

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Doğrusal Prog. Tek. ve bir Uyg.

Yüksek Lisans Tezi

Servet Yıldırım

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot : R 363
Alındığı Yer : Fen Bil. Ens. 27
Tarih : 2.3.1987
Fatura :
Fiatı : 1000 TL.
Ayniyat No : 1/1
Kayıt No : 44720
UDC : 658.513
Ek : 378.242



DOĞRUSAL PROGRAMLAMA TEKNİKLERİ VE BİR UYGULAMA

Comp.

SERVET YILDIRIM

TEZ YÖNETİCİSİ . YÜK.MÜH. ALBAY TANER ÖZBAYKAL

ÜYE: DOÇ. DR. İLKER BİRDAL

ÜYE: ÖĞ.GÖR. SEZAI POLAT

YÜKSEK LİSANS BİTİRME TEZİ - C/12

İÇİNDEKİLER

Sahife

BÖLÜM-I : GENEL HATLARI İLE LINEER PROGRAMLAMA

I-1. Giriş	1
I-2. Tarihi	1
I-3. Lineer programlamanın temel prensipleri	2
I-4. Lineer programlama problemi	2
I-5. Lineer programlama probleminde bir çözümün özellikleri	4

BÖLÜM-II: EKSTREM NOKTA ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ

14

BÖLÜM-III: SİMPLEKS HESAPLAMA METODU

III.1. Bir minimum mümkün çözümün elde edilmesi	18
III.2. Hesaplama yöntemi	24
III.3. Yapay baz tekniği	31

Bölüm-IV: DUALİTE

IV-1. Simetrik olmayan primal dual problemler	35
IV-2. Simetrik Primal-Dual problemler	40

BÖLÜM-V: BİR UYGULAMA ve SONUÇ

V-1. İşletmenin tanımı	47
V-2. Uygulamanın tanıtımı	47
V-3. Sonuçlar	48

EKLER:

Ek-I. Veriler	51
Ek-II. Kısıtlamalar	52
Ek-III. Gaye fonksiyonu ve kısıtlama denklemleri	55

BÖLÜM - I

GENEL HATLARI İLE LINEER PROGRAMLAMA

1-1 GİRİŞ:

Lineer programlama; endüstri mühendisliği ve işletmecilik problemleri için, geliştirilen matematik metodların içinde uygulanabilirliği kolay, yaygın bir metoddur. Metodun uygulanabilmesi için değişkenler arasında kurulan ilişkilerin doğrusal olması gerekir.

Bazı sebeplerle uyulması mecburi olan kısıtlayıcı şartlar altında, kıt kaynakların en uygun şekilde kullanılmasının nasıl sağlanacağı sorusuna bu metodla cevap bulabiliriz. İşletmelerde kârın nasıl maksimize edileceği, maliyetlerin nasıl minimize edileceği, girdi ve çıktı maksimizasyonunun nasıl sağlanacağı sorularına lineer programlama yolu ile cevap bulunması mümkündür.

Araştırmamızda lineer programlamanın tarihi gelişimi ve temel prensiplerine yer verildikten sonra lineer programlama teknikleri ele alınarak incelenecek ve simplex metod ile bir karışım problemi çözülecektir.

1-2 TARİHİ:

Lineer programlama kavramına ilk olarak W. Leontief'in 1920 yılında yapmış olduğu çalışmalarda rastlanmaktadır. W. Leontief bu konudaki kesin prensiplerini 1941 yılında yayınladığı "Amerikan Ekonomisinin Yapısı" adlı kitabında açıklamıştır. Leontief modelinde son mamuller ile sektör ürünleri arasındaki ilişkileri ele almıştır.

Genel Lineer programlama probleminin formülasyonunu ilk defa George B. Dantzing Marshall Wood ve arkadaşlarının oluşturduğu bir gurup ortaya atmıştır. Gurup bu alandaki ilk

uygulamalarını 1947 yılında A.B.D. Hava Kuvvetlerinin plânlaması sırasında yapmıştır. Metod bu tarihten sonra araştırmacıların dikkatini çekti. Zamanla Lineer programlama metodu geliştirilerek tekniği basitleştirildi.

1-3-LİNEER PROGRAMLAMAMIN TEMEL PRENSİPLERİ:

1. Lineer programlamayı uygulayarak bir gayeye varmaya çalışırız. Varmaya çalıştığımız bu gaye açık olarak bilinmelidir. Gayeye varmamızı etkileyen birtakım faktörler vardır. Gaye, bu faktörlerin Lineer fonksiyonu olarak yazılabilmelidir.

2. İşletmelerde bazı kısıtlayıcı şartlar sözkonusudur. Faktörler arasındaki ilişkiler bu sınırlılığa bağlı olarak doğrusal eşitlik veya eşitsizlik halinde yazılırlar.

3. Gayeye varmak için çeşitli alternatiflerin var olması gereklidir. Yani çözüm 1 den fazla olmalıdır.

4. Fonksiyonda yer alan faktörler toplanabilir özellikte olmalıdır.

5. Gaye fonksiyonu süreklilik arz etmelidir.

6. Fonksiyonda yer alan faktörler bölünebilir özellikte olmalıdır. Yani en küçük birimlerle ifade edilebilmelidir.

7. Faktörlerin negatifliği sözkonusu olmadığından pozitiflik şartı vardır.

1-4-LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMİ:

Genel doğrusal programlama problemi

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \quad (1.1)$$

doğrusal formunu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots (1.2)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

ve

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Lineer kısıtlayıcılarına bağlı olarak minimize veya maksimize eden bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gibi bir vektör bulma işlemidir.

a_{ij} , b_i ve c_j verilmiş sabitler olup $m < n$ dir. Kısıtlayıcı denklemler, bütün (b_i) leri $b_i \geq 0$ yapmak için gerektiğinde (-1) ile çarpılabilir. Genel kullanımdaki notasyonların çeşitliliği nedeni ile genel Lineer programla problemleri çeşitli şekillerde gösterilebilir. Bu gösterimler aşağıda sıralanmıştır.

$$a) \quad x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \text{ için} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

$i = 1, 2, \dots, m$ denklemleri sağlanmak koşulu ile

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ ifadesi minimize edilir.}$$

b) $A = (a_{ij})$ olmak üzere $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ kolon vektörü $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ satır vektörü, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kolon vektörü, $0, n$ boyutlu kolon vektörü iken $AX = b$ ve $X \geq 0$ kısıtlayıcılarını sağlamak koşulu ile $f(x) = cx$ fonksiyonu minimize edilir.

c) P_j ($j=1, \dots, n$) A matrisinin (j) inci kolonu ve $P_0 = b$ iken $X \geq 0$ ve $X_1P_1 + X_2P_2 + \dots + X_nP_n = P_0$ kısıtlayıcı denklemlerini sağlamak koşulu ile CX minimize edilir. Bazı durumlarda gayenin değerine eşit olan X_0 veya Z gibi sınırlandırılmamış bir değişken tanımlamak yararlıdır.

her $x = \alpha U + \beta V$ vektörü için $f(x) = f(\alpha U + \beta V)$
 $= \alpha f(U) + \beta f(V)$ dir.

Gaye fonksiyonu, kısıtlayıcı denklemleri sağlayan x 'ler için bir lineer fonksiyondur.

Teorem - I - Lineer programlama probleminde bütün mümkün çözümler bir konveks küme oluşturur.

İspat: Herhangi iki mümkün çözümün konveks kombinasyonunun ayrıca bir mümkün olduğunu gösterirsek teoremi ispat etmiş oluruz.

a- Şayet çözümler kümesi yalnız bir elemana sahipse teorem tabiatıyla gerçekleşir.

b- X_1 ve X_2 gibi en az iki çözümün varlığını kabul edelim.

$$AX_1 = b \quad X_1 \geq 0, \quad AX_2 = b \quad X_2 \geq 0$$

olmak üzere $0 \leq \alpha \leq 1$ için X_1 ve X_2 nin herhangi konveks kombinasyonu

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 \text{ dir.}$$

X vektörünün bütün bileşimleri negatiften farklıdır.

$X \geq 0$ dir.

$$AX = A[\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2] = \alpha AX_1 + (1-\alpha)AX_2$$

$$AX = \alpha AX_1 + AX_2 - \alpha AX_2$$

$$AX = \alpha b + b - \alpha b$$

$$AX = b$$

Görülmektedir ki X_1 ve X_2 çözümlerinin konveks kombinasyonu yine bir çözüm meydana getirmektedir.

K ile lineer programlama problemindeki çözümlerin konveks kümesini gözönüne alacağız. K sonlu sayıdaki

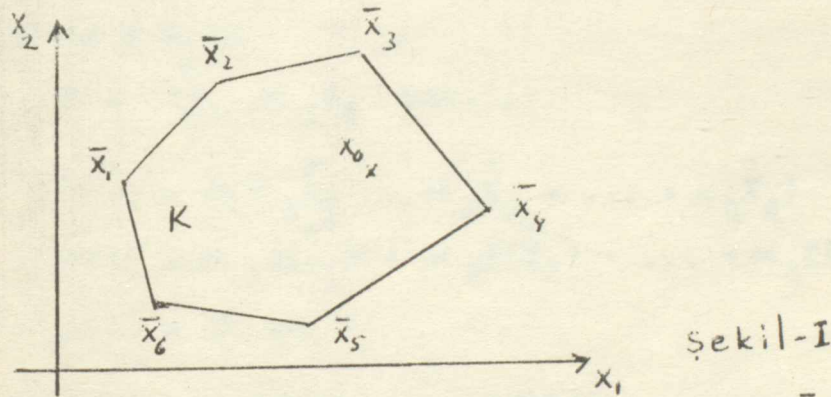
kısıtlayıcı denklemlerin kesişimi olarak belirlenir. Eğer K boş değilse mütekabil hiper düzlemlerin belirli bir kısmının kesişiminden ibarettir.

K , E_n nin bir bölgesidir. Bu bölge konveks bir çokyüzlüdür. Bu çokyüzlü boş olabilir veya bazı doğrultularda sınırsız olabilir. Eğer K boş ise problemimiz herhangi bir çözüme sahip değildir. Eğer K konveks bir çokyüzlü ise problemimiz gaye fonksiyonu için sonlu minimum değerli bir çözüme sahiptir. K sınırsız ise problem bir çözüme sahiptir fakat minimum sınırsız olabilir. Geçerli Lineer programlama modelleri K nın 2. muhtemelen 3. tipini verecektir. Bu tipler mümkün çözümlere sahip olan durumların modelleridir. Teorem I'e göre, bir problem şayet birden çok çözüme sahipse gerçekte çözümlerin sayısı sonsuzdur. Problemimiz bu çözümlerin içinde mütekabil gaye fonksiyonunu minimize edini belirlemektir. Bunu Teorem II sonuçlarına göre basitleştirebiliriz. Önce Teorem I'e dayanarak aşağıdaki hususları not edelim. Eğer K konveks çokyüzlü ise K , K' nın Ekstrem noktalarının oluşturduğu şekildir. (Konveks Hull dur). K' daki her mümkün çözüm ekstrem noktalardaki mümkün çözümlerin bir konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir. Bir konveks çokyüzlü ekstrem noktaların sonlu bir miktarına sahiptir. Eğer K sınırsız ise ekstrem noktaların sayısı yine sonludur. Fakat K nın bütün noktaları bu ekstrem noktaların konveks kombinasyonları olarak gösterilemezler. Kolaylık

için bütün problemlerimizi konveks bir çokyüzlü olan K' ya sahip olduklarını farzedeceğiz.

Teorem - II - Gaye fonksiyonu lineer programlama problemi için mümkün çözümler cümlesi tarafından meydana getirilen K konveks cümlesinin bir ekstrem noktasında minumum olur. Şayet o minumum değeri birden fazla ekstrem noktada alırsa bu özel noktaların her konveks kombinasyonu için aynı değeri alır.

İspat: K konveks bir çokyüzlü olduğuna göre sonlu sayıda ekstrem noktaya sahiptir. İki boyutta K aşağıdaki şekil-I de olduğu gibidir.



Gaye fonksiyonunu $f(x)$, ekstrem noktaları $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ ve minumum mümkün çözümü X_0 ile gösterelim. K da bütün X ler için $f(X_0) \leq f(X)$ dir. Şayet X_0 bir uç nokta ise teorem sağlanır.

