttığı görülmüştür. (Örneğin $E_{oran} = 10$ değeri için simetrik Reddy tarzı değişimde B tipi plağın burkulma katsayısı, A tipine oranla 3.85, üstel değişimde 3.08 defa daha fazladır.)
- Her iki değişim tarzında da $E_{oran}=1$ ve $k=0$ değerleri ile homojen malzemeden yapılmış plak için kritik burkulma katsayıları elde edilir ve bu sonuçlar, $R=0$ tipi yükleme için (Reddy ve Phan, 1985) ve $R=1$ için (Tameroglu vd., 1970) verilen sonuçlar ile uyuşmaktadır.

3.3.2 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri

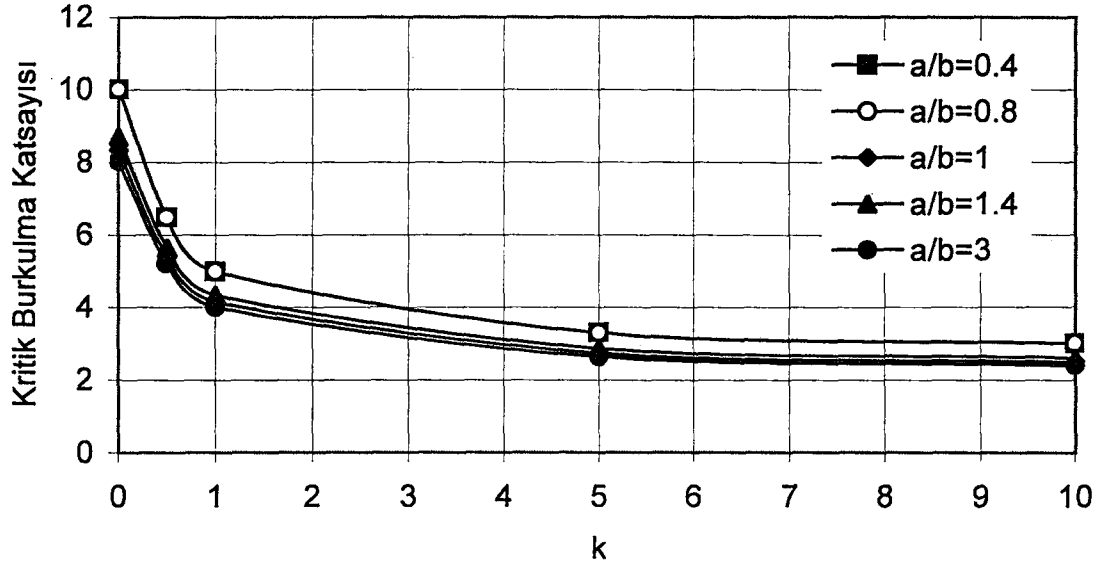
3.3.2.1 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi



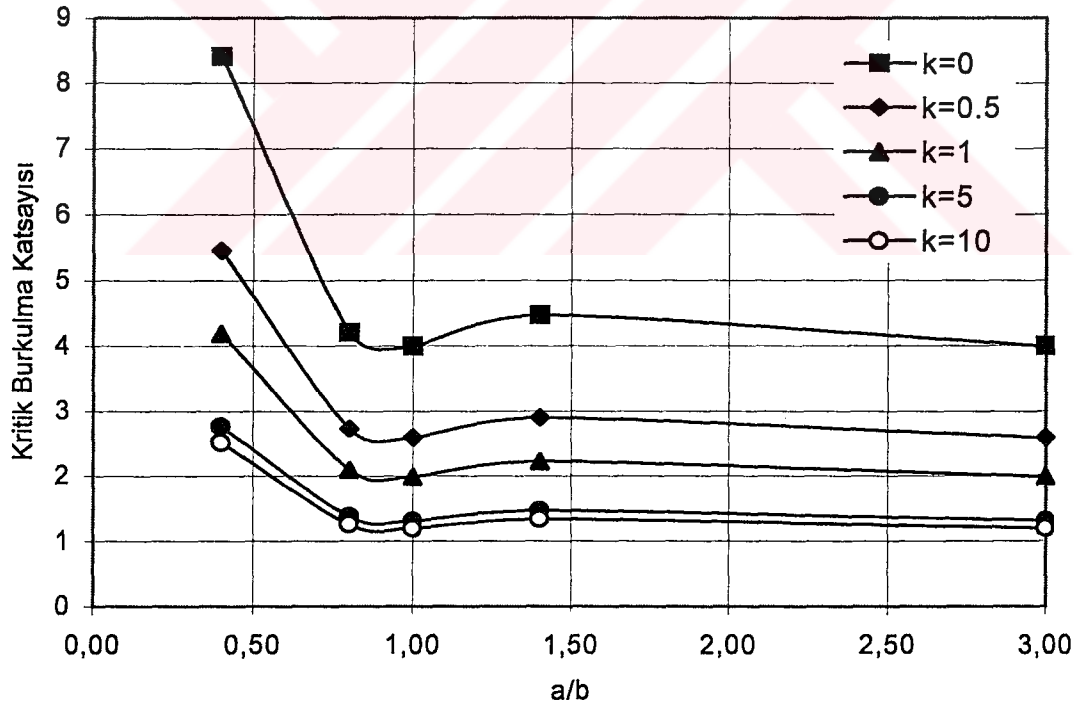
Şekil 3.31 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=0$)



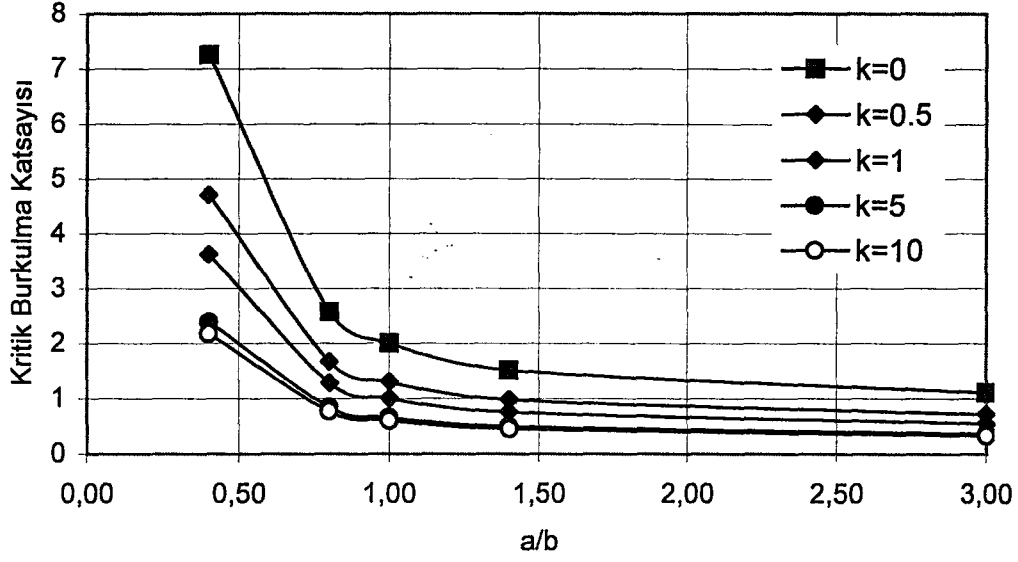
Şekil 3.32 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=1$)



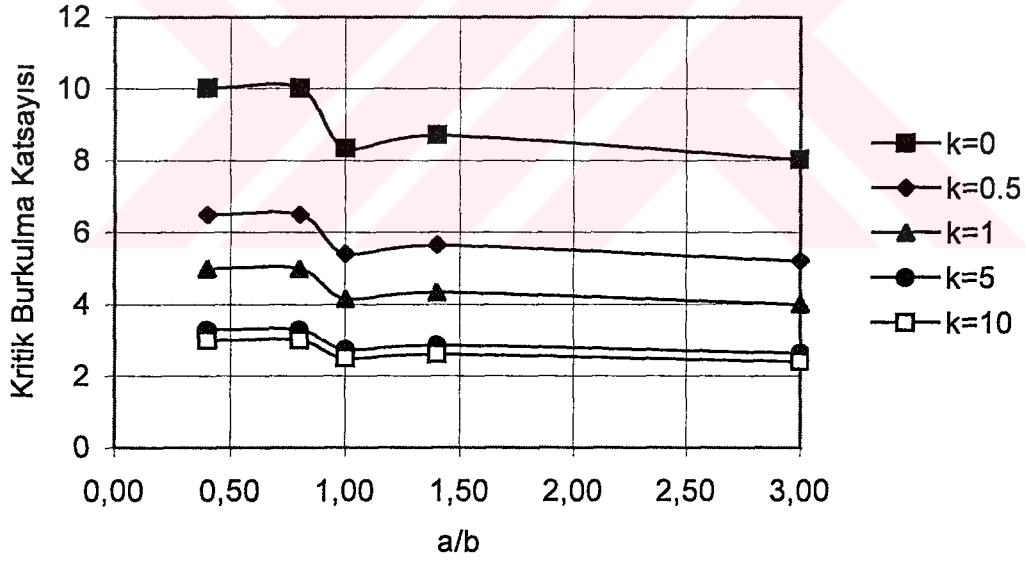
Şekil 3.33 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R = -1$)



Şekil 3.34 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R = 0$)

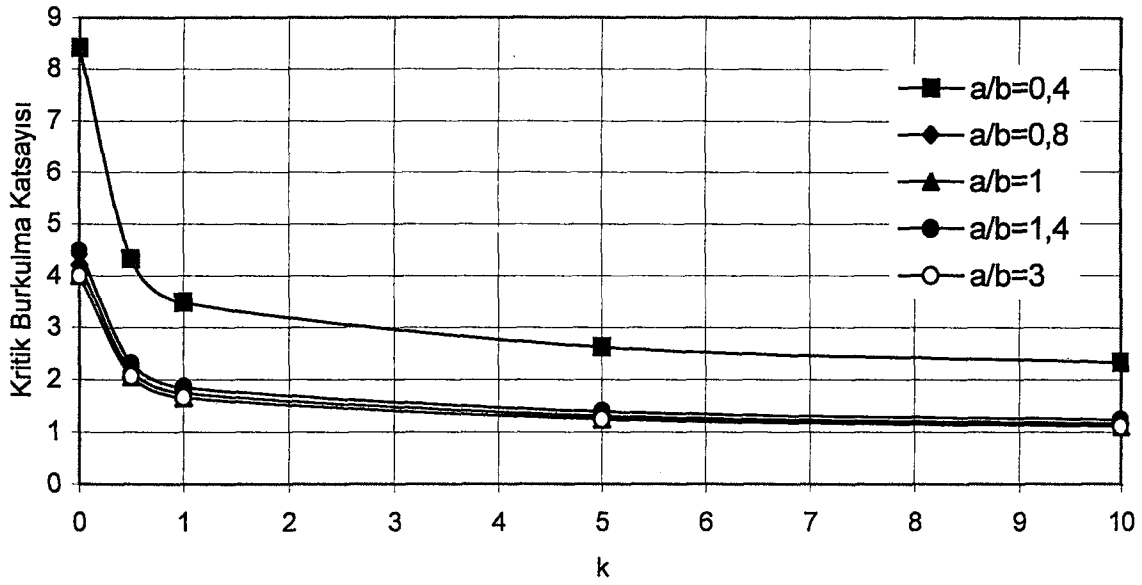


Şekil 3.35 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=1$)

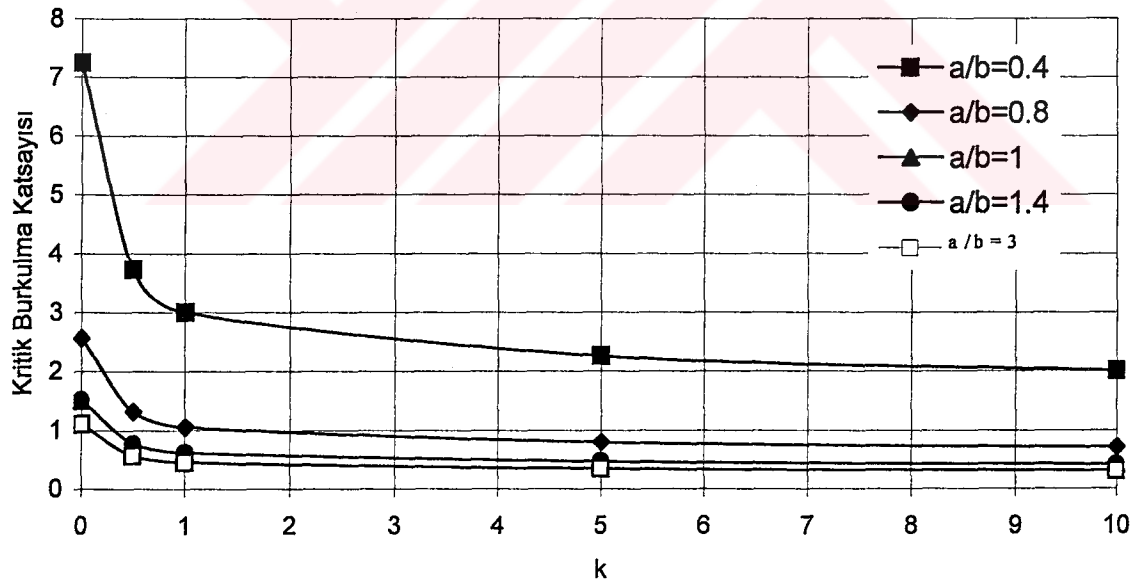


Şekil 3.36 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=-1$)

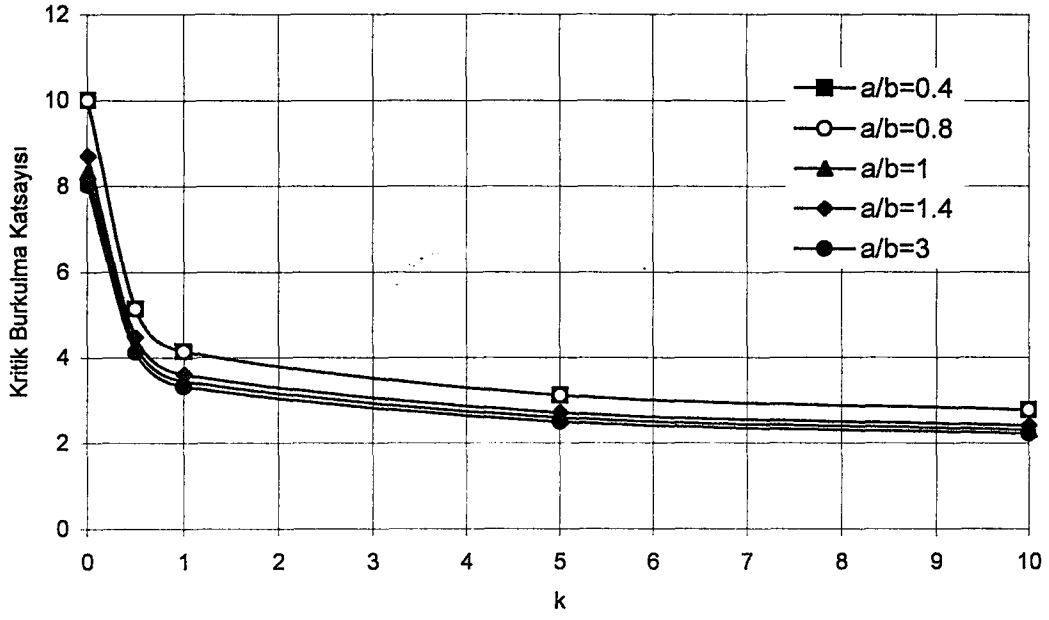
3.3.2.2 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişmesi



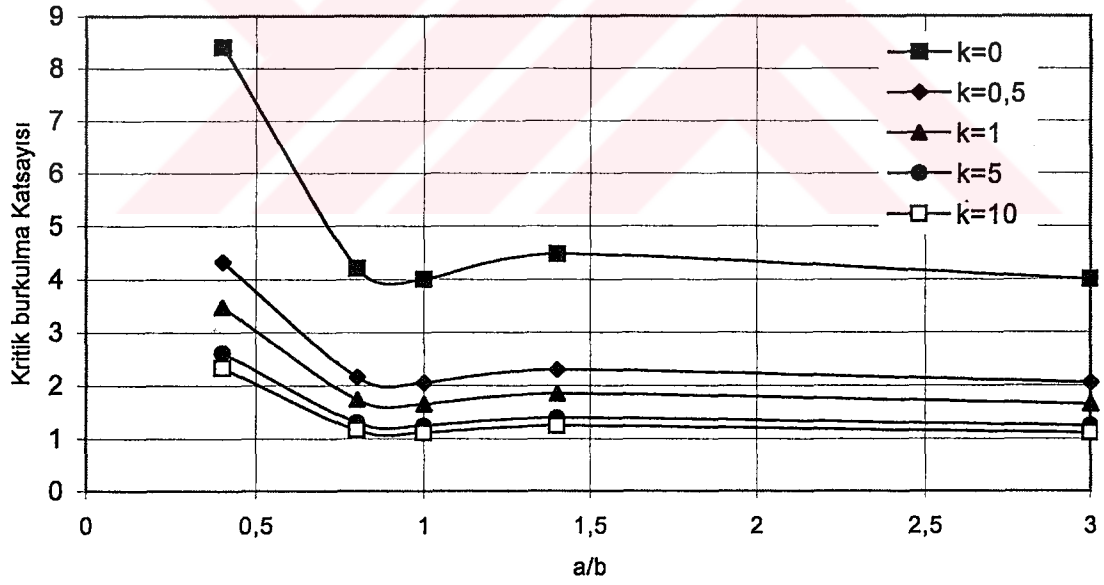
Şekil 3.37 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=0$)



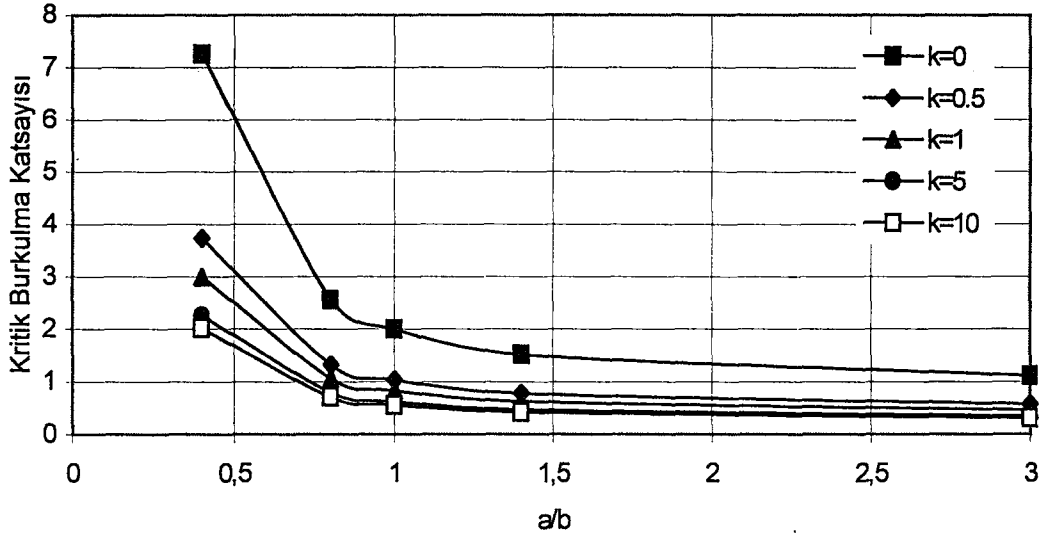
Şekil 3.38 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=1$)



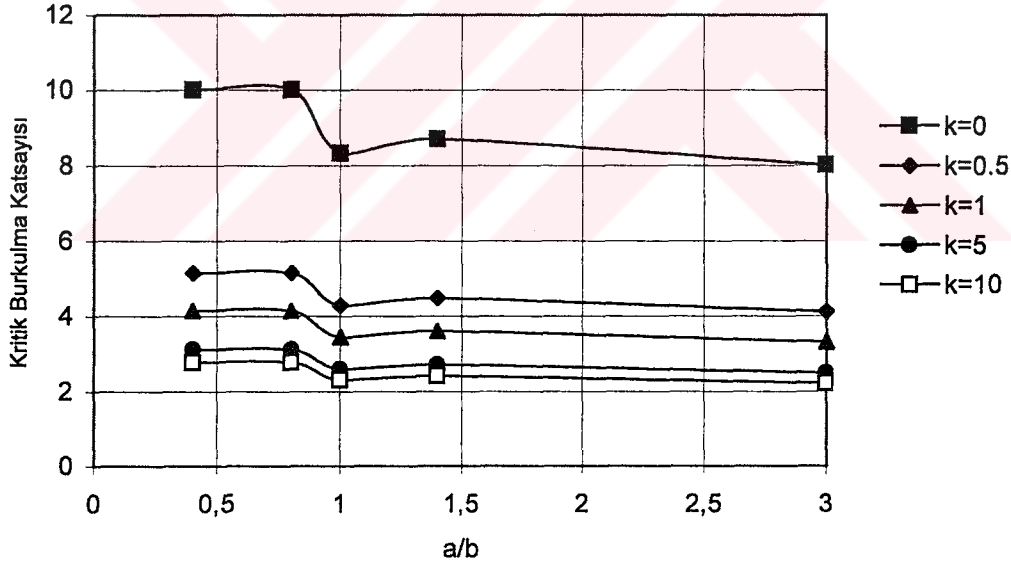
Şekil 3.39 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=-1$)



Şekil 3.40 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=0$)



Şekil 3.41 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=1$)



Şekil 3.42 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=-1$)

Bütün kenarlarından basit desteklenmiş (BBBB), elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (3.31–3.42)'de gösterilmiştir. Grafiklerden,

bütün durumlarda, (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısının azalmaktadır.

- Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır.
- Birbirine dik şekilde etkiyen düzlem içi basma yüklerinin, hem homojen hem de derecelendirilmiş plaklarda eğilme rijitliğinin azaltılmasından dolayı, $R=1$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısının $R=0$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısından küçük olmaktadır.
- $R=1$ tipi yüklemenin aksine $R=-1$ tipi yüklemde y eksenini doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır.
- Her iki tarza göre Derecelendirilmiş ve homojen plaklarda kare $(a/b=1)$ plaklarda $R=0$ tipi yüklemde oluşan kritik burkulma katsayısının $R=1$ tipi yüklemde oluşan burkulma katsayısının iki katı olmaktadır.
- Anti simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayısı değerlerinin, bütün yükleme tiplerinde anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimde elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır.
- Anti Simetrik Reddy tarzı kullanılarak derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma parametresi sonuçları (Javaheri ve Eslami, 2002c) verilen sonuçlar ile uyumaktadır.
- Her iki değişimde de $k=0$ yapılarak homojen malzemeden yapılmış plak için kritik burkulma katsayıları elde edilebilir ve bu sonuçlar, $R=0$ tipi yükleme için (Reddy ve Phan, 1985) ve $R=1$ tipi yükleme için (Tameroğlu vd., 1970) verilen sonuçlar ile uyumaktadır.

3.4 Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Plak Teorisi ile Navier Tipi Çözüm

3.4.1 Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

Üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi için kenarlarından basit desteklenmiş plak için sınır şartları Denklem (3.13)'te gösterildiği gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 u_0(x,0) &= 0, & \phi_x(x,0) &= 0 & u_0(x,b) &= 0, & \phi_x(x,b) &= 0 \\
 v_0(0,y) &= 0, & \phi_y(0,y) &= 0 & v_0(a,y) &= 0, & \phi_y(a,y) &= 0 \\
 w_0(x,0) &= 0, & w_0(x,b) &= 0, & w_0(0,y) &= 0, & w_0(a,y) &= 0 \\
 N_{xx}(0,y) &= 0, & N_{xx}(a,y) &= 0, & N_{yy}(x,0) &= 0, & N_{yy}(x,b) &= 0 \\
 M_{xx}(0,y) &= 0, & M_{xx}(a,y) &= 0, & M_{yy}(x,0) &= 0, & M_{yy}(x,b) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Denklem (2.75) ile verilen plak denklemleri, bu sınır şartları için yer değiştirme alanlarının aşağıdaki gibi trigonometrik fonksiyonlar şeklinde seçilmesi ile sağlanır (Reddy, 1997).

Yer değiştirme alanları $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 u_0(x,y) &= U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 v_0(x,y) &= V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
 w_0(x,y) &= W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 \phi_x(x,y) &= X_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 \phi_y(x,y) &= Y_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada (m, n) x ve y yönlerindeki yarım dalga sayılarıdır ve U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} , Y_{mn} sabit katsayılarıdır. Denklem (3.14) Denklem (2.75)'de yerine yazılırsa, denklemler aşağıda verilen özdeğer problemi haline gelir.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} - \lambda(M_{33}) & K_{34} & K_{35} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.15}$$

K katılık matrisi, M geometrik matris ve λ boyutsuz kritik burkulma katsayısıdır ve aşağıdaki

gibi tanımlıdır (Reddy, 2000).

$$D = \frac{E_c h^3}{12(1 - \nu^2)}, \lambda = \frac{N_x a^2}{D} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= A_{ij} - c_1 D_{ij} \\ \bar{B}_{ij} &= B_{ij} - c_1 E_{ij} \\ \bar{D}_{ij} &= D_{ij} - c_1 F_{ij} \\ \bar{F}_{ij} &= F_{ij} - c_1 H_{ij} \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}}_{ij} &= A_{ij} - c_1 \bar{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_1 D_{ij} + c_1^2 F_{ij} \\ \bar{\bar{D}}_{ij} &= D_{ij} - c_1 \bar{F}_{ij} = D_{ij} - 2c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij} \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3.18)$$

$$\bar{\bar{A}}_{ij} = \bar{A}_{ij} - 3c_1 \bar{D}_{ij} = A_{ij} - 6c_1 D_{ij} + 9c_1^2 F_{ij} \quad (i, j = 4, 5) \quad (3.19)$$

$$M_{33} = \frac{1}{a^2} (\alpha^2 + R \cdot \beta^2) \quad (3.20)$$

ve

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2, K_{12} = (A_{12} + A_{66}) \alpha \beta, K_{13} = -c_1 \alpha (E_{11} \alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \beta^2) \\ K_{14} &= \bar{B}_{11} \alpha^2 + \bar{B}_{66} \beta^2, K_{15} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}) \alpha \beta, K_{22} = A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2, K_{24} = K_{15} \\ K_{23} &= -c_1 \beta (E_{22} \beta^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \alpha^2), K_{25} = \bar{B}_{66} \alpha^2 + \bar{B}_{22} \beta^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

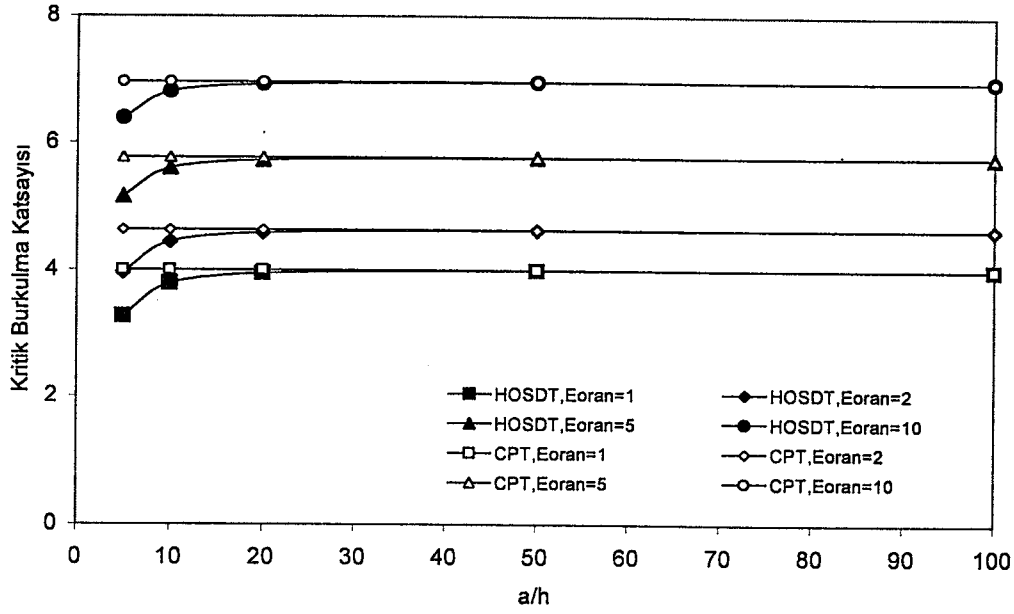
$$K_{33} = \bar{\bar{A}}_{55} \alpha^2 + \bar{\bar{A}}_{44} \beta^2 + c_1^2 (H_{11} \alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66}) \alpha^2 \beta^2 + H_{22} \beta^4)$$

$$K_{34} = \bar{\bar{A}}_{55} \alpha - c_1 (\bar{F}_{11} \alpha^3 + (\bar{F}_{12} + 2\bar{F}_{66}) \alpha \beta^2), K_{35} = \bar{\bar{A}}_{44} \beta - c_1 (\bar{F}_{22} \beta^3 + (\bar{F}_{12} + 2\bar{F}_{66}) \alpha^2 \beta)$$

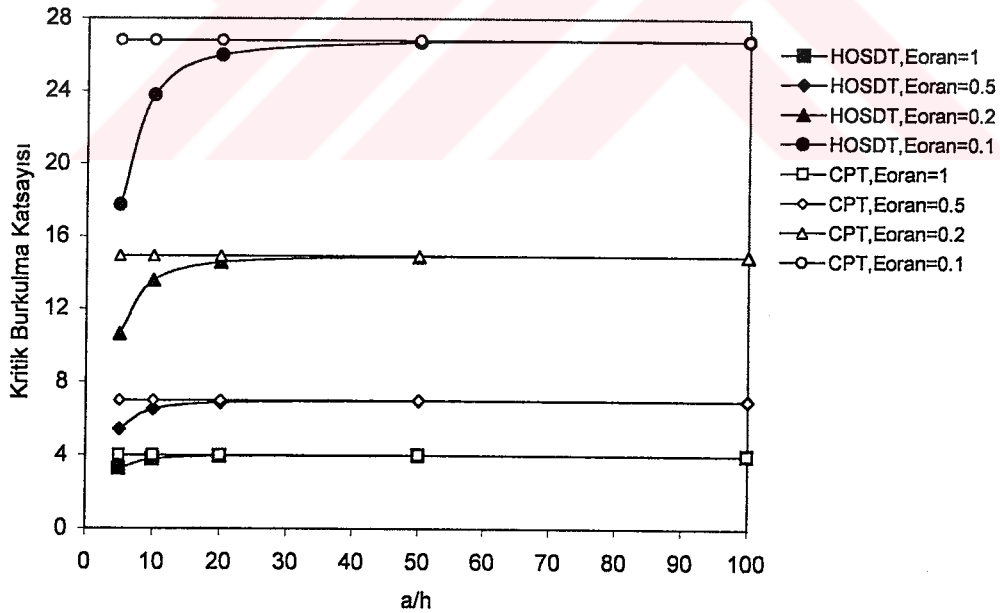
$$K_{44} = \bar{\bar{A}}_{55} + \bar{\bar{D}}_{11} \alpha^2 + \bar{\bar{D}}_{66} \beta^2, K_{45} = (\bar{\bar{D}}_{12} + \bar{\bar{D}}_{66}) \alpha \beta, K_{55} = \bar{\bar{A}}_{44} + \bar{\bar{D}}_{66} \alpha^2 + \bar{\bar{D}}_{22} \beta^2$$

$U_{mn} \neq 0$, $V_{mn} \neq 0$, $W_{mn} \neq 0$, $X_{mn} \neq 0$, $Y_{mn} \neq 0$ olması durumunda Denklem (2.75) ile verilen plak denklemlerinde çözümün sağlanabilmesi için, Denklem (3.15)'te katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Denklemi sağlayan en küçük (λ), kritik burkulma parametresidir.