Farzedelimki X_0 bir uç nokta değildir. (Şekil-I'de olduğu gibi) Bu durumda X_0, K' nin ekstrem noktalarının konveks kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$X_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{x}_i, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \quad \text{için}$$

$f(x)$ lineer bir fonksiyonel olduğuna göre

$$f(X_0) = f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{x}_i\right) = f(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_p \bar{x}_p)$$

$$f(X_0) = \alpha_1 f(\bar{x}_1) + \alpha_2 f(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_p f(\bar{x}_p) = m \quad (1.4)$$

Burada m , K da her X için $f(X)$ in minumumudur. Bütün α_i

ler $\alpha_i \geq 0$ olduğundan $f(\bar{X}_i)$ değerlerinin minimumu olan $\bar{X}_m$ değerini (1) de yerine koyarsak

$$f(X_0) \geq \alpha_1 f(\bar{X}_m) + \alpha_2 f(\bar{X}_m) + \dots + \alpha_p f(\bar{X}_m) = f(\bar{X}_m)$$

olur. K da bütün X değerleri için $f(X_0) \leq f(X)$ farzettiğimize göre $f(X_0) = f(\bar{X}_m) = m$ olur. Öyleyse gaye fonksiyonu bir ekstrem noktada minimumu değeri alır. Teoremin 2. kısmını ispat etmek için minimum değeri bir uç noktadan daha fazla bir uç noktada aldığını farz edelim. Bu noktalar $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_q$ olsun. Buradan $f(\bar{X}_1) = f(\bar{X}_2) = \dots = f(\bar{X}_q) = m$ elde edilir. $X, \bar{X}_i$ lerin herhangi bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğinden $\alpha_i \geq 0$ ve $\sum_i \alpha_i = 1$ değerleri için

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i \bar{X}_i \text{ yazılır.}$$

$$f(X) = f(\alpha_1 \bar{X}_1 + \alpha_2 \bar{X}_2 + \dots + \alpha_q \bar{X}_q)$$

$$f(X) = \alpha_1 f(\bar{X}_1) + \alpha_2 f(\bar{X}_2) + \dots + \alpha_q f(\bar{X}_q)$$

$$f(X) = \sum_i \alpha_i m$$

$$f(X) = m \text{ sonucu elde edilir.}$$

Belli değişiklikler yapılarak problemin maksimizasyonu için de ispat yapılabilir. İspat ettiğimiz bu teoreme göre lineer programlama probleminde bir minimum mümkün çözüm için sadece K'nın ekstrem noktalarını araştırmamız gerektiği açıktır.

$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ vektörü bütün $x_i \geq 0$ lar için bir mümkün çözüm idi. Buna göre

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = P_0 \text{ olur.}$$

Farzedelim ki k vektörler cümlesi lineer bağımsızdır. P_0 değerine eşit dan bu vektörlerin kombinasyonu pozitiftir.

Vektörlerin bu cümlesi $p_1, p_2, \dots, p_k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi ele alalım.

Teorem - III - Eğer $k \leq m$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ vektörlerinin cümlesi baz teşkil ediyorsa yani lineer bağımsız ise

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = p_0 \text{ ve } x_i \geq 0$$

olmak üzere $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, 0, 0)$ noktası mümkün çözümlerin konveks cümlesinin bir ekstrem noktasıdır. Burada x en az $n-k$ elemanı 0 olan n boyutlu bir vektördür.

İspat: Farzedelim ki X bir ekstrem nokta olmasın. Bu durumda X bir mümkün çözümdür. O halde K daki iki X_1 ve X_2 noktalarının bir konveks kombinasyonu olarak yazılabilir. $0 < \alpha < 1$ için $X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$ bağıntısı vardır. Mademki X 'in bütün x_i elemanları negatif değildir ve $0 < \alpha < 1$ dir. x_1 ve x_2 nin en az $n-k$ elemanı (0) a eşit olmak zorundadır. Yani

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, 0, \dots, 0)$$

$$X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, 0, \dots, 0) \text{ dir.}$$

Mademki X_1 ve X_2 mümkün çözümlerdir $AX_1 = b$ ve $AX_2 = b$ yazılabilir. Bu denklemleri vektörel gösterimle yazalım.

$$x_1^{(1)} p_1 + x_2^{(1)} p_2 + \dots + x_k^{(1)} p_k = p_0$$

$$x_1^{(2)} p_1 + x_2^{(2)} p_2 + \dots + x_k^{(2)} p_k = p_0 \text{ olur.}$$

$p_1, p_2, \dots, p_k$ lineer bağımsız olduklarından (p_0)

$p_1, p_2, \dots, p_k$ vektörlerinin lineer kombinezonu olarak bir tek şekilde yazılabilir. Buradan $x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$ elde edilir. Bu yüzden X, K daki iki farklı noktanın konveks kombinasyonu olarak ifade edilemez. K nın bir uç noktası olmak durumundadır.

Teorem - IV - Eğer $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ K'nin bir ekstrem noktası ise, pozitif x_i lere karşı gelen vektörler lineer bağımsız bir cümle meydana getirirler. Buradan x_i lerin en fazla m tanesinin pozitif olduğu görülür.

İspat: (0) dan farklı katsayılar ilk (k) katsayı olsun.

$\sum_{i=1}^k x_i p_i = p_0$ olur. Olmayana ergi metodu ile teoremin ispatını yapalım. $p_1, p_2, \dots, p_k$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu farzedelim. Bu durumda bu vektörlerin (0) vektörüne eşit olan bir lineer kombinezonu vardır. En az bir $d_i \neq 0$ olmak üzere

$$d_1 p_1 + d_2 p_2 + \dots + d_k p_k = 0 \text{ dir.} \quad (1. 5)$$

Teoremin hipotezleri altında

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = 0 \text{ dir.} \quad (1. 6)$$

(1. 5) i $d > 0$ ile çarpıp elde edileni (1. 6) ile toplayıp çıkardığımızda iki denklem elde edilir.

$$\sum_{i=1}^k x_i p_i + d \sum_{i=1}^k d_i p_i = p_0 ; \quad \sum_{i=1}^k x_i p_i - d \sum_{i=1}^k d_i p_i = p_0$$

böylece (1, 2) nin iki çözümüne sahip oluruz.

$$X_1 = (x_1 + dd_1, x_2 + dd_2, \dots, x_k + dd_k, 0, \dots, 0)$$

$$X_2 = (x_1 - dd_1, x_2 - dd_2, \dots, x_k - dd_k, 0, \dots, 0)$$

Bütün x_i ler pozitif olduğundan (d) yi gerektiği kadar küçük alabiliriz. Bu durumda d sayısı, X_1 ve X_2 nin ilk k

bileşenini pozitif yapacak şekilde pozitif ve küçük bir sayı olarak alınır. Bu şekilde X_1 ve X_2 mümkün çözüm olurlar. Fakat $X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ dir. Bu ise hipoteze aykırıdır.

Çünkü X bir ekstrem noktadır. $p_1, p_2, \dots, p_k$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu kabulü hipoteze aykırıdır. Öyleyse

$p_1, p_2, \dots, p_k$ vektörlerinin cümlesi lineer bağımsızdır.

M boyutlu uzayda $m + 1$ vektörün her cümlesi lineer bağımlı

olmalıdır. Bu yüzden M den fazla pozitif x_i ye sahip olamayız. Farzedelim ki sahip olduk. Teoremin asıl kısmının yukarıdaki ispatı lineer bağımsız olan $p_1, \dots, p_m, p_{m+1}$ vektörlerinin varlığını gerektirir.

Genelleştirme kaydı olmadan lineer programlama probleminin $p_1, p_2, \dots, p_n$ vektör kümesinin daima bir M lineer bağımsız vektörler kümesi içerdiğini farzedebiliriz. Belirli bir problem çözülürken bu özellik belli değilse vektörlerin orijinal cümlesi bir M lineer bağımsız vektörler cümlesi ile arttırılır. Bu şekilde genişletilen probleme çözüm aranır.

Sonuç - I - Her uç nokta $p_1, p_2, \dots, p_n$ den çıkarılmış lineer bağımsız bir m vektör cümlesine karşı gelir.

İspat: Teorem 4 bu şekilde $k \leq m$ vektörlerinin varlığını gösterdi. $k = m$ için ispat teoremden yapılır. Farzedelim ki $k < m$ ve $p_{k+1}, \dots, p_r$ ek vektörleri bulunabiliyor.

$p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_r$ cümlesi $r < m$ için lineer bağımsızdır. Bu durumda kalan $n-r$ vektör $p_1, \dots, p_r$ vektörlerine lineer bağımlı olur. Bu ise $p_1, \dots, p_n$ cümlesinden daima bir lineer bağımsız vektörler cümlesine sahip olduğumuz kabulü ile çelişir. Bu yüzden her uç nokta ile ilgili $p_1, \dots, p_m$ vektörleri lineer bağımsız olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^k x_i p_i + \sum_{i=k+1}^m 0 \cdot p_i = p_0$$

Verilen teoremleri aşağıdaki teoremden toplayabiliriz.

Teorem - V - $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ bir uç nokta olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{j=1}^n x_j p_j = p_0$$

daki pozitif x_j lerin bağımsız p_j vektörlerinin katsayısı

olmasıdır.

Bu bölümün kabulleri ve teoremleri sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- 1) Gaye fonksiyonunun minimum değerini aldığı bir K ekstrem noktası vardır.
- 2) Her temel mümkün çözüm bir K ekstrem noktaya karşılık gelir.
- 3) Her K ekstrem noktası için verilen (n) vektör cümlesinde lineer bağımsız m vektör mevcuttur.

Yukarıdan; yalnızca ekstrem nokta çözümlerini ve bundan dolayı m lineer bağımsız vektörden elde edilen bu mümkün çözümleri araştırmamız gerektiği sonucuna varabiliriz. Verilen n cümlesinde en fazla $\binom{n}{m}$ tane m lineer bağımsız vektör cümleleri olduğundan $\binom{n}{m}$ değeri problemin mümkün çözümleri sayısının üst sınırıdır. Büyük n ve m değerleri için, bütün mümkün çözümleri bulmak ve gaye fonksiyonunu minimize eden birini seçmek imkânsız bir iştir. Bu yüzden minimum mümkün çözüme, küçük bir mümkün çözümler alt kümesinden hareket eden bir hesaplama yolu ile varabiliriz. G.B. Dantzig tarafından bulunan simpleks metod böyle bir yoldur. Bu usule göre bir ekstrem nokta bulunur. Bu noktanın minimum olup olmadığı tesbit edilir. Eğer nokta minimum değilse gaye fonksiyonunu önceki değerinden küçük kılan veya önceki değerine eşit olmasını gerçekleyen bir bitişik ekstrem nokta bulunur. Bu şekildeki adımların belirli bir sayısında (Genellikle m ve $2m$ arasında) minimum mümkün çözüm bulunur. Simplex metodu problemin belirli bir

BÖLÜM - II

EKSTREM NOKTA ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ

Bir ekstrem nokta çözümünün orijinal n vektör kümesinin $m-p_j$ vektörleri cinsinden bilindiğini kabul edelim. m lineer bağımsız vektörlerinin bu kümesi ilk m, p_j vektörü olabilir.