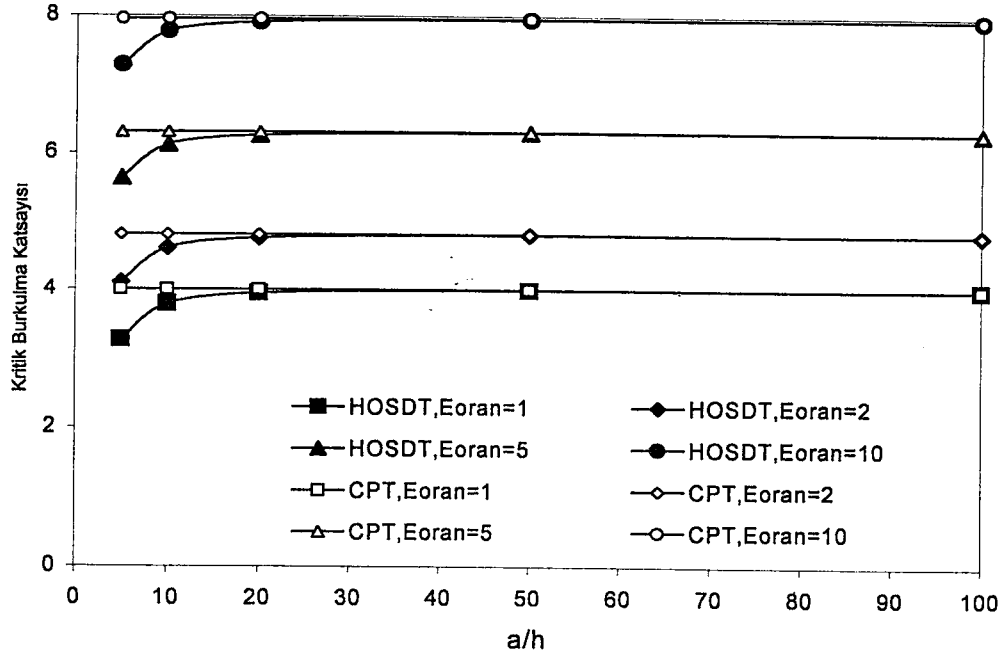
3.4.2 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri



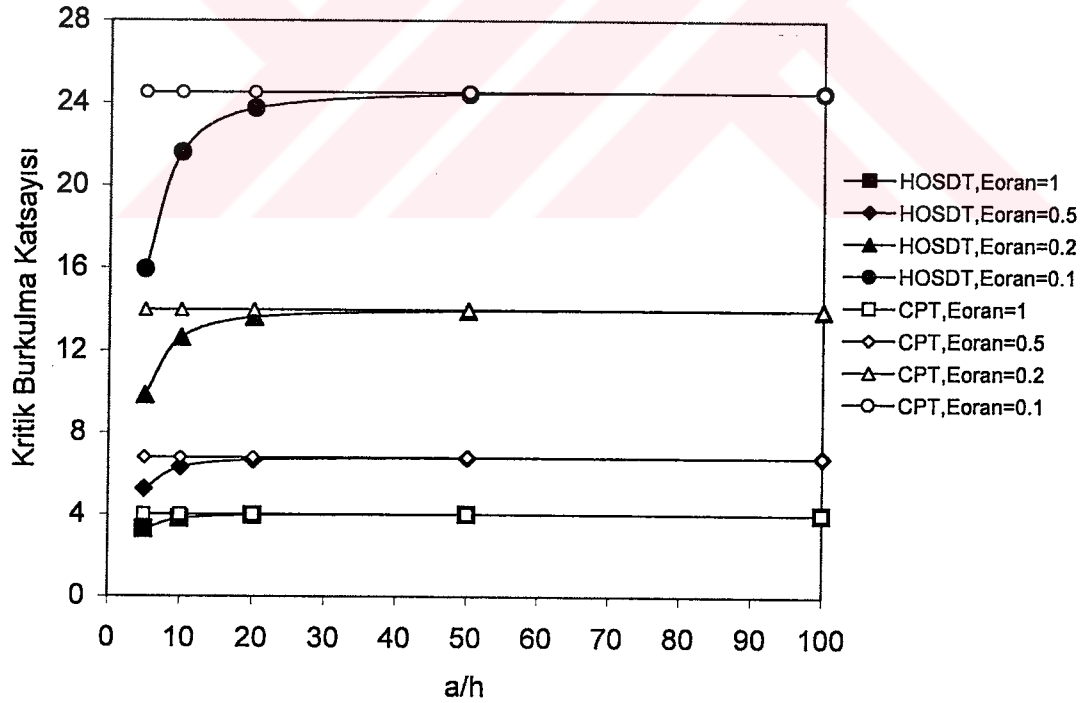
Şekil 3.43 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/h değişimi (Tip A, $R=0$, $a/b=1$)



Şekil 3.44 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/h değişimi (Tip B, $R=0$, $a/b=1$)

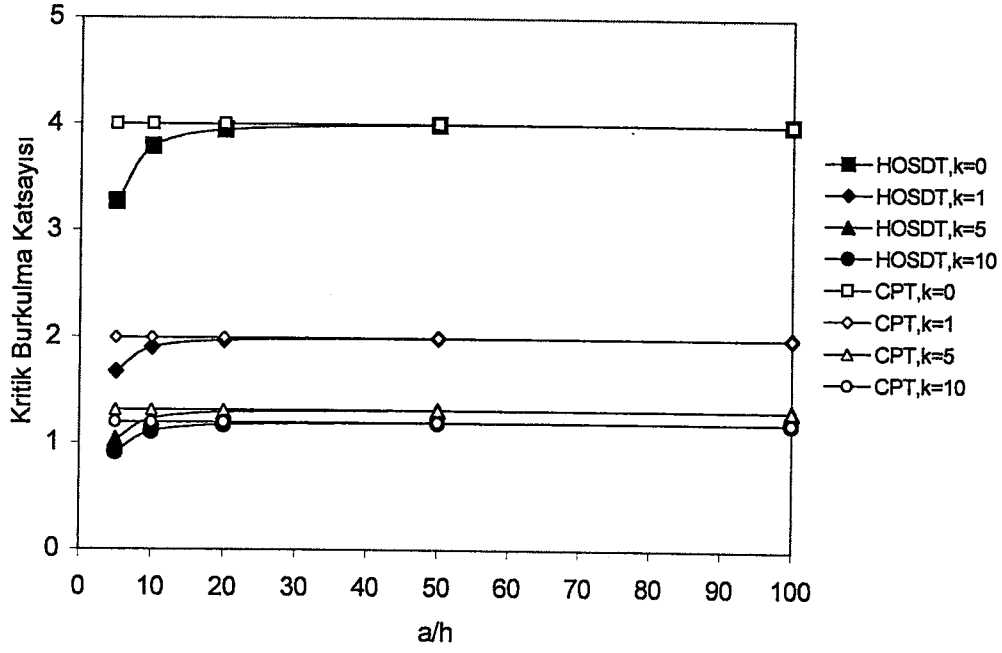


Şekil 3.45 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/h değişimi (Tip A, $R=0$, $a/b=1$)

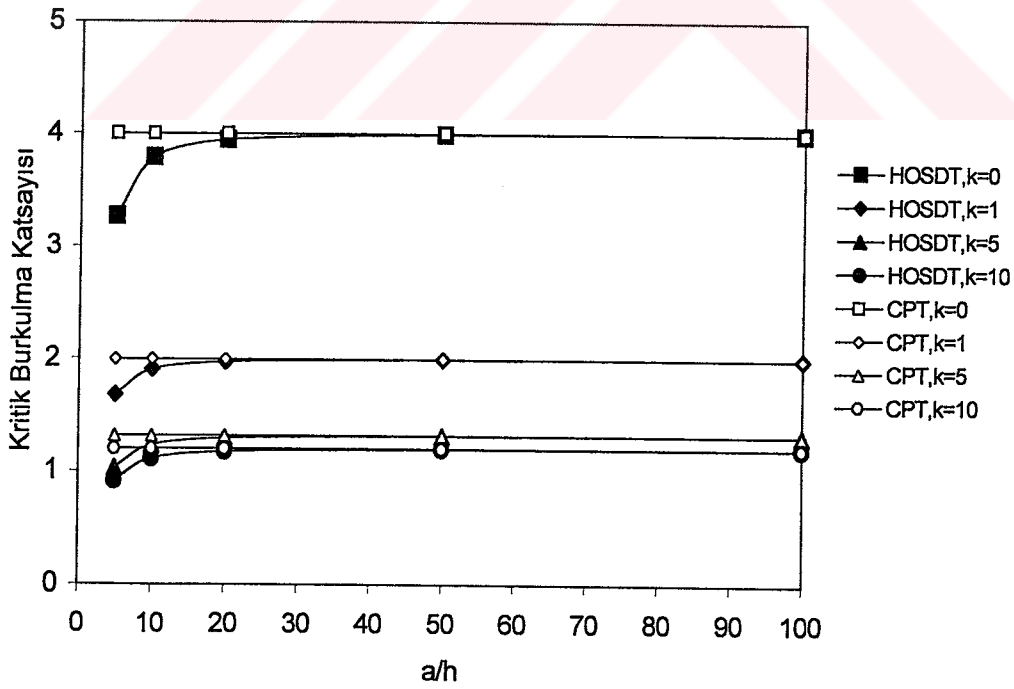


Şekil 3.46 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/h değişimi (Tip B, $R=0$, $a/b=1$)

3.4.3 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri



Şekil 3.47 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/h değişimi ($R=0, a/b=1$)



Şekil 3.48 BBBB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/h değişimi ($R=0, a/b=1$)

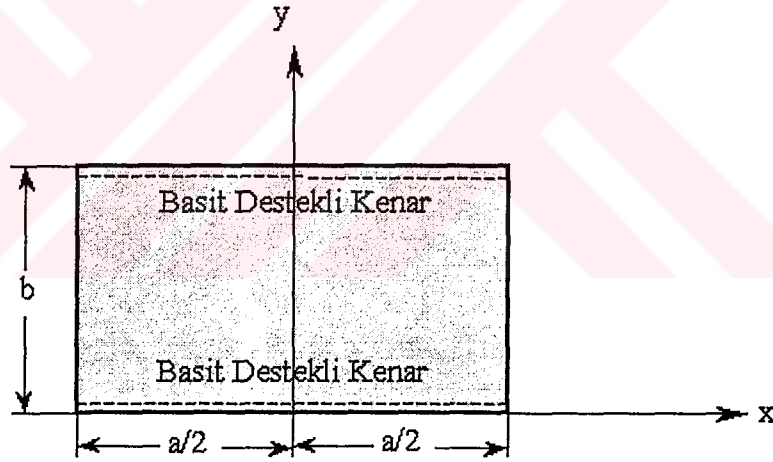
Bütün kenarlarından basit desteklenmiş (BBBB), $R=0$ tipi yüklenmiş kare şeklinde plağın burkulma davranışı üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi ile incelenmiştir. Elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy, simetrik üstel, anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori-Tanaka mikro model yaklaşımına göre değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (3.43–3.48)’de gösterilmiştir. Grafiklerden, bütün durumlarda,

- Bütün dereceli ve homojen malzemeden yapılmış plaklar için, (a/h) kenar/kalınlık oranının artması yani plağın kalınlığının azalması ile birlikte kritik burkulma katsayısını artmaktadır.
- Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır.
- Bütün değişim tipleri için, derecelendirme katsayısı $k=0$ yapıldığında homojen malzemeden yapılmış plağın kritik burkulma katsayıları elde edilmektedir ve $R=0$ tipi yükleme için (Reddy ve Phan, 1985) verilen üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi ile elde edilmiş sonuçlar ile uyushmaktadır.
- $a/h=5$ ve $a/h=100$ kalınlığına sahip plaklar için elde edilmiş sonuçlar karşılaştırıldığında, Simetrik Reddy ve simetrik üstel değişimlerde A tipi derecelendirilmiş plaklarda E_{oran} değerinin artması ile birlikte düşey kayma deformasyonlarının etkisi azalmakta fakat B tipi plaklarda bunun tersi olmaktadır. Anti simetrik Reddy ve Mori tanaka yaklaşımlarına göre derecelendirilmiş plaklarda k katsayısının artması ile kayma deformasyonlarının etkisi artmaktadır.
- Yaklaşık $a/h=50$ değeri için Klasik plak teorisi ile üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi sonuçları çakışmaktadır.

4. DEĞİŞİK SINIR ŞARTLARINA SAHİP PLAKLARIN BURKULMASININ LEVY YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Levy yöntemi karşılıklı iki paralel kenarının basit destekli diğer iki kenarının keyfi (basit, ankastre veya serbest) olarak desteklenmiş dikdörtgensel plakların eğilme, burkulma veya serbest titreşimlerinin hesaplanabilmesi için kullanılan bir yöntemdir. Levy yöntemi ile çözümde basit desteklenmiş kenarlar için sınır şartını sağlayan yer değiştirme fonksiyonları seçilir. Böylelikle iki boyutlu problem x koordinatına bağlı tek boyutlu probleme indirgenmiş olur ve diferansiyel denklemlerdeki yer değiştirme ifadeleri x değişkenine bağlı yüksek mertebeden türevler içeren adi diferansiyel denklemlere dönüşür. Elde edilen adi diferansiyel denklemler analitik yöntemler kullanılarak çözülebilir.

Bu çalışmada, karşılıklı iki paralel kenarı basit destekli Şekil 4.1 diğer kenarları değişken (BBBB, ABAB ve BBAB) sınır şartlarına sahip ve ($R=0,1,-1$) şeklinde düzlem içi yükler etkisindeki dikdörtgen bir plağın burkulma probleminin analitik çözümü için durum-uzay (state-space) yaklaşımı kullanılacaktır



Şekil 4.1 Levy yöntemi için dikdörtgensel plak geometrisi ve eksen takımı

$y=0, b$ kenarlardaki basit destekleme için sınır şartlarını (u_0, w_0, N_{yy}, M_{yy}) sağlayacak şekilde yer değiştirme alanları

$$u_0(x, y) = U_m(x) \sin(\beta y)$$

$$v_0(x, y) = V_m(x) \cos(\beta y) \quad (4.1)$$

$$w_0(x, y) = W_m(x) \sin(\beta y)$$

şeklinde seçilmiştir.

$x = \pm a/2$ kenarlarında Basit destekleme için (v_0, w_0, N_{xx}, M_{xx}), Ankastre kenarlar için ($u_0, v_0, w_0, \partial w_0 / \partial x$) sınır şartları sağlanmalıdır.

Denklem (4.1)'de verilen yer değiştirme alanlarının gerekli türevleri alınıp Denklem (2.57–59)'de yerine yazılması ile

$$\begin{aligned}
 e_1 &= A_{11} \\
 e_2 &= -\beta^2 A_{66} \\
 e_3 &= -\beta(A_{12} + A_{66}) \\
 e_4 &= -B_{11} \\
 e_5 &= \beta^2(B_{12} + 2B_{66}) \\
 e_6 &= -e_3 \\
 e_7 &= A_{66} \\
 e_8 &= -\beta^2 A_{22} \\
 e_9 &= -\beta(B_{12} + 2B_{66}) \\
 e_{10} &= \beta^3 B_{22} \\
 e_{11} &= D_{11} \\
 e_{12} &= 2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + N_{xx} \\
 e_{13} &= \beta^4 D_{22} - \beta^2 N_{yy} \\
 e_{14} &= e_4 \\
 e_{15} &= e_5 \\
 e_{16} &= -e_9 \\
 e_{17} &= -e_{10} \\
 e_{18} &= e_{11} - \frac{e_4 e_{14}}{e_{11}} \\
 e_{19} &= e_{12} - \frac{e_5 e_{14}}{e_1} - \frac{e_9 e_{16}}{e_7} + \frac{e_3 e_9 e_{14}}{e_1 e_7} \\
 e_{20} &= e_{13} - \frac{e_{10} e_{16}}{e_7} + \frac{e_3 e_{10} e_{14}}{e_1 e_7} \\
 e_{21} &= e_{15} - \frac{e_6 e_{16}}{e_7} - \frac{e_2 e_{14}}{e_1} + \frac{e_3 e_6 e_{14}}{e_1 e_7} \\
 e_{22} &= e_{17} - \frac{e_8 e_{16}}{e_7} + \frac{e_3 e_8 e_{14}}{e_1 e_7}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -e_2/e_1 & c_7 &= -e_{10}/e_7 \\
c_2 &= -e_3/e_1 & c_8 &= -e_9/e_7 \\
c_3 &= -e_5/e_1 & c_9 &= -e_{21}/e_{18} \\
c_4 &= -e_4/e_1 & c_{10} &= -e_{22}/e_{18} \\
c_5 &= -e_6/e_7 & c_{11} &= -e_{20}/e_{18} \\
c_6 &= -e_8/e_7 & c_{12} &= -e_{19}/e_{18}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} U_m \\ U'_m \\ V_m \\ V'_m \\ W_m \\ W'_m \\ W''_m \\ W'''_m \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & c_6 & 0 & c_7 & 0 & c_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_9 & c_{10} & 0 & c_{11} & 0 & c_{12} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ifadeleri elde edilmiştir (Reddy ve Khdeir, 1989; Khdeir ve Reddy, 1999).

Böylelikle yüksek mertebeden denklem sistemi $\{Z'\}$, $\{Z\}$ bilinmeyen değişkenler yardımıyla

$$\{Z'\} = [A]\{Z\} \tag{4.6}$$

şeklinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı olarak elde edilmiştir. Burada $[A]$ katsayılar matrisidir, $\{Z'\}$ ve $\{Z\}$ sütun vektörleridir ve bu vektörlerin sıra sayısı diferansiyel denklemlerdeki en büyük türev mertebesine bağlıdır. Eğer ayrık özdeğerler varsa çözümü genellikle

$$\bar{Z} = C_1 e^{\lambda_1 x} \bar{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \bar{r}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \bar{r}_n \tag{4.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, C_i sınır şartlarından oluşan katsayılar ve

$\lambda_n = [A]$ matrisinin özdeğerleri,

$\vec{r}_n = [A]$ matrisinin özvektörleridir.

$[A]$ matrisinden sekiz adet özdeğer genellikle,

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= a \pm ib \\ \lambda_{3,4} &= c \pm id \\ \lambda_{5,6} &= e \pm if \\ \lambda_{7,8} &= g \pm ih\end{aligned}\tag{4.8}$$

şeklinde kompleks eşlenik olarak elde edilmiştir. Çözüm

$$(\vec{r}_i)^T = (r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{8i})\tag{4.9}$$

olmak üzere

$$\vec{Z} = C_1 e^{\lambda_1 x} \vec{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \vec{r}_2 + \dots + C_8 e^{\lambda_8 x} \vec{r}_8\tag{4.10}$$

olarak yazılmıştır.

Yer değiştirme alanları

$$\begin{aligned}Z_1 &= U_m = \sum_{i=1}^8 A_i e^{\lambda_i x} \\ Z_3 &= V_m = \sum_{i=1}^8 B_i e^{\lambda_i x} \\ Z_5 &= W_m = \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i x}\end{aligned}\tag{4.11}$$

şeklinde sıkıştırılmış şekilde yazılmış ve sıkıştırılmış formda yer alan bilinmeyen katsayılar arasında bağıntı

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_i &= r_{1i} / r_{5i} \\ \bar{\beta}_i &= r_{3i} / r_{5i}\end{aligned}\tag{4.12}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}A_i &= \bar{\alpha}_i C_i \\ B_i &= \bar{\beta}_i C_i\end{aligned}\tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Tımarcı ve Soldatos, 1995, 2000).

Klasik Plak teorisi için daha önce elde edilen sınır şartlarına göre; n normal doğrultu, s teğetsel doğrultu olmak üzere aşağıdaki çiftlerde en az bir değişkenin sınırlarda sağlanması gerekir.

$$(u_n, N_{nn}), (u_s, N_{ns}), (w_0, V_n), (\partial w_0 / \partial n, M_{nn}) \quad (4.14)$$

Buna göre Şekil 4.1’de gösterildiği gibi bir koordinat sistemine sahip dikdörtgen plak $y=0$ ve $y=b$ kenarlarından basit desteklidir ve

$$n = \pm y, s = \pm x, u_n = v_0, u_s = u_0 \quad (4.15)$$

olmak üzere;

$$u_0 = 0, N_{yy} = 0, w_0 = 0, M_{yy} = 0 \quad (4.16)$$

olmalıdır. Diğer tip sınır şartları için $x = \pm a/2$ kenarlarında

Basit Destekli kenarlar için

$$v_0 = 0, N_{xx} = 0, w_0 = 0, M_{xx} = 0 \quad (4.17)$$

Ankastre kenarlar için

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0, \partial w_0 / \partial x = 0 \quad (4.18)$$

sınır şartlarının sağlanması gerekmektedir.

Bu sınır şartlarının Denklem (4.10)’da kullanılması ile

$$[D][c] = 0 \quad (4.19)$$

şeklinde homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin sıfırdan farklı çözüm vermesi için $\det[D] = 0$ olmalıdır ve buradan kritik burkulma katsayısı bulunur (Tımarcı, 1993; Hadian ve Nayfeh, 1993). $[A]$ matrisinden elde edilen özdeğerlerin kompleks eşlenik olmasından dolayı $[D]$ matrisi de kompleks sayılardan oluşacaktır, bu durumda reel elemanlardan oluşan bir matris elde etmek için Euler bağıntılarından $(e^{(a \pm ib)x} = e^{ax} [\cos(bx) \pm i \cdot \sin(bx)])$ yararlanılarak dönüşüm yapılmıştır ve

$$\begin{aligned}
k_1 &= e^{ax} \cos(bx) & \bar{C}_1 &= C_1 + C_2 \\
k_2 &= e^{ax} \sin(bx) & \bar{C}_2 &= i(C_1 - C_2) \\
k_3 &= e^{cx} \cos(dx) & \bar{C}_3 &= C_3 + C_4 \\
k_4 &= e^{cx} \sin(dx) & \bar{C}_4 &= i(C_3 - C_4) \\
k_5 &= e^{fx} \cos(hx) & \bar{C}_5 &= C_5 + C_6 \\
k_6 &= e^{fx} \sin(hx) & \bar{C}_6 &= i(C_5 - C_6) \\
k_7 &= e^{gx} \cos(hx) & \bar{C}_7 &= C_7 + C_8 \\
k_8 &= e^{gx} \sin(hx) & \bar{C}_8 &= i(C_7 - C_8)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde tanımlanarak

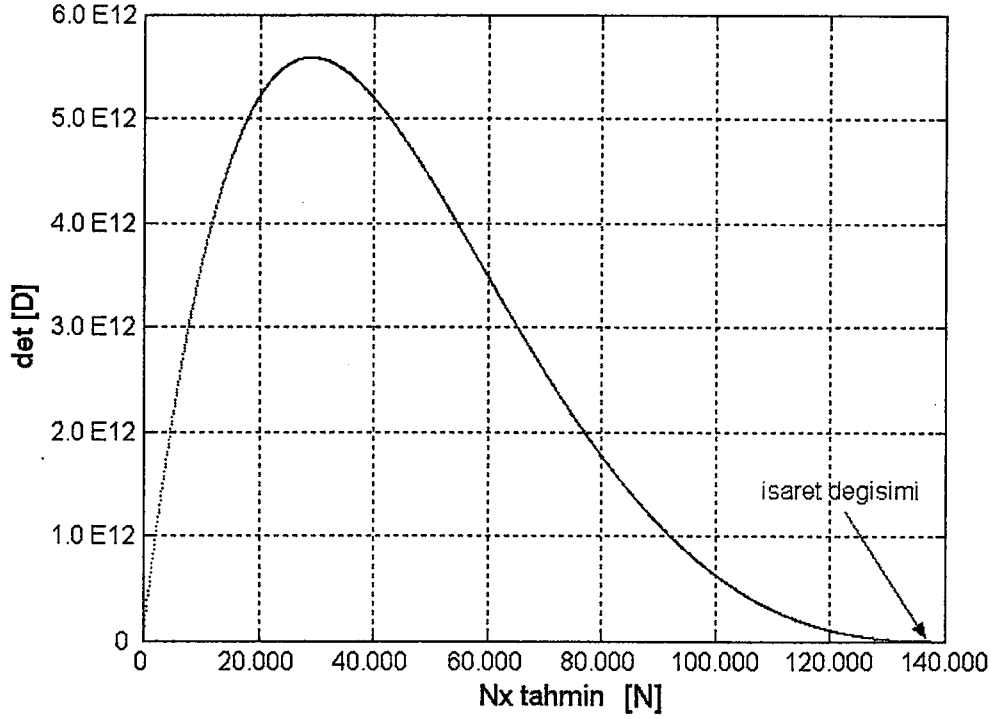
$$\begin{aligned}
U_m &= \bar{C}_1(\bar{\alpha}_{1R}k_1 - \bar{\alpha}_{1I}k_2) + \bar{C}_2(\bar{\alpha}_{1R}k_2 + \bar{\alpha}_{1I}k_1) + \bar{C}_3(\bar{\alpha}_{3R}k_3 - \bar{\alpha}_{3I}k_4) \\
&+ \bar{C}_4(\bar{\alpha}_{3R}k_4 + \bar{\alpha}_{3I}k_3) + \bar{C}_5(\bar{\alpha}_{5R}k_5 - \bar{\alpha}_{5I}k_6) + \bar{C}_6(\bar{\alpha}_{5R}k_6 + \bar{\alpha}_{5I}k_5) \\
&+ \bar{C}_7(\bar{\alpha}_{7R}k_7 - \bar{\alpha}_{7I}k_8) + \bar{C}_8(\bar{\alpha}_{7R}k_8 + \bar{\alpha}_{7I}k_7)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
V_m &= \bar{C}_1(\bar{\beta}_{1R}k_1 - \bar{\beta}_{1I}k_2) + \bar{C}_2(\bar{\beta}_{1R}k_2 + \bar{\beta}_{1I}k_1) + \bar{C}_3(\bar{\beta}_{3R}k_3 - \bar{\beta}_{3I}k_4) \\
&+ \bar{C}_4(\bar{\beta}_{3R}k_4 + \bar{\beta}_{3I}k_3) + \bar{C}_5(\bar{\beta}_{5R}k_5 - \bar{\beta}_{5I}k_6) + \bar{C}_6(\bar{\beta}_{5R}k_6 + \bar{\beta}_{5I}k_5) \\
&+ \bar{C}_7(\bar{\beta}_{7R}k_7 - \bar{\beta}_{7I}k_8) + \bar{C}_8(\bar{\beta}_{7R}k_8 + \bar{\beta}_{7I}k_7)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$W_m = \bar{C}_1k_1 + \bar{C}_2k_2 + \bar{C}_3k_3 + \bar{C}_4k_4 + \bar{C}_5k_5 + \bar{C}_6k_6 + \bar{C}_7k_7 + \bar{C}_8k_8 \tag{4.23}$$

elde edilmiştir. Burada $\bar{\alpha}_{iR}, \bar{\beta}_{iR}$ ve $\bar{\alpha}_{iI}, \bar{\beta}_{iI}$ katsayıları sırasıyla Denklem (4.12)'de tanımlanmış olan α_i ve β_i katsayılarının reel ve imajiner kısımlarını göstermektedir. Sayısal hesaplama işlemlerinde, geometrisi, malzeme özellikleri ve burkulma yarı dalgı sayıları (m,n) girilen dikdörtgensel bir plak için, öncelikle bir tahmini yük değeri seçilmiştir, bu yük değeri yardımı ile hesaplanan [A] katsayılar matrisinin özdeğer ve özvektör değeri bulunmuş, destekleme tipine göre sağlanması gereken sınır şartları yardımıyla [D] matrisi oluşturulmuş ve bu matrisin determinantı hesaplanmış ve her adımda işareti kontrol edilerek işaret değıştirdiğı değere kadar tahmini yük değeri istenen hassasiyet değeri kadar artırılarak değıştirilmiştir (Şekil 4.2).

[D] matrisinin determinantının ilk işaret değıştirdiğı yük değeri kritik yük değeri'dir. Plak kenar oranları ve (m,n) yarı dalgı sayılarına bağılı olarak değışik sonuçlar elde edilebilir fakat bununla beraber en küçük burkulma katsayısına karşılık gelen yarı dalgı sayıları dikkate alınmalıdır. Bu hesaplamaların yapılabilmesi için Matlab paket programı (Yüksel, 1996; Güneş ve Yıldız, 1997; Uzunoğlu vd., 2002) kullanılarak akış diyagramı Ek 6'da verilen bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.



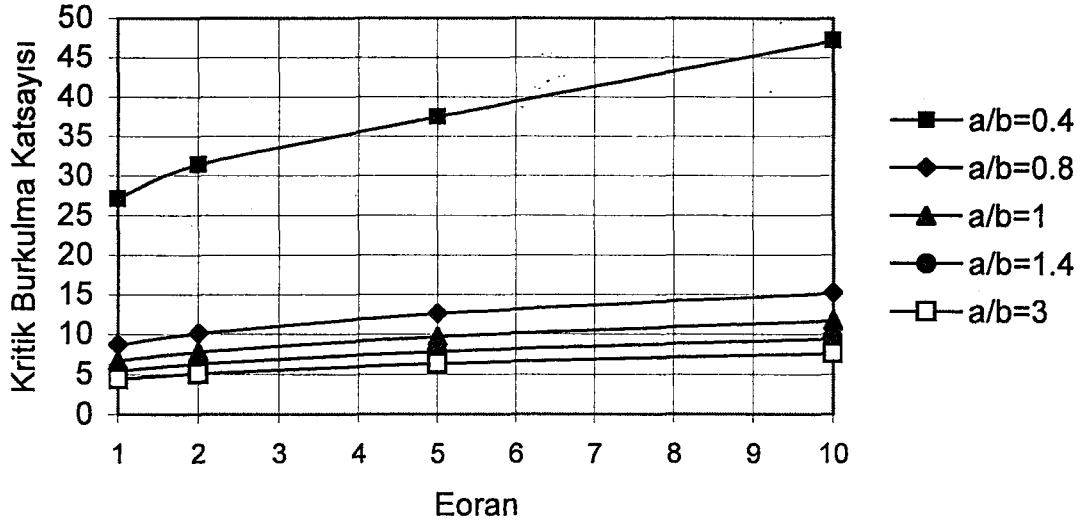
Şekil 4.2 N_x tahmin değerinin aldığı değerlere göre $\det[D]$ işaret değişimi

4.1 Derecelendirilmiş Lineer İzotrop Malzemeden Yapılmış Plâgın ABAB Şeklinde Desteklenmesi

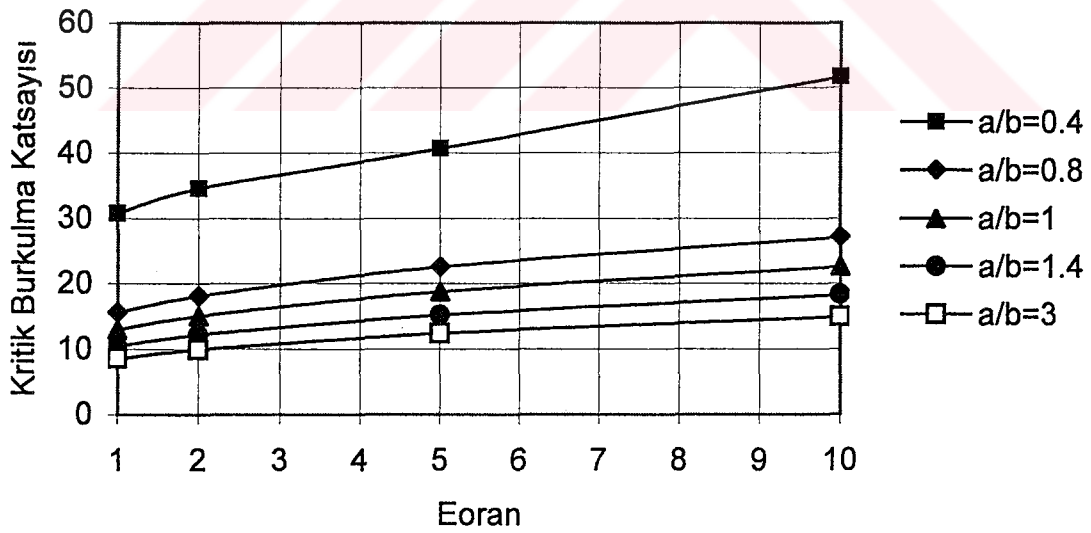
Bu kısımda, Bölüm 3.1’de gösterildiği gibi düzlem içi kuvvetlerin etkisinde, karşılıklı iki kenarı basit destekli diğer iki kenarı basit ve ankastre kombinasyonu (BBBB, BBAB ve ABAB) olacak şekilde desteklenmiş simetrik ve anti simetrik çeşitli mikro ve makro yaklaşımlara göre derecelendirilmiş plâgın burkulma analizi sonucunda elde edilmiş sonuçlar verilmiştir. Çözüm, Klasik Plak Teorisi Levy yöntemi ve Durum–Uzay (State Space) yaklaşımı ile yapılmıştır. Boyutsuz kritik burkulma yükü parametresi $\lambda_{kr} = N_x a^2 / \pi^2 D$ olarak seçilmiş ve Ek 6’da akış diyagramı verilen bilgisayar programı yardımıyla, değişik destekleme koşullarında derecelendirilmiş plak tipleri için kritik burkulma katsayısının değerleri a/b plak kenar oranları ve derecelendirme katsayısına göre elde edilmiş ve bu sonuçlar grafikler yardımıyla gösterilmiştir.

4.1.1 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri

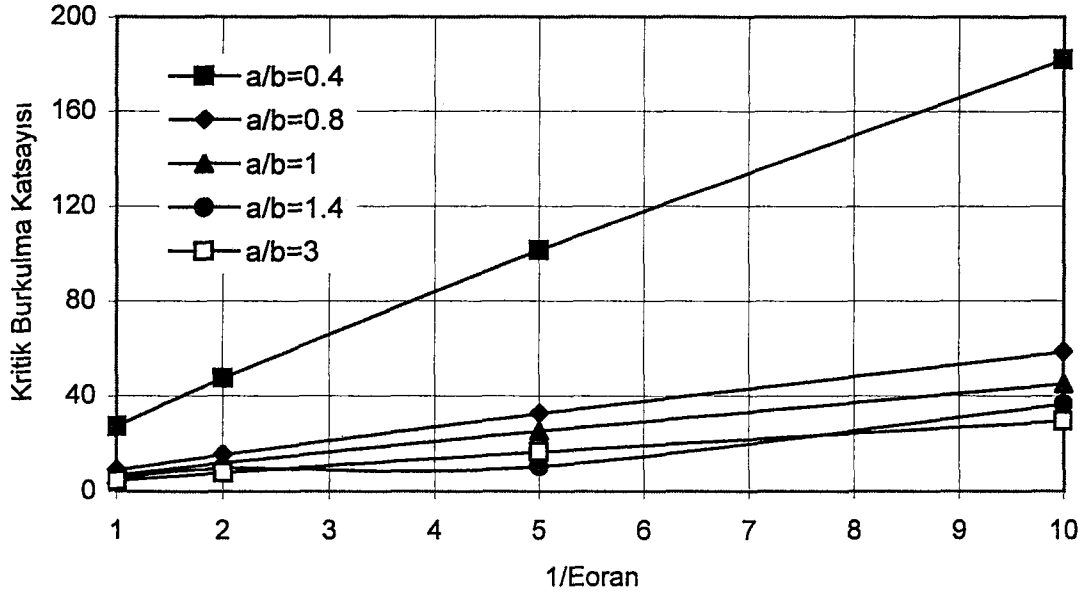
4.1.1.1 Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi



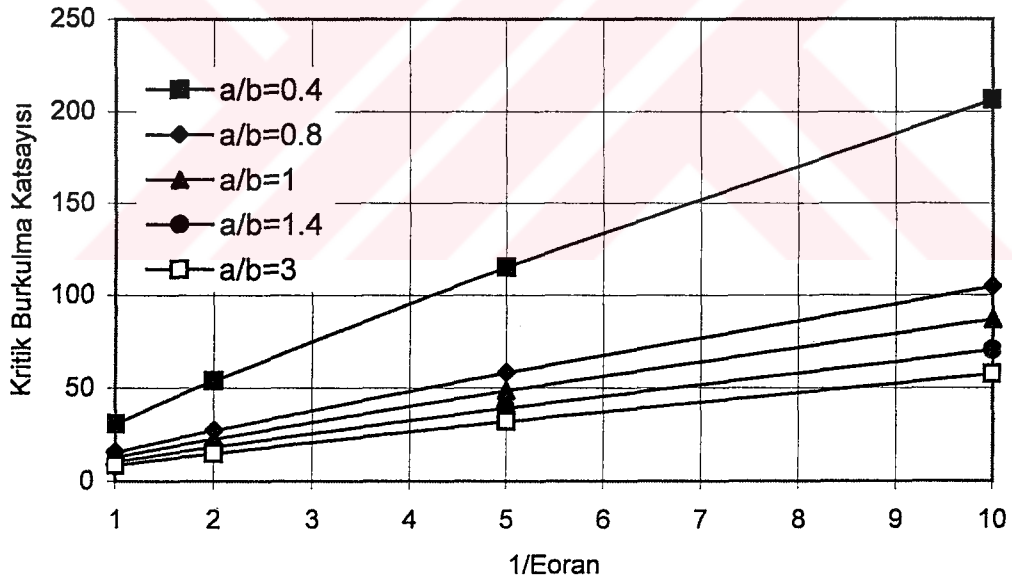
Şekil 4.3 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)



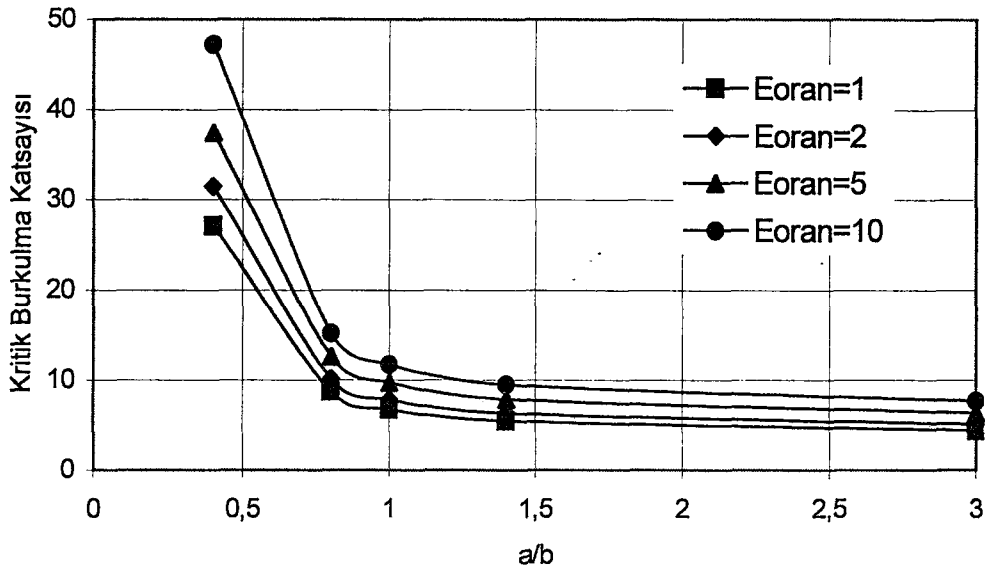
Şekil 4.4 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)



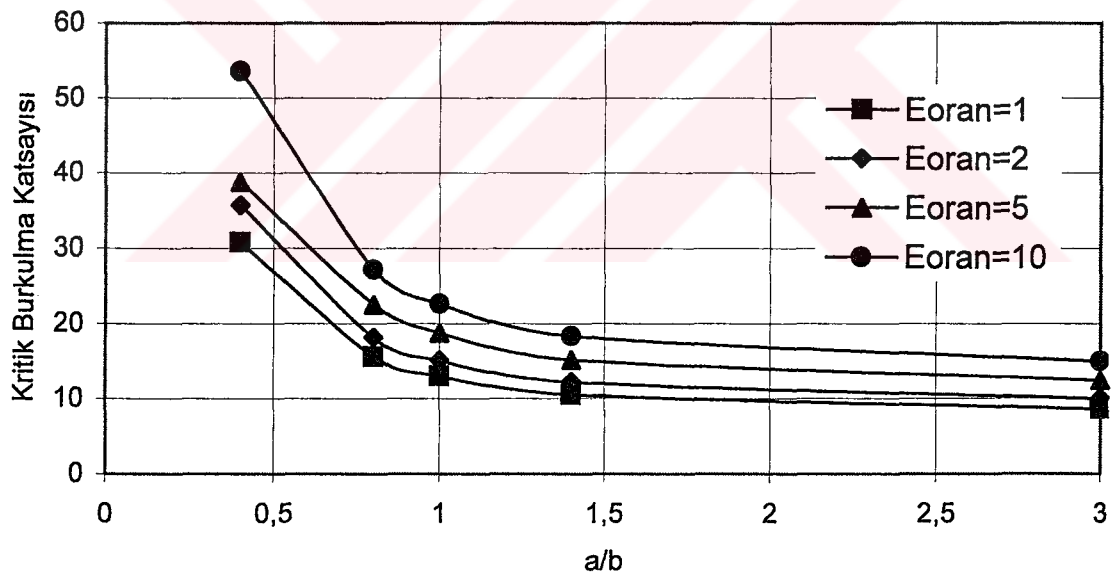
Şekil 4.5 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)



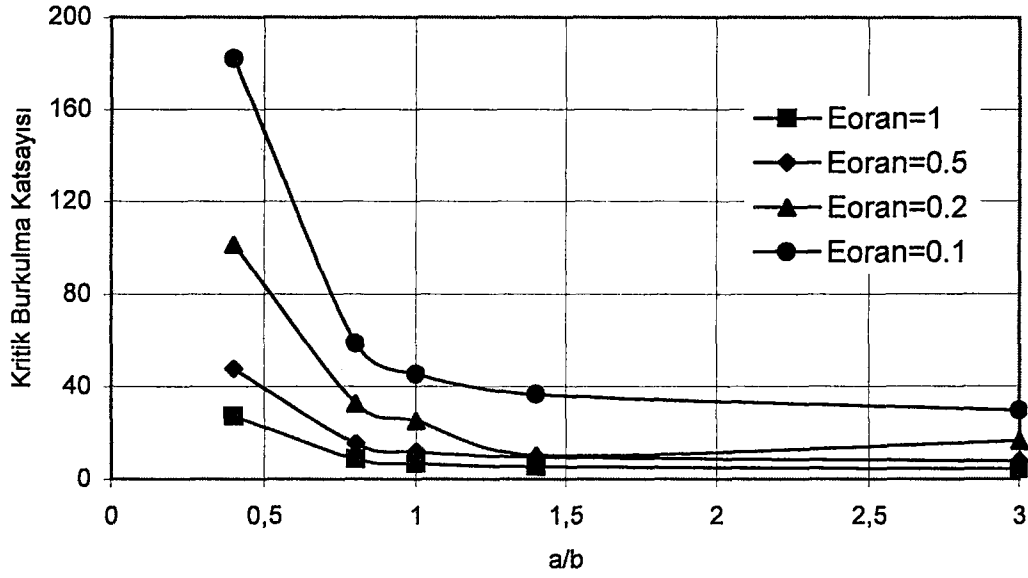
Şekil 4.6 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)



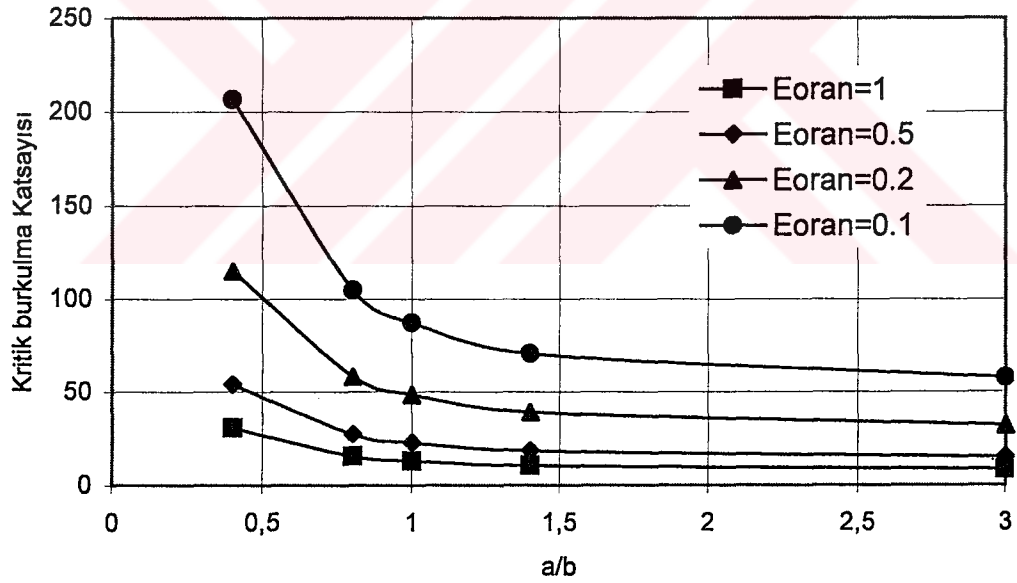
Şekil 4.7 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R= 0)



Şekil 4.8 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R= -1)

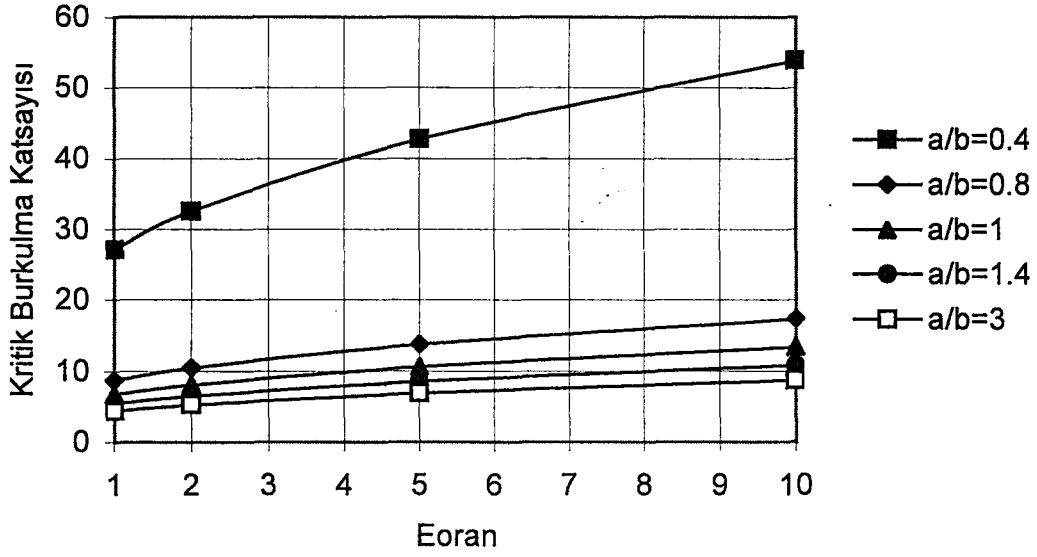


Şekil 4.9 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=0$)

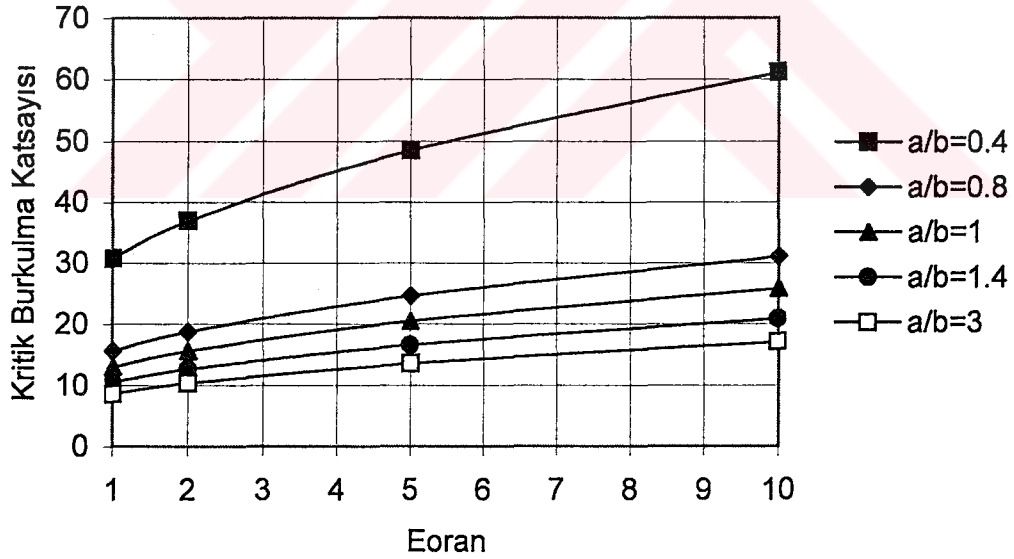


Şekil 4.10 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip B, $R=-1$)

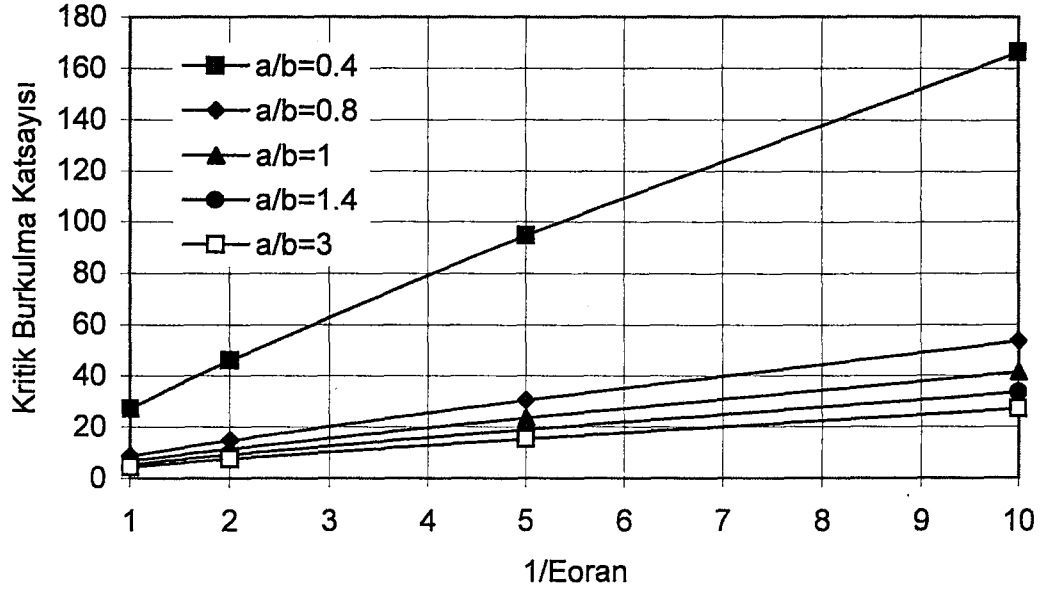
4.1.1.2 Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişmesi



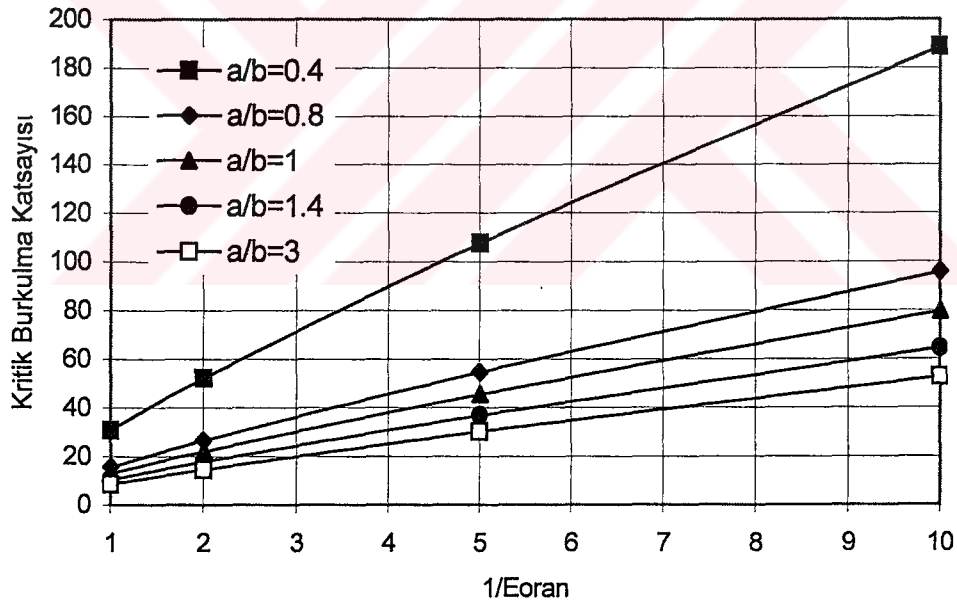
Şekil 4.11 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)



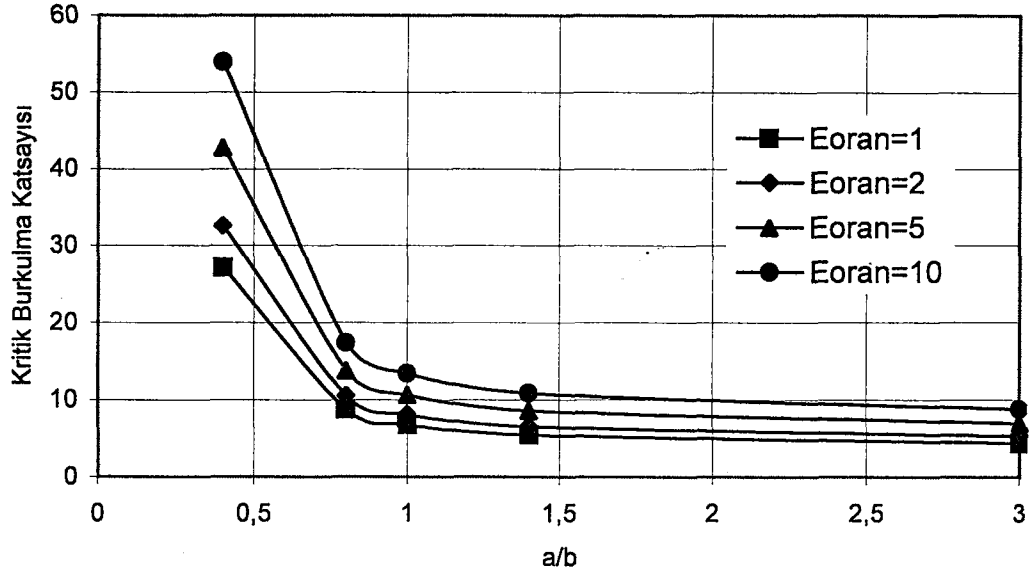
Şekil 4.12 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)



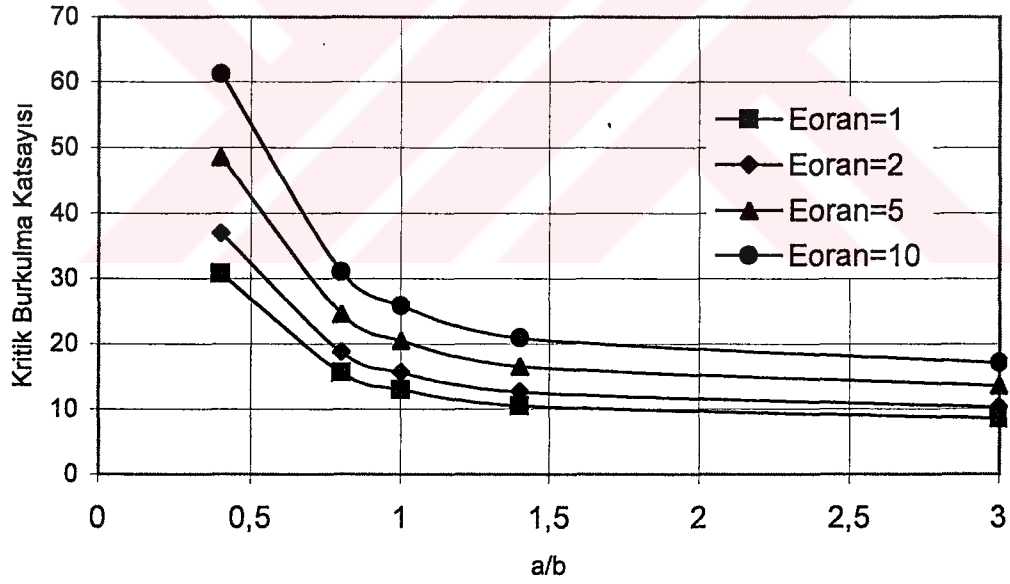
Şekil 4.13 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)



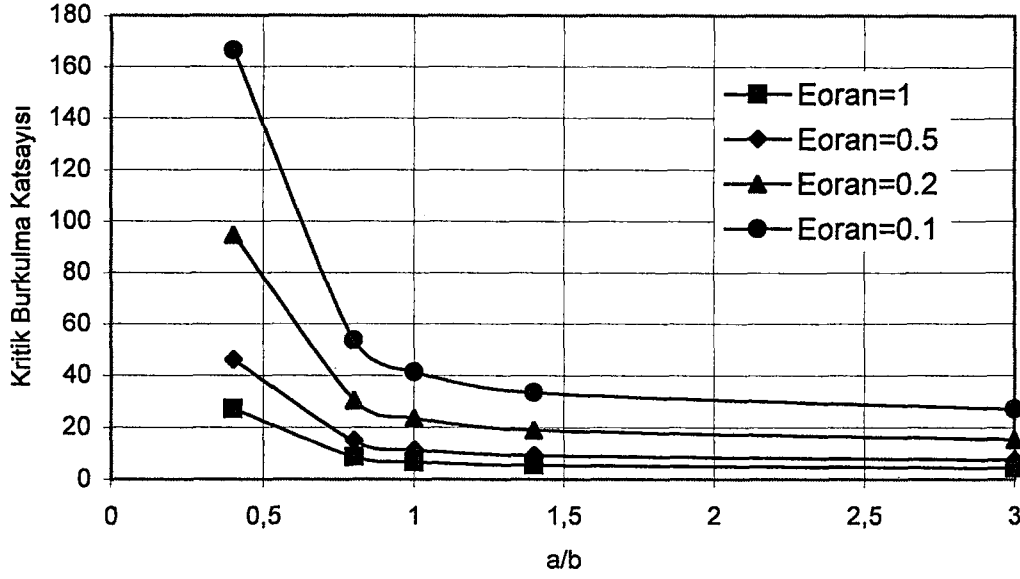
Şekil 4.14 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)