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

Buradan

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m = p_0 \quad (2.1)$$

yazabiliriz. Bütün x_i ler $x_i \geq 0$ dır. Problem, bu bilgi ile hesaplama yönünden verimli bir tarzda yeni bir ekstrem nokta çözümü tesbit etmektir. $p_1, p_2, \dots, p_m$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından m boyutlu vektör uzayında bir baz oluştururlar. Bundan dolayı verilen n 'in her vektörünü bu baz vektörlerin lineer kombinasyonu olarak ifade edebiliriz.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} p_i = p_j ; j = 1, \dots, n$$

Farzedelim ki

$$x_{1, m+1} p_1 + x_{2, m+1} p_2 + \dots + x_{m, m+1} p_m = p_{m+1} \quad (2.2)$$

ifadesinde birkaç vektör verilen bazda olmasın. Meselâ

$p_{m+1}, x_{i, m+1} > 0$ gibi bir elemana sahip olsun. (2.2) denklemini herhangi bir sayı olan θ ile çarpıp sonucu (2.1)

den çıkararak (2.3) sonucunu elde edelim.

$$p_0 = (x_1 - \theta x_{1, m+1}) p_1 + (x_2 - \theta x_{2, m+1}) p_2 + \dots \\ \dots + (x_m - \theta x_{m, m+1}) p_m + \theta p_{m+1} \quad (2.3)$$

$$X' = (x_1 - \theta x_{1, m+1}, x_2 - \theta x_{2, m+1}, \dots, x_m - \theta x_{m, m+1}, \theta)$$

bir çözümdür. Eğer X' nün bütün elemanları negatiften farklı ise X' bir mümkün çözümdür. X' nün X den farklı bir mümkün çözüm olmasını istediğimiz için $\theta > 0$ olacak şekilde bir

sınırlama getirelim. Böylece negatif ve sıfır olan $x_{i, m+1}$ ler için $x_i - \theta x_{i, m+1}$ değerinin negatiften farklı olmasını sağlarız. Bu durumda yalnız pozitif $x_{i, m+1}$ 'e sahip olan elemanlarla ilgilenmemiz yeterlidir. $x_{i, m+1} > 0$ için $x_i - \theta x_{i, m+1} \geq 0$ olmasını sağlayan $\theta > 0$ olan θ 'yı bulmak istiyoruz.

$$x_i - \theta x_{i, m+1} \geq 0 \quad \frac{x_i}{x_{i, m+1}} \geq \theta \text{ elde edilir.}$$

Buradan $0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i, m+1}}$ olan her θ için bir mümkün çözüm elde edileceği sonucu elde edilir.

Eğer $x_{i, m+1} > 0$ için $\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i, m+1}}$ alınırsa X' de bu minimumun elde edildiği eleman sıfıra indirgenir. Örnek olarak bu elemanın birinci eleman olduğunu kabul edelim.

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i, m+1}} = \frac{x_1}{x_{1, m+1}} \text{ olur.}$$

Bu durumda yeni bir mümkün çözüm elde edilir.

$$x'_2 p_2 + x'_3 p_3 + \dots + x'_m p_m + x'_{m+1} p_{m+1} = p_0$$

burada

$$x'_i = x_i - \theta_0 x_{i, m+1}, \quad i = 2, \dots, m$$

$$x'_{m+1} = \theta_0 \text{ alınmıştır.}$$

Eğer bütün $x_{i, m+1}$ ler sıfıra eşit ya da küçükse bazdan $p_1, \dots, p_m$ vektörlerinden en az birini yok edecek bir pozitif θ seçemeyiz. Bu durumda $\theta > 0$ için $m+1$ tane

$p_1, \dots, p_m, p_{m+1}$ vektörleri ile ilişkili ekstrem olmayan mümkün çözümler elde edilebilir. Bu durum problemin belirli bir minimum çözüme sahip olmadığını gösterir.

$X' = (x'_2, \dots, x'_m, x'_{m+1})$ nün bir ekstrem nokta olduğunu göstermek için $p_2, \dots, p_m, p_{m+1}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu ispat etmeliyiz. İspat için olmayana ergi metodunu kullanarak lineer bağımlı olduğunu farzedelim.

$$d_2 p_2 + d_3 p_3 + \dots + d_m p_m + d_{m+1} p_{m+1} = 0 \quad (2.4)$$

bulunur. Burada bütün d_i ler sıfıra eşit değildir. Bir lineer ^{bağımsız} vektörler kümesinin her alt kümesinde bir lineer bağımsız vektörler kümesi olduğundan $p_2, \dots, p_m$ kümesinde lineer bağımsızdır. Bu yüzden $d_{m+1} \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda (2.4) den

$$e_2 p_2 + e_3 p_3 + \dots + e_m p_m = p_{m+1} \quad (2.5) \text{ yazabiliriz.}$$

Burada $e_i = \frac{-d_i}{d_{m+1}}$, $i = 2, \dots, m$ alınmıştır. (2.5)'i (2.2)'den çıkarırsak

$$x_{1,m+1} p_1 + (x_{2,m+1} - e_2) p_2 + \dots + (x_{m,m+1} - e_m) p_m = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. $p_1, p_2, \dots, p_m$ lineer bağımsız olduğundan (2.6)'daki bütün katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Fakat $x_{i,m+1}$ pozitif farzedilmişti. Bu yüzden $p_2, \dots, p_{m+1}$ için lineer bağımlılık kabulü bir çelişki doğurmaktadır. Bu vektörler lineer bağımsız olmalıdır.

Yeni ekstrem mümkün çözümler elde edilmesi işlemine devam etmek için herhangi bir vektörün $p_2, p_3, \dots, p_{m+1}$ bazında değil de bu baz cinsinden gösterimine gerek duyarız. (2.2) den

$$p_1 = \frac{1}{x_{1,m+1}} (p_{m+1} - x_{2,m+1} p_2 - \dots - x_{m,m+1} p_m) \quad (2.7)$$

elde edilir.

$$p_j = x_{1j} p_1 + x_{2j} p_2 + \dots + x_{mj} p_m \quad (2.8)$$

Yeni bazda olmayan herhangi bir vektör olsun. (2.7) ifadesi (2.8) de yerine konursa

$$p_j = (x_{2j} - \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1}) p_2 + (x_{3j} - \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}} x_{3,m+1}) p_3 \\ + \dots + (x_{mj} - \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}) p_m + \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}} p_{m+1}$$

elde edilir. p_j vektörlerinin meydana getirdiği matriste, satır ve sütun operasyonları ile elde edilen dönüşümün p_0 ve p_j yi yeni baz cinsinden tarif eden dönüşüme eşdeğer olduğu gözönünde tutulmalıdır. Yeni ekstrem nokta çözümleri elde edilmesi usulünde, sisteme sokulacak yeni bir değişken seçme mümkünlüğünü korumak için çözümden hangi değişkenin çıkarılması gerektiğini tesbit etme ve vektörlerin yeni gösterimlerini eski bazda elde etmemek için tüm satır sütun operasyonları yapılmalıdır. Çözüme hangi değişkenin sokulacağını tesbit etmekte kullanılan kriter simplex metodun bir özelliği olup bu metod incelenirken ele alınacaktır.

BÖLÜM - III

SİMPLEKS HESAPLAMA METODU

Bu bölümde simpleks ve bağlı hesaplama algoritmalarının geçerliliği ispatlanacaktır. Daha önceki bölümde herhangi bir temel mümkün çözümün tesbit edildiği bir problemde, belirli bir adım sayısında bir minimum çözüm elde edilebileceği görülmüştü. Bu adımlar; gaye fonksiyonunun mütekabil değerinin, önceki çözüm için gaye fonksiyonunun mütekabil değerinden daha küçük olan yeni mümkün çözümler elde edilmesine dayanır. İşleme minimum mümkün çözüm elde edilinceye kadar devam edilir. Önceki bölümde ayrıca, minimum temel mümkün çözümün ekstrem noktalar üzerinde olduğu ve minimum mümkün çözümü bu noktalarda aramamız gerektiğini belirledik. Ayrıca belirlendi ki; ekstrem noktalardaki çözüm vektörünün mütekabili m lineer vektörleri lineer bağımsızdır.

3 - I - BİR MINIMUM MÜMKÜN ÇÖZÜMÜN ELDE EDİLMESİ:

Bir doğrusal programlama probleminde mümkün çözümün var olduğunu, her temel mümkün çözümün bozulmamış olduğunu ve bir temel mümkün çözümün verildiğini farz edelim. Bu kabuller bize genelleştirmede birşey kaybettirmeyecektir. Verilen çözüm $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ ve mütekabil bağımsız vektörler kümesi $p_1, p_2, \dots, p_m$ olsun. Buradan

$$x_{10}p_1 + x_{20}p_2 + x_{30}p_3 + \dots + x_{m0}p_m = p_0 \quad (3.1)$$

$$x_{10}c_1 + x_{20}c_2 + \dots + x_{m0}c_m = Z_0 \quad (3.2)$$

elde edilir. Bütün x_{i0} ' lar $x_{i0} > 0$ olup c_i 'ler gaye fonksiyonundaki katsayılar ve Z_0 verilen çözüm için gaye

fonksiyonunun değeridir. $p_1, p_2, \dots, p_m$ kümesi lineer bağımsız olduğundan $p_1, p_2, \dots, p_n$ kümesinin herhangi bir vektörünü $p_1, p_2, \dots, p_m$ cinsinden ifade edebiliriz. p_j

$x_{1j}p_1 + x_{2j}p_2 + \dots + x_{mj}p_m = p_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$
ile verilmiş olsun. c_j ler p_i lere karşılık gelen değer katsayıları olarak tanımlandığından

$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \dots + x_{mj}c_m = Z_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$
yazabiliriz.

Teorem - I - Her belirlenmiş j için $Z_j - c_j > 0$ şartı geçerli ise, çözüm kümesinin her elemanı için alt sınır olan Z nin sonlu veya sonsuz olduğu $Z < Z_0$ şeklinde bir mümkün çözümler kümesi oluşturulabilir. (Z , mümkün çözümler kümesinin belirli bir elemanı için gaye fonksiyonunun değeri olarak alınmıştır.)

Durum 1 - Alt sınır olan Z sonlu ise, gaye fonksiyonunun değeri önceki çözüm için olan değerden küçük olan ve m pozitif değişkenden oluşan yeni bir mümkün çözüm tesbit edilebilir.

Durum 2 - Alt sınır sonsuzsa, gaye fonksiyonunun değeri keyfi olarak küçük yapılabilen $m+1$ pozitif değişkenden oluşan yeni bir mümkün çözüm tesbit edilebilir.

İspat: $(3.3)'$ ü θ gibi bir sayı ile çarpıp $(3.1)'$ den çıkararak ve benzer şekilde $(3.4)'$ ü aynı θ ile çarpıp $(3.2)'$ den çıkararak $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$(x_{10} - \theta x_{1j})p_1 + (x_{20} - \theta x_{2j})p_2 + \dots + (x_{m0} - \theta x_{mj})p_m + \theta p_j = p_0 \quad (3.5)$$

$$(x_{10} - \theta x_{1j})c_1 + (x_{20} - \theta x_{2j})c_2 + \dots + (x_{m0} - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j = Z_0 - \theta(Z_j - c_j) \quad (3.6)$$

elde edilir. Burada θc_j (3. 6)'nın her iki tarafına eklenmiştir. (3. 5)'teki $p_1, p_2, \dots, p_m, p_j$ vektörlerinin bütün katsayıları negatiften farklı ise gaye fonksiyonunun değeri $Z = Z_0 - \theta(Z_j - c_j)$ (3. 6) olan yeni bir mümkün çözüm tesbit ederiz. (3. 5)'deki $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$ değişkenlerinin hepsini pozitif aldığımızdan (3. 5)'deki vektörlerin katsayılarının pozitif kaldığı bir $\theta > 0$

(sonlu veya sonsuz) değerinin bulunduğu açıktır. Belirlenmiş j için $Z_j - c_j > 0$ kabulünden hareketle $\theta > 0$ için $Z = Z_0 - \theta(Z_j - c_j) < Z_0$ elde ederiz.

Durum - I - için: Belirlenen j 'ye göre (3. 3)'de $i = 1, 2, \dots, m$ için en az bir $x_{ij} > 0$ ise (3. 5)'in bütün katsayılarının negatiften farklı olduğu θ sayısının en büyük değeri $\theta_0 = \min_j \frac{x_{i0}}{x_{ij}} > 0$ (3.7) ile alınır. Bütün temel mümkün çözümlerin m pozitif elemana sahip olduğunu, yani problemin bozulmamış olduğunu kabul ettiğimizden

(3.7)'deki minimum tek bir (i) için elde edilir. (3.5) ve (3.6)'da θ_0, θ olarak yerine konursa bu tek (i) ye tekabül eden katsayı sıfıra eşitlenmiş olur. Bu durumda

p_j ve orijinal bazın $(m-1)$ vektöründen oluşan yeni bir temel mümkün çözüm tesbit edilir. Bu yeni bazda önceki gibi kullanılabilir. Yeni bir $Z_j - c_j > 0$ ve mütekabil

$x_{1j} > 0$ varsa gaye fonksiyonunun daha küçük değerine sahip bir başka çözüm elde edilebilir. Bu işlem ya bütün

$Z_j - c_j \leq 0$ lar yada bazı $Z_j - c_j > 0$ lar için $x_{ij} \leq 0$ olana kadar devam eder. Eğer bütün $(Z_j - c_j)$ ler

$Z_j - c_j \leq 0$ ise işlem sona erer.