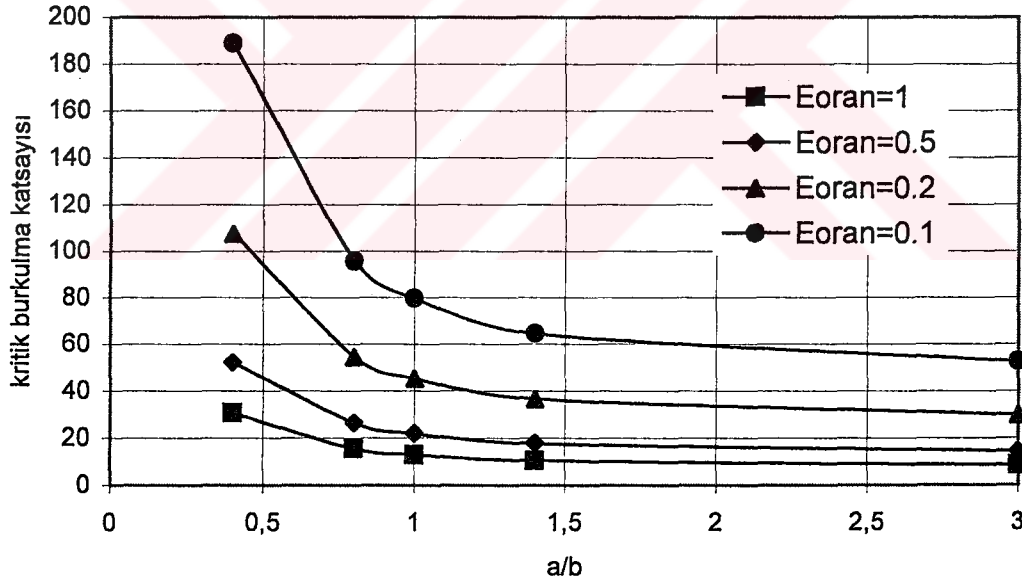
Şekil 4.15 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=0$)



Şekil 4.16 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi (Tip A, $R=-1$)



Şekil 4.17 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R=0)



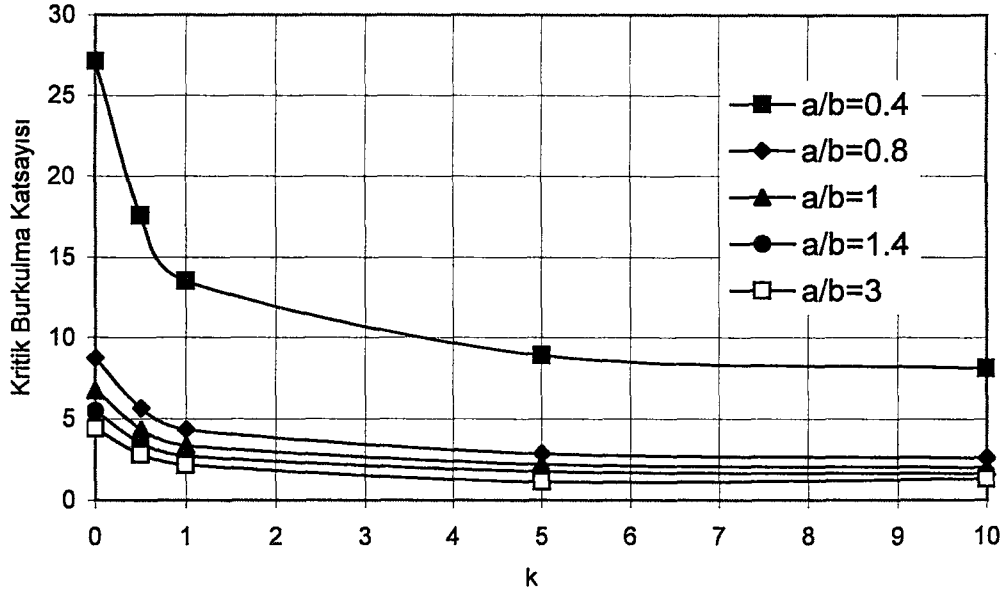
Şekil 4.18 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R=-1)

(ABAB) şeklinde desteklenmiş, elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy tarzı ve simetrik üstel olarak değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (4.3–4.18)'de gösterilmiştir. Grafiklerden, bütün durumlarda,

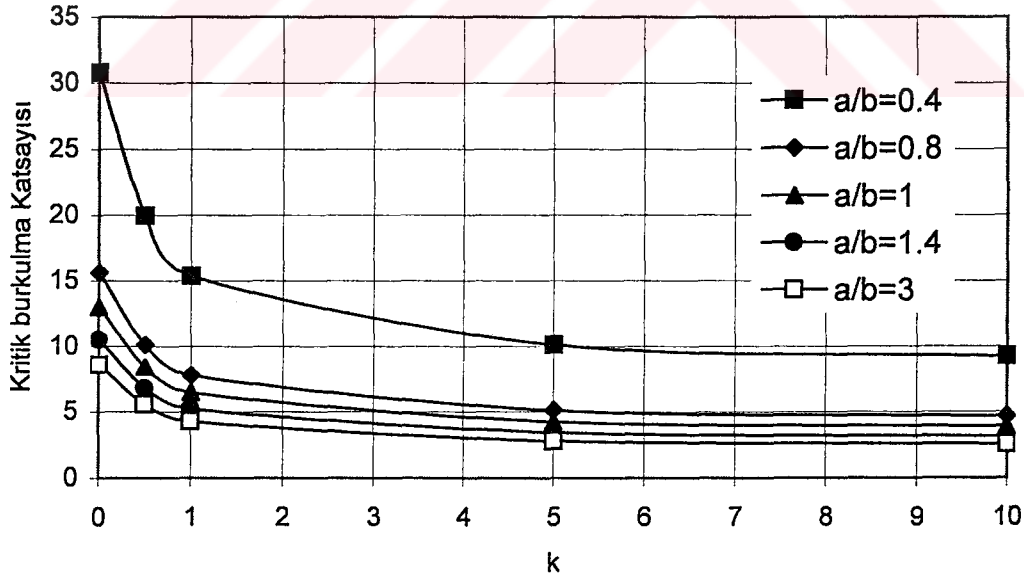
- (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır.
- A tipi plaklarda E_{oran} , B tipi plaklarda $1/E_{oran}$ parametresinin artması ile kritik burkulma katsayısının artmaktadır.
- $R = -1$ tipi yüklemde y eksenini doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini artırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır.
- Bütün yükleme tiplerinde, A tipi plaklarda, simetrik üstel değişimlerde elde edilen burkulma katsayısı değerleri Simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır, fakat B tipi plaklarda bunun tersi olmaktadır.
- Derecelendirme tipleri karşılaştırıldığında, B tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma katsayılarının A tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen kritik burkulma katsayılarından bütün yükleme tipleri için büyük olduğu ve E_{oran} parametresinin artması ile bu farkın üstel bir şekilde arttığı görülmüştür. (Örneğin $E_{oran} = 10$ değeri için simetrik Reddy tarzı değişimde B tipi plağın burkulma katsayısı, A tipine oranla 3.85, üstel değişimde 3.08 defa daha fazladır.)
- Her iki değişim tarzında da $E_{oran} = 1$ ve $k = 0$ değerleri ile homojen malzemeden yapılmış plak için kritik burkulma katsayıları elde edilir ve bu sonuçlar, $R = 0$ tipi yükleme için (Timoshenko, 1963) verilen sonuçlar ile uyusmaktadır.
- (a/b) kenar oranının artması ile kenarların ankastreliğinin kritik burkulma parametresine etkisi azalır. $a/b = 3$ değeri için elde edilen burkulma parametresi sonucu, bütün kenarlarından basit destekli (BBBB) destekleme tipinde elde edilen sonuçtan sadece yaklaşık % 10 daha büyüktür.

4.1.2 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri

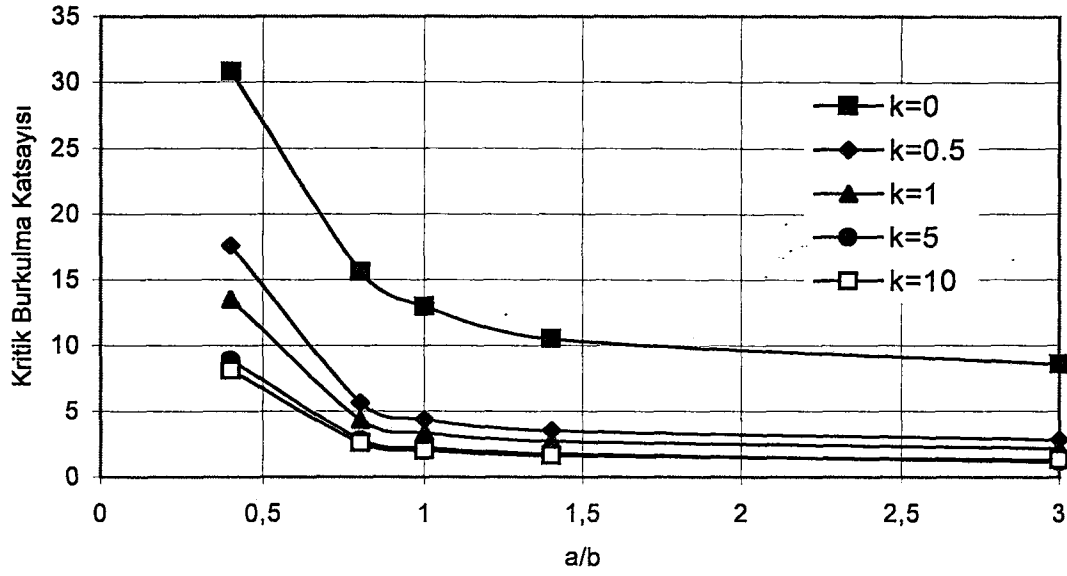
4.1.2.1 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi



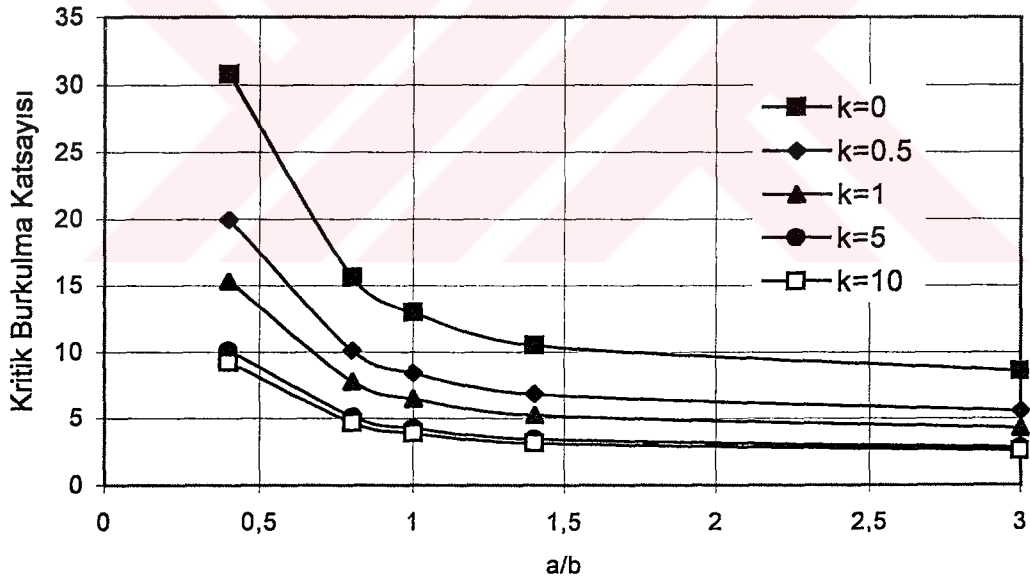
Şekil 4.19 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=0$)



Şekil 4.20 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=-1$)

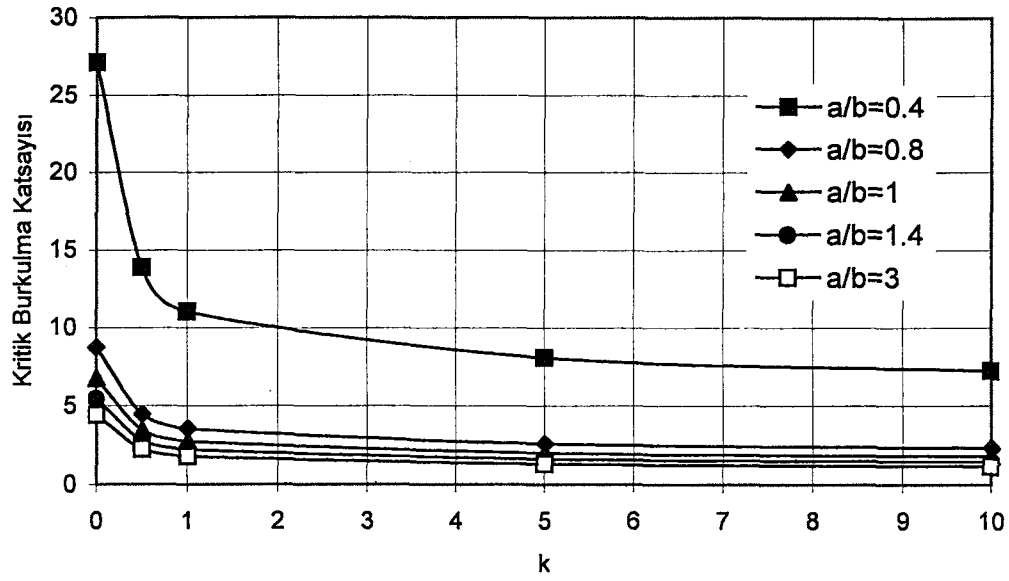


Şekil 4.21 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=0$)

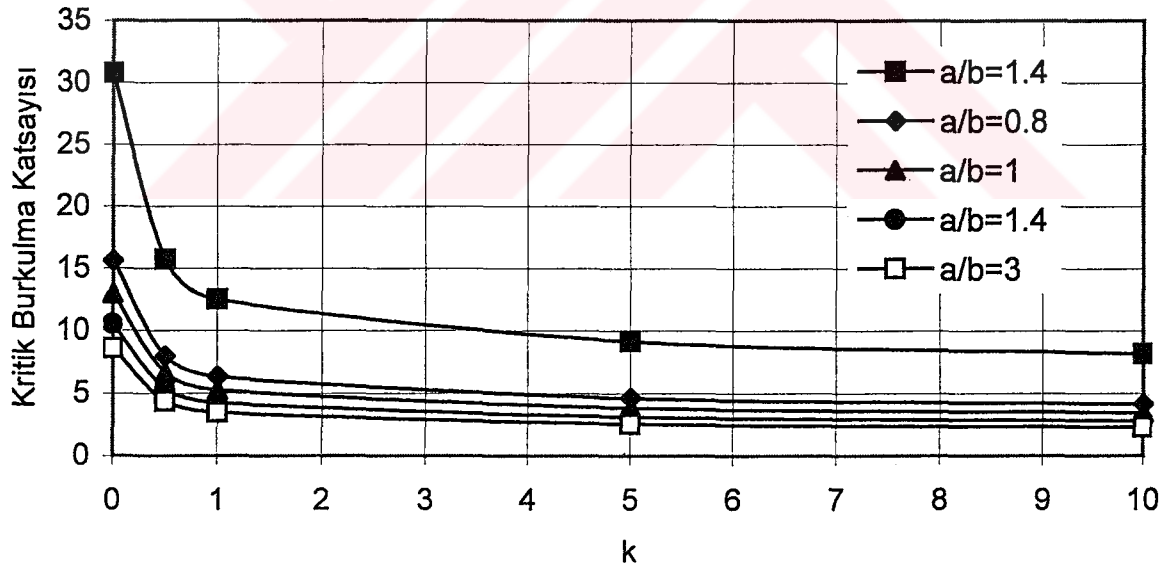


Şekil 4.22 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=-1$)

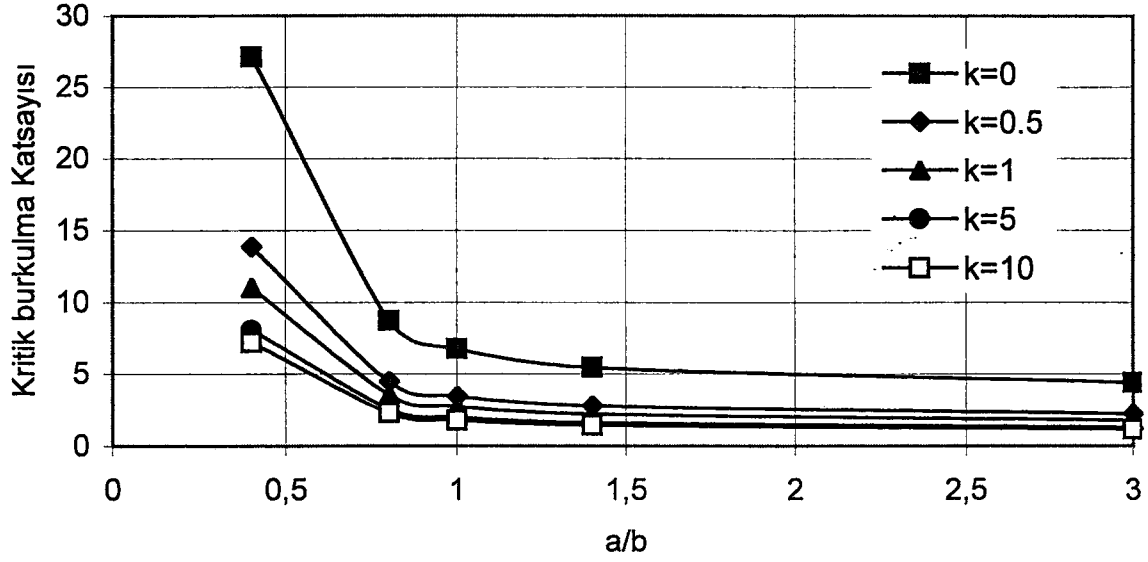
4.1.2.2 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişmesi



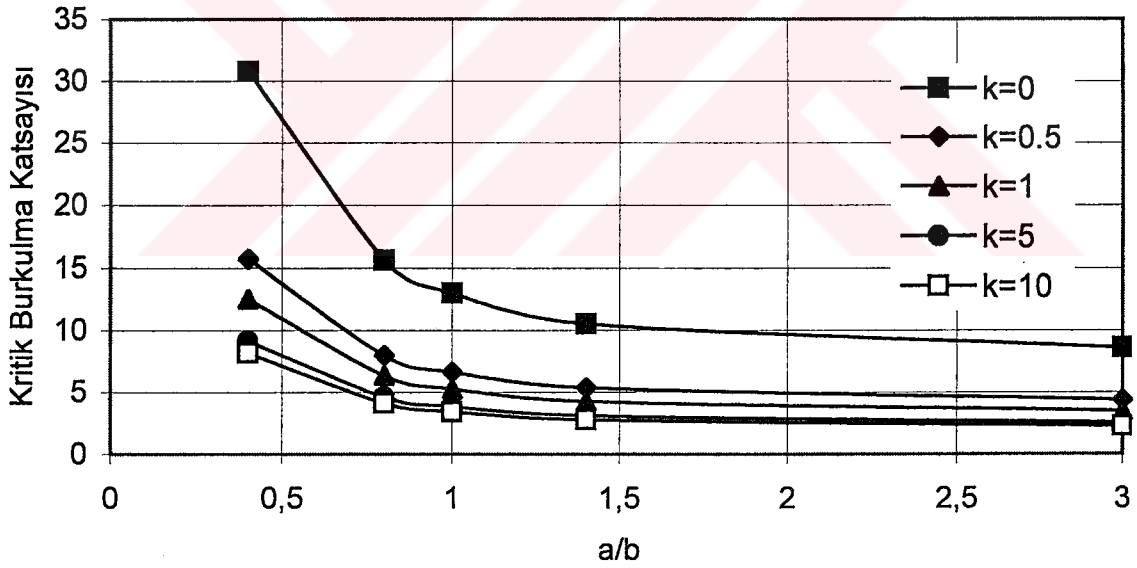
Şekil 4.23 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=0$)



Şekil 4.24 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzında değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=-1$)



Şekil 4.25 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)



Şekil 4.26 ABAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=-1$)

(ABAB) şeklinde desteklenmiş, elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (4.19–4.26)'da gösterilmiştir. Grafiklerden, bütün durumlarda,

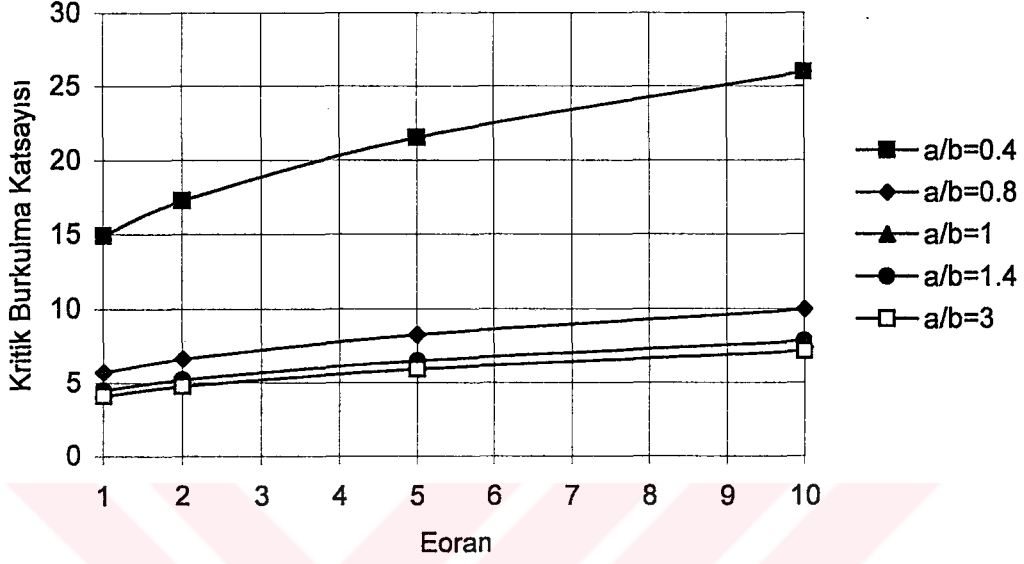
- (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısının azalmaktadır.
- Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır.
- $R=-1$ tipi yüklemde y eksenine doğrultusundaki çekme yükünün plâkın eğilme rijitliğini arttırmamasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır.
- Anti simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayısı değerlerinin, bütün yükleme tiplerinde anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimde elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır.
- Her iki değişimde de $k=0$ değerleri ile homojen malzemeden yapılmış plak için kritik burkulma katsayıları elde edilir ve bu sonuçlar, $R=0$ tipi yükleme için (Timoshenko, 1963) verilen sonuçlar ile uyushmaktadır.



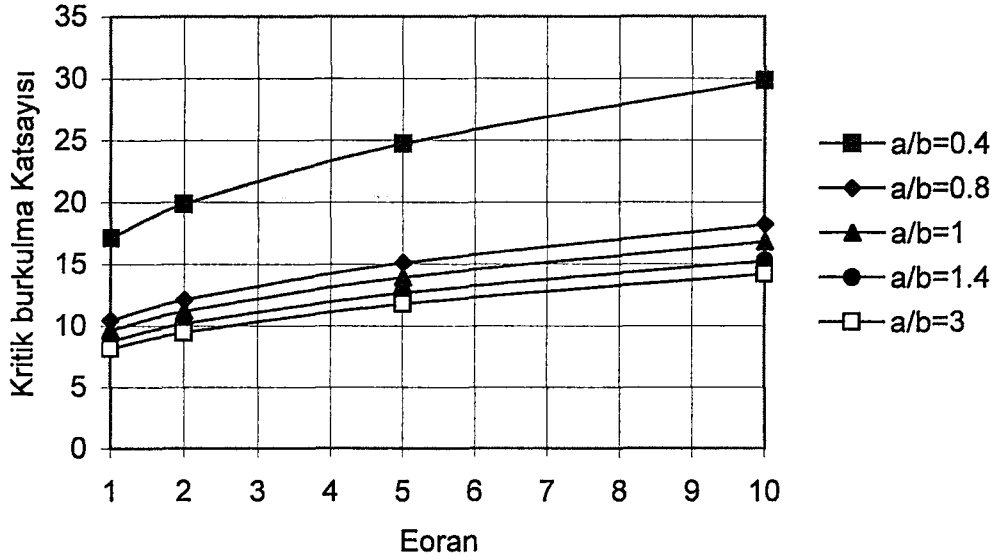
4.2 Derecelendirilmiş Malzemeden Plâın (BBAB) Şeklinde Desteklenmesi

4.2.1 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Simetrik Değişimleri

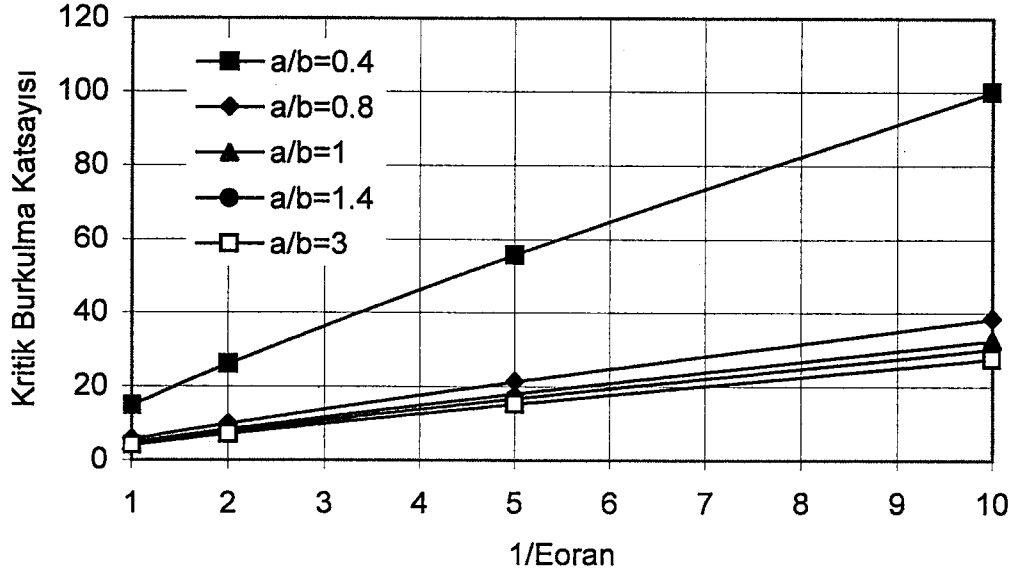
4.2.1.1 Elastisite Modülünün Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi



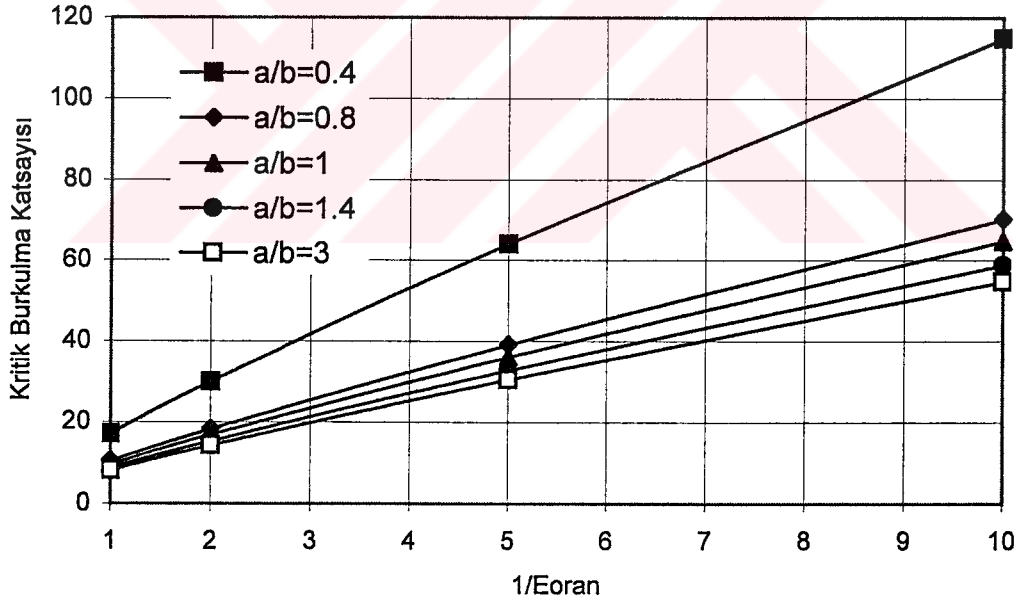
Şekil 4.27 BBAB şeklinde destekli plâın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-E_{oran} değişimi (Tip A, R=0)



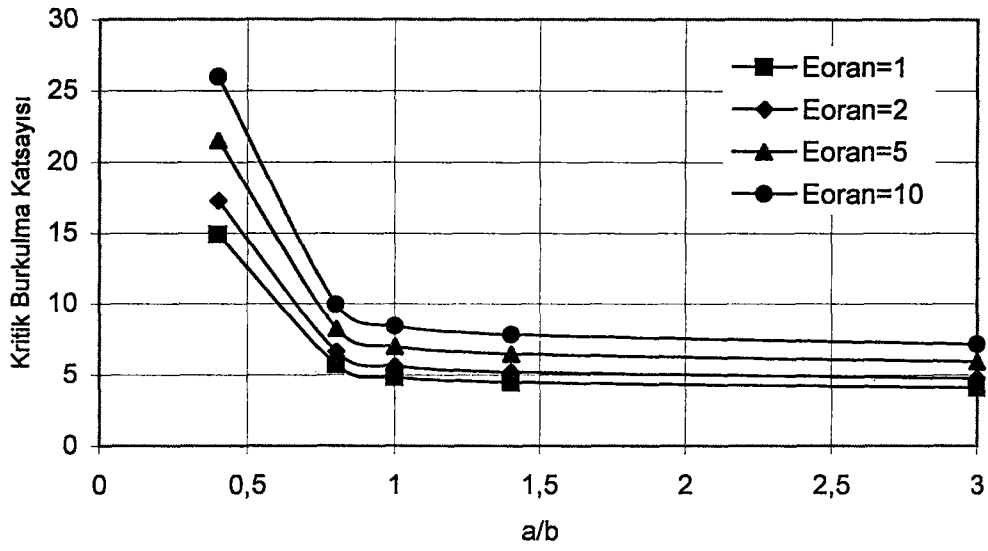
Şekil 4.28 BBAB şeklinde destekli plâın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-E_{oran} değişimi (Tip A, R=-1)



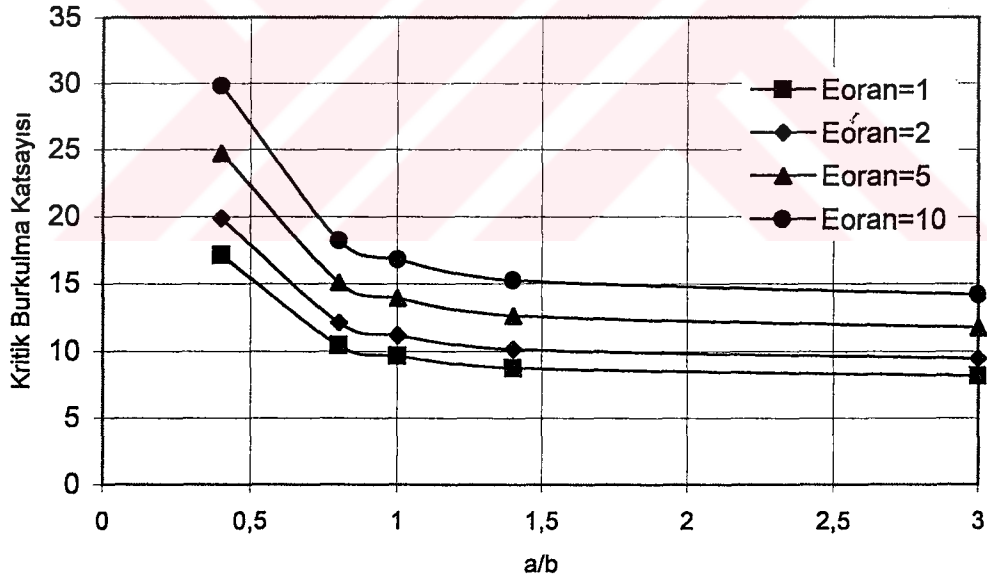
Şekil 4.29 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)



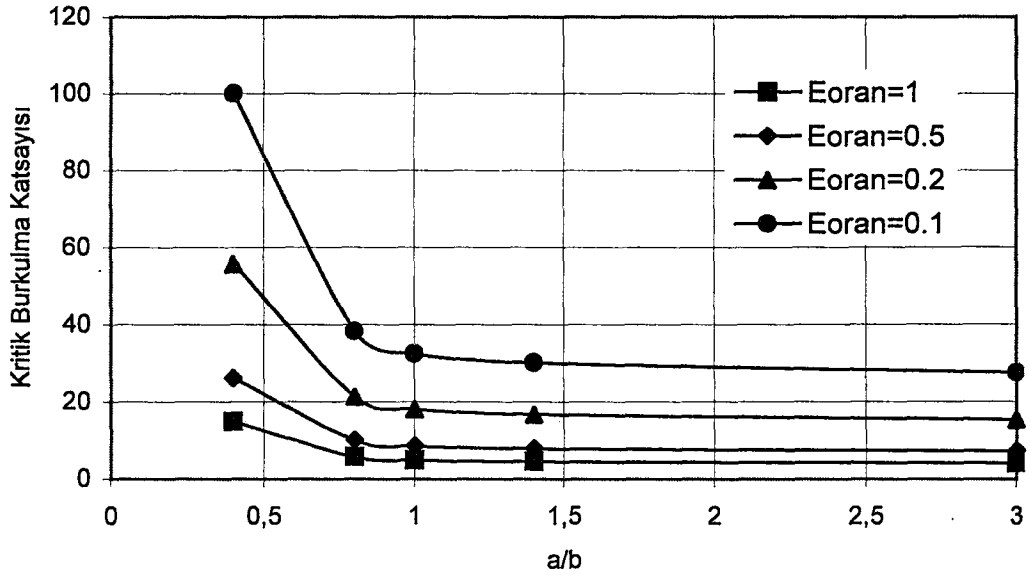
Şekil 4.30 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)



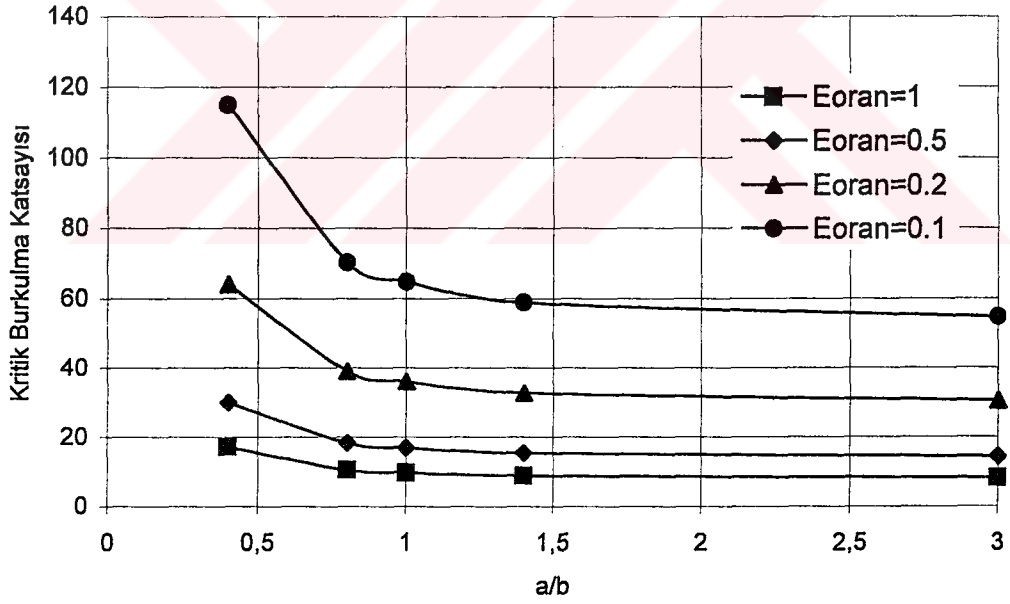
Şekil 4.31 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R=0)



Şekil 4.32 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b ile değişimi (Tip A, R=-1)

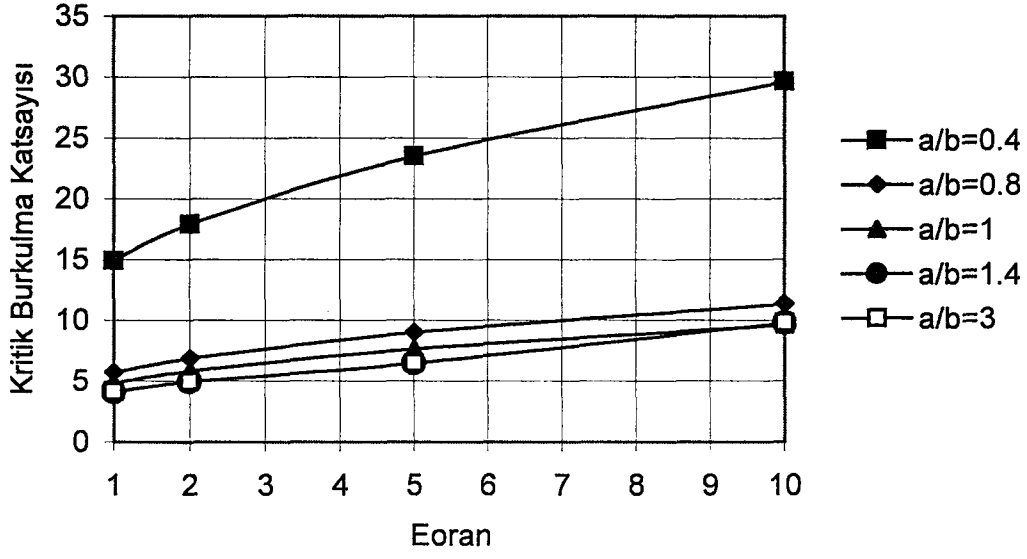


Şekil 4.33 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b ile değişimi (Tip B, R=0)

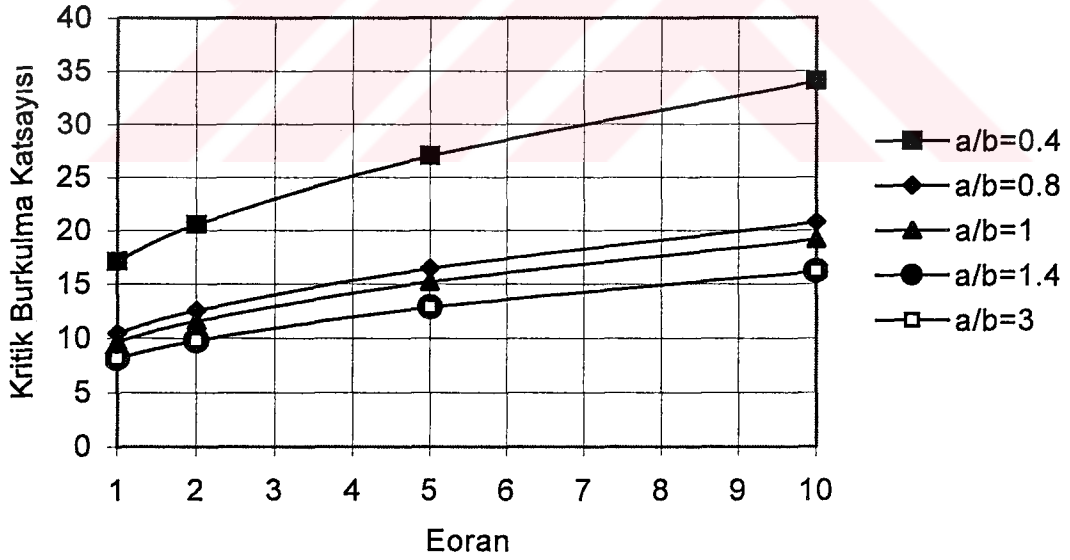


Şekil 4.34 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R=-1)

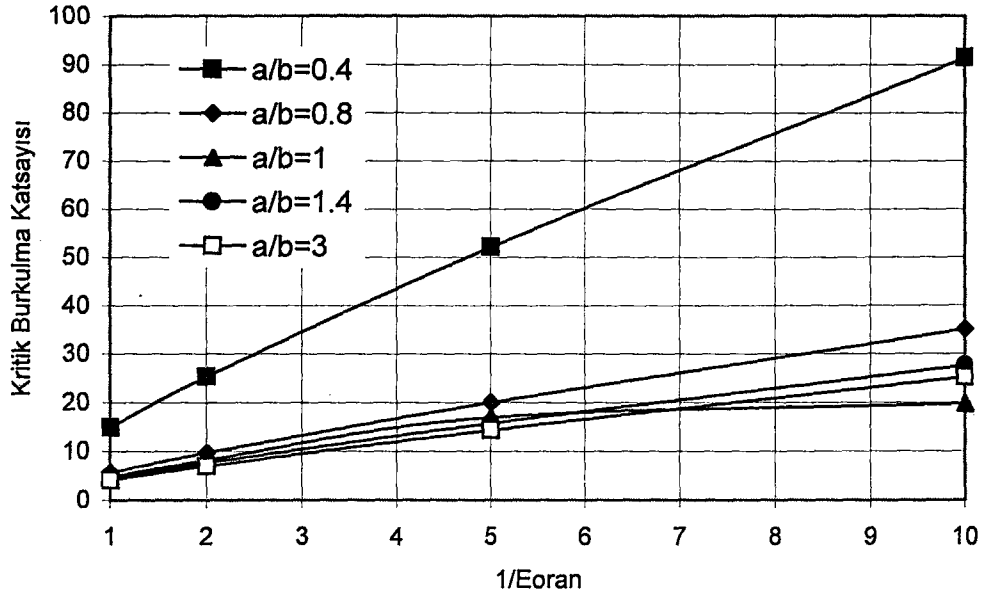
4.2.1.2 Elastisite Modülünün Simetrik Üstel Olarak Değişmesi



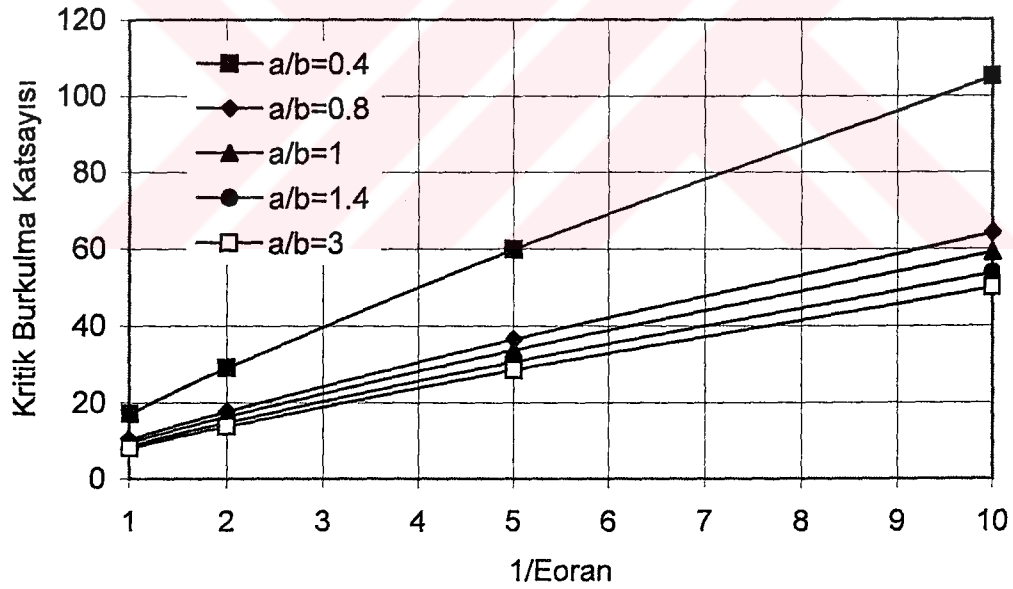
Şekil 4.35 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=0$)



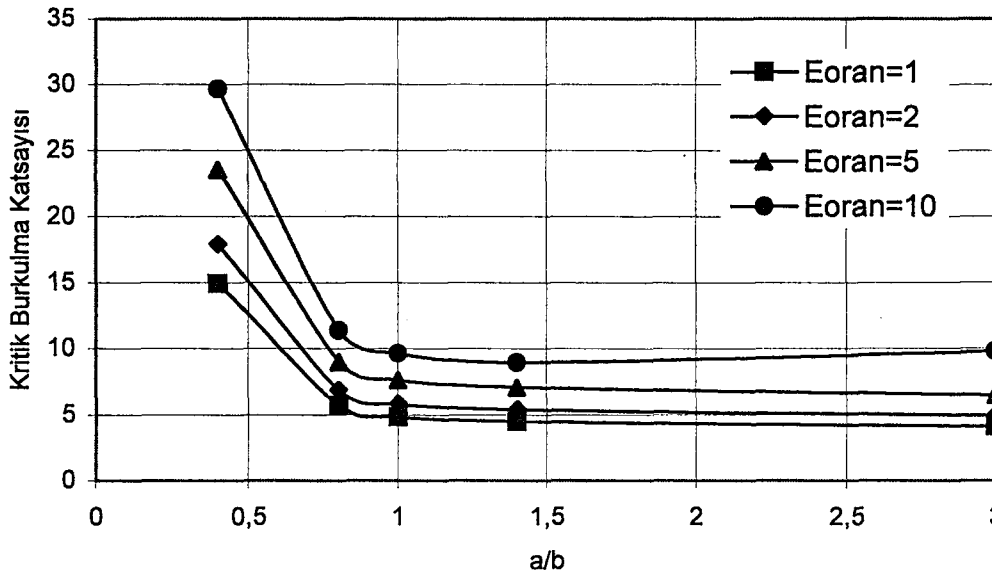
Şekil 4.36 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi (Tip A, $R=-1$)



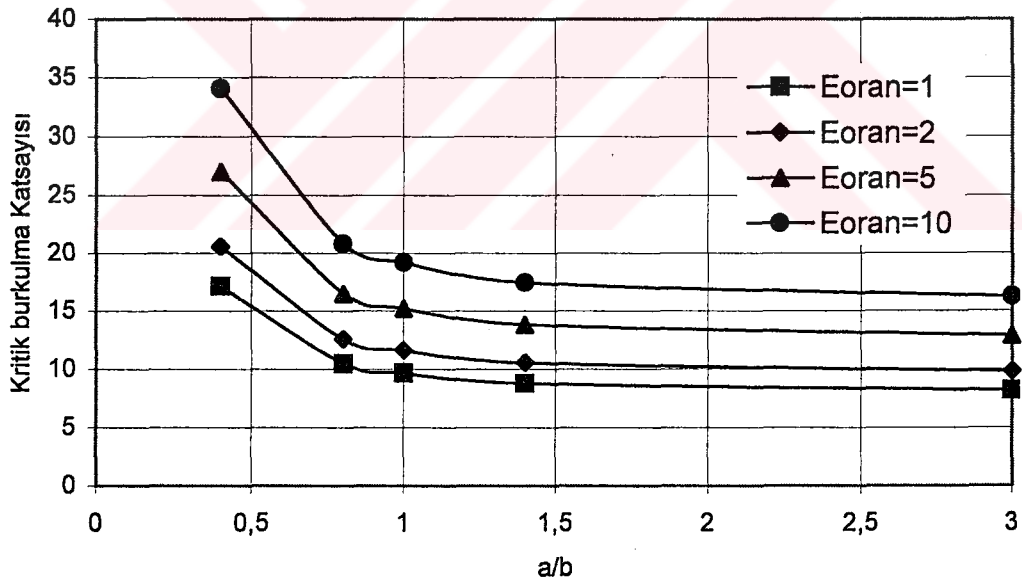
Şekil 4.37 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=0$)



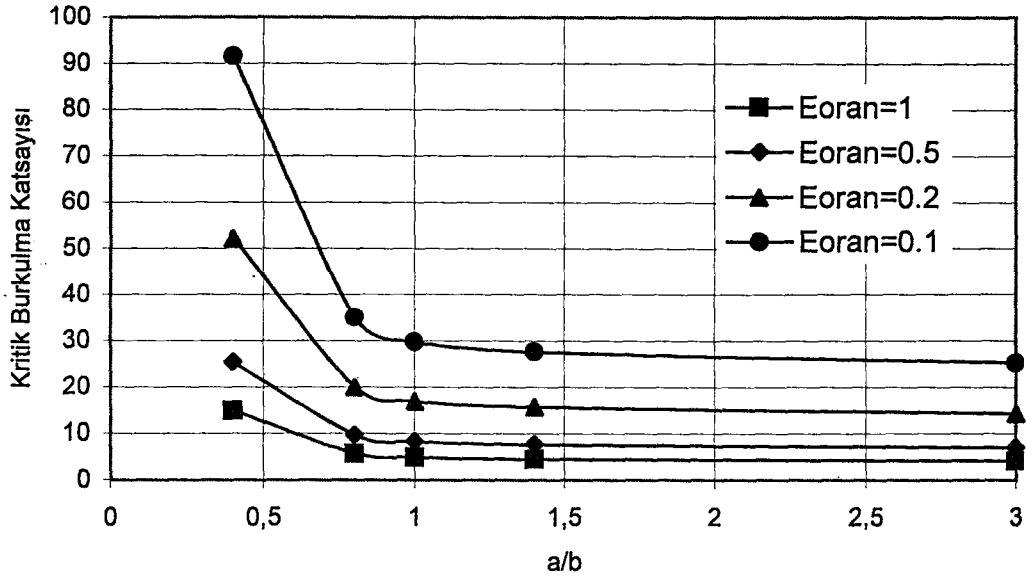
Şekil 4.38 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı- $1/E_{oran}$ değişimi (Tip B, $R=-1$)



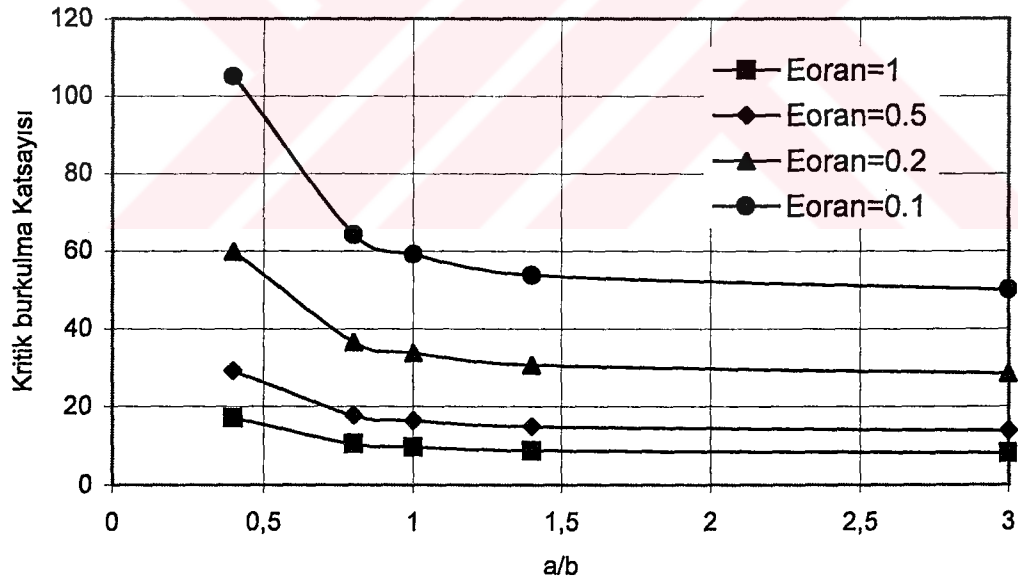
Şekil 4.39 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R=0)



Şekil 4.40 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip A, R=-1)



Şekil 4.41 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi (Tip B, R=0)



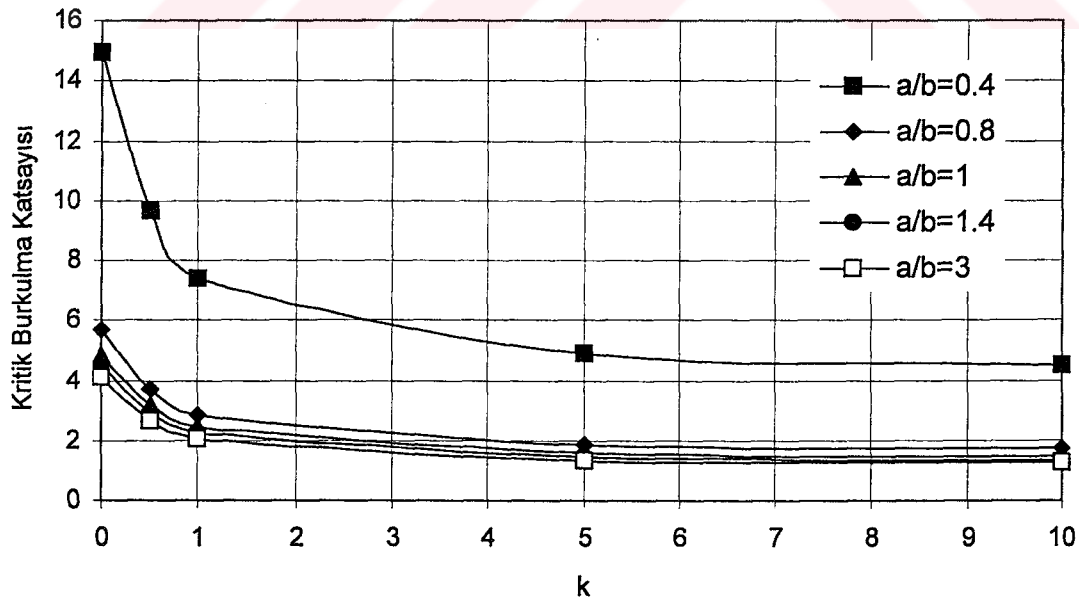
Şekil 4.42 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Simetrik Üstel olarak değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-E_{oran} değişimi (Tip B, R=-1)

(BBAB) şeklinde desteklenmiş, elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy tarzı ve simetrik üstel olarak değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (4.27–4.42)'de gösterilmiştir. Grafiklerden, bütün durumlarda,

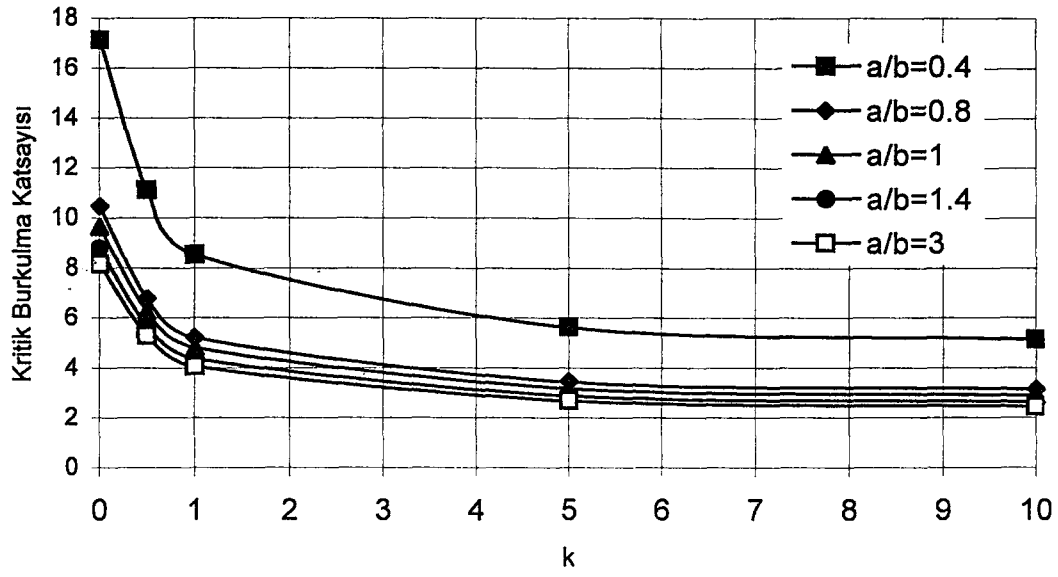
- (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır.
- A tipi plaklarda E_{oran} , B tipi plaklarda $1/E_{oran}$ parametresinin artması ile kritik burkulma katsayısının artmaktadır.
- $R = -1$ tipi yüklemede y eksenini doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmamasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır.
- Bütün yükleme tiplerinde, A tipi plaklarda, simetrik üstel değişimlerde elde edilen burkulma katsayısı değerleri Simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır, fakat B tipi plaklarda bunun tersi olmaktadır.
- Derecelendirme tipleri karşılaştırıldığında, B tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma katsayılarının A tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen kritik burkulma katsayılarından bütün yükleme tipleri için büyük olduğu ve E_{oran} parametresinin artması ile bu farkın üstel bir şekilde arttığı görülmüştür. (Örneğin $E_{oran} = 10$ değeri için simetrik Reddy tarzı değişimde B tipi plağın burkulma katsayısı, A tipine oranla 3.85, üstel değişimde 3.08 defa daha fazladır.)