Durum - II - için; Herhangibir aşamada bazı j 'ler için $Z_j - c_j > 0$ ve bütün $x_{ij} \leq 0$ ise θ 'nın üst sınırı yoktur. Bu durumda gaye fonksiyonu $-\infty$ alt limitine sahiptir. Bu durumda herhangi bir $\theta > 0$ için (3.5)'in bütün katsayıları pozitiftir. O halde $m+1$ pozitif elemandan oluşan bir mümkün çözüme sahip oluruz. Burada θ yeteri kadar büyük alınarak (3.6)'nın sağ tarafında verilen, gaye fonksiyonunun mütekabil değeri keyfi olarak küçültülebilir.

Teorem - II - Herhangibir temel mümkün çözüm $X = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ için $Z_j - c_j \leq 0$ şartları her $j = 1, 2, \dots, n$ için geçerli ise (3.1) ve (3.2) bir minumum çözüm oluşturur.

İspat :

$$y_{10}p_1 + y_{20}p_2 + \dots + y_{n0}p_n = p_0 \quad (3.8)$$

$$\text{ve } y_{10}c_1 + y_{20}c_2 + \dots + y_{n0}c_n = Z^* \quad (3.9)$$

alalım. Z^* ile herhangi bir mümkün çözüm için gaye fonksiyonunun mütekabil değerini gösterelim. $Z_0 \leq Z^*$ olduğunu görelim. (Bu teoremden bozulmamışlık kabulü gerekmektedir.)

Hipotezden bütün j 'ler için $Z_j - c_j \leq 0$ dır. (3.9) da c_j yerine Z_j konursa

$$y_{10}Z_1 + y_{20}Z_2 + \dots + y_{n0}Z_n \leq Z^* \quad (3.10)$$

elde edilir. Her j için (3.3)'de verilen p_j ifadesini (3.8)'de yerine koyarsak

$$y_{10} \left(\sum_{i=1}^m x_{i1} p_i \right) + y_{20} \left(\sum_{i=1}^m x_{i2} p_i \right) + \dots + y_{n0} \left(\sum_{i=1}^m x_{in} p_i \right) = p_0$$

veya terimleri gruplayarak

$$\left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{1j} \right) p_1 + \left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{2j} \right) p_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{mj} \right) p_m = p_0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde her j için (3.4) de Z_j için

verilen ifadeyi (3.10) da yerine koyarsak

$$\left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{1j}\right) c_1 + \left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{2j}\right) c_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n y_{j0} x_{mj}\right) c_m \leq z^* \quad (3.12)$$

elde edilir. $p_1, p_2, \dots, p_m$ vektörler kümesi lineer bağımsız olduğundan (3.1) ve (3.11)'deki mütekabil vektörlerin kat sayıları birbirine eşit olmalıdır. Bu yüzden

$$x_{10} c_1 + x_{20} c_2 + \dots + x_{m0} c_m \leq z^* \text{ ile} \\ z_0 \leq z^* \text{ olur.}$$

Teorem I ve II sonuçları bir temel mümkün çözüm ile başlayıp minimum çözüme yakın sayan yeni bir temel mümkün çözüm kümesi elde etmemize veya sonlu bir çözümün var olmadığını tesbit etmemize imkân sağlar. Bir temel mümkün çözümün optimizasyonu aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Doğrusal programlama problemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.13)$$

ve $x_j \geq 0$ (3.14) kısıtlama denklemlerine bağlı olarak

$$Z = c_1x_1 + \dots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_nx_n \quad (3.15)$$

de Z yi minimize etmektir. Z burada gaye fonksiyonunun değerini veren kısıtlamasız bir değişkendir. İlk m değişkenin $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ bir temel çözüm oluşturduğunu farzedelim. (3.13)'ü bu temel değişkenler için çözersek

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} - x_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - x_{1n}x_n \\ \vdots & \\ x_m &= x_{m0} - x_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - x_{mn}x_n \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu durumda (3.16) temel değişkenler

$(x_{10}, \dots, x_{m0})$ ve temel olmayan değişkenler $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ cinsinden çözülmüştür. $j = m+1, \dots, n$ için x_{ij} 'ler (3.3)'ün x_{ij} 'leridir. Temel olmayan değişkenler sıfıra eşitlenerek temel değişkenler $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{m0})$ için olağan çözüm elde ederiz. Sonra $(x_1, \dots, x_m)$ için (3.16)'nın sağ taraflarını yerleştirerek

$$Z = Z_0 - \sum_{j=m+1}^n (Z_j - C_j)x_j \quad (3.17) \text{ elde edilir.}$$

Elde edilen bu (3.17) denklemini inceleyelim. Temel olmayan bütün x_j değişkenleri sıfıra eşitlendiğinde $Z = Z_0$ elde edilir. Bütün x_j 'ler $x_j \geq 0$ olduğundan, eğer bütün $(Z_j - C_j)$ 'ler $Z_j - C_j \leq 0$ ise açıkça görülür ki temel olmayan x_j nin herhangi bir pozitif artışı Z yi arttırmaz. $Z_j - C_j$ lerin bazıları $Z_j - C_j > 0$ ise müteakibül temel olmayan x_j değişkeninin artışı Z 'yi azaltır. Buradan şu sonuca varabiliriz. Eğer bütün $(Z_j - C_j)$ 'ler $Z_j - C_j \leq 0$ ise optimum çözüm elde edilmiştir. Eğer bazı $(Z_j - C_j)$ 'ler $Z_j - C_j > 0$ ise çözüme devam edilmelidir.

Minumuma yakınsamayı sağlamak için bozulmamışlık kabulü yapılmış idi. Eğer bu kabul yapılmasa idi verilen çözümün m tane x_{i0} 'ünün en az bir tanesini sıfıra eşit elde etmek mümkün olacaktı. Durum bu olsaydı, θ_0 sıfıra eşit olabilecek ve yeni çözüm için gaye fonksiyonunun değeri eski çözümün değerine eşit olacaktı. Bu durum birkaç müteakip adım için devam edebilirdi. Bu hal için baz tekrar eder ve baza dönüş tekrarlanırdı. Bu durumda yöntemin devrettiği söylenir ve minumum çözümün tesbiti

için hesaplama yöntemi durur. Gerçek hesaplama sırasında bozulma olayı veya bozulmanın görüntüsü m pozitif x_{i0} ' dan az temel çözüm ve $x_{ij} > 0$ için $\theta_0 = \min_i \left(\frac{x_{i0}}{x_{ij}} \right)$

veren birden fazla (i) bulunması veya yalnızca

$\theta_0 = \min_i \left(\frac{x_{i0}}{x_{ij}} \right)$ veren birden fazla (i) bulunmasıdır. Eğer i birtane değilse x_{i0} 'ların bazıları yeni çözümde sıfıra eşit olur. θ_0 'ın tesbitinde düğümler oluştuğunda en küçük i indisi için θ_0 'ı $\theta_0 = \min_i \left(\frac{x_{i0}}{x_{ij}} \right)$ seçmek alışılmış kuraldır.

III - 2 - HESAPLAMA YÖNTEMİ:

Bir mümkün çözüm veren m lineer bağımsız vektörler kümesi seçebileceğimizi ve diğer bütün vektörleri bu baz cinsinden ifade edebileceğimizi veya problem matrisimizin m sıralı bir birim matris oluşturmak üzere açıkça düzenlenebilecek m vektör içerdiğini farz edelim.

Birinci durum için m lineer bağımsız vektör $P_1, P_2, \dots, P_m$ olsun ve m x m matrisi $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ B ile gösterilsin. B matrisine kabul olunabilir baz denir. Müteakbil çözüm x vektörünü ve diğer vektörlerin gösterimini baz cinsinden hesaplamak için önce B^{-1} hesaplamak zorundayız.

$$BX_0 = P_0 \Rightarrow X_0 = B^{-1}P_0 \text{ ve } x_j = B^{-1}P_j \text{ olur.}$$

Burada

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) \geq 0$$

ve

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \text{ kolon vektörleridir.}$$

Simpleks işleme başlamak için problem matrisin vektörlerini aşağıdaki gibi guruplandıralım.

$$(P_0 \mid P_1, P_2, \dots, P_m \mid P_{m+1}, \dots, P_n)$$

veya

$$(P_0 \mid B \mid P_{m+1}, \dots, P_n) \quad (3,2,1)$$

Kısımlara ayrılmış (3,2,1) matrisini B^{-1} ile çarparak $(X_0 \mid I_m \mid X_{m+1}, \dots, X_n)$ elde edilir. C_j 'yi bildiğimizden $Z_j - C_j$ 'yi hesaplayıp herhangi bir j için mütekaabil $Z_j - C_j$ nin $Z_j - C_j > 0$ olup olmadığını belirleriz. Eğer değilse minumum çözüm bulunmuş olur. Genelde, verilen n vektör kümesinden m vektörün lineer bağımsız olması her zaman mümkün olmayacağından birinci durumdaki kabulümüz karşılaşılması nadir olan bir durumdur.

III - 2 nin başında bahsettiğimiz ikinci kabulü ele alalım. n vektör $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'in verilen kümesinin bir $m \times m$ birim matris oluşturmak üzere guruplanabilen m birim vektör içerdiğini farzedelim. Bu vektörler $p_1, p_2, \dots, p_m$ olsun ve kabul edilebilir baz olarak $B = p_1, p_2, \dots, p_m = I_m$ alalım. $B^{-1} = I_m$ olduğundan ve p_0 'ın bütün elemanları negatiften farklı kabul edildiğinden

$$x_0 = p_0 \text{ ve } x_j = p_j \text{ elde edilir.}$$

Burada

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) \geq 0$$

ve

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \text{ dir.}$$

Simpleks işleme başlamak için problem matrisi aşağıda verilen tablo III - 1 de olduğu gibi düzenlenir.

				c_1	c_2	$\cdot$	c	$\cdot$	c_m	c_{m+1}	$\cdot$	c_j	$\cdot$	c_k	$\cdot$	c_n
i	temel	c	p_0	p_1	p_2	$\cdot$	p	$\cdot$	p_m	p_{m+1}	$\cdot$	p_j	$\cdot$	p_k	$\cdot$	p_n
1	p_1	c_1	x_{10}	1	0	$\cdot$	0	$\cdot$	0	x_{1m+1}	$\cdot$	x_{1j}	$\cdot$	x_{1k}	$\cdot$	x_{1n}
2	p_2	c_2	x_{20}	0	1	$\cdot$	0	$\cdot$	0	x_{2m+1}	$\cdot$	x_{2j}	$\cdot$	x_{2k}	$\cdot$	x_{2n}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
l	p_l	c_l	x_{l0}	0	0	$\cdot$	1	$\cdot$	0	x_{lm+1}	$\cdot$	x_{lj}	$\cdot$	x_{lk}	$\cdot$	x_{ln}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
m	p_m	c_m	x_{m0}	0	0	$\cdot$	0	$\cdot$	1	$x_{m,m+1}$	$\cdot$	x_{mj}	$\cdot$	x_{mk}	$\cdot$	x_{mn}
m+1			Z_0	0	0	$\cdot$	0	$\cdot$	0	$Z_{m+1} - C_{m+1}$	$\cdot$	$Z_j - C_j$	$\cdot$	$Z_k - C_k$	$\cdot$	$Z_n - C_n$

Tablo III-1

$Ax = b$ ile verilen problemin denklemlerinde $x_{i0} = b_i$ ve $x_{ij} = a_{ij}$ alalım. $j = 0, 1, \dots, n$ için j 'inci vektörlerle c ile gösterilen kolon vektörünün iç çarpımı Z_j 'yi verir.