4.2.2 Elastisite Modülünün Plak Kalınlığı Boyunca Anti Simetrik Değişimleri

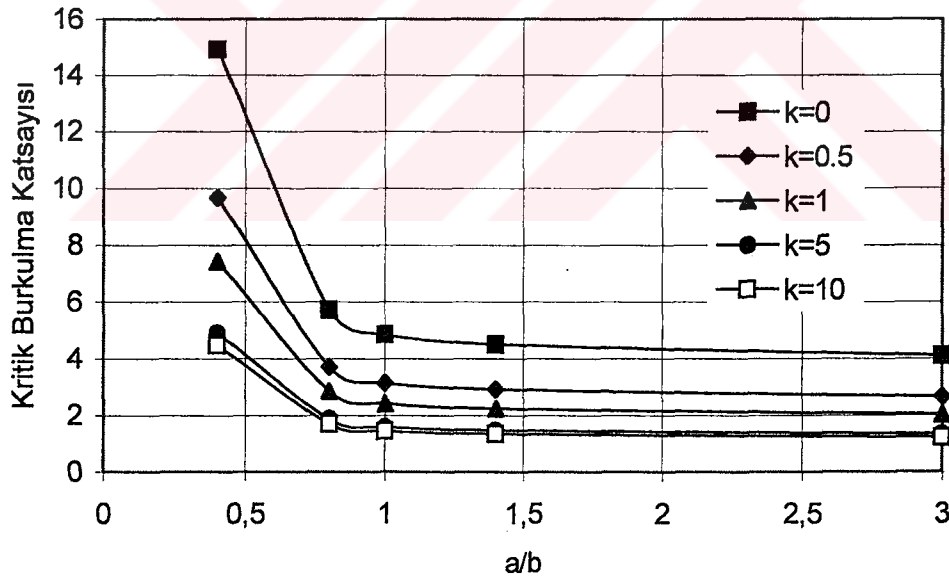
4.2.2.1 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi



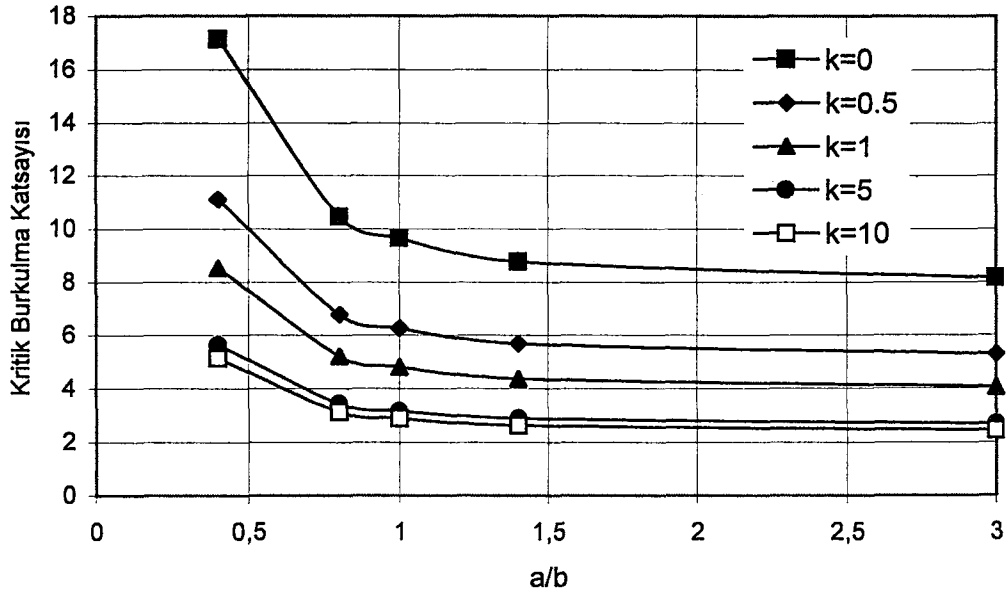
Şekil 4.43 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=0$)



Şekil 4.44 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=-1$)

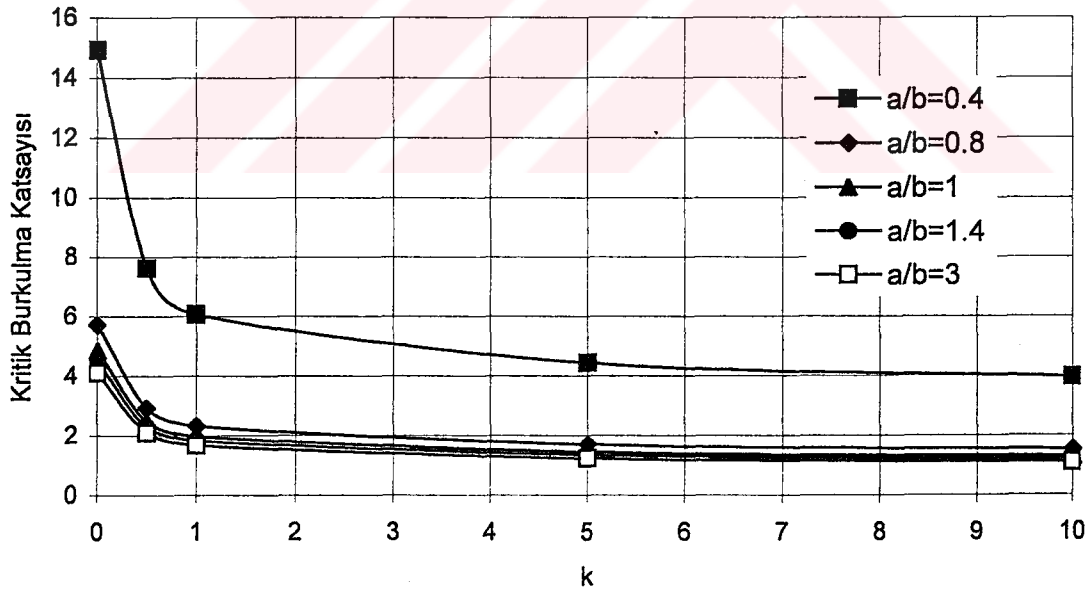


Şekil 4.45 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=0$)

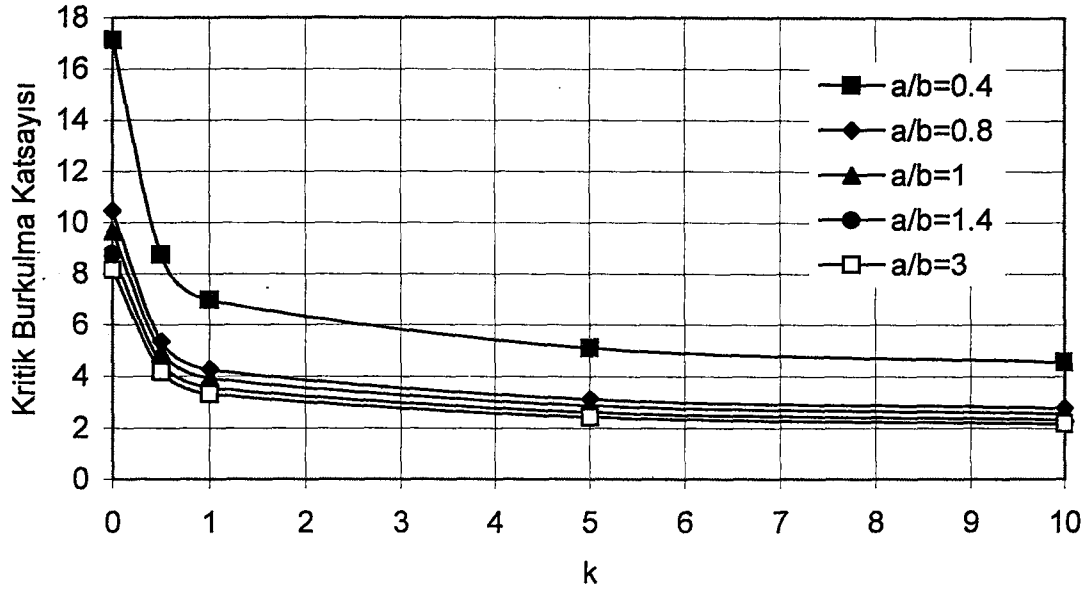


Şekil 4.46 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=-1$)

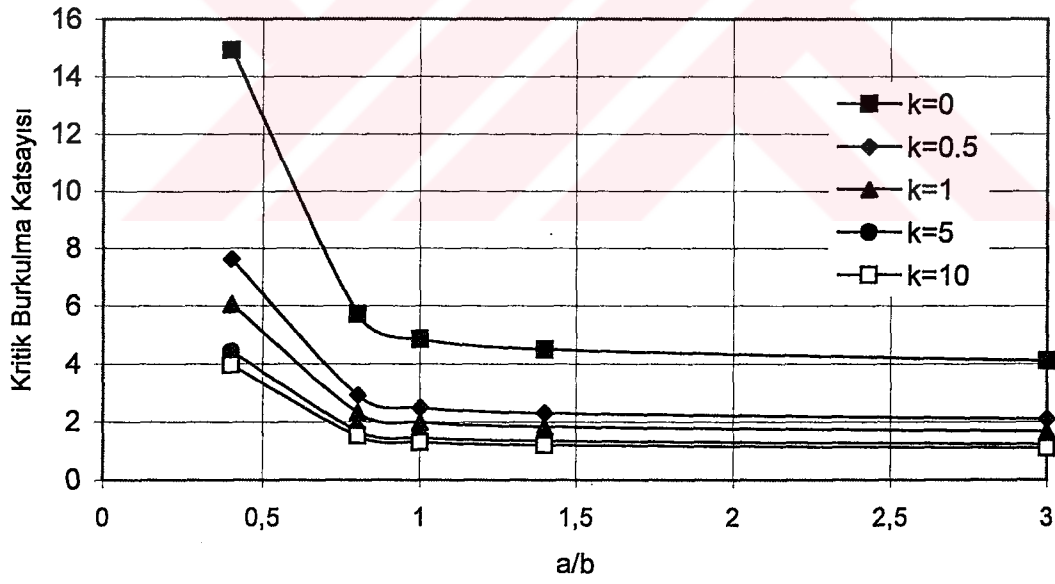
4.2.2.2 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka Tarzına Göre Değişmesi



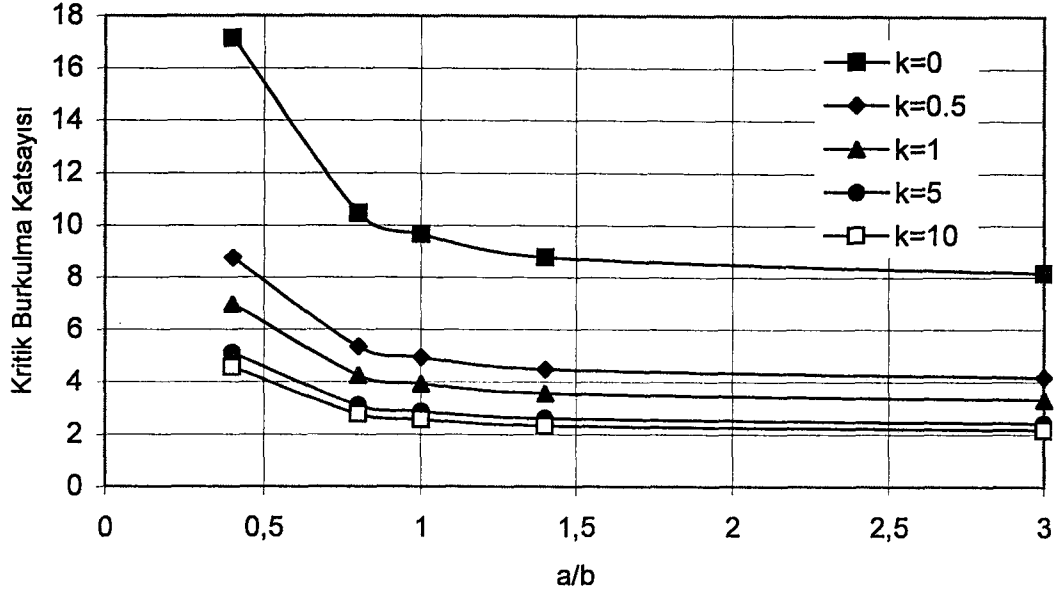
Şekil 4.47 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori Tanaka tarzına göre değişmesi durumunda kritik burkulma katsayısı-k değişimi ($R=0$)



Şekil 4.48 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- k değişimi ($R=-1$)



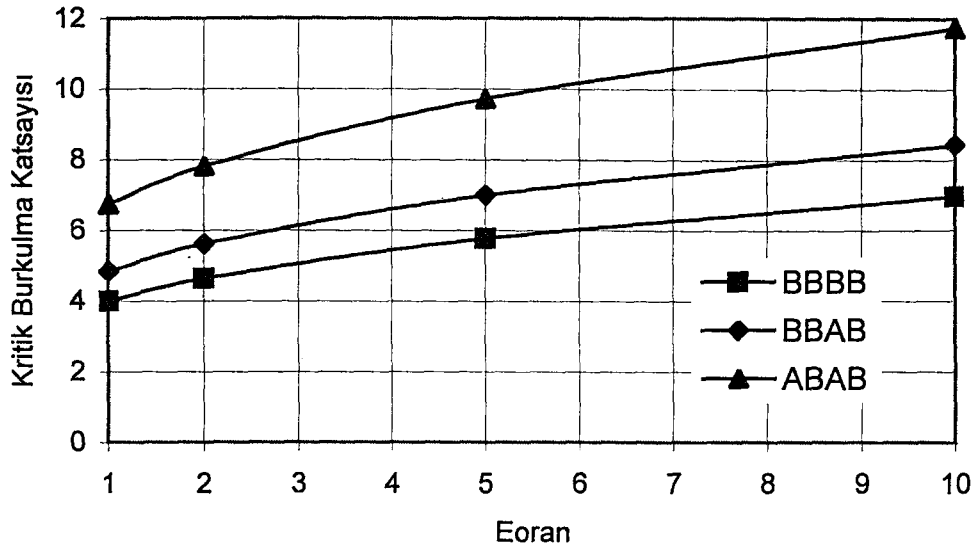
Şekil 4.49 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı- a/b değişimi ($R=0$)



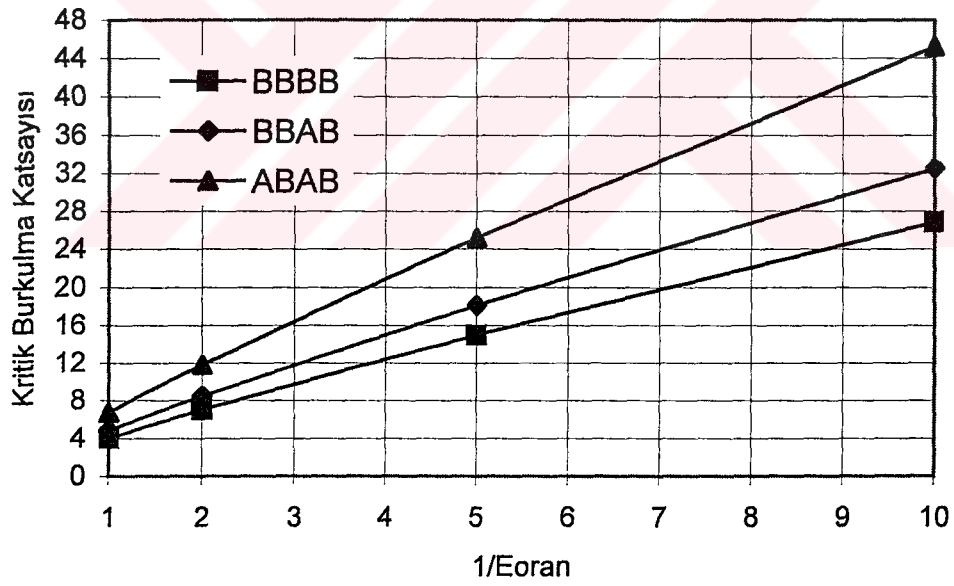
Şekil 4.50 BBAB şeklinde destekli plağın elastisite modülünün Anti Simetrik Mori-Tanaka tarzına göre değişmesi halinde kritik burkulma katsayısı-a/b değişimi ($R=-1$)

(BBAB) şeklinde desteklenmiş, elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değiştiği durumlar için elde edilen sonuçlar Şekil (4.43–4.50)’de gösterilmiştir. Grafiklerden, bütün durumlarda,

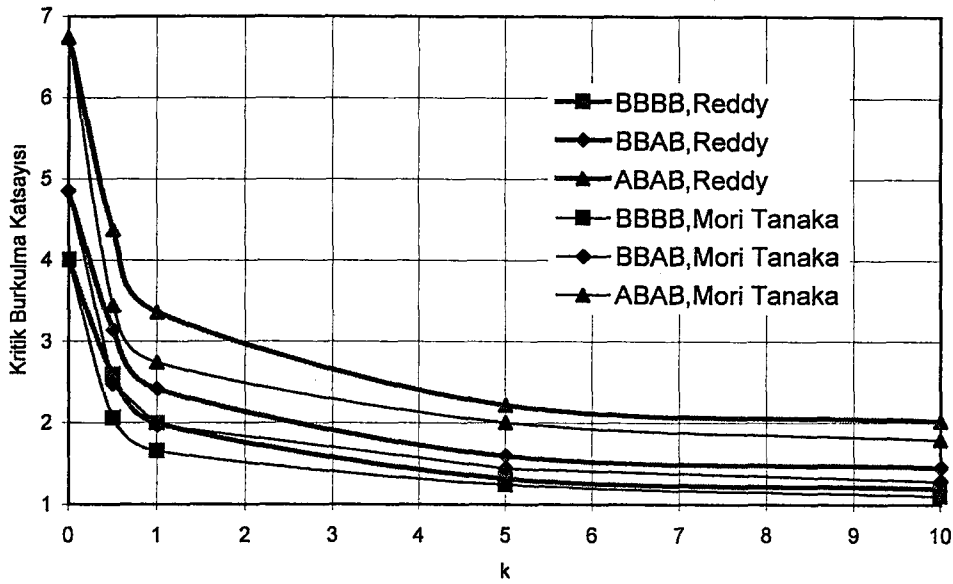
- (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısının azalmaktadır.
- Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır.
- $R=-1$ tipi yüklemde y eksenini doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır.
- Anti simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayısı değerlerinin, bütün yükleme tiplerinde anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimde elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır.



Şekil 4.51 BBBB, BBAB, ABAB şeklinde destekli plaklar için Simetrik Reddy tarzına göre kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi ($R=0$, $a/b=1$, Tip A)



Şekil 4.52 BBBB, BBAB, ABAB şeklinde destekli plaklar için Simetrik Reddy tarzına göre kritik burkulma katsayısı- E_{oran} değişimi ($R=0$, $a/b=1$, Tip B)



Şekil 4.53 BBBB, BBAB, ABAB şeklinde destekli plaklar için elastisite modülünün Anti Simetrik Reddy ve Mori Tanaka tarzına göre değişimi ($R=0$, $a/b=1$)

Klasik plak teorisi Levy yöntemi, Durum-uzay (State-space) yaklaşımı ile bütün kenarlarından basit desteklenmiş plak için burkulma incelemesi yapılmış ve homojen ve derecelendirilmiş plak için, daha önce klasik plak teorisi, Navier yöntemi ile bulunan sonuçların aynısı bulunmuştur.

(BBBB), (BBAB), (ABAB) şeklinde desteklenmiş kare plak, elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy tarzı ve simetrik üstel olarak değiştiği durumlar için Şekil (4.51–4.52’de) ve anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre elde edilen burkulma katsayısı sonuçları Şekil (4.53)’te gösterilmiştir. Grafiklerden, incelenen bütün destekleme tipleri için,

- A tipi plaklarda E_{oran} , B tipi plaklarda $1/E_{oran}$ parametresinin artması ile kritik burkulma katsayısının artmaktadır.
- Derecelendirme tipleri karşılaştırıldığında, B tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma katsayılarının A tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen kritik burkulma katsayılarından bütün yükleme tipleri için büyük olduğu ve E_{oran} parametresinin artması ile bu farkın üstel bir şekilde arttığı görülmüştür. (Örneğin $E_{oran} = 10$ değeri için simetrik Reddy tarzı değişimde B tipi plağın burkulma katsayısı, A tipine oranla 3.85, üstel değişimde 3.08 defa daha fazladır.)

- Anti simetrik derecelendirilmiş plaklarda Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır.
- Anti simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayısı değerlerinin, bütün yükleme tiplerinde anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimde elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır.
- Destekleme tipleri karşılaştırıldığında, en büyük burkulma katsayısı (ABAB), en küçük burkulma katsayısı (BBBB) tipi desteklemede elde edilmiştir.



5. GENEL DEĞERLENDİRME, TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada, derecelendirilmiş lineer izotrop malzemeden yapılmış dikdörtgen plakların düzlem içi kuvvetler etkisi altında bazı burkulma davranışları klasik plak teorisi ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi kullanılarak incelenmiştir. Elastisite modülünün plağın kalınlığı boyunca değişimi, plak orta eksenine göre, simetrik üstel, simetrik Reddy, anti simetrik Reddy tarzı olmak üzere üç adet makro model ve bir adet mikro model yaklaşımı (Mori–Tanaka) ile incelenmiştir. Poisson oranının Mori Tanaka mikro model yaklaşımı hariç diğerlerinde sabit olduğu kabul edilmiştir. Derecelendirilmiş malzemelerin elastisite modüllerinin plak kalınlığı boyunca simetrik ve anti simetrik değişim şekilleri verildikten sonra, klasik plak teorisi ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorilerine göre burkulma davranışını yöneten denklemler ve plak kenarlarında uygulanabilecek olası sınır şartlarının ifadeleri verilmiştir. Plağa uygulanan düzlem içi kuvvetlerin Eksenel Basınç ($R=0$), İki Eksenli Basınç ($R=1$) ve İki eksenli Basınç–Çekme ($R=-1$) şeklinde uygulandıkları kabul edilmiştir, düzlem içi kayma gerilmelerinin etkidiği durumlar incelenmemiştir.

Plak denklemleri, ilk önce tüm kenarlarından basit desteklenmiş derecelendirilmiş plakların burkulma problemi için, yer değiştirme bileşenleri trigonometrik fonksiyonlar şeklinde varsayılarak Navier tipi yöntem ile çözülmüştür. Kritik burkulma katsayısının hesaplanmasında değişik (a/b) plak kenar oranları ve yükleme tipleri için burkulma yarı dalga sayıları (m,n) ayrıntılı olarak incelenmiştir. İncelenen bütün durumlarda, y yönündeki yarı dalga sayısı ($n=1$) daima tek yarım dalga değerinde iken, burkulma katsayısı en küçük değerini almaktadır. x yönündeki yarı dalga sayısı (m), homojen malzemeden yapılmış plaklarda ve derecelendirilmiş malzemeden yapılmış plaklarda aynı (a/b) kenar oranlarında mod değiştirmektedirler.

Elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik değiştiği durumlarda, plak kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısı azalmakta, A tipi plaklarda E_{oran} , B tipi plaklarda $1/E_{oran}$ katsayısının artması ile kritik burkulma katsayısı artmaktadır. Birbirine dik şekilde etkiyen düzlem içi basma yüklerini, hem homojen hem de derecelendirilmiş plaklarda eğilme rijitliğini azalttığından dolayı, $R=1$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısı $R=0$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısından küçük olmaktadır. $R=1$ tipi yüklemenin aksine $R=-1$ tipi yüklemede y eksenli doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır. Derecelendirilmiş (A ve B tipi) ve homojen kare plaklarda, $R=0$ tipi yüklemede

oluşan kritik burkulma katsayısı $R=1$ tipi yüklemelerde oluşan burkulma katsayısının iki katıdır.

Bütün yükleme tiplerinde, A tipi plaklarda, simetrik üstel değişimlerde elde edilen burkulma katsayısı değerleri Simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır, fakat B tipi plaklarda bunun tersi olmaktadır. Derecelendirme tipleri karşılaştırıldığında, B tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma katsayıları A tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen kritik burkulma katsayılarından bütün yükleme tipleri için büyük olmaktadır. Plak alt ve üst yüzeylerinin, elastisite modülü yüksek malzeme ile takviye edilmesi durumunda, ele alınan yüklemelere karşı emniyetin arttığı söylenebilir. $E_{oran}=1$ ve $k=0$ değerleri ile homojen malzemeden yapılmış plağı göstermektedir.

Elastisite modülünün kalınlık boyunca anti simetrik olarak değiştiği durumlarda, dikdörtgensel plakların burkulma davranışları ile ilgili olarak, Javaheri ve Eslami, (2002c) anti simetrik Reddy tarzını, klasik plak teorisi kullanarak, plak kenar oranının $a/b=0.2$ ile $a/b=1$ aralığında ($a/b=1$ kenar oranında ve $R=-1$ tipi yüklemelerde $m=2$, bunun dışındaki bütün durumlarda $m=1$ alarak) incelemişlerdir. Bu çalışmada, inceleme, anti simetrik Reddy tarzı makro ve Mori Tanaka mikro model yaklaşımı kullanarak, klasik plak teorisi ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorileri ile plak kenar oranının $a/b=0.4$ ile $a/b=3$ aralığında en küçük burkulma parametre değerini veren yarım dalga sayıları ile ($a/b=3$ kenar oranı için, $R=0$ tipi yüklemelerde $m=3$, $R=1$ tipi yüklemelerde $m=1$ ve $R=-1$ tipi yüklemelerde $m=5$ alarak) yapılmıştır. İncelenen plak kenar oranı aralığında, elde edilen burkulma parametresi sonuçları, $a/b=1$ aralığına kadar, Javaheri ve Eslami, (2002c) tarafından verilen sonuçlar ile uyushmaktadır. Ayrıca, derecelendirme katsayısı $k=0$ yapılarak, homojen malzemeden yapılmış plak için burkulma katsayısı sonuçları elde edilmektedir ve bu sonuçlar da $a/b=3$ aralığına kadar, Reddy ve Phan (1985) tarafından verilen klasik plak teorisi ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi sonuçları ile uyushmaktadır. Poisson oranı değişimi anti simetrik Reddy tarzında sabit, Mori tanaka mikro model yaklaşımında plak kalınlığı doğrultusunda değiştiği kabul edilmiştir. Elde edilen sonuçların incelenmesinden anti simetrik Reddy tarzı makro yaklaşım ile Mori Tanaka mikro model yaklaşımının birbirine çok yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Genel olarak (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısının azalmaktadır. Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır. Elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik değiştiği durumlarda olduğu gibi, birbirine dik şekilde etkiyen düzlem içi basma yüklerinin, hem homojen hem de derecelendirilmiş plaklarda eğilme rijitliğinin azaltmasından dolayı, $R=1$ tipi yükleme

durumundaki kritik burkulma katsayısının $R=0$ tipi yükleme durumundaki kritik burkulma katsayısından küçük olmaktadır. $R=1$ tipi yüklemenin aksine $R=-1$ tipi yüklemde y eksenine doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır. Her iki tarza göre Derecelendirilmiş ve homojen plaklarda kare ($a/b=1$) plaklarda $R=0$ tipi yüklemde oluşan kritik burkulma katsayısının $R=1$ tipi yüklemde oluşan burkulma katsayısının iki katı olmaktadır. Anti simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayısı değerlerinin, bütün yükleme tiplerinde anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimde elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır. Her iki değişimde de $k=0$ değerleri homojen malzemeden yapılmış plağı göstermektedir.

Basit destekli derecelendirilmiş plağın klasik plak teorisi yardımı ile incelenmesinden sonra, düşey kayma deformasyonlarının burkulma üzerine etkilerini araştırmak üzere, özellikle kalın plaklar için etkili düşey kayma deformasyonlarını hesaplamalarda dikkate alan üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi kullanarak Navier yöntemi ile çözüm yapılmıştır. Elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik Reddy, simetrik üstel, anti simetrik Reddy tarzı ve anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre derecelendirilmiş kare plak ($a/b=1$) basit basınç yükleme tipi için incelenmiştir. Bütün dereceli ve homojen malzemeden yapılmış plaklar için, (a/h) kenar/kalınlık oranının artması yani plağın kalınlığının azalması ile birlikte kritik burkulma katsayısını artmaktadır. Dereceli plaklar için elde edilen kritik burkulma katsayıları homojen plakların kritik burkulma katsayılarından küçük olmaktadır. Kalın ($a/h=5$) ve ince ($a/h=100$) plaklar için elde edilmiş sonuçlar karşılaştırıldığında, Simetrik Reddy ve simetrik üstel değişimlerde A tipi derecelendirilmiş plaklarda E_{oran} değerinin artması ile birlikte düşey kayma deformasyonlarının etkisi azalmakta, B tipi plaklarda burkulma parametresi değeri artmakta fakat düşey kayma deformasyonlarının etkisine duyarlı hale gelmektedir. Yaklaşık $a/h=50$ kalınlığına sahip plaklarda, beklenildiği gibi düşey kayma deformasyonlarının etkileri azalmakta ve klasik plak teorisi ile üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi sonuçları çakışmaktadır.

Bütün kenarlarından basit destekli dereceli plağın burkulması incelendikten sonra, destekleme şekillerinin etkilerini incelemek amacıyla, karşılıklı iki kenarı basit destekli diğer iki kenarı basit ve ankastre kombinasyonundan (BBBB, BBAB ve ABAB) oluşan destekleme tipleri için ise Klasik Plak Teorisi Levy yöntemi ve Durum-Uzay (State Space) yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yöntemle, bütün kenarlarından basit desteklenmiş plak için (BBBB) burkulma incelemesi yapılmış, homojen ve derecelendirilmiş plak için, daha önce klasik plak teorisi, Navier

yöntemi ile bulunan sonuçların aynısı bulunmuştur.