Yani

$$Z_0 = \sum_{i=1}^m c_i x_{i0} \text{ ve } Z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Z_0 ve $Z_j - C_j$ elemanlarının herbiri kendi sütununun (m+1) inci satırına yazılır. Bazdaki vektörler için $Z_j - C_j$ daima sıfıra eşittir. $j = 1, 2, \dots, n$ için bütün $(Z_j - C_j)$ ler $Z_j - C_j \leq 0$

ise $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ $x_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)$

bir minimum mümkün çözümdür ve gaye fonksiyonunun müteakbil

değeri Z_0 dir. En az bir $Z_j - C_j > 0$ olduğunu farzedelim.

Orijinal baz olan $p_1, p_2, \dots, p_m$ 'in (m-1) vektörünü içeren

yeni bir bazda mümkün çözümü hesaplayalım. Baza sokacak

yeni bir vektör ararken teorik olarak müteakbili $Z_j - C_j > 0$

olan herhangi bir vektörü seçebiliriz. Ancak $Z_j - C_j > 0$ olacak şekilde bir vektörün seçiminde gaye fonksiyonunun değerinde en büyük ani düşmeyi sağlayacak birini seçmek, minimum çözümü elde etmek için gereken iterasyon sayısını azaltır. Bu yüzden baza sokulacak p_j vektörü için

$\max_i \theta_0(Z_j - C_j)$ 'ye tekabül edenini bulmamız gerekir.

$\theta_0 = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ij}} > 0$ olduğunu biliyoruz. Eğer $Z_j - C_j > 0$

olan birkaç j varsa $\max_j \theta_0(Z_j - C_j)$ kuralını uygulamak

oldukça karışıktır. Bu yüzden baza sokulacak vektörün seçiminde daha basit olan $\max_j (Z_j - C_j)$ kriterini kullanacağız.

$\max_j (Z_j - C_j)$ birden fazla j için elde ediliyorsa her j kolonu için θ_0 bulunur. Hangi kolonda θ_0 daha küçük ise o kolondaki p_j vektörü baza alınır.

$\max_j (Z_j - C_j) = Z_k - C_k > 0$ olsun.

p_k vektörünü baza sokalım. Bundan sonra $x_{ik} > 0$ için

$\theta_0 = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ 'yı hesaplamamız gerekir. Bütün x_{ik} 'lar

$x_{ik} \leq 0$ ise gaye fonksiyonunun değeri keyfi olarak küçük

yapılabilen bir mümkün çözüm bulabiliriz. (Teorem - I Durum - II)

Burada hesaplama durur. Bazı x_{ik} 'ların $x_{ik} > 0$ ve

$\theta_0 = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ik}} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}}$ olduğunu farzedelim. p_l vektörü bazdan

yok edilecek olan vektör olacaktır. Yeni mümkün çözümümüz

$p_1, \dots, p_{l-1}, p_{l+1}, \dots, p_m, p_k$ dan oluşan yeni bir baza

sahip olacaktır. İlk bazımız $(p_1, p_2, \dots, p_m) = I_m$

olduğundan bütün p_j vektörlerini bu baz cinsinden kolayca

ifade edebiliriz.

$$p_0 = x_{10}p_1 + \dots + x_{l0}p_l + \dots + x_{m0}p_m \quad (3.2.2)$$

$$p_k = x_{1k}p_1 + \dots + x_{lk}p_l + \dots + x_{mk}p_m \quad (3.2.3)$$

$$P_j = x_{1j}p_1 + \dots + x_{lj}p_l + \dots + x_{mj}p_m \quad (3,2,4)$$

(3,2,3) den

$$P_l = \frac{1}{x_{lk}} (p_k - x_{1k}p_1 - \dots - x_{mk}p_m) \quad (3,2,5)$$

bulunur. (3,2,5) sonucu (3,2,2) de yerine konursa

$$P_0 = x_{10}p_1 + \dots + x_{l0} \left[\frac{1}{x_{lk}} (p_k - x_{1k}p_1 - \dots - x_{mk}p_m) \right] + \dots + x_{m0}p_m$$

veya

$$P_0 = (x_{10} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}})p_1 + \dots + \frac{x_{l0}}{x_{lk}}p_k + \dots + (x_{m0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}}x_{mk})p_m$$

bulunur. Yeni mümkün çözüm

$$X'_0 = (x'_{10}, \dots, x'_{k0}, \dots, x'_{m0}), x'_{i0} \geq 0$$

ve

$$P_0 = x'_{10}p_1 + \dots + x'_{k0}p_k + \dots + x'_{m0}p_m$$

ile verilir. Burada

$$x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \quad i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m \text{ için}$$

$$x'_{k0} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \quad (3,2,6)$$

alınmıştır.

Benzer şekilde (3,2,5)'i (3,2,4)'de yerine koyarak her p_j için ifadeyi orijinal baz cinsinden değil yeni baz cinsinden elde edebiliriz. Bu

$$P_j = x'_{1j}p_1 + \dots + x'_{kj}p_k + \dots + x'_{mj}p_m \text{ i verir.}$$

Burada

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik} \quad i \neq l \text{ için}$$

$$x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (3,2,7)$$

alınmıştır.

$$Z'_j - C_j = x'_{1j}c_1 + \dots + x'_{kj}c_k + \dots + x'_{mj}c_m - c_j$$

olduğundan (3,2,7) değerleri yerine konursa x'_{ij} için

$$Z'_j - C_j = Z_j - C_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (Z_k - C_k) \quad (3.2.7.a)$$

olduğu ve (3.2.6) değerlerini x'_{i0} için

$$Z'_0 = c_1 x'_{10} + \dots + c_k x'_{k0} + \dots + c_m x'_{m0}$$

da yerine koyarak

$$Z'_0 = Z_0 - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} (Z_k - C_k) \quad (3.2.7.b)$$

olduğu kolayca gerçekleşir.

Yeni çözüm x'_0 'nü elde etmek için yeni x'_j vektörleri, müteakbil $Z'_j - C_j$, $i = 1, \dots, m+1$ satırları ve $j = 0, 1, \dots, n$ sütunları için tablo III - 1'deki her eleman

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad i \neq l \text{ için}$$

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (3.2.8)$$

formülleri ile dönüştürülür. Formüllerde

$$Z'_0 = x'_{m+1,0} \quad Z_j - C_j = x'_{m+1,j} \text{ dir.}$$

Burada genel (3.2.8) formüllerini P_0 sütunu ve $(m+1)$ 'inci satırda dahil olmak üzere hesaplama tablosunun bütün elemanlarına uyguluyoruz. x_{lk} elemanına Pivot eleman (anahtar sayı) denir. (3.2.8)'de tanımlanan dönüştürme, anahtar sayı x_{lk} iken yoketme formüllerine eşdeğerdir. Anahtar sayısının bulunduğu satıra anahtar satır, anahtar sayısının bulunduğu sütuna anahtar sütun adı verilir.

Yeni bir iterasyon için uygulamayı özetleyelim.

1 - Bir minimum çözümün bulunup bulunmadığının tesbiti için $Z_j - C_j$ elemanları belirlenir. Bütün j 'ler için $Z_j - C_j \leq 0$ olup olmadığı tesbit edilir.

2 - $Z_j - C_j$ 'lerden bazıları $Z_j - C_j > 0$ ise baza sokulacak vektör olarak $\max_j (Z_j - C_j)$ yapan P_j vektörü alınır. Eğer

birden fazla j için $\max_j (Z_j - C_j)$ elde ediliyör ise $\max_j (Z_j - C_j)$ 'nin bulunduğu her kolon anahtar kolonmuş gibi kabul edilerek $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ oranları hesap edilir. Bunlardan en küçüğünü veren kolon, anahtar kolon olarak alınarak baza girecek p_j vektörü tesbit edilir.

3 - Bazdan çıkarılacak vektöre tekabül eden $x_{ik} > 0$ lar için $\min_i (x_{i0}/x_{ik})$ ya sahip satır anahtar satır olarak alınır. Eğer bütün x_{ik} lar için $x_{ik} < 0$ ise çözüm sınırsızdır. Birden fazla i için $\min_j (x_{i0}/x_{ik})$ bulunuyor ise anahtar kolonun elemanları birim matrisin ilk kolonunun elemanlarına bölünür. Oranlardan en küçüğünü veren satır anahtar satır olarak alınır.

4 - Yeni çözüm ve ilgili elemanları elde etmek için yoketme işlemi ile tablo dönüştürülür.

Simpleks yöntemin ilk tabloya uygulanması bize aşağıda gösterilen III - 2 tablosunu verir.

				c_1	c_2	.	c_l	.	c_m	c_{m+1}	.	c_j	.	c_k	.	c_n
i	temel	c	p_0	p_1	p_2	.	p_l	.	p_m	p_{m+1}	.	p_j	.	p_k	.	p_n
1	p_1	c_1	x'_{10}	1	0	.	x'_{1l}	.	0	$x'_{1,m+1}$	.	x'_{1j}	.	0	.	x'_{1n}
2	p_2	c_2	x'_{20}	0	1	.	x'_{2l}	.	0	$x'_{2,m+1}$	.	x'_{2j}	.	0	.	x'_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	p_k	c_k	x'_{k0}	0	0	.	x'_{kl}	.	0	$x'_{l,m+1}$	.	x'_{lj}	.	1	.	x'_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	p_m	c_m	x'_{m0}	0	0	.	x'_{ml}	.	1	$x'_{m,m+1}$	.	x'_{mj}	.	0	.	x'_{mn}
$m+1$			Z'_0	0	0	.	$Z'_l - C_l$	.	0	$Z'_{m+1} - C_{m+1}$	.	$Z'_j - C_j$	.	0	.	$Z'_n - C_n$

Tablo - III - 2

III - 3 - YAPAY BAZ TEKNİĞİ

İncelememizde bu noktaya kadar ; daima verilen doğrusal programlama probleminin bir mümkün çözümünün var olduğunu ve başlangıç bazı için kullanılabilen bir birim matris içerdiğini farzettik. Bir problemin doğru formüle edilmiş olması, problemin mümkün çözümünün olacağını genellikle garanti ettiği halde birçok problem başlangıçta bir birim matris içermez. Bu tür problemlerde yapay baz metodunu kullanmak simpleks işlemi başlatmak için uygun bir yoldur. Bu yöntem aynı zamanda problemin herhangi bir mümkün çözüme sahip olup olmadığını da tesbit eder.

Genel doğrusal programlama problemi

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

ve

$x_j \geq 0$ 'a bağlı olarak

$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ i minimize etmektir. Yapay baz tekniği için yukarıdaki sistemi aşağıdaki gibi büyültelim.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

ve

$j = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m$ için $x_j \geq 0$ 'a bağlı olarak

$c_1x_1 + \dots + c_nx_n + wx_{n+1} + \dots + wx_{n+m}$ i minimize edelim. w büyüklüğü belirtilmemiş büyük bir pozitif sayı olarak alınmıştır.

$P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektörleri büyütülmüş sistem için bir baz oluştururlar. Eğer orijinal problemde en az bir mümkün çözüm varsa bu çözüm aynı zamanda büyütülmüş sistem içinde bir mümkün çözümdür.

Simpleks yöntem, yapay değişken x_{n+i} 'lerden birinin pozitif bir değerle görünmesinin imkânsız olduğu minimum çözümü elde etmemizi sağlar. Aşağıda gösterildiği gibi w 'ye bir değer vermemiz gerekmez.

Büyütülmüş problemde ilk mümkün çözüm, gaye fonksiyonunun mütekabil değeri $Z_0 = w \sum_{i=1}^m b_i$ olan

$$x_0 = (x_{n+1}, 0, x_{n+2}, 0, \dots, x_{n+m}, 0) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$x_0 \geq 0 \text{ dir.}$$

Baz bir birim vektör olduğundan

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

ve

$$z_j = w \sum_{i=1}^m x_{ij} - c_j \text{ dir. İlgili hesaplama yöntemi tablo}$$

(III-3-1) deki gibi kurulacaktır. Her j için z_j ve c_j 'nin w 'siz ve w 'li bileşeni sırasıyla bu tablonun $(m+1)$ inci ve $(m+2)$ inci satırına yerleştirilir. Aşağıdaki simpleks tablo; temel çözümde verilen vektörlerden, $(m+2)$ 'inci satırdaki en büyük elemana sahip vektörün seçimi hariç orijinal simpleks tablo (III-1) deki gibi kullanılır.

i	Temel	c	p_0	c_1	c_2	$\cdot$	c_k	$\cdot$	c_n	w	$\cdot$	w	$\cdot$	w
				p_1	p_2	$\cdot$	p_k	$\cdot$	p_n	p_{n+1}	$\cdot$	p_{n+1}	$\cdot$	p_{n+m}
1	p_{n+1}	w	$x_{n+1,0}$	x_{11}	x_{12}	$\cdot$	x_{1k}	$\cdot$	x_{1n}	1	$\cdot$	0	$\cdot$	0
2	p_{n+2}	w	$x_{n+2,0}$	x_{21}	x_{22}	$\cdot$	x_{2k}	$\cdot$	x_{2n}	0	$\cdot$	0	$\cdot$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ℓ	$p_{n+\ell}$	w	$x_{n+\ell,0}$	$x_{\ell 1}$	$x_{\ell 2}$	$\cdot$	$x_{\ell k}$	$\cdot$	$x_{\ell n}$	0	$\cdot$	1	$\cdot$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	p_{n+m}	w	$x_{n+m,0}$	x_{m1}	x_{m2}	$\cdot$	x_{mk}	$\cdot$	x_{mn}	0	$\cdot$	0	$\cdot$	1
m+1			0	$-c_1$	$-c_2$	$\cdot$	$-c_k$	$\cdot$	$-c_n$	0	$\cdot$	0	$\cdot$	0
m+2			$\leq x_{n+i,0}$	$\leq x_{i1}$	$\leq x_{i2}$	$\cdot$	$\leq x_{ik}$	$\cdot$	$\leq x_{in}$	0	$\cdot$	0	$\cdot$	0

Tablo III - 3 - 1

ilk iterasyon için $\max_j \sum_{i=1}^m x_{ij}$ 'ye tekabül eden vektör baza

sokulur. $(m+2)$ 'inci satırdaki elemanlar da alışılmış yoketme yöntemi ile dönüştürülür. Bir yapay vektör bazdan çıkarıldığında tekrar baza sokulmak için seçilemez. Bundan dolayı tablonun son m sütunlarını dönüştürmek zorunluğu yoktur. Eğer son bazın tersi bizi ilgilendiriyor ise bu son m vektör de dönüştürülür. Yapay baz kullanırken minumum mümkün çözüme ulaşmak için yaklaşık $2m$ iterasyona gerek vardır. Minumum mümkün çözümü elde etmek için iki ayrı yoldan hareket edebiliriz.

1. Yapay vektörler bazdan çıkarılır.

2. Hiçbir $(m+2)$ nci eleman kalmayana kadar baza sokulacak bir vektör seçmeye devam edilir.

Birinci alternatif $(m+2)$ nci satırdaki bütün elemanların sıfıra eşit ve mütekabil bazın orijinal problem için, bir mümkün baz olmasını gerektirir. Bu durumda minumum mümkün

çözümü tesbit etmek için simpleks algoritma uygulanır. İkinci alternatifte $(m+2, 0)$ elemanı yani gaye fonksiyonunun mütekabil değerinin yapay kısmı sıfırdan büyük kalırsa orijinal problemin çözümü mümkün değildir. Teorem - II den, gaye fonksiyonunun değerinin bu son çözümden daha küçük olduğu başka mümkün çözümler olmadığını biliyoruz. Eğer $(m+2, 0)$ elemanı sıfıra eşitse orijinal problemin en az bir yapay vektör içeren bir bozulmuş mümkün çözümü vardır. Yapay değişkenler 0 değerlerine sahiptir. Bununla beraber minimum çözüm halâ elde edilemedi ise $(m+2)$ nci satırdaki sıfır elemanının üzerinde olan $(m+1)$ inci satırdaki maksimum pozitif elemana tekabül eden vektör baza sokularak iterasyonlara devam edilir. Bu yöntem yapay değişkenlerin 0 değerini daima devam ettirerek çözümde etkisiz kalmalarını sağlar ve gaye fonksiyonunun değerini azaltmayacak vektörlerin seçimini önler. 1 ve 2 alternatiflerinin her ikisi içinde $(m+2, 0)$ elemanı müstesna bütün $(m+2, j)$ elemanları sıfıra eşit veya küçüktür. İlk $(m+2, 0)$ her zaman negatiften farklıdır ve değeri artmaz.

Orijinal problem birim vektörler içeriyor ise, bu vektörler gerekli yapay vektörlerle beraber başlangıç bazı için kullanılmalıdır. Bunu yapmak toplam iterasyon sayısını azaltmaya yarar.

BÖLÜM - IV

DUALİTE

Her doğrusal programlama probleminin dual problem denilen mütekabil bir optimizasyon problemi vardır. Asıl problem asli problem olarak adlandırılır. Birinin optimum çözümü diğerinin optimum çözümü hakkında bilgi verir. Aslında primal problemin başlangıç simpleks tablosu bir $m \times m$ birim matris içeriyorsa simpleks yöntem ile çözümü diğerine aşikâr bir çözüm verir.

IV - 1 - SİMETRİK OLMAYAN PRİMAL-DUAL PROBLEMLER:

Primal Problem: $f(x) = Cx$ (4.1) Doğrusal fonksiyoneli
 $Ax = b$ (4.2) ve $x \geq 0$ (4.3) şartlarına bağlı olarak minimize eden bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kolon vektörünün bulunması problemidir. Bu ifade de A'nın satır sayısının sütun sayısından az olduğu varsayılmıştır.

Dual Problem: $g(w) = wb$ (4.4) doğrusal fonksiyoneli
 $WA \leq C$ (4.5) şartlarına bağlı olarak maksimize eden bir $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ satır vektörünü bulma problemidir. Bu ifadede w_i değişkenleri negatiften farklı olmak üzere sınırlandırılmamıştır.

Her iki problem için $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ satır vektörü, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ kolon vektörü ve $A = (a_{ij})$ katsayılar matrisidir. $1 \times m$ satır vektörü w 'yi $m \times n$ matrisi A ile çarparak (4.5)'in aşağıdaki aşikâr gösterimini elde ederiz.

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \leq c_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

Yukarıdaki eşitsizlikler için katsayılar matrisi A' ile gösterilmiştir.

Dualite Teoremi: Primal veya dual problemin ikisinden biri sonlu bir optimum çözüme sahipse diğeri de sonlu bir optimum çözüme sahiptir. Doğrusal fonksiyonların ekstremleri eşittir. Yani $\min f(x) = \max g(w)$ dir. Problemlerden biri sınırsız bir optimum çözüme sahipse diğeri problemin mümkün çözümü yoktur.

İspat: Önce primal problemin mümkün olduğunu ve simpleks yöntem ile bir minimum mümkün çözümün elde edildiğini varsayalım. İlk m vektör $p_1, p_2, \dots, p_m$ son baz vektörleri olarak kabul edilsin. B $m \times m$ matrisi $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ olsun. Son hesaplama tablosu, $p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n$ orijinal sistemin vektörlerini son baz

vektörleri cinsinden içerir. Yani her p_j vektörü için son tablo $p_j = Bx_j$ iken x_j vektörünü içerir. $m \times n$ matris son simpleks tabloda bulunan katsayılar matrisi olsun. Son bazın ilk m vektörü içerdiğini varsaydığımız da

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1,m+1} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{2,m+1} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{m,m+1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Minimum çözüm vektörü $x^0 = B^{-1}b$ ile verilmiştir. Bu son çözüm için aşağıdaki bağıntıları elde ederiz.

$$B^{-1} \cdot A = \bar{X} \Rightarrow A = B\bar{X} \quad (4.6)$$

$$B^{-1} \cdot b = x^0 \Rightarrow b = Bx^0 \quad (4.7)$$

$$\min f(x) = c^0 x^0 \quad (4.8)$$

$$z = c^0 \bar{x} - c \leq 0 \quad (4.9)$$

Burada $c^0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ bir satır vektörüdür. (3.4)den

$$Z = (c^0 x_1 - c_1, c^0 x_2 - c_2, \dots, c^0 x_n - c_n)$$

$$Z = (z_1 - c_1, z_2 - c_2, \dots, z_n - c_n) \text{ dir.}$$

Z 'nin elemanları bir optimal çözüme tekabül eden $z_j - c_j$ elemanları olduğundan pozitif olmayan bir satır vektörüdür.

Burada (0) boş bir n boyutlu satır vektörüdür.

$$w^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0)$$

$$w^0 = c^0 B^{-1} \quad (4.10) \text{ ile tanımlanmış olsun.}$$

(4.6) ve (4.9) ile

$$w^0 A - C = c^0 B^{-1} A - C = c^0 \bar{X} - C \leq 0$$

veya

$$w^0 A \leq C \text{ elde ederiz.}$$

w^0 vektörü (4.5) dual sınırlamalarını sağladığından dual probleme bir çözümdür. Bu çözüm için dual gaye fonksiyon

(4.4) ün mütekabil değeri $w^0 b$ ile verilmiştir. Veya (4.7)

ve (4.8) den

$$w^0 b = c^0 B^{-1} b = c^0 x^0 = \min f(x) \text{ elde edilir.}$$

Bundan dolayı w^0 çözümü için dual gaye fonksiyonunun değeri primal gaye fonksiyonunun minimum değerine eşittir. Bu durumda w^0 'ın aynı zamanda dual probleme bir optimum çözüm olduğunu göstermeliyiz.

(4.2) ve (4.3)'ü sağlayan her $n \times 1$ vektör x için ve (4.5) i sağlayan her $1 \times m$ vektör w için

$$WAX = wb = g(w) \quad (4.11)$$

ve

$$WAX \leq CX = f(x) \quad (4.12) \text{ elde edilir.}$$

(4.11) ve (4.12) den bütün mümkün W ve X için

$$g(w) \leq f(x) \quad (4.13)$$

önemli bağıntısını elde ederiz. (4.1) ve (4.4) ün ekstrem değerleri

$\max g(w) \leq \min f(x)$ (4.14) ile ilgilidir. Dual çözüm vektörü w^0 için (4.10)'dan $g(w^0) = w^0 b = \min f(x)$ elde edilir. Bundan dolayı primal probleme optimum çözüm x^0 ve dual probleme çözüm w^0 için (4.14) $g(w^0) = f(x^0)$ haline gelir. Yani $w^0 = C^0 B^{-1}$ çözümü için dual gaye fonksiyonu maksimum değeri alır. B undan dolayı w^0 ve x^0 için

$$\max g(w) = \min f(x) \quad (4.15)$$

ile ilgili gaye fonksiyonlarının mütekabil değerlerini elde ederiz.

Yukarıdaki sonuçların, primal problem sonlu bir optimum çözüme sahip olduğunda, geçerli olduğu gösterildi. Benzer şekilde dual problem sonlu bir optimum çözüme sahip olduğunda primal problemin mümkün olduğunu ve (4.15) in geçerli olduğunu gösterebiliriz. Bunu yapmak için dual problem

$$\max g(w) = \max wb$$

$$WA \leq C$$

primal formata dönüştürülür. Yukarıdaki teoremle mümkün olan dualinin orijinal primal problem olduğu gösterilir.

W_3 negatiften farklı aylak değişkenler kümesi olsun.

$$WA + W_3 I = C$$

$$W_3 \geq 0$$

şartlarına bağlı olarak

$$\max wb = -\min(-wb)$$

veya

$$-\max wb = \min(-wb) \text{ elde edilir. Sonra } w = w_1 - w_2$$

dönüşümü yaparız. Burada w_1 ve w_2 negatiften farklı değişkenlerdir. Şimdi problemimiz

$$(w_1 - w_2)A + W_3 I = C$$

$$w_1 \geq 0$$

$$w_2 \geq 0$$

(4.15a)

$$w_3 \geq 0$$

şartlarına bağlı olarak

$$\min (-w_1 + w_2)b + w_3 0 \quad (4.15b) \text{ dir.}$$

Dualite teoremi bu problem için geçerlidir. Dualini basit formatta tesbit etmek için (1. 15a) sınırlama denklemini (-1) ile çarpmak yeterlidir.

$$-w_1 A + w_2 A - w_3 I = -C \quad (4.15c)$$

elde edilir. Buradan (4.15b) ve (4.15c) ye dual, $(-AA - I) x \leq (-bb0)$ 'a bağlı olarak

$$\max (-CX) = -\min CX \text{ dir.}$$

Bu da

$$-AX \leq -b$$

$$AX \leq b$$

$$-Ix \leq 0$$

veya

$$Ax \geq b$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

veya

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

şartlarına bağlı olarak

$$-\max(-cx) = \min cx' \text{ e eşittir. Bu da primal problemidir.}$$

Böylece teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur.