(BBBB), (BBAB) ve (ABAB) şeklinde desteklenmiş, elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca simetrik olarak değiştiği durumlar için, (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır. A tipi plaklarda E_{oran} , B tipi plaklarda $1/E_{oran}$ parametresinin artması ile kritik burkulma katsayısının artmaktadır. $R = -1$ tipi yüklemde y eksenini doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısının en büyük değerini almaktadır. Bütün yükleme tiplerinde, A tipi plaklarda, simetrik üstel değişimlerde elde edilen burkulma katsayısı değerleri Simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır, fakat B tipi plaklarda bunun tersi olmaktadır. Derecelendirme tipleri karşılaştırıldığında, B tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen burkulma katsayılarının A tipi derecelendirilmiş plak için elde edilen kritik burkulma katsayılarından bütün yükleme tipleri için büyük olduğu ve E_{oran} parametresinin artması ile bu farkın üstel bir şekilde arttığı görülmüştür. Her iki değişim tarzında da $E_{oran}=1$ ve $k=0$ değerleri ile homojen malzemeden yapılmış plak için kritik burkulma katsayıları elde edilir. (a/b) kenar oranının artması ile kenarların ankastreliğinin kritik burkulma parametresine etkisi azalır, örneğin bütün kenarlarından basit destekli (BBBB) plak için, kenar oranlarının $a/b=1$ değerinde elde edilen sonuç, kenarlarında ankastre destekleme tipi içeren diğer tiplerle karşılaştırıldığında, $a/b=3$ kenar oranı için, (BBAB) desteklemesi için yaklaşık % 2.5, (ABAB) desteklemesi için yaklaşık % 10 daha büyüktür. Elastisite modülünün plak kalınlığı boyunca anti simetrik olarak değiştiği durumlar için, (a/b) kenar oranının artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır. Derecelendirme katsayısının (k) artması ile kritik burkulma katsayısı azalmaktadır ve bu azalma özellikle $k=0$ ve $k=1$ aralığında çok fazla olmaktadır. $R = -1$ tipi yüklemde y eksenini doğrultusundaki çekme yükünün plağın eğilme rijitliğini arttırmasından dolayı, kritik burkulma katsayısı en büyük değerini almaktadır. Anti simetrik Reddy tarzı için elde edilen burkulma katsayısı değerlerinin, bütün yükleme tiplerinde anti simetrik Mori Tanaka mikro model yaklaşımına göre değişimde elde edilen burkulma katsayılarından büyük olmaktadır. Her iki değişimde de $k=0$ değerleri ile homojen malzemeden yapılmış plak için kritik burkulma katsayıları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Aboudi, J., (1991), *Mechanics of Composite Materials; A unified Micromechanical Approach*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam
- Almajid, A., Taya, M., Hudnut, S., (2001), "Analysis of Out-of Plane Displacement and Stress Field in a Piezocomposite Plate with Functionally Graded Microstructure", *International Journal Of Solids And Structures*, 38: 3377-3391
- Anlas, G., Santare, M. H., Lambros, J., (2000), "Numerical Calculation of Stress Intensity Factors in Functionally Graded Materials", *International Journal of Fracture*, 104:131-143
- Aydoğdu, M., (2003), "Katmanlı Kompozit Dikdörtgen Plakların Burkulma ve Titreşim Analizi", *Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi*
- Bao, B., Cai, H., (1997), "Delamination Cracking in Functionally Graded Coating/Metal Substrate Systems", *Acta Mater.*, Vol. 45 No:3 pp: 1055-1066
- Betten, J., Shin, C. H. (2000), "Elastic-Plastic Buckling Analysis of Rectangular Plates Subjected to Biaxial Loads" *Forschung im Ingenieurwesen*, 65:273-278 Springer-Verlag
- Cheng, Z. Q., Batra, R. C., (2000a), "Exact Correspondence Between Eigenvalues of Membranes and Functionally Graded Simply Supported Polygonal Plates", *Journal Of Sound And Vibration*, 229(4), 879-895
- Cho, J.R., Oden, J. T., (2000), "Functionally Graded Material: A Parametric Study on Thermal-Stress Characteristics Using the Crank-Nicolson-Galerkin Scheme", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188:17-38
- Delale, F., Erdoğan, F., (1983), "The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 609-14
- Gasik, M. M., (1998), "Micromechanical Modelling of Functionally Graded Materials", *Computational Materials Science*, 13:42-55
- Gibson, R., F., (1994), *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill Inc., Singapore
- Güneş, A., Yıldız, K., (1997), *Matlab for Windows, Matematik ve Grafik Programlama Dili*, Türkmen Kitapevi, İstanbul
- Hadian, J., Nayfeh, A., H., (1993), "Free Vibration and Buckling of Shear Deformable Cross-ply Laminated Plates Using the State Space Concept", *Computer and Structures*, Vol., 48, No:4., 677-693
- Javaheri, R., Eslami, M. R. (2002a), "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates", *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 1
- Javaheri, R., Eslami, M. R., (2002b), "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory", *Journal of Thermal stresses*, 25:603-625
- Javaheri, R., Eslami, M. R., (2002c), "Buckling of Functionally Graded Plates under in-Plane Compressive Loading", *ZAMM J.*, vol 82, pp. 277-283
- Khdeir, A.A. Reddy, J.N., (1999), "Free Vibrations of Laminated Composite Plates Using Second-Order Shear Deformation Theory", *Computers And Structures*, 71:617-626

- Kouzumi, M., (1997), "Fgm Activities in Japan", Composite Part B, 28b:1-4
- Liew, K.M, Yang, J., Kitipornchai, S., (2003), "Postbuckling of Piezoelectric Fgm Plates Subject to Thermo-Electro-Mechanical Loading", International Journal Of Solids and Structures, 40:3869-3892
- Reddy, J. N., (1999), "On Laminated Composite Plates with Integrated Sensors and Actuators", Engineering Structures, 21:568-593
- Reddy, J. N., (2000), "Analysis of Functionally Graded Plates", Int. J. Numer. Meth. Engng., 47:663-684
- Reddy, J. N., Khdeir, A. A., (1989), "Buckling and Vibration of Laminated Composite Plates Using Various Plate Theories", AIAA Journal, Vol. 27, No. 12
- Reddy, J. N. (1984), Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley, New York
- Reddy, J.N. , Cheng, Z. Q., (2001), "Three-Dimensional Thermomechanical Deformations of Functionally Graded Rectangular Plates", Eur. J. Mech. A/Solids, 20:841-855
- Reddy, J. N., (1997), Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton, FL
- Reddy, J. N., Phan, N. D., (1985), "Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory", Journal of Sound and Vibration, 98(2), 157-170
- Reddy, J. N., Wang, C. M., (2000), "An Overview of the Relationships Between Solutions of the Classical and Shear Deformation Plate Theories", Composites Science And Technology, 60:2327-2335
- Reiter, T., Dvorak, G. J., Tvergaard V., (1997), "Micromechanical Models for Graded Composite Materials", J. Mech. Phys. Solids, Vol:45, No:8, pp. :1281-1302
- Suresh, S., (2001), "Graded materials for resistance to Contact Deformation and damage", Science's Compass, vol. 292, p., 2447-2451
- Szilar, R., (1974), Theory and Analysis of Plates; Classical and Numerical Methods, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey
- Tameroglu, S., (1991), Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler, İTÜ Kütüphanesi Yayınları, Sayı 1463, İstanbul
- Tameroglu, S., Cinemre, V., Özbek, T., (1970), Elastostatikğin Stabilite Problemleri, İTÜ Kütüphanesi Yayınları, Sayı 782, İstanbul
- Tımarcı, T., (1993), Vibrations of Composite Circular Cylindrical Shells, Seminer Notu, Nottingham
- Tımarcı, T., Soldatos, K. P., (1995), "Comparative Dynamic Studies for Symmetric Cross-ply Circular Cylindrical Shells on the Basis of a Unified Shear Deformable Shell Theory", Journal of Sound and Vibration, 187(4), 609-624
- Tımarcı, T., Soldatos, K. P., (2000), "Vibrations of Angle-ply Laminated Circular Cylindrical Shells Subjected to Different Sets of Edge Boundary Conditions", Journal of Engineering Mathematics, 37, 211-230

- Timoshenko, S., (1963), Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, Singapore
- Uysal, M., Karahoca, A., (1997), Mathcad 6.0 ve Mathcad Plus 6.0 Kullanıcı Rehberi, Beta Basım Yayım Dağıtım A. Ş., İstanbul
- Uzunoglu, M., Kızıl, A., Onar, Ö., (2002), Kolay Anlatımı ile İleri Düzeyde Matlab 6.0 - 6.5, Türkmen Kitabevi, İstanbul
- Vel, S. S., Batra, R. C., (2002a), "Exact Solution for the Cylindrical Bending Vibration of Functionally Graded Plates", Proceedings Of The American Society Of Composites, Seventeenth Technical Conference, Purdue University, West Lafayette, Indiana
- Vel, S. S., Batra, R. C., (2002b), "Exact Solution for Thermo elastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates", AIAA Journal, Vol. 40, No:7
- Wojciechowski, S., (2000), "New Trends in The Development of Mechanical Engineering Materials", Journal Of Materials Processing Technology, 106:230-235
- Yang, J., Shen, H.S., (2003a), "Non-Linear Analysis of Functionally Graded Plates Under Transverse and in-Plane Loads", International Journal Of Non-Linear Mechanics, 38:467-482
- Yüksel, İ., (1996), Matlab ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü, Uludağ Üniversitesi, Bursa
- Zhong, Z., Shang, E.T., (2003), "Three-Dimensional Exact Analysis of a Simply Supported Functionally Gradient Piezoelectric Plate", International Journal Of Solids And Structures, 40:5335-5352

EKLER

- Ek 1 Elastisite Modülünün Antisimetrik Reddy Tarzına Göre Değişmesi Durumunda Katılık Matris Değerleri
- Ek 2 ANSYS Paket Programı İle Uygulama
- Ek 3 Mathcad Paket Programı Yardımı İle Derecelendirilmiş Plak İçin (M,N) Değerlerinin Kenar Oranları İle Değişimlerinin İncelenmesi ($R=0$)
- Ek 4 Mathcad Paket Programı Yardımı İle Derecelendirilmiş Plak İçin (M,N) Değerlerinin Kenar Oranları İle Değişimlerinin İncelenmesi ($R=1$)
- Ek 5 Mathcad Paket Programı Yardımı İle Derecelendirilmiş Plak İçin (M,N) Değerlerinin Kenar Oranları İle Değişimlerinin İncelenmesi ($R= -1$)
- Ek 6 Klasik Plak Teorisi (Levy Yöntemi) Yardımıyla Plak Burkulma Analizi İçin Hazırlanan Bilgisayar Programının Akış Diyagramı

**Ek 1 Elastisite Modülünün Anti Simetrik Reddy Tarzında Değişmesi Durumunda
Katılık Matris Değerleri**

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz = (Q_{ij}^c - Q_{ij}^m) \frac{h}{(k+1)} + Q_{ij}^m h$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z dz = (Q_{ij}^c - Q_{ij}^m) \frac{kh^2}{2(k+1)(k+2)}$$

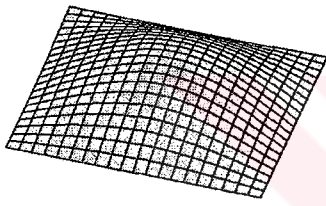
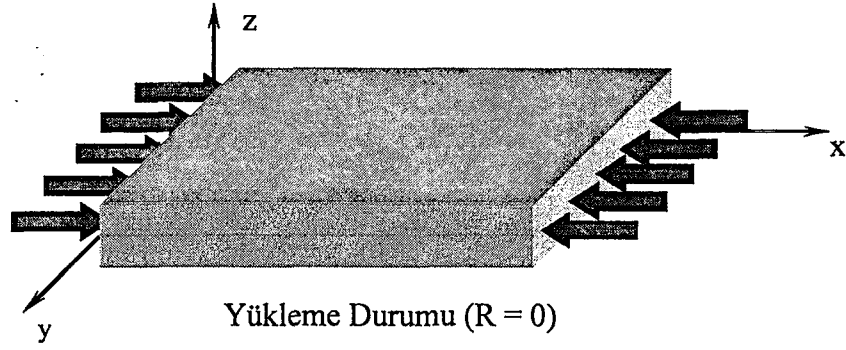
$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz = (Q_{ij}^c - Q_{ij}^m) \frac{(k^2 + k + 2)h^3}{4(k+1)(k+2)(k+3)} + Q_{ij}^m \frac{h^3}{12}$$

$$E_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^3 dz = (Q_{ij}^c - Q_{ij}^m) \frac{(k^3 + 3k^2 + 8k)h^4}{8(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

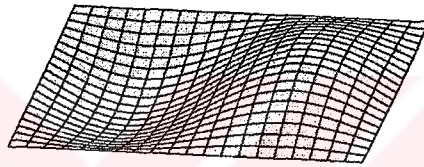
$$F_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^4 dz = (Q_{ij}^c - Q_{ij}^m) \frac{(k^4 + 6k^3 + 23k^2 + 18k + 24)h^5}{16(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} + Q_{ij}^m \frac{h^5}{80}$$

$$H_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^6 dz = (Q_{ij}^c - Q_{ij}^m) \frac{(k^6 + 15k^5 + 115k^4 + 405k^3 + 964k^2 + 660k + 720)h^7}{64(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)(k+7)} + Q_{ij}^m \frac{h^7}{448}$$

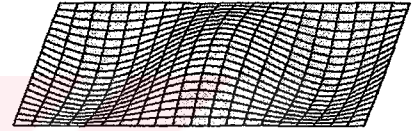
Ek 2 ANSYS Paket Programı ile Uygulama:



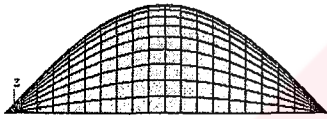
$$0 < a/b < 1.4142$$



$$1.4142 < a/b < 2.4494$$



$$2.4494 < a/b < 3.4641$$



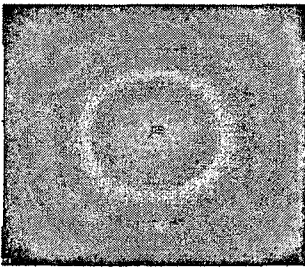
$$m = 1, n = 1$$



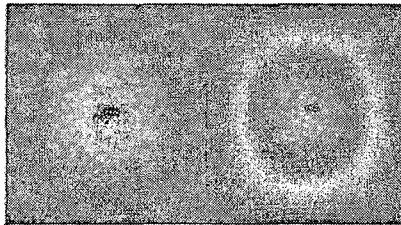
$$m = 2, n = 1$$



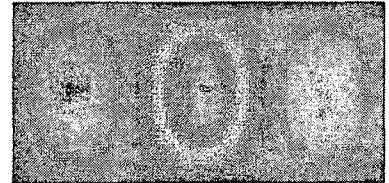
$$m = 3, n = 1$$



$$m = 1, n = 1$$



$$m = 2, n = 1$$



$$m = 3, n = 1$$

```

/batch
! /com,ansys release
/nopr
/pmeth,off,0
keyw,pr_set,1
keyw,pr_struc,1
keyw,pr_therm,0
keyw,pr_fluid,0
keyw,pr_multi,0
/go
! /com,
! /com,preferences for gui filtering have been set to display:
! /com, structural
/prep7
et,1,shell99
k=1!fgm katsayisi
tabaka=20! tabaka sayisi
eu=380e+9! (+h/2)'deki elastisite modulu
ea=70e+9! (- h/2)'deki elastisite modulu
h=0.001! plak kalinligi h=0.001m
r,1
rmodif,1,1,tabaka,0,0,0,0,0
rmodif,1,13,1,0,h/tabaka,2,0,h/tabaka
rmodif,1,19,3,0,h/tabaka,4,0,h/tabaka
rmodif,1,25,5,0,h/tabaka,6,0,h/tabaka
rmodif,1,31,7,0,h/tabaka,8,0,h/tabaka
rmodif,1,37,9,0,h/tabaka,10,0,h/tabaka
rmodif,1,43,11,0,h/tabaka,12,0,h/tabaka
rmodif,1,49,13,0,h/tabaka,14,0,h/tabaka
rmodif,1,55,15,0,h/tabaka,16,0,h/tabaka
rmodif,1,61,17,0,h/tabaka,18,0,h/tabaka
rmodif,1,67,19,0,h/tabaka,20,0,h/tabaka
*do,i,2,tabaka
v=(i/tabaka)**k!lineer degisime gore hacim orani
mptemp,,,,,,,,,
mptemp,1,0
mpdata,ex,1,,70e9
mpdata,prxy,1,,0.3
mpdata,ex,i,,ea+(eu-ea)*v!elastisite modulunun degisimi (lineer)
mpdata,prxy,i,,0.3! poisson orani= 0.3
*enddo
rectng,0,0.1,0,0.1,! plak geometrisi a=b=0.1m
flst,5,4,4,orde,2
fitem,5,1
fitem,5,-4
cm,_y,line
lsel,,,p51x
cm,_y1,line
cmsel,,_y
lesize,_y1,,,20,,,,,1
mshape,0,2d

```

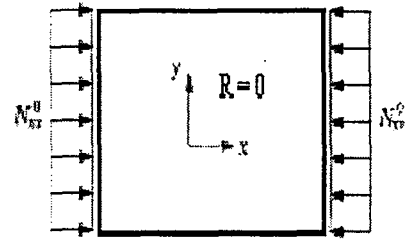
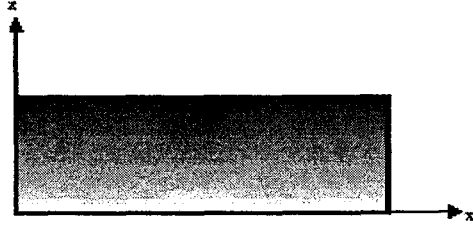
```
mshkey,0
cm,_y,area
asel,,, 1
cm,_y1,area
chkmsch,'area'
cmsel,s,_y
amesh,_y1
cmdele,_y
cmdele,_y1
cmdele,_y2
/ui,mesh,off
finish
/solu
flst,2,4,4,orde,2
fitem,2,1
fitem,2,-4
/go
dl,p51x, ,uz,0
flst,2,2,4,orde,2
fitem,2,2
fitem,2,4
/go
sfl,p51x,pres,1,
pstres,on
! /status,solu
solve
finish
/solution
antype,1
bucopt,subsp,5,0
subopt,0,0,0,100,5,all
mxpand,5,0,0,0,0.001,
! /status,solu
solve
```

Ek 3 Mathcad Paket Programı Yardımı ile Derecelendirilmiş Plak İçin (m,n) Değerlerinin Kenar Oranları ile Değişimlerinin İncelenmesi (R=0)

Klasik Plak Teorisi (Navier Yöntemi) ile derecelendirilmiş plak burkulması (R=0)

Elastisite modulu plak kalınlığı boyunca Anti Simetrik REDDY tarzına göre değişmektedir.

Yükleme Sekli:
(R=0) Tek Eksenli Basıncı



GİRİŞ DEĞERLERİ

r = Plak kenarlarının (a/b) oranıdır.

Seramik malzemenin Elastisite modulu (GPa): $E_c := 380 \cdot 10^9 \cdot \text{Pa}$

$r := 0.1, 0.2, \dots, 3$

Metal malzemenin Elastisite modulu (GPa): $E_m := 70 \cdot 10^9 \cdot \text{Pa}$

Plak eni (m): $a(r) := 0.1 \cdot r \cdot \text{m}$

Derecelendirme (Reddy) katsayısı

$k := 0.5$

Plak Boyu (m): $b := 0.1 \cdot \text{m}$

Poisson oranı:

$\nu := 0.30$

Plak Kalınlığı (m): $h := 0.001 \cdot \text{m}$

ORIGIN := 1

Yükleme tipi: $R := 0$

Yarı dalga sayıları: $m := 1 \quad n := 1$

HESAPLAMALAR :

$$\alpha(r, m) := \frac{m \cdot \pi}{a(r)} \quad \beta := \frac{n \cdot \pi}{b} \quad D := \frac{E_c \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

iterasyon :

hassas := 100

$$\alpha(1, 1) = 31.4159 \frac{1}{\text{m}} \quad \beta = 31.4159 \frac{1}{\text{m}} \quad D = 34.7985 \text{ J}$$

$$\text{artim} := \frac{-h}{2} + \frac{h}{\text{hassas}}$$

Anti Simetrik REDDY Tarzına Göre Değişim:

$$\text{artim} = -0.00049 \text{ m}$$

$$k_R := (0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10)^T$$

$$z := \frac{-h}{2}, \text{artim} \dots \frac{h}{2}$$

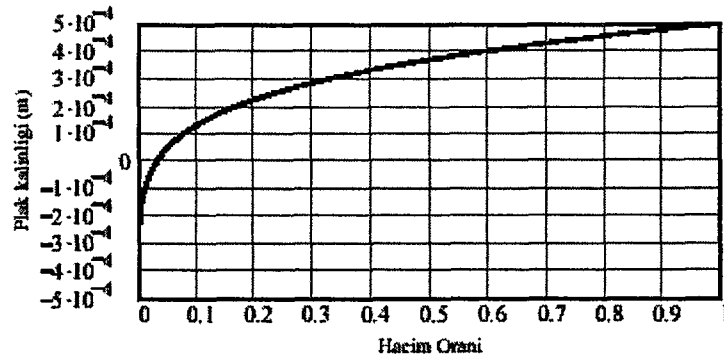
$$V(z, k_R) := \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k_R}$$

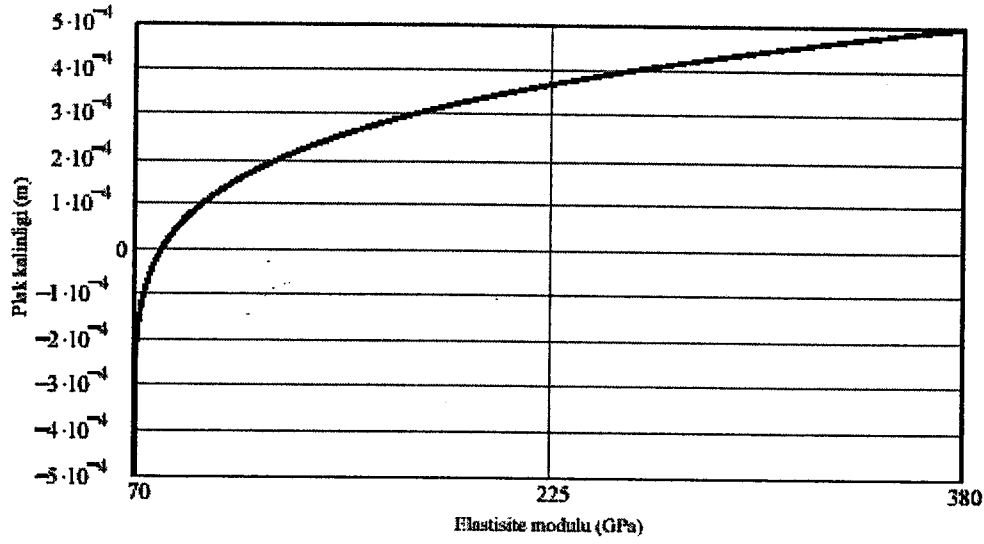
$$\text{Red}(z, k) := (E_c - E_m) \cdot V(z, k) + E_m$$

$$E(z, k) := \text{Red}(z, k)$$

$$E\left(\frac{h}{2}, 1\right) = 3.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E\left(\frac{-h}{2}, 1\right) = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$$





$$A_{11}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{(1-\nu^2)} dz \quad B_{11}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz \quad D_{11}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz$$

$$A_{12}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot \nu}{(1-\nu^2)} dz \quad B_{12}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu \cdot E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz \quad D_{12}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu \cdot E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz$$

$$A_{22}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{(1-\nu^2)} dz \quad B_{22}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz \quad D_{22}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz$$

$$A_{66}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{2 \cdot (1+\nu)} dz \quad B_{66}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{2 \cdot (1+\nu)} dz \quad D_{66}(k) := \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{2 \cdot (1+\nu)} dz$$

$$A_{11}(k) = 8736847.966 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{11}(k) = 652.6312 \frac{1}{m}$$

$$D_{11}(k) = 0.697$$

$$A_{22}(k) = 8736847.966 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{22}(k) = 652.6312 \frac{1}{m}$$

$$D_{22}(k) = 0.697$$

$$A_{12}(k) = 2621054.3898 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{12}(k) = 195.7894 \frac{1}{m}$$

$$D_{12}(k) = 0.2091$$

$$A_{66}(k) = 3057896.7881 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{66}(k) = 228.4209 \frac{1}{m}$$

$$D_{66}(k) = 0.2439$$

$$k11(k,r,m) := A11(k) \cdot \alpha(r,m)^2 + A66(k) \cdot \beta^2$$

$$k12(k,r,m) := (A12(k) + A66(k)) \cdot \alpha(r,m) \cdot \beta$$

$$k13(k,r,m) := -B11(k) \cdot \alpha(r,m)^3 - B12(k) \cdot \alpha(r,m) \cdot \beta^2 - 2 \cdot B66(k) \cdot \alpha(r,m) \cdot \beta^2$$

$$k23(k,r,m) := -B12(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta - B22(k) \cdot \beta^3 - 2 \cdot B66(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta$$

$$k21(k,r,m) := k12(k,r,m)$$

$$k31(k,r,m) := k13(k,r,m)$$

$$k22(k,r,m) := A66(k) \cdot \alpha(r,m)^2 + A22(k) \cdot \beta^2$$

$$k32(k,r,m) := k23(k,r,m)$$

$$k33(k,r,m) := D11(k) \cdot \alpha(r,m)^4 + 2 \cdot D12(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta^2 + D22(k) \cdot \beta^4 + 4 \cdot D66(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta^2$$

$$n33 := \frac{\beta^2}{b^2} \quad m33(r,m) := \frac{\alpha(r,m)^2}{b^2} \quad p := \frac{1}{\pi}$$

$$\text{pay1}(k,r,m) := (k11(k,r,m) \cdot k22(k,r,m) \cdot k33(k,r,m) - k31(k,r,m) \cdot k13(k,r,m) \cdot k22(k,r,m))$$

$$\text{pay2}(k,r,m) := (k21(k,r,m) \cdot k13(k,r,m) \cdot k32(k,r,m) + k31(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot k23(k,r,m))$$

$$\text{pay3}(k,r,m) := -k11(k,r,m) \cdot k23(k,r,m) \cdot k32(k,r,m) - k21(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot k33(k,r,m)$$

$$\text{payda1}(k,r,m) := k11(k,r,m) \cdot k22(k,r,m) \cdot n33 \cdot R + k11(k,r,m) \cdot k22(k,r,m) \cdot m33(r,m)$$

$$\text{payda2}(k,r,m) := -k21(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot n33 \cdot R - k21(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot m33(r,m)$$

$$\lambda(k,r,m) := \frac{\text{pay1}(k,r,m) + \text{pay2}(k,r,m) + \text{pay3}(k,r,m)}{\text{payda1}(k,r,m) + \text{payda2}(k,r,m)}$$

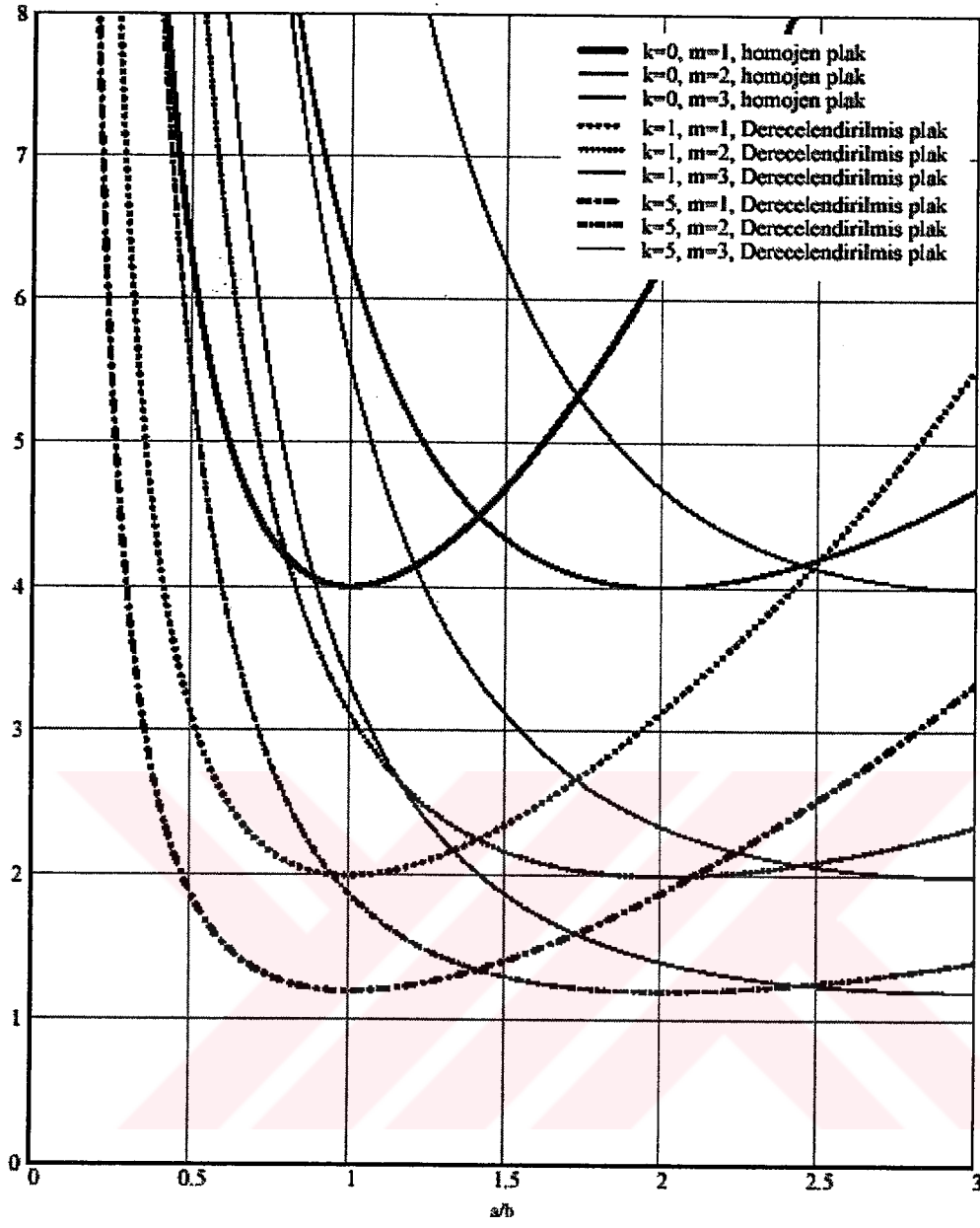
SONUCLAR :

$b = 0.1 \text{ m}$	$m = 1$	$\lambda(0,1,1) \cdot p = 4$
$h = 0.001 \text{ m}$	$n = 1$	$\lambda(0.05,1,1) \cdot p = 3.7929$
$E_c = 3.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$\frac{b}{h} = 100$	$\lambda(0.5,1,1) \cdot p = 2.593$
$E_m = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$	$k = 0.5$	$\lambda(1,1,1) \cdot p = 1.9938$
$\frac{E_c}{E_m} = 5.4286$	$R = 0$	$\lambda(5,1,1) \cdot p = 1.3157$
		$\lambda(10,1,1) \cdot p = 1.1984$

Kritik burkulma Katsayisi

$$r := 0, 0.01 \dots 3$$

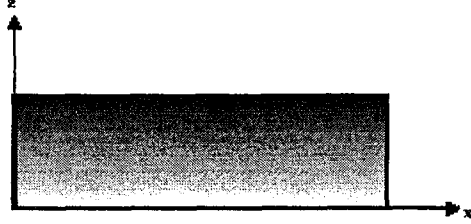
Kritik Burkulma Katsayısı



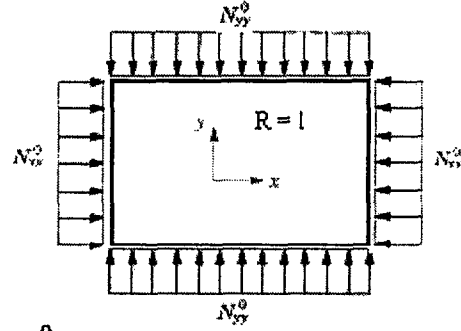
Ek 4 Mathcad Paket Programı Yardımı ile Derecelendirilmiş Plak İçin (m,n) Değerlerinin Kenar Oranları ile Değişimlerinin İncelenmesi (R=1)

Klasik Plak Teorisi (Navier Yöntemi) ile derecelendirilmiş plak burkulması (R=1)

Elastisite modulu plak kalınlığı boyunca Anti Simetrik REDDY tarzına göre değişmektedir.