İkinci kısmı ispatlayalım. Şayet primal problemin optimal çözümü sınırsız ise (4.13) den

$$g(w) \leq -\infty \quad (4.16) \text{ elde edilir.}$$

(4.5) dual eşitsizliklerine her çözüm; (4.4) dual gaye fonksiyonu için, primal gaye fonksiyonuna bir alt sınır olan bir mütekabil değere sahip olmalıdır. Bu durum sınırsızlık varsayımı ile çelişki yaratır. Bu yüzden dual problemin çözümünün olmadığı ve bundan dolayıda eşitsizliklerin tutarsız olduğu sonucuna varırız. Benzer bir ispat, dual bir sınırsız çözüme sahipken primalin çözümünün olmadığı sonucunu gösterir.

IV - 2 - SİMETRİK PRİMAL - DUAL PROBLEMLER:

Simetrik dual problemleri eşdeğer simetrik olmayan primal ve dual problemlere dönüştürerek dualite teoreminin bunlar için geçerli olduğunu gösterebiliriz.

Primal problem:

$$f(x) = cx \quad (4.2,1) \text{ lineer fonksiyoneli}$$

$$Ax \geq b \quad (4.2,2)$$

ve

$x \geq 0$ (4.2,3) şartlarına bağlı olarak minimize eden bir $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün bulunması problemi

Dual Problem:

$$g(w) = wb \quad (4.2,4) \text{ lineer fonksiyoneli}$$

$$WA \leq C \quad (4.2,5)$$

ve

$w \geq 0$ (4.2,6) şartlarına bağlı olarak maksimize eden $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörünün bulunması problemidir.

1. kısımdaki dualite teoreminin aynı zamanda simetrik dual problemlere uygulandığını göstereceğiz. Sütun vektörü $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 'nin m negatiften farklı elemanları primali bir eşitlikler kümesine dönüştüren aylak değişkenler olsun. Bölünmüş matrisler cinsinden,, eşdeğer doğrusal prog-

ramlama problemi

$$f(x,y) = (C / \bar{0}) \left(\frac{x}{y} \right) \quad (4.2.7) \text{ yi}$$

$$(A / -I) \left(\frac{x}{y} \right) = b \quad (4.2.8)$$

$$\text{ve } x \geq 0 \text{ ve } y \geq \bar{0} \quad (4.2.9)$$

sınırlamalarına bağlı olarak minimize etmek şekline dönüşür.

Burada $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ m bileşenli satır vektörü ve I bir m x m birim matrisidir. Bu dönüşmüş primalin duali

$$W(A \mid -I) \leq (C \mid \bar{0}) \quad (4.2.10)$$

sınırlamalarına bağlı olarak

$$g(w) = wb \quad (4.2.11)$$

ifadesini maksimize eden bir w vektörü bulmaktır. (4,2,10)

sırası ile (4.2,5) ve (4.2.6)'ya ayrışır. Yani

$$WA \leq C \quad \text{ve} \quad -WI \leq \bar{0}$$

son ifade

$$W \geq \bar{0}' \text{ a eşdeğerdir.}$$

Original problemler şimdi simetrik olmayan dual problemler olarak verildi ve burada dualite teoremi geçerlidir.

Tamamlayıcı Aylaklık Teoremi: Primal ve dual sistemlerin

[sırasıyla (4,2,1) den (4,2,3) e ve (4,2,4) den (4,2,6) ya]

optimum mümkün çözümleri için sistemin birinin k'ıncı bağıntısında eşitsizlik oluştuğunda (mütekabil aylak değişken

pozitifdir) dualinin k'ıncı değişkeni sıfıra eşitlenir;

sistemin birinde k'ıncı değişken pozitif ise dualinin k'ıncı

bağıntısı eşitliktir. (Mütekabil aylak değişken sıfırdır)

İspat:

i'nci eşitsizlikten negatiften farklı bir x_{n+i} aylak değişkenini çıkararak primal sistemin (4.2.2) eşitsizliklerini eşitlikler olarak yazabiliriz.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \end{array} \quad (4.2.2')$$

Benzer şekilde (4.2.5) dual eşitsizlikleri için j'inci eşitsizliğe negatiften farklı bir w_{m+j} aylak değişkeni ekleyerek

$$\begin{array}{l} a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m + w_{m+1} = c_1 \\ \vdots \\ a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m + w_{m+n} = c_n \end{array}$$

aşıkâr şekilde primal gaye fonksiyonu

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = f(x) \quad (4.2.1')$$

dual gaye fonksiyonu

$$b_1w_1 + \dots + b_mw_m = g(w) \quad (4.2.4') \text{ dir.}$$

(4.2.2')'nün i'inci denklemini mütekabil dual değişken w_i , $i=1, 2, \dots, m$ ile çarpıp denklemlerin sonuç kümelerini toplayarak, bu toplamı (4.2.1') den çıkardığımızda

$$\begin{aligned} & (c_1 - \sum_{i=1}^m a_{i1}w_i)x_1 + (c_2 - \sum_{i=1}^m a_{i2}w_i)x_2 \\ & + \dots + (c_n - \sum_{i=1}^m a_{in}w_i)x_n + \dots + w_1x_{n+1} \\ & + w_2x_{n+2} + \dots + w_mx_{n+m} = f(x) - \sum_{i=1}^m w_ib_i \end{aligned}$$

elde edilir.

$$w_{m+j} = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i \quad \text{ve} \quad g(w) = \sum_{i=1}^m w_ib_i$$

olduğuna dikkat edilirse

$$\begin{aligned} & w_{m+1}x_1 + w_{m+2}x_2 + \dots + w_{m+n}x_n + w_1x_{n+1} \\ & + w_2x_{n+2} + \dots + w_mx_{n+m} = f(x) - g(w) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

elde edilir.

Dualite teoreminden, primal probleme bir optimum

çözüm için $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ve $f(x^0) - g(w^0) = 0$ olan dual probleme bir optimum çözüm için $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0)$ elde ederiz. B öylece bu optimum çözümler, müteakibil $x_{n+i}^0 \geq 0$ ve $x_{m+j}^0 \geq 0$ 'ler için (4.2.12) denklemi

$$w_{m+1}^0 x_1^0 + w_{m+2}^0 x_2^0 + \dots + w_{m+n}^0 x_n^0 + w_1^0 x_{n+1}^0 + w_2^0 x_{n+2}^0 + \dots + w_m^0 x_{n+m}^0 = 0 \quad (4.2.13)$$

haline gelir.

$w_{m+j}^0 x_j^0$ terimlerinin dualinin j'inci aylak değişkeni ile orijinal primalin j inci değişkeninin çarpımının aynı zamanda $w_i^0 x_{n+1}^0$ terimlerinin, orijinal dualin i inci değişkeni ile primalin i inci aylak değişkeninin çarpımı olduğu görülür. Bütün değişkenler negatiften farklı olarak sınırlandırıldığından (4.2.13)'ün bütün çarpım terimleri ve bu terimlerin toplamı sifıra eşit olmak zorunda olduğundan ayrı ayrı sifıra eşit olmalıdır. B öylece bütün j'ler için $w_{m+j}^0 x_j^0 = 0$ ve bütün i ler için $w_i^0 x_{n+i}^0 = 0$ dır. Eğer $w_{m+k}^0 > 0$ ise $x_k^0 = 0$; ve $x_{n+k}^0 > 0$ ise $w_k^0 = 0$ olmalıdır. Böylece teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur.

Eğer $x_k^0 > 0$ ise $w_{m+k}^0 = 0$ dır. Eğer $w_k^0 > 0$ ise $x_{n+k}^0 = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(4.1) - (4.3) ve (4.4) - (4.5) in simetrik olmayan primal - dual problemleri için (4.2.12) ye benzer bir bağıntı geliştirebiliriz. Bu problemleri aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = f(x) \quad (4.1') \text{ fonksiyonunu}$$

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \quad (4.2')$$

ve

$$x_j \geq 0 \quad (4.3')$$

şartlarına bağlı olarak minimize etmek ve

$$b_1 w_1 + \dots + b_m w_m = f(w) \quad (4.4') \text{ fonksiyonunu}$$

$$\begin{aligned} a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m &\leq c_1 \\ \vdots &\vdots \\ a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m &\leq c_n \end{aligned} \quad (4.5')$$

şartlarına bağlı olarak şartsız w_i ile maksimize etmek

(4.2') nün i 'inci denklemini mütekabil değişken w_i ($i=1, 2, \dots, m$) ile çarpıp denklemlerin sonuç kümesini toplayıp, bu toplamı (4.1') den çıkarak

$$\begin{aligned} (c_1 - \sum_{i=1}^m a_{i1} w_i) x_1 + (c_2 - \sum_{i=1}^m a_{i2} w_i) x_2 + \dots + \\ (c_n - \sum_{i=1}^m a_{in} w_i) x_n = f(x) - g(w) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

elde edilir.

Dualite teoreminden (4.2.14) ün sağ tarafı

$f(x) - g(w) \geq 0$ 'ı elde ederiz. Eğer $f(x^0) = g(w^0)$ ise bağıntı sifıra eşitlenir. Yani x^0 ve w^0 in herbiri kendi

problemlerine sanlı optimum mümkün çözümlerdir. M ümkün w

için her $(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i)$ terimi negatiften farklıdır ve

(4.2.14)' ün sol tarafı negatiften farklı sayıların çarpımının toplamıdır. Özellikle optimum x^0 ve w^0 için (4.2.14) ün

sol tarafının toplamı sıfırdır. Her j için ya $(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i^0)$

terimi ya da mütekabili x_j^0 veya her ikisi birden sıfırdır.

Optimal $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_m^0) = C^0 B^{-1}$ için (4.10) ile

tanımlandığı gibi $(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i^0)$ terimleri $c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i^0$

$= c_j - z_j \geq 0$ dır. Böylece simpleks algoritmanın optimalite

şartlarının geçerliliğini koruduğunu görmüş oluruz. Yani bir primal maksimizasyon problemi için optimal çözüm $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ müteakıl $z_j - c_j = 0$ 'a sahip olmak için $x_j^0 > 0$ 'lara ve müteakıl $z_j - c_j \leq 0$ 'a sahip olmak için $x_j = 0$ 'lara gerek duyulur.

Sonuç olarak; Primal ve dual problem çiftinin her elemanının sonlu optimum çözümlere sahip olabileceğini, birinin mümkün çözümü yokken diğerinin sonsuz optimum mümkün çözüme sahip olabileceğini veya her iki problemde mümkün çözümünün olmayabileceğini söyleyebiliriz.

Simetrik ve dual problemler aşağıdaki şekilde bir tablo ile gösterilebilir.

≥ 0	x_1 x_j x_n	$\geq$
w_1	a_{11} a_{1j} a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
w_i	a_{i1} a_{ij} a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
w_m	a_{m1} a_{mj} a_{mn}	b_m
$\leq$	c_1 c_j c_n	max min

A'nın satırları ile x'lerin satırlarının iç çarpımlarını alarak primalin sınırlarını elde ederiz. A'nın sütunları ile w'lerin sütunlarının iç çarpımları dual sınırlamaları verir.

Doğrusal programlama problemlerinin çoğu orijinal olarak ya simetrik primal ya da simetrik dual şeklinde ifade edilir. Her iki durumda da problem genellikle gerekli negatiften farklı aylak değişkenler eklenerek veya çıkarılarak denklem şeklinde yeniden yazılır. Simetrik primal için bir

Aylak vektörler kümesi çıkarıp, mütekabil sistemi çözerken simetrik dual için bir aylak vektörler kümesi ekleriz. Bu aylak değişkenler sifıra eşit olan ilgili değer katsayıları ile verilir. Dual tablo bir pozitif birim matris içerirken primal için son tablo bir negatif birim matris içerir. Bundan dolayı birinin son simpleks tablosu diğerinin optimal çözümünü içerir. Eğer primal, dual çözümü elde etmek için çözülmüş ise primalde bir negatif birim matris ile başladığımızda son tablodaki Z_j değerleri işaret değiştirirler.

Bilgisayarla çözülebilen doğrusal programlama probleminin boyutu genellikle belirli bir dereceye yükseltilmiş satır sayısı ile sınırlandığından, primal cinsinden ifade edildiğinde çok büyük olan bir problem mütekabil dual problem olarak yazıldığında alınan satır sayısı sınırı aşmaz. Veya bu durumun tersi ile karşılaşabiliriz. Her iki durumda orijinal probleme optimal çözüm son tablodur.

BÖLÜM - V

Uygulama konusu olarak yem karışımı maliyetinin minimize edilmesi problemi, uygulama yeri olarak Sakarya Yem Sanayii Ticaret Anonim Şirketi (Yemtaş) alındı.

V - I - İŞLETMENİN TANITIMI

Yemtaş 1975 yılında 500.000.- TL sermaye ile Adapazarı'nda kuruldu. İlk üretim 1977 yılı Eylül ayı içinde gerçekleştirildi. Şirketin sermayesi 1978 yılında 16.000.000.-'sine, 1984 yılında 160.000.000.-'sine çıkarıldı.

Fabrikada saatte 10 ton, yılda 30.000 ton hayvan yemi üretilmektedir. Bu üretimin %80'ini kanatlı hayvan yemi, %20'sini büyükbaş hayvan yemi oluşturmaktadır. Büyükbaş hayvan yemi olarak 6 çeşit, kanatlı hayvan yemi olarak 7 çeşit yem üretilmektedir. Üretilen mamuller Sakarya-Bolu-Kocaeli bölgelerinde tüketilmektedir. Üretimde kullanılan mısır, buğday yöreden; yağlı tohum küspeleri Trakya ve Adana'dan balık unu Karadeniz Bölgesinden temin edilmektedir.

En kaliteli ve en düşük maliyetli yem rasyonunun belirlenmesinde; hammadde fiyatlarının durumu, hammaddenin enerji ve protein miktarları, yeme katılması zaruri olan temel hammaddelerin belirlenmiş oranları rol oynamaktadır. Bu etmenlerin değerlendirilmeleri sonucunda yem rasyonu belirlenmektedir.

V - 2 - UYGULAMANIN TANITIMI

Sakarya Yemtaş Yem Fabrikasından alınan Ek-I'deki veriler ve Ek-II'deki kısıtlara göre hazırlanan gaye fonksiyonu ve kısıtlama denklemleri Ek-III'de gösterilmiştir.

Problemimiz, alınan veriler ve kısıtlamalara göre minimum maliyetli BESİ YEMİ karışımının maliyetinin ve ka-

rışımında kullanılması gereken hammaddelerin neler olacağının ve miktarlarının belirlenmesi problemidir. Ek-II tablosu 1000 kg. üzerinden hazırlanmış olup, veriler bilgisayara yüklenerek bir paket program vasıtası ile sonuçlar elde edilmiştir.

V - 3 - SONUÇLAR

Aşağıya alınan bilgisayar sonuç tablosunda (Tablo-V-1) görüleceği gibi karışımın 1 kilogramının minumum maliyeti 34.09 TL olarak belirlenmiştir. Karışıma arpa, pamuk küspesi, mozaik, tuz, razmol, melas, kepek gibi hammaddelerin alınması gerekmektedir. 1000 kilogramlık karışımında hammaddelerin; arpa 50 kg., tuz 40 kg., razmol 65.4 kg., pamuk küspesi 244.6 kg., mozaik 50 kg., melas 150 kg., kepek 400 kg. olarak kullanılması gerektiği sonucu elde edilmiştir.

Bilgisayarın yaptığı analiz sonuçlarına göre; arpa kilogram fiyatının 43.31 TL'dan büyük, pamuk küspesi kilogram fiyatının 39.20 TL ile 78.07 TL arasında, mozaik fiyatının 38.85 TL'dan az, tuz fiyatının 38.85 TL'dan az, kepek fiyatının 50 TL'den az olması halinde karışım için mümkün çözümün var olabileceği görülmektedir. Yine bilgisayar analiz sonuçlarına göre mısırın kilogram fiyatı en fazla 41.33 TL olursa ve bonkolitanın fiyatı en fazla 42.32 TL olursa karışıma alınabileceği sonucu elde edilmektedir. Söz konusu iki hammaddenin rayiç fiyatları verilen bu iki fiattan yüksek olduğu için karışıma alınmamışlardır.

Bilgisayardan ayrıca karışımındaki besleyici maddelerin miktarları elde edilmiş olup bunlar tablo V-2'de verilmiştir.

EN DUSUK MALIYETLİ YEM RASYONU

YEMİN CİNSİ = B1 (BESİ YEMİ) F İ R M A =

T A R İ H =

ACIKLAMA =

MALİYET = 34.09 TL/KG

Y.MİKTARI = 1000 KG

HAM	MADDELER	FIAT	MIN B.	MAX B.	KAR B.	KAR. KG	MIN FIAT	MAX FIAT
ARPA		54.00	50.00*	500.00	50.00	50.0	43.31	ACIK
PAMUK KUSPESTİ		50.00		500.00	244.53	244.5	39.20	78.07
MOZAIK		5.00	40.00	50.00*	50.00	50.0		39.85
TIJZ		15.00	20.00	40.00*	40.00	40.0		38.85
RAZMOL		39.20		999.00	65.37	65.4	18.03	50.00
MELAS		17.00	100.00	150.00*	150.00	150.0		38.85
KEPEK		33.00		400.00*	400.00	400.0		50.00
MISIR 21		58.00		700.00	1000.00	1000.0		41.33*
BONKOLITE		60.00		500.00				42.32*

TABLO-V-1

BESLEYICI MADDELER	MIN. MIK.	MAX. MIK.	SONUC
PROTEIN	16.000	20.000	16.911
M.E. CAL/KG		9999.000	1833.780
LYSINE		9999.000	0.793
METHIONINE		9999.000	0.237
METH. +CYS.		9999.000	
KALSIYUM	0.100	9999.000	2.025
TOP. FOSFOR	0.600*	9999.000	0.600
HAZ. FOS T.		9999.000	
HAZ. FOS C.		9999.000	
SELULOZ		12.000	7.993
SODYUM		9999.000	1.600
YAG		9999.000	0.281
N. D.		9999.000	25.949
LINOLEIC ASIT		9999.000	
TRY		9999.000	
TRYPTOPHAN		9999.000	
XANTOPHILLER		9999.000	
KUL		9999.000	14.616
CINKO		9999.000	

TABLO-V-2

VERİLER

Besleyici Maddeler		Ortalama Fiat	Ham Protein %	Ham Selüloz %	Ham Kül %	Kalsiyum %	Fosfor (p) %	Lysin %	Metabolik Enerji K/Cal	Methionin %	Nişasta %
Ham Maddeler											
x ₁	Mısır	58	9,5	3,1	1,4	0,02	0,2	0,24	2813	0,18	85
x ₂	Arpa	54	10,9	5,8	2,5	0,6	0,36	0,39	2700	0,19	76
x ₃	Buğday	62	11	3	1,9	0,05	0,28	0,3	2800	0,15	86
x ₄	Ayçiçeği Küspesi	55	32	20	7	0,3	0,9	1,4	2300	0,6	56
x ₅	Pamuk Küspesi 1	50	38	12	6,8	0,1	0,9	1,5	2300	0,5	72
x ₆	Pamuk Küspesi	47	32	20	5,2	0,1	0,9	1	2100	0,5	70
x ₇	Soya Küspesi	85	40	8	6,6	0,25	0,6	2,75	2600	0,6	70
x ₈	Fındık Küspesi	63	40	10	8,2	0,25	-	1	2400	0,6	70
x ₉	Et-Kemik Unu	153	32	2,5	33	10	5	2,4	2300	0,5	55
x ₁₀	Kemik Unu	103	27	-	40	24	8	-	1900	0,6	0
x ₁₁	Balık Unu	230	65	-	12	7	3,5	4,7	2700	1,8	72
x ₁₂	Mermer Tozu	5	-	-	-	39	-	-	2200	-	-
x ₁₃	Tuz	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x ₁₄	Melâs	18	9	2	11	0,4	0,02	0,9	2300	-	40
x ₁₅	Razmol	39	14	7	3,8	0,1	0,7	0,56	1700	0,23	57
x ₁₆	Kepek	33	12	10	4,7	0,05	0,28	0,58	1700	0,23	45
x ₁₇	Bonkalite	60	14	1,7	2	0,05	0,28	0,3	2700	0,15	86
x ₁₈	Ham Yağ	350	-	-	-	-	-	-	8800	-	-

KISITLAYICI ŞARTLAR

	<u>Minumum</u>	<u>Maksimum</u>
HAM PROTEİN	%16	%20
HAM SELÜLOZ	-	%12
KALSİYUM	%0.01	-
FOSFOR	%0.06	-
NİŞASTA	%25	-
MELÂS	%10	-
TUZ	%2	%4
MERMER TOZU	%4	%5
ARPA	%5	%50
PAMUK KÜSPESİ	-	%50
KEPEK	-	%40

EK -II

GAYE FONKSIYONU:

$$Z_{\min} = 58x_1 + 54x_2 + 62x_3 + 55x_4 + 50x_5 + 47x_6 + 85x_7 + \\ 63x_8 + 153x_9 + 103x_{10} + 230x_{11} + 5x_{12} + 15x_{13} + \\ 18x_{14} + 39x_{15} + 33x_{16} + 60x_{17} + 350x_{18}$$

KISITLAMA DENKLEMLERİ:

- 1) $9.5x_1 + 10.9x_2 + 11x_3 + 32x_4 + 38x_5 + 32x_6 + 40x_7 + 40x_8 + \\ + 32x_9 + 27x_{10} + 65x_{11} + 9x_{14} + 14x_{15} + 12x_{16} + 14x_{17} \geq 16000$
- 2) $9.5x_1 + 10.9x_2 + 11x_3 + 32x_4 + 38x_5 + 32x_6 + 40x_7 + 40x_8 + \\ + 32x_9 + 27x_{10} + 65x_{11} + 9x_{14} + 14x_{15} + 12x_{16} + 14x_{17} \leq 20000$
- 3) $3.1x_1 + 5.8x_2 + 3x_3 + 20x_4 + 12x_5 + 20x_6 + 8x_7 + 10x_8 + \\ + 2.5x_9 + 2x_{14} + 14x_{15} + 12x_{16} + 14x_{17} \leq 12000$
- 4) $0.02x_1 + 0.6x_2 + 0.05x_3 + 0.3x_4 + 0.1x_5 + 0.1x_6 + 0.25x_7 + \\ + 0.25x_8 + 10x_9 + 24x_{10} + 7x_{11} + 39x_{12} + 0.4x_{14} + 0.1x_{15} + \\ + 0.05x_{16} + 0.05x_{17} \geq 100$
- 5) $0.2x_1 + 0.36x_2 + 0.28x_3 + 0.9x_4 + 0.9x_5 + 0.9x_6 + 0.6x_7 + \\ + 5x_9 + 8x_{10} + 3.5x_{11} + 0.02x_{14} + 0.7x_{15} + 0.28x_{16} + \\ + 0.28x_{17} \geq 600$
- 6) $85x_1 + 76x_2 + 86x_3 + 56x_4 + 72x_5 + 70x_6 + 70x_7 + 70x_8 + \\ + 55x_9 + 72x_{11} + 40x_{14} + 57x_{15} + 45x_{16} + 86x_{17} \geq 25000$
- 7) $x_2 \geq 50$
- 8) $x_2 \leq 500$
- 9) $x_5 \leq 500$
- 10) $x_6 \leq 500$
- 11) $x_{12} \geq 40$
- 12) $x_{12} \leq 50$
- 13) $x_{13} \geq 20$
- 14) $x_{13} \leq 40$
- 15) $x_{14} \geq 100$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 18$$

$$16) \quad x_{16} \leq 400$$