Yüklemeye Sekli:
(R=1) İki Eksenli Basınc



GİRİŞ DEĞERLERİ

Seramik malzemenin Elastisite modulu (GPa) $E_c = 380 \cdot 10^9 \cdot \text{Pa}$

Metal malzemenin Elastisite modulu (GPa): $E_m = 70 \cdot 10^9 \cdot \text{Pa}$

Poisson oranı:

$$\nu = 0.30$$

Derecelendirme (Reddy) katsayısı

$$k = 1$$

ORIGIN = 1

HESAPLAMALAR :

$$\alpha(r, m) = \frac{m \cdot \pi}{a(r)}$$

$$\beta = \frac{n \cdot \pi}{b}$$

$$D = \frac{E_c \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

r = Plak kenarlarının (a/b) oranıdır.

$$r = 0.1, 0.2, \dots, 3$$

Plak eni (m): $a(r) = 0.1 \cdot r \cdot m$

Plak Boyu (m): $b = 0.1 \cdot m$

Plak Kalınlığı(m) $h = 0.001 \cdot m$

Yüklemeye tipi : $R = 1$

Yarı dalga sayıları : $m = 1 \quad n = 1$

iterasyon :

$$\alpha(1, 1) = 31.4159 \frac{1}{m} \quad \beta = 31.4159 \frac{1}{m} \quad D = 34.7985 \text{ J}$$

hassas = 100

$$\text{artim} = \frac{-h}{2} + \frac{h}{\text{hassas}}$$

$$\text{artim} = -0.00049 \text{ m}$$

$$z = \frac{-h}{2}, \text{artim} \dots \frac{h}{2}$$

Anti Simetrik REDDY Tarzına Göre Değişim:

$$k_R = (0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10)^T$$

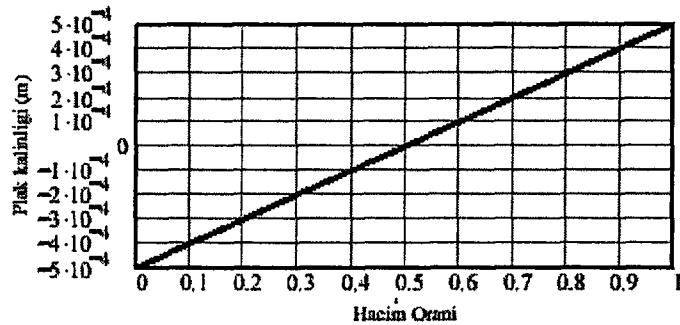
$$V(z, k_R) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k_R}$$

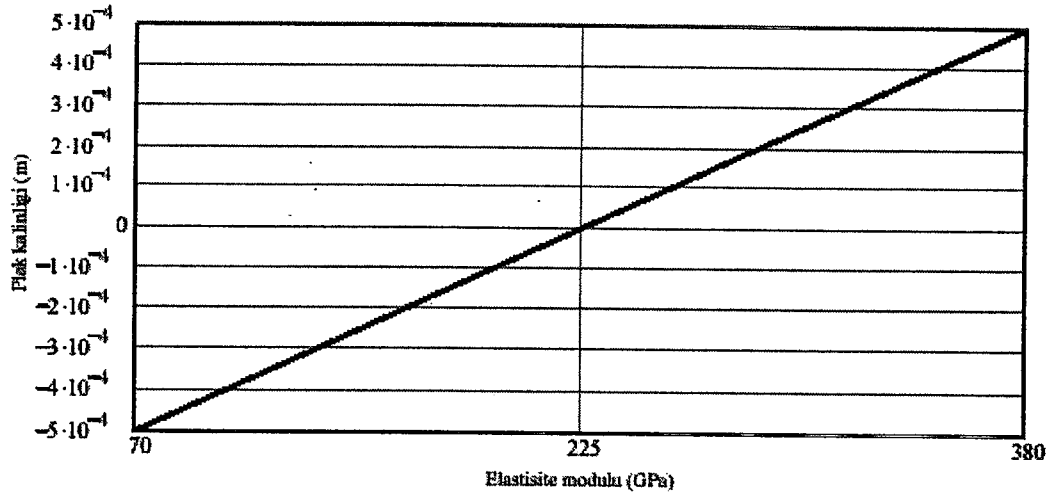
$$\text{Red}(z, k) = (E_c - E_m) \cdot V(z, k) + E_m$$

$$E(z, k) = \text{Red}(z, k)$$

$$E\left(\frac{h}{2}, 1\right) = 3.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E\left(\frac{-h}{2}, 1\right) = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$$





$$\begin{aligned}
 A_{11}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{(1-\nu^2)} dz & B_{11}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz & D_{11}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz \\
 A_{12}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot \nu}{(1-\nu^2)} dz & B_{12}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu \cdot E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz & D_{12}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu \cdot E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz \\
 A_{22}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{(1-\nu^2)} dz & B_{22}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz & D_{22}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz \\
 A_{66}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{2 \cdot (1+\nu)} dz & B_{66}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{2 \cdot (1+\nu)} dz & D_{66}(k) &:= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{2 \cdot (1+\nu)} dz \\
 A_{11}(k) &= 7105263.1579 \frac{1}{m^2} & B_{11}(k) &= 815.7895 \frac{1}{m} & D_{11}(k) &= 0.5921 \\
 A_{22}(k) &= 7105263.1579 \frac{1}{m^2} & B_{22}(k) &= 815.7895 \frac{1}{m} & D_{22}(k) &= 0.5921 \\
 A_{12}(k) &= 2131578.9474 \frac{1}{m^2} & B_{12}(k) &= 244.7368 \frac{1}{m} & D_{12}(k) &= 0.1776 \\
 A_{66}(k) &= 2486842.1053 \frac{1}{m^2} & B_{66}(k) &= 285.5263 \frac{1}{m} & D_{66}(k) &= 0.2072
 \end{aligned}$$

$$k11(k,r,m) := A11(k) \cdot \alpha(r,m)^2 + A66(k) \cdot \beta^2$$

$$k12(k,r,m) := (A12(k) + A66(k)) \cdot \alpha(r,m) \cdot \beta$$

$$k13(k,r,m) := -B11(k) \cdot \alpha(r,m)^3 - B12(k) \cdot \alpha(r,m) \cdot \beta^2 - 2 \cdot B66(k) \cdot \alpha(r,m) \cdot \beta^2$$

$$k23(k,r,m) := -B12(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta - B22(k) \cdot \beta^3 - 2 \cdot B66(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta$$

$$k21(k,r,m) := k12(k,r,m)$$

$$k31(k,r,m) := k13(k,r,m)$$

$$k22(k,r,m) := A66(k) \cdot \alpha(r,m)^2 + A22(k) \cdot \beta^2$$

$$k32(k,r,m) := k23(k,r,m)$$

$$k33(k,r,m) := D11(k) \cdot \alpha(r,m)^4 + 2 \cdot D12(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta^2 + D22(k) \cdot \beta^4 + 4 \cdot D66(k) \cdot \alpha(r,m)^2 \cdot \beta^2$$

$$n33 := \frac{\beta^2}{b^2} \quad m33(r,m) := \frac{\alpha(r,m)^2}{b^2} \quad p := \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{pay1}(k,r,m) := (k11(k,r,m) \cdot k22(k,r,m) \cdot k33(k,r,m) - k31(k,r,m) \cdot k13(k,r,m) \cdot k22(k,r,m))$$

$$\text{pay2}(k,r,m) := (k21(k,r,m) \cdot k13(k,r,m) \cdot k32(k,r,m) + k31(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot k23(k,r,m))$$

$$\text{pay3}(k,r,m) := -k11(k,r,m) \cdot k23(k,r,m) \cdot k32(k,r,m) - k21(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot k33(k,r,m)$$

$$\text{payda1}(k,r,m) := k11(k,r,m) \cdot k22(k,r,m) \cdot n33 \cdot R + k11(k,r,m) \cdot k22(k,r,m) \cdot m33(r,m)$$

$$\text{payda2}(k,r,m) := -k21(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot n33 \cdot R - k21(k,r,m) \cdot k12(k,r,m) \cdot m33(r,m)$$

$$\lambda(k,r,m) := \frac{\text{pay1}(k,r,m) + \text{pay2}(k,r,m) + \text{pay3}(k,r,m)}{\text{payda1}(k,r,m) + \text{payda2}(k,r,m)}$$

SONUCLAR :

$$b = 0.1 \text{ m}$$

$$m = 1$$

$$\lambda(0,1,1) \cdot p = 2$$

$$h = 0.001 \text{ m}$$

$$n = 1$$

$$\lambda(0.05,1,1) \cdot p = 1.8961$$

$$Ec = 3.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\frac{b}{h} = 100$$

$$\lambda(0.5,1,1) \cdot p = 1.2965$$

$$Em = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$k = 1$$

$$\lambda(1,1,1) \cdot p = 0.9969$$

$$\lambda(5,1,1) \cdot p = 0.6578$$

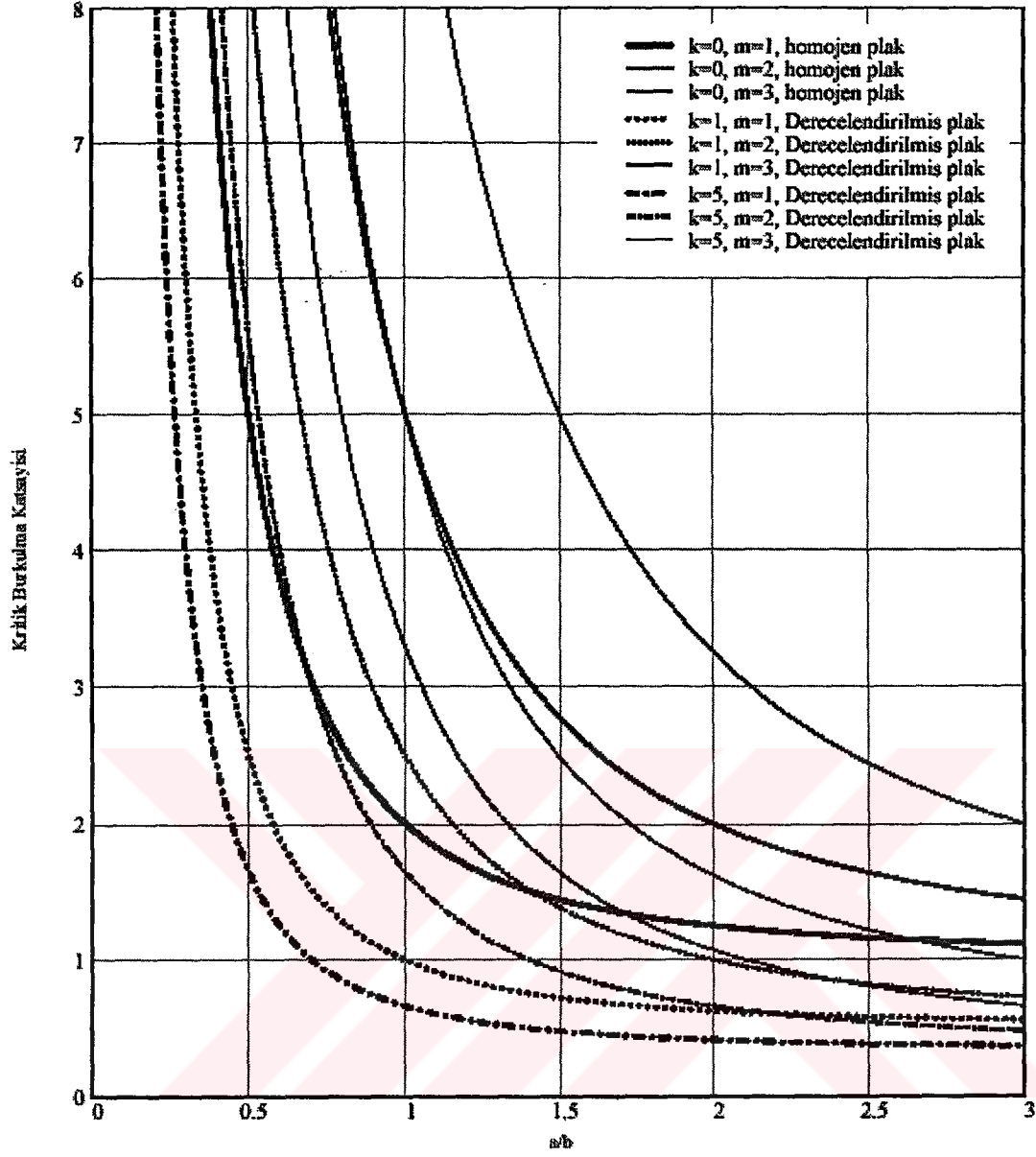
$$\frac{Ec}{Em} = 5.4286$$

$$R = 1$$

$$\lambda(10,1,1) \cdot p = 0.5992$$

Kritik burkulma Katsayisi

$$r := 0,0.01 \dots 3$$

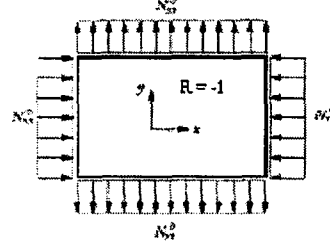
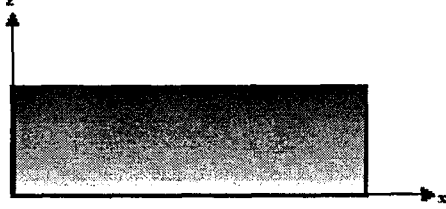


Ek 5 Mathcad Paket Programı Yardımı ile Derecelendirilmiş Plak İçin (m,n) Değerlerinin Kenar Oranları ile Değişimlerinin İncelenmesi (R= -1)

Klasik Plak Teorisi (Navier Yontemi) ile derecelendirilmiş plak burkulması (R= -1)

Elastisite modulu plak kalınlığı boyunca Anti Simetrik REDDY tarzına göre değişmektedir.

Yukleme Sekli:
(R= -1) İki Eksenli Basınc-Cekme



GIRIS DEGERLERI

Seramik malzemenin Elastisite modulu (GPa) $E_c := 380 \cdot 10^9 \cdot \text{Pa}$

Metal malzemenin Elastisite modulu (GPa): $E_m := 70 \cdot 10^9 \cdot \text{Pa}$

Poisson oranı: $\nu := 0.30$

Derecelendirme (Reddy) katsayısı $k := 2$

ORIGIN := 1

HESAPLAMALAR :

$$\alpha(r, m) := \frac{m \cdot \pi}{a(r)} \quad \beta := \frac{n \cdot \pi}{b} \quad D := \frac{E_c \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

$$\alpha(1, 1) = 31.4159 \frac{1}{\text{m}} \quad \beta = 31.4159 \frac{1}{\text{m}} \quad D = 34.7985 \text{ J}$$

Anti Simetrik REDDY Tarzına Gore Degisim:

$r = \text{Plak kenarlarının (a/b) oranidir.}$

$$r := 0.1, 0.2 \dots 5$$

Plak Boyu (m): $a(r) := 0.1 \cdot r \cdot \text{m}$

Plak eni (m): $b := 0.1 \cdot \text{m}$

Plak Kalınlığı(m) $h := 0.001 \cdot \text{m}$

Yukleme tipi : $R := -1$

Yari dalga sayilari : $m := 1 \quad n := 1$

iterasyon :

hassas := 10

$$\text{artim} := \frac{-h}{2} + \frac{h}{\text{hassas}}$$

$$\text{artim} = -0.0004 \text{ m}$$

$$z := \frac{-h}{2}, \text{artim} \dots \frac{h}{2}$$

$$k_R := (0 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 10)^T$$

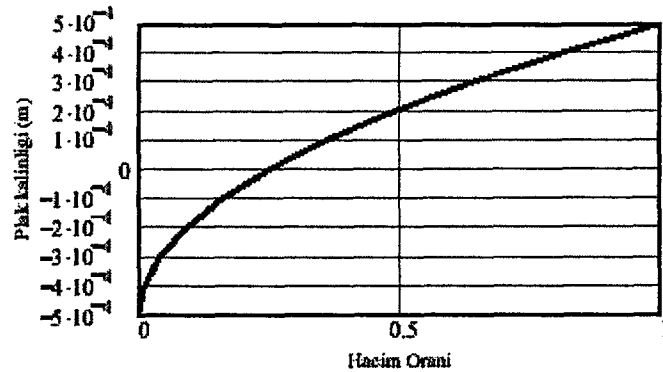
$$V(z, k_R) := \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k_R}$$

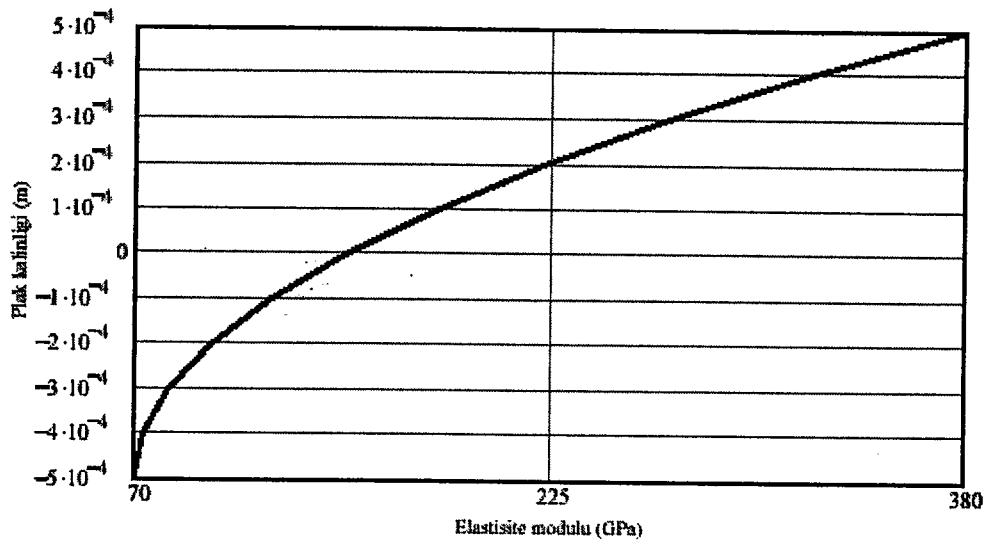
$$\text{Red}(z, k) := (E_c - E_m) \cdot V(z, k) + E_m$$

$$E(z, k) := \text{Red}(z, k)$$

$$E\left(\frac{h}{2}, 1\right) = 3.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E\left(\frac{-h}{2}, 1\right) = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$$





$$\begin{aligned}
 A_{11}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{(1-\nu^2)} dz & B_{11}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz & D_{11}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz \\
 A_{12}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot \nu}{(1-\nu^2)} dz & B_{12}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu \cdot E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz & D_{12}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu \cdot E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz \\
 A_{22}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{(1-\nu^2)} dz & B_{22}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{(1-\nu^2)} dz & D_{22}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{(1-\nu^2)} dz \\
 A_{66}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k)}{2 \cdot (1+\nu)} dz & B_{66}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z}{2 \cdot (1+\nu)} dz & D_{66}(k) &= \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z,k) \cdot z^2}{2 \cdot (1+\nu)} dz
 \end{aligned}$$

$$A_{11}(k) = 5473684.2105 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{11}(k) = 815.7895 \frac{1}{m}$$

$$D_{11}(k) = 0.5105$$

$$A_{22}(k) = 5473684.2105 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{22}(k) = 815.7895 \frac{1}{m}$$

$$D_{22}(k) = 0.5105$$

$$A_{12}(k) = 1642105.2632 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{12}(k) = 244.7368 \frac{1}{m}$$

$$D_{12}(k) = 0.1532$$

$$A_{66}(k) = 1915789.4737 \frac{1}{m^2}$$

$$B_{66}(k) = 285.5263 \frac{1}{m}$$

$$D_{66}(k) = 0.1787$$

$$k11(k, r, m) := A11(k) \cdot \alpha(r, m)^2 + A66(k) \cdot \beta^2$$

$$k12(k, r, m) := (A12(k) + A66(k)) \cdot \alpha(r, m) \cdot \beta$$

$$k13(k, r, m) := -B11(k) \cdot \alpha(r, m)^3 - B12(k) \cdot \alpha(r, m) \cdot \beta^2 - 2 \cdot B66(k) \cdot \alpha(r, m) \cdot \beta^2$$

$$k23(k, r, m) := -B12(k) \cdot \alpha(r, m)^2 \cdot \beta - B22(k) \cdot \beta^3 - 2 \cdot B66(k) \cdot \alpha(r, m)^2 \cdot \beta$$

$$k21(k, r, m) := k12(k, r, m)$$

$$k31(k, r, m) := k13(k, r, m)$$

$$k22(k, r, m) := A66(k) \cdot \alpha(r, m)^2 + A22(k) \cdot \beta^2$$

$$k32(k, r, m) := k23(k, r, m)$$

$$k33(k, r, m) := D11(k) \cdot \alpha(r, m)^4 + 2 \cdot D12(k) \cdot \alpha(r, m)^2 \cdot \beta^2 + D22(k) \cdot \beta^4 + 4 \cdot D66(k) \cdot \alpha(r, m)^2 \cdot \beta^2$$

$$n33 := \frac{\beta^2}{b^2} \quad m33(r, m) := \frac{\alpha(r, m)^2}{b^2} \quad p := \frac{1}{\pi}$$

$$\text{pay1}(k, r, m) := (k11(k, r, m) \cdot k22(k, r, m) \cdot k33(k, r, m) - k31(k, r, m) \cdot k13(k, r, m) \cdot k22(k, r, m))$$

$$\text{pay2}(k, r, m) := (k21(k, r, m) \cdot k13(k, r, m) \cdot k32(k, r, m) + k31(k, r, m) \cdot k12(k, r, m) \cdot k23(k, r, m))$$

$$\text{pay3}(k, r, m) := -k11(k, r, m) \cdot k23(k, r, m) \cdot k32(k, r, m) - k21(k, r, m) \cdot k12(k, r, m) \cdot k33(k, r, m)$$

$$\text{payda1}(k, r, m) := k11(k, r, m) \cdot k22(k, r, m) \cdot n33 \cdot R + k11(k, r, m) \cdot k22(k, r, m) \cdot m33(r, m)$$

$$\text{payda2}(k, r, m) := -k21(k, r, m) \cdot k12(k, r, m) \cdot n33 \cdot R - k21(k, r, m) \cdot k12(k, r, m) \cdot m33(r, m)$$

$$\lambda(k, r, m) := \frac{\text{pay1}(k, r, m) + \text{pay2}(k, r, m) + \text{pay3}(k, r, m)}{\text{payda1}(k, r, m) + \text{payda2}(k, r, m)}$$

SONUCLAR :

$$b = 0.1 \text{ m}$$

$$m = 1$$

$$h = 0.001 \text{ m}$$

$$n = 1$$

$$Ec = 3.8 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\frac{b}{h} = 100$$

$$Em = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

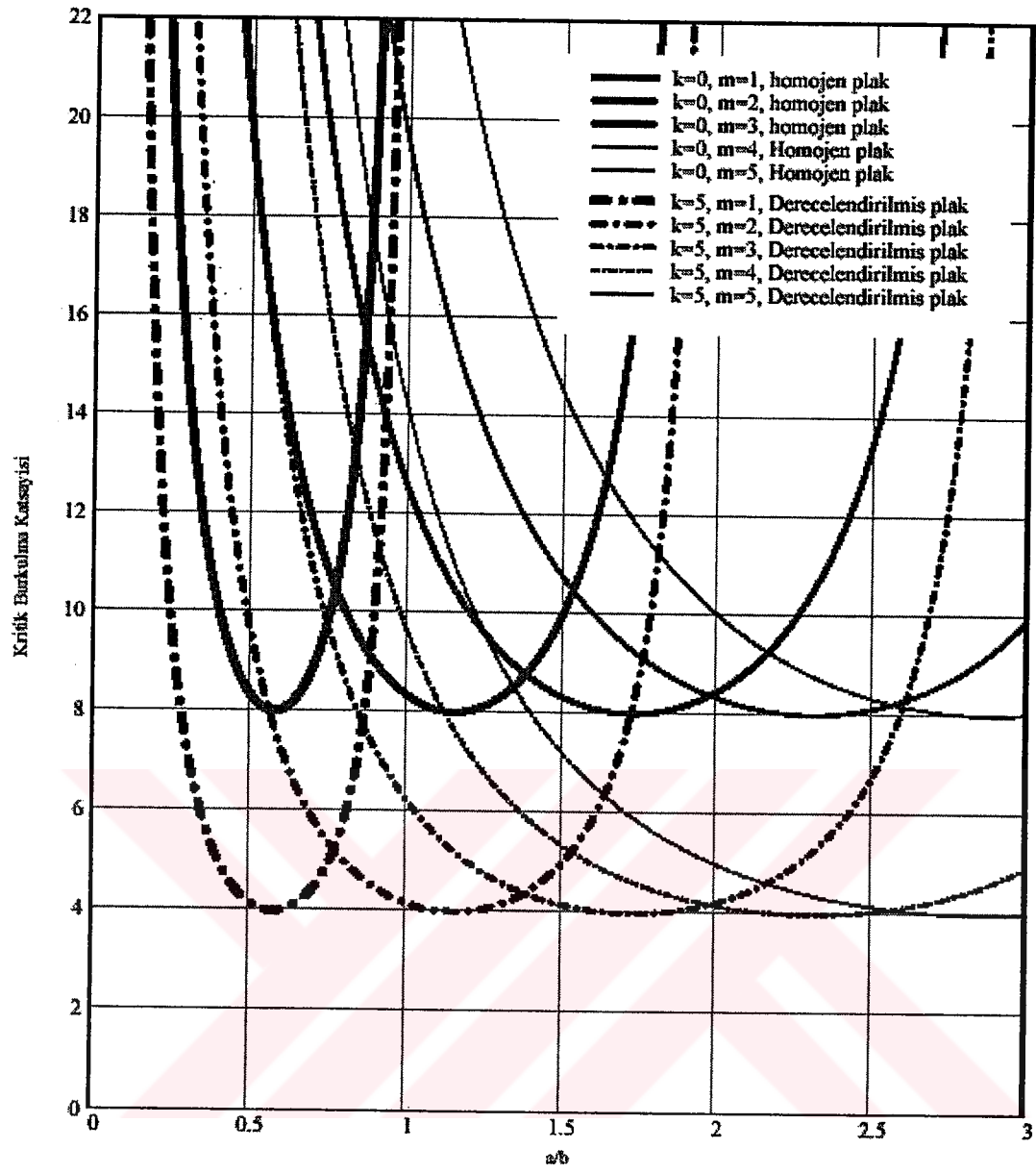
$$k = 2$$

$$\frac{Ec}{Em} = 5.4286$$

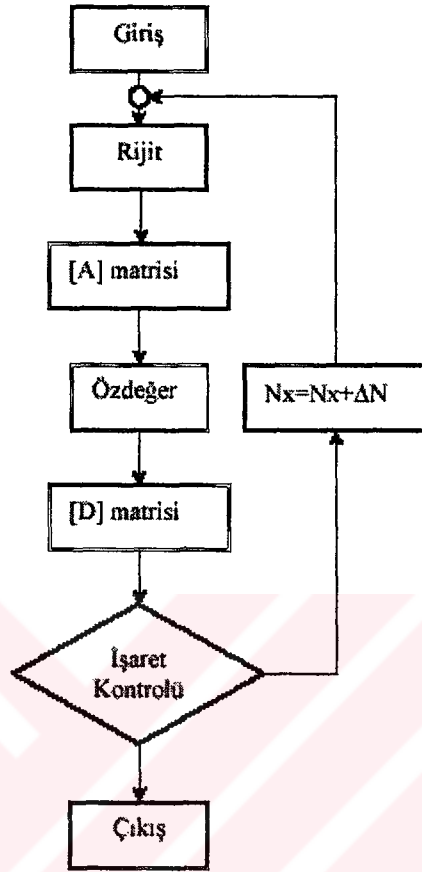
$$R = -1$$

Kritik burkulma Katsayisi

$$r := 0, 0.01 \dots 5$$



Ek 6 Klasik Plak Teorisi (Levy Yöntemi) Yardımıyla Plak Burkulma Analizi İçin Hazırlanan Bilgisayar Programının Akış Diyagramı



- Giriş** : Malzeme sabitleri ve plak geometrisi ile ilgili değerlerin girilmesi
(N , ΔN , n , m , E , a , b , h , k , ν)
- Rijit** : Derecelendirilmiş malzemeye ait elastisite modülünün kalınlık boyunca değişim şekline göre ve k katsayısına göre A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} katılıklarının hesaplanması
- [A] matrisi** : $\{Z'\} = [A]\{Z\}$ denklemindeki $[A]$ matrisinin elemanlarının hesaplanması
- Özdeğer** : $[A]$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerinin hesaplanması
- [D] matrisi** : $[D]\{c\} = 0$ denklemindeki $[D]$ matrisinin istenen sınır şartlarına göre oluşturulması
- İşaret Kontrolü** : $\det[D]$ işaretinin kontrol edilmesi
- Çıkış** : $\det[D]$ işaretinin değiştirdiği değerin (kritik burkulma yükü) hesaplanması

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 22.08.1968

Doğum Yeri Edirne

Lise 1982 - 1985 Edirne Meslek Lisesi

Lisans 1985 - 1989 Trakya Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 1994 - 1997 Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora 1997 - 2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Konstrüksiyon Programı

Çalıştığı Kurumlar

1990 - 1992 Yedek Subay Askerlik Görevi

1993 – 1994 Serbest Mühendislik Bürosu

1994 – Devam ediyor Trakya Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı