T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADOMİAN AYRIŞIM METODU YARDIMIYLA KOMPOZİT MALZEMELERDE DALGA YAYILIMI

GÜLSEMAY YİĞİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA SİVRİ

İSTANBUL, 2012

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADOMİAN AYRIŞIM METODU YARDIMIYLA KOMPOZİT MALZEMELERDE DALGA YAYILIMI

Gülsemay YİĞİT tarafından hazırlanan tez çalışması 27.06.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Fatih Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Fatih Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında hocam Prof. Dr. Mustafa SİVRİ'ye, tavsiyeleriyle yön veren, yüksek lisansımın ders alma sürecinden itibaren, bitişine kadar desteğini esirgemeyen, değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yaşamımın her aşamasında bana maddi ve manevi her türlü desteği ile yanımda olan anneme, babama, ağabeyime ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran, 2012

Gülsemay YİĞİT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

A_n	Adomian polinomları
α	Homojenite parametresi
$E_0 I_0$	Elastisite modülü sabiti
δA	Kirişin kesit alanı
EI	Elastisite modülü
l	Kirişin boyu
L_x	x değişkenine bağlı türev operatörü
L_x^{-1}	x değişkenine bağlı ters operatör
λ_i	Kiriş probleminin özdeğerleri
m_i	Eylemsizlik elemanları
M	Eğilme momenti
μ	Birim uzunluğa düşen kütle
μ_0	Birim uzunluğa düşen kütle sabiti
P	Kiriş üzerindeki yük
Q	Kiriş üzerinde kayma gerilmesi
q	Doğal frekansa karşılık gelen harmonik fonksiyon
R	Eğilmiş kirişin eğrilik yarıçapı
σ	Normal gerilme
ϕ_i	Kiriş probleminin özfonksiyonları
ρ	Kirişin kütle yoğunluğu
τ	Kayma gerilmesi
Y_i	Salınım biçimi
w	Kirişteki çökme
ω_i	Kirişin doğal salınımı

KISALTMA LİSTESİ

AAM	Adomian Ayrışım Metodu
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
GAAM	Geliştirilmiş Adomian Ayrışım Metodu
MAAM	Modifiye Adomian Ayrışım Metodu

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

ADOMİAN AYRIŞIM METODU YARDIMIYLA KOMPOZİT MALZEMELERDE DALGA YAYILIMI

Gülsemay YİĞİT

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş, dördüncü mertebeden değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilen, Euler-Bernoulli kirişinin titreşim problemi Adomian Ayrışım Metodu (AAM) yardımıyla ele alınmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler iki veya daha fazla malzemenin belirli bir oranla karışımından elde edilen kompozit malzemelerdir. Bu karışım oranı bir fonksiyon ile ifade edilerek farklı karışımı oluşturan malzeme yüzeyleri arasındaki geçişten oluşan tekillikler mümkün olduğu kadar azaltılmaya çalışılmıştır. Problemin sınır değerleri basit mesnetli kiriş için ele alınmış olup, Adomian ayrışım metodunun yapısı gereği çözüm esnasında genelleştirilmiş Fourier serisi ile ifade edilmişlerdir. Elde edilen sonuçlar homojen malzemeden imal edilmiş Euler-Bernoulli kiriş denklemi ile karşılaştırılarak çözümüm doğruluğu kontrol edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrışım metodu, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, Euler-Bernoulli kiriş teorisi, genelleştirilmiş Fourier serileri.

ABSTRACT

WAVE PROPAGATION FOR COMPOSITE METERIALS USING ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Gülsemay YİĞİT

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Co-Advisor: Asisst. Prof. Dr. Ali ŞAHİN

In this study, vibration problem of Euler-Bernoulli beam manufactured with functionally graded material, which is expressed by fourth-order partial differential equations with variable coefficients, is examined by using Adomian Decomposition Method (ADM). Functionally graded materials are composites mixed by two or more materials at a certain rate. This mixture at a certain rate, is expressed with a function and singularities from transition between different surfaces of metarilals are tried to minimize as much as possible. Boundary values of the problem dealing with simply supported beam, Fourier series expansion method is used because of the structure of Adomian decomposition method. Results are compared with homogeneous Euler-Bernoulli beam vibration problem.

Key words: Adomian decomposition method, functionally graded materials, Euler-Bernoulli beam theory, generalized Fourier series.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

1980'li yılların başında George Adomian [1] tarafından geliştirilen, Adomian Ayrışım Metodu (AAM), adi ve kısmi diferensiyel denklemler ile integral, integro-diferensiyel, diferensiyel ve integral denklemler sistemlerine kolaylıkla uygulanabilmesi ve analitik çözüme ulaşmada gösterdiği yakınsaklık sayesinde, başta matematik, fizik, kimya ve biyoloji olmak üzere, birçok alanda ortaya konan problemlerin çözümünde kolaylık sağlamıştır [2]. Lineer olmayan operatör denklemin ayrışımını temel alan bu metotta, serinin her bir terimi analitik fonksiyonun kuvvet serisine açılımından gelen polinomlardan elde edilir ki bu polinomlara Adomian polinomları denir ve A_n ile gösterilir.

AAM'nin yakınsaklığını inceleyen Abbaoui ve Cherruault [3] metodu diferensiyel denklemlere uygulamış, Adomian yakınsaklık probleminin ispatını, sabit nokta teoremini kullanarak göstermiştir. Fakat bu ispat uygulamada pratiklik sağlamamıştır. Daha sonra Abbaoui ve Cherruault [4] AAM yardımıyla lineer, yarı-lineer ve lineer olmayan problemleri çözmüş ve bu problemlerin sonucunda uygun sınır koşulları verildiğinde AAM'nin hızlı yakınsayan sonuçlar verdiğini görmüştür. Ayrıca, Cherruault ve Adomian [5] metodun yakınsaklığı ile ilgili çalışmalar yapmıştır. El-Kalla [6] metodun yakınsaklığını nonlineer Volterra denklemini çözmede kullanmıştır.

Adomian ayrışım metodu için yeniden düzenleme ilk olarak Wazwaz [7] tarafından yapılmıştır. Wazwaz bu düzenleme ile sadece iki iterasyon kullanarak çözüme ulaşmıştır. Ayrıca Wazwaz, mevcut hesaplamaları geliştirerek ve işlem yükünü hafifleterek hızlı yakınsayan sonuçlar elde etmiştir. Yeniden düzenlenmiş bu metoda modifiye Adomian ayrışım metodu (MAAM) denilmektedir. Diğer yandan Wazwaz [8] AAM ile Taylor serisi yöntemini karşılaştırmış, Wazwaz AAM'in daha az işlem yükü gerektirdiğinden dolayı kullanışlı olduğunu göstermiştir. AAM'in yeniden düzenlenmesine ilişkin bir diğer çalışma geliştirilmiş Adomian ayrışım metodu (GAAM) olarak bilinir ve Abassy [9] tarafından ortaya konulmuştur. Abassy, GAAM'yi kullanarak Adomian polinomlarının bulunmasına ilişkin çalışmalar yapmış ve GAAM ile standart AAM'yi karşılaştırmalı olarak yakınsaklık ile ilgili bazı problemlerin çözümünde kullanmıştır. Sonuç olarak, GAAM'nin standart AAM'ye göre bazı adımlarda daha hızlı yakınsadığı görülmüştür. Abassy bu metodu ayrıca lineer olmayan başlangıç değer problemlerin çözümünde de kullanmıştır.

Babolian vd. [10],[11] AAM'yi lineer ve lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümüne uygulamış ve bu yöntemin Jakobi iteratif yöntemi ile başlangıç değerleri dışında aynı olduğunu göstermişlerdir.

Adomian polinomlarının hesaplanmasında algoritmalar; Taylor serisi [1], Neumann serisi [12] ve parametrizasyon [13] yöntemi olmak üzere üç kısımda incelenir. Algoritmalar adi ve kısmi diferensiyel denklemlerde, integral denklemlerde veya sınır değer problemlerin çözümünde kullanılabilir. Ayrıca Lou [14] AAM'yi uygun dönüşümler kullanarak homojen olmayan sınır koşulları içeren durumlara uygulamıştır. Bu metoda iki adımlı (two-step) AAM denilmektedir. Bazı farklılıklar olmasına rağmen, temelde bu yöntemlerin amacı AAM'yi daha kullanışlı ve verimli hale getirmektir.

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemle ifade edilen birçok fiziksel model AAM yardımıyla kolaylıkla incelenebilmektedir. Kirişlerin titreşim problemi sözü edilen modellerdendir. Günümüzde kiriş ve kolon taşıyıcı sistemlerinin köprüler, yüksek binalar, uzay istasyonları, otobüs, tren ve gemi gibi yapıların sağlamlık analizleri, roketlerin kontrolleri ve dinamik yapıları gibi geniş bir uygulama alanı olduğundan bu elemanların titreşim hareketlerinin incelenmesi oldukça önem taşımaktadır. Burada özel olarak, Euler Bernoulli kiriş teorisini ele alacağız. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, ilk olarak 1750 yılında Leonard Euler ve Daniel Bernoulli tarafından geliştirilmiştir. Bu tarihten sonra kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimi birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır [15],[16],[17]. Gere ve Timoshenko [18] kiriş çeşitlerini tanıtarak, farklı sınır koşulları altında, homojen veya homojen olmayan kiriş problemlerinin çözümüne ilişkin çalışmalar yapmıştır. Öte yandan, Rayleigh-Ritz ve Galerkin gibi yaklaşık çözüm metotları bazı düşük doğal frekansı ve salınım biçimini hesaplamada kullanılmıştır. Fakat bu metotlar ile yüksek doğal frekans ve salınım biçimini hesaplamada bazı zorluklar ortaya çıkmıştır. Register [19] titreşim frekansına ilişkin genel bir ifade türetmiş ve simetrik yaylı sınır koşullarına sahip bir kiriş için özdeğerleri hesaplamıştır. Wang [20] Fourier seri açılımından yararlanarak kirişlerin titreşim analizini yapmıştır. Bu konuyla ilgili diğer bir çalışma J.N. Reddy'ye aittir. Reddy [21] kitabında Euler-Bernoulli denklemi ile ilişkili bir boyutlu dördüncü mertebeden diferensiyel denklemin sonlu eleman formülasyonunu vermiştir. Buna ek olarak farklı destek şartlarına sahip kirişleri tanıtmıştır. Haddadpour [22] AAM ile dördüncü mertebeden parabolik kısmi diferensiyel denklem ile ifade edilen homojen malzemeden imal edilmiş bir kirişin titreşim problemini çözmüştür. Çalışmasında Fourier seri açılımdan yararlanmış, elde ettiği analitik sonucu ortogonal fonksiyonlardan yararlanarak ifade etmiştir. AAM ile yapmış olduğu çözümü klasik model analizi tekniği ile karşılaştırmış ve sonuçların aynı olduğunu göstermiştir. Ele alınan kirişin homojen olmayan malzemeden üretilmiş olması da ayrı bir araştırma konusudur.

Teknolojik gelişmelere uygun malzeme arayışı tarihin başından bu yana dek sürmektedir. Bu arayış II. Dünya savaşında, mevcut malzemelerin teknolojik gelişmeler karşısındaki gereksinimlere cevap veremez hale gelmesi ile ivme kazanmıştır. İki ya da daha fazla sayıda, aynı veya farklı gruptaki malzemelerin en iyi özelliklerini, yeni ve tek bir malzemede toplamak amacıyla, makro düzeyde birleştirilmesi ile oluşturulan kompozit malzemeler, teknolojik gereksinimleri karşılayacak çözüm olarak görülmüştür. Bu malzemelerin üretimi ve mekanik özellikleri üzerine ARGE çalışmaları halen devam etmektedir [23]. Kompozit malzemeler, başta tıp olmak üzere, uçak ve gemi sanayilerinde, çağdaş tekniğin kullanıldığı birçok alanda, özellikle aşınma, ısı ve radyasyona karşı dayanıklı olmasından dolayı yaygın kullanım alanına sahiptirler. Araştırmalar içerisinde en önemli alanlardan birini kompozit malzemelerin ve bu malzemelerden hazırlanmış yapı elemanlarının, dinamik ve statiğine ait problemlerinin matematiksel modellenmesi almaktadır. Ancak, geleneksel kompozit malzemeler yüksek sıcaklıklara sahip ortamlarda yetersiz kalmaktadırlar.

Metallerin, yüksek mukavemeti sayesinde mühendisliğin birçok alanında yaygın olarak kullanıldığı bilinmektedir. Fakat metallerde yüksek sıcaklık altında, geleneksel kompozit malzemelerde olduğu gibi, aşınma ve oksitlenme sorunu vardır. Diğer yandan, seramik malzemeler sıcaklığa dayanıklılığı ile bilinir, fakat düşük sertlikte olmaları nedeniyle kullanım alanları daralmıştır. Metal-seramik kompozitler, bu malzemelerde katmanlar arasındaki süreksizlik nedeniyle oluşan yüksek ısıl ve artık gerilimlerden dolayı teknolojinin talep ettiği tasarımlara istenilen düzeyde cevap verememiştir. Metalin yüksek mukavemet özelliği, seramiklerin de yüksek ısıya dayanma güçlerinden yararlanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) fikri ortaya çıkmıştır. Bu malzeme tipi iki veya daha fazla malzemenin belli bir hacimsel oranda birbiri ile karıştırılması ile üretilir [24]. FDM, ilk olarak 1980'li yılların ortalarında, Japonya' da bir grup araştırmacı tarafından keşfedilmiştir. FDM başlangıçta yüksek sıcaklık uygulamaları, uzay araçları ve havacılıkla ilgili yapıların tasarlanmasında ve füzyon reaksiyonlarının oluşumunda kullanılmıştır. Daha sonra, FDM kullanılarak yapılan yüksek dirençli malzemeler büyük önem kazanmış, FDM teknolojinin gelişmesiyle birlikte geniş bir alana yayılmıştır.

Kompozit malzemelere; doğadan, yumuşak dokusu olan bitki ve hayvanlar, kendi vücudumuzdan ise, iskelet ve dişler örnek verilebilir. Bambu, kabuk ve hindistan cevizi yaprağı basit örneklerdir. Bambu, kabuk dış yüzeyinde yüksek mukavemete iç yüzeyinde ise yumuşak ve dayanıklı bir yapıya sahiptir. Ayrıca bambuda merkezden boşluğa kadarki basamaklı yapı sayesinde mukavemet ve elastikiyet özellikleri bir arada görülür [25],[26],[27].

FDM'lerde malzeme özelliklerinin sürekli olmasından dolayı, malzeme içerisinde gerilme yığılmasının oldukça az olması, onu birçok uygulama için uygun kılmıştır. Bunlara örnek olarak fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş ve plakalar üzerine yapılan çalışmalar verilebilir. Sankar ve Tzeng [28] Euler-Bernoulli kiriş teroisini kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin ısıl gerilim yayılması problemini ele almışlardır. Oatao ve Tanigawa [29] geçişli hal ısı iletimi problemleri üzerinde çalışmışlardır. Bir boyutlu ısı dağılımını Laplace dönüşüm metodu yardımıyla incelemişlerdir. Li vd. [30] FDM seramik takviyeli alüminyum plakların visko-plastik davranışlarını incelemişlerdir. Bezerovski vd. [31] çok katmanlı metal seramik kompozitleri ve içinde rastgele yayılmış seramik parçacıklar gömülü metallerin mekanik davranışlarını incelemişlerdir. Yaptıkları çalışma sonucu malzeme özelliklerinin düzgün değişen şekilde modellemenin olayın fiziğine daha yakın sonuçlar verdiğini görmüşlerdir.

Sonuç olarak FDM, yüksek sıcaklığa ve aşınmaya karşı direnç gösterebilen malzeme olması dolayısıyla birçok uygulama alanına sahiptir. Japonya ve ABD'nin FDM'ye önem vermesi, bu iki ülkenin uzay sanayinde, endüstride ve iletişimde hızla gelişmesine katkıda bulunmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş, dördüncü mertebeden değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilen, Euler-Bernoulli kirişinin titreşim problemi Adomian Ayrışım Metodu (AAM) yardımıyla çözülmesi hedeflenmiştir.

1.3 Hipotez

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde, malzeme yüzeyleri arasındaki geçişten oluşan tekillikler mümkün olduğu kadar azaltılmaya çalışılmıştır. Ele alınan Euler-Bernoulli kirişi belirtildiği gibi homojen olmayan bir malzeme kullanılarak üretilmiştir. Titreşim problemin sınır değerleri basit mesnetli kiriş için ele alınmış olup, Adomian ayrışım metodunun yapısı gereği çözüm esnasında genelleştirilmiş Fourier serisi ile ifade edilmişlerdir.

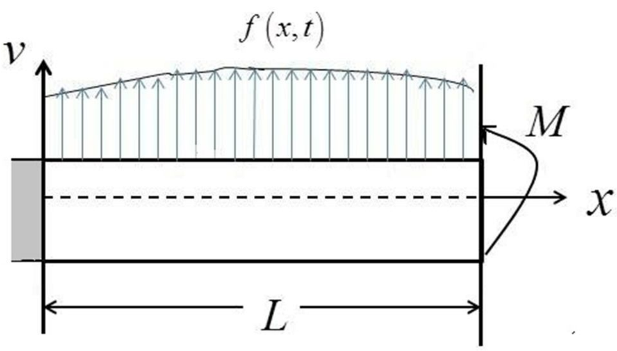
BÖLÜM 2

EULER BERNOULLİ KİRİŞ TEORİSİ

2.1 Genel Bilgiler

Bu bölümde kiriş teorisi tanıtılacak, kirişlerin eğilmesi ve titreşim analizi ele alınacaktır. Kiriş ve kolon taşıyıcı sistemleri makine, havacılık, inşaat mühendisliği v.b. alanlarda oldukça sık kullanılmaktadır. Bu yüzden bu elemanların titreşim hareketlerinin incelenmesi oldukça önem taşımaktadır.

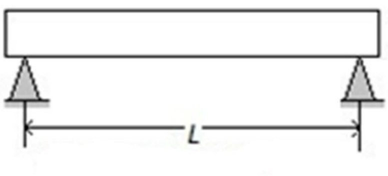
Euler Bernoulli kiriş teorisi ilk olarak 1750 yılında Leonard Euler ve Daniel Bernoulli tarafından geliştirilmiştir. Bu teoriye göre, eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan kesitler eğilmeden sonra da tarafsız eksene dik ve düzlem kalırlar. Bu kabule göre, kirişteki kayma yer değiştirmeleri ile deformasyonlar ihmal edilmiş olur. Kiriş üzerindeki herhangi bir noktanın ancak düşey doğrultuda hareket ettiği kabul edilerek, bu hareket miktarına o noktanın çökmesi (v) denir [21] (Şekil 2.1). Daha sonraları, Euler yüküne alternatif olarak kayma kuvvetlerinin ve deformasyonların da hesaba katıldığı yeni formülasyonlar verilmiştir. Bu kiriş çeşidi ise Timoshenko kirişi olarak bilinir [33].



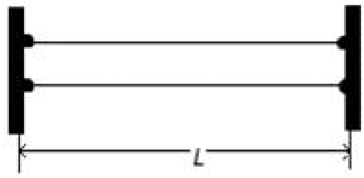
Şekil 2. 1 Ele alınan yapı elemanı ve yükleme durumu

Euler- Bernoulli kirişinin Adomian ayrışım metodu yardımıyla çözümü ile alakalı titreşim analizi konusunda çalışmalar mevcut olup bu konu 4. Bölümde ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

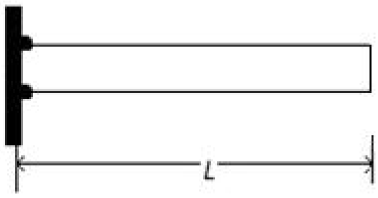
Kirişler destek durumlarına göre isimler alırlar. Şekil 2.2'de bazı kiriş çeşitleri verilmiştir. Kirişin destek durumu kiriş probleminin çözümünde kullanılan sınır şartları ile alakalıdır [32].



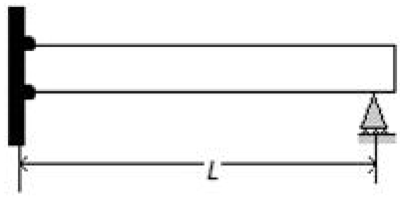
a) Basit mesnetli kiriş



b) İki uçtan sabitlenmiş kiriş



c) Bir uçtan sabitlenmiş kiriş
(Cantilever beam)



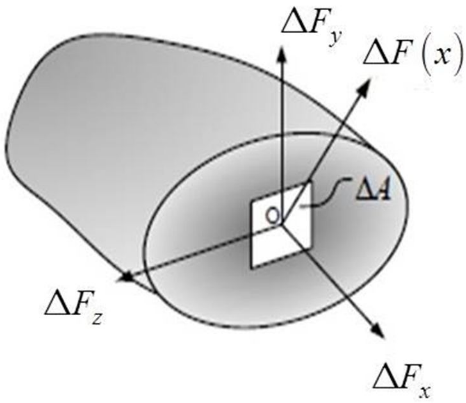
d) Bir uçtan sabit diğer uçtan
mesnetli kiriş

Şekil 2. 2 Kiriş çeşitleri

2.2 Gerilim (Stress) ve Gerinim (Strain) İlişkisi

Yük altındaki bir elemanın davranışını tanımlamakta kullanılan gerilim (stress) ve gerinim (strain) kavramları üzerinde duralım.

Kuvvet etkisinde dengede olan bir elemanın içindeki herhangi bir noktadaki iç kuvvetin şiddetine, yani birim alana düşen iç kuvvete gerilim adı verilir.



Şekil 2. 3 Gerilim

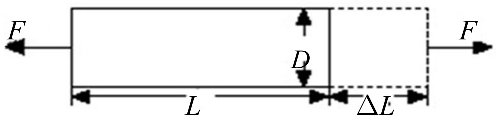
Şekil 2.3'te dengede olan bir cisimden kesilerek alınan bir parçanın kesim düzlemi üzerinde alınan herhangi bir O noktası ve bu nokta civarındaki ΔA alanı ile bu alana etkiyen ΔF kuvveti gösterilmiştir. O noktasına yapıştırılan koordinat takımı x ekseni kesim düzlemine dik olan doğrultu ile çakıştırılmıştır. ΔF iç kuvvetinin eksenler doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$ olarak tanımlansın. Bu gerilim bileşenlerini ΔA alanına bölerek, ΔA sıfıra giderken limiti alınırsa her bir eksen doğrultusundaki gerilimin bileşeni tanımlanmış olur. Yüzeye dik doğrultudaki gerilime normal gerilme adı verilip σ ile gösterilirken, kesim yüzeyi içindeki gerilime de kayma gerilimi denir ve τ ile gösterilir. Her gerilim bileşenine eklenen iki indisten birincisi kesim düzleminin normalinin doğrultusunu, ikinci indis ise gerilim bileşeninin kendi doğrultusunu belirtir. Örneğin; τ_{xz}, normali x ekseni olan düzlemde z ekseni doğrultusundaki kayma gerilimidir.

$$\sigma_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A \to \infty} \left(\frac{\Delta F_x}{\Delta A} \right) = \frac{dF_x}{dA}, \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to \infty} \left(\frac{\Delta F_y}{\Delta A} \right) = \frac{dF_y}{dA}, \tag{2.2}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to \infty} \left(\frac{\Delta F_z}{\Delta A} \right) = \frac{dF_z}{dA}. \tag{2.3}$$

Öte yandan gerilime maruz kalan bir parça gerinim (strain) altındadır.



Şekil 2. 4 Gerinim

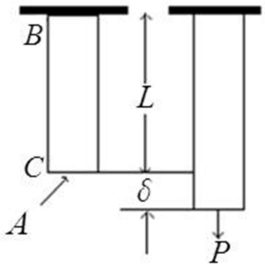
Şekil 2.4'de görüldüğü gibi F kuvvetiyle çekilen ve L uzunluğunda bir çubuk ele alalım. Bu durumda çubuk eksen boyunca uzar veya kısalır. Bu uzunluk değişimi δL doğrusal yayılımlıdır. Gerinim, birim uzunluk başına düşen yayılımdır [32].

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}. \tag{2.4}$$

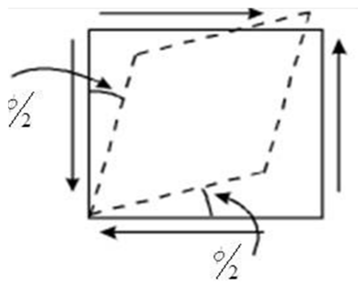
Gerinim ile gerilim arasındaki doğrusal ilişki E elastisite modülü olmak üzere,

$$E = \frac{\text{Gerilim}}{\text{Gerinim}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir. Elastisite modülü, malzemenin kuvvet altında elastik şekil değiştirmesinin ölçüsüdür. Şekil 2.5'deki gibi kesit alanı A olan bir BC kirişini ele alalım. Bu kirişe bir P yükü uygulandığında Şekil 2.5 ile gösterildiği gibi bir değişim görülür. Bu normal gerinimdir (normal straindir) ve herhangi bir açı değişimi olmamıştır. Uzunluğun değişmediği fakat açıların değiştiği duruma ise kayma gerinimi (Şekil 2.6) (shear strain) adı verilir [32].



Şekil 2. 5 Normal Gerinim (Normal Strain)



Şekil 2. 6 Kayma Gerinimi (Shear Strain)

2.3 Euler Bernoulli Kirişinin Eğilme Titreşimi

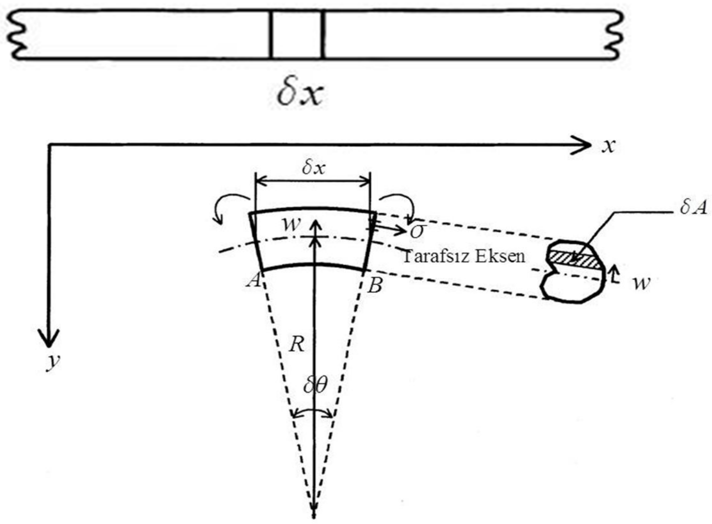
Bu kısımda söz konusu kirişlerin eğilme titreşimi analizi üzerinde duracağız. Euler Bernoulli titreşim denklemi çökme cinsinden (v) dördüncü mertebeden parabolik bir diferensiyel denklemdir. Denklemin elde edilmesi, model analizi ve farklı sınır şartları altındaki kirişler incelenecektir.

2.3.1 Kiriş Denklemi

Kirişin yanal titreşimini ifade eden Euler Bernoulli denklemini elde etmek için xy düzleminde Şekil 2.7'de görüldüğü gibi eğilmiş bir kiriş ele alınsın. Denklemin elde edilmesi için moment-eğilme ilişkisi dönel dinamikler ve kirişin enine dinamiklerinin incelenmesi gerekir.

2.3.2 Moment-Eğilme İlişkisi

Şekil 2.7 ile gösterildiği gibi uzunluğu δx, eğilme momenti M olan bir kiriş ele alalım.



Şekil 2. 7 Kirişin Eğilmesi

Kayma gerilmesinden dolayı oluşabilecek enine deformasyonlar ihmal edilmek üzere, kesit alanı δA olan şeritsel bir bölge düşünelim. Şekilde görüldüğü gibi eğilmeden kaynaklı uzaklık w olsun. Tarafsız eksen (neutral axis) kiriş boyunca normal gerilim (stress) ve gerinimin (strainin) sıfır olduğu noktalarda sisteme katılır.

δA yüzeyindeki normal gerinim (strain),

$$\varepsilon = \frac{(R+w)\delta\theta - R\delta\theta}{R\delta\theta} \tag{2.6}$$

ile ifade edilir. Böylece, R eğilmiş kirişin eğrilik yarıçapı olmak üzere gerinme,

$$\varepsilon = \frac{w}{R}$$

olarak bulunur. Eksenel yönlü normal gerilim (stress) ise

$$\sigma = E.\varepsilon = E\frac{w}{R}$$

ile ifade edilir ki, E burada elastisite modülü (Young modulü) olarak bilinir. O halde eğilme momenti, I kiriş kesit alanın ikinci momenti olmak üzere,

$$M = \int_A w\sigma.dA = \int w^2 \frac{E}{R} dA = \frac{E}{R}\int w^2 dA = \frac{EI}{R} \tag{2.7}$$

$$M = \frac{EI}{R} \tag{2.8}$$

şeklinde bulunur [33].

A noktasındaki eğim $\frac{\partial v}{\partial x}$ ve B noktasındaki eğim $B = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\delta x$ olmak üzere, burada v, δx elemanının yanal eğilmesidir. $\delta\theta$, Şekil 2.7'de gösterilen δx kiriş elemanının oluşturduğu açı olmak üzere, eğimdeki değişme $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\delta x = \delta\theta$ ile ifade edilir. Ayrıca,

$$\delta x = R\delta\theta \tag{2.9}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} R\delta\theta = \delta\theta \tag{2.10}$$

bulunur ki denklemin düzenlenmesi ile,

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

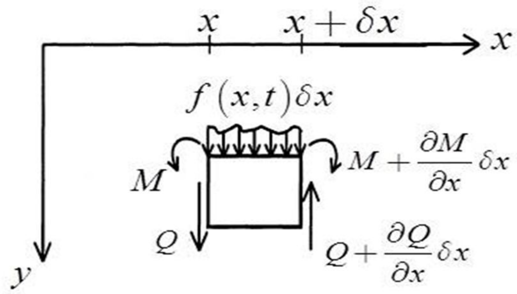
elde edilir. Sonuç olarak (2.11) ve (2.8) denklemlerinden,

$$M = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.12}$$

İfadesi bulunur [33].

2.3.3 Dönel Dinamikler

δx kiriş elemanını ve üzerindeki kuvvet ile momentleri Şekil 2.8'de gösterildiği gibi ele alalım.



Şekil 2. 8 Kirişin eğilmesi dinamikleri

$f(x,t)$, x yönündeki birim uzunluğa uygulanan çıkış kuvveti olsun. Kiriş elemanının dönel eylemsizliğinin ihmal edildiğini düşünelim. Momentin denge koşullarından elde edilen açısal hareket denklemi,

$$M + Q\delta x - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x}\partial x\right) = 0 \tag{2.13}$$

veya (2.12) denkleminde momentin (M) yerine yazılmasıyla kirişteki kayma gerilmesi,

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{2.14}$$

şeklinde elde edilir. Burada $I = I(x)$ kirişin uzunluğu boyunca değişken olarak ele alınmıştır [33].

2.3.4 Enine Dinamikler

Newton'un ikinci kanunundan δx elemanı için ρ kirişin kütle yoğunluğu olmak üzere, enine hareket denklemi,

$$(\rho A \delta x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x,t)\delta x + Q - \left(Q + \frac{\delta Q}{\partial x}\delta x\right) \tag{2.15}$$

ile ifade edilir. Böylece (2.14) denklemi

$$\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x,t) \tag{2.16}$$

denkleminde yerine konursa

$$\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = f(x,t) \tag{2.17}$$

Euler-Bernoulli kiriş denklemi elde edilir [33].

2.3.5 Model Analizi

Serbest hareket eden bir kiriş için verilen denklemi ele alalım,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{2.18}$$

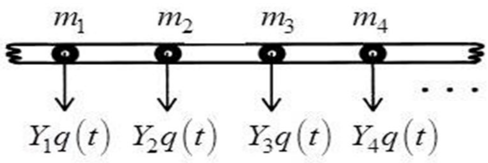
Eğer kiriş düzgün ise, EI sabittir ve bu durumda kiriş denklemi,

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \tag{2.19}$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -c^2\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} \tag{2.20}$$

dördüncü mertebeden parabolik bir denklem olarak elde edilebilir. Bir kirişin düzgün olması, kirişin üretildiği malzemenin homojen olması anlamına gelmektedir.



Şekil 2. 9 Toplu parametreli sistem modeli

(2.20) ile ifade edilen kiriş denklemi belirli sınır şartları altında değişkenlerine ayrıştırma metodu ile çözülebilir. Aranılan $v(x,t)$ fonksiyonu

$$v(x,t)=Y(x)q(t) \tag{2.21}$$

olarak değişkenlerine ayrılsın. Şekil 2.9 ile gösterildiği üzere bu dönüşümde m_i eylemsizlik elemanlarını ve Y_i de salınım biçimini temsil ederken, $q(t)$ doğal frekansa karşılık gelen harmonik fonksiyonu ifade eder. (2.21) ile tanımlanan denklemin (2.18)' de yerine yazılmasıyla,

$$\frac{1}{\rho AY}\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)\right)=-\frac{1}{q(t)}\frac{d^2q}{dt^2}=\omega^2 \tag{2.22}$$

bulunur ki böylece biri t değişkenine ve diğeri x değişkenine bağlı iki denklem elde edilir.

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\omega^2q(t)=0, \tag{2.23}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}EI\frac{d^2Y(x)}{dx^2}-\omega^2\rho AY(x)=0. \tag{2.24}$$

Bu iki denklemin çözümü kirişin salınım biçimi $Y(x)$ ile ilişkili

$$\omega=\lambda^2c=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.25}$$

doğal frekanslarını verecektir. Bunun üzerine (2.24) denklemi tekrar yazılırsa

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4}-\lambda^2Y(x)=0 \tag{2.26}$$

elde edilir. Böylece (2.26) 'da verilen denkleme ait karakteristik denklem,

$$p^4-\lambda^4=0 \tag{2.27}$$

olur. Karakteristik denklemin kökleri, $p=\pm\lambda, p=\pm i\lambda$ olmak üzere (2.26) denkleminin çözümü,

$$Y(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 e^{i\lambda x} + A_4 e^{-i\lambda x} \tag{2.28}$$

veya

$$Y(x) = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x + C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x \tag{2.29}$$

olarak bulunur. $C_1, C_2, C_3,$ ve C_4 bilinmeyenlerinin elde edilebilmesi için sınır koşullarına ihtiyaç vardır [33].

2.3.6 Sınır Koşulları

İhtiyaç duyulan sınır koşulları bir kirişin iki ucundaki şartlara bağlı olarak değişir. Örneğin, bir bitim noktasını $x = x_0$ olacak şekilde tamamen serbest bir kiriş olarak ele alalım. Bu durumda moment ve kayma kuvveti bu bitim noktasında sıfır olacaktır. (2.12) ve (2.14) denklemleri,

$$EI \frac{\partial^2 v(x_0, t)}{\partial x^2} = 0, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v(x_0, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{2.31}$$

yazılabilir. (2.30) ve (2.31) denklemlerinin (2.21) denkleminde yerine yazılması ile,

$$EI \frac{\partial^2 Y(x_0)}{\partial x^2} q(t) = 0, \tag{2.32}$$

$$\frac{d}{dx} EI \frac{\partial^2 Y(x_0)}{\partial x^2} q(t) = 0 \tag{2.33}$$

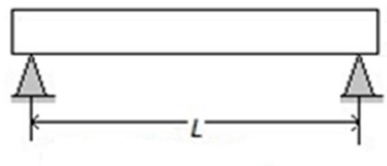
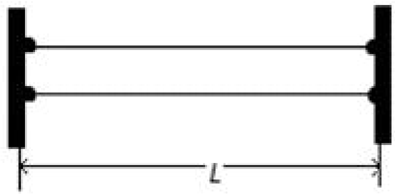
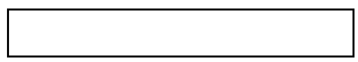
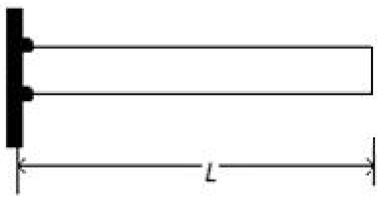
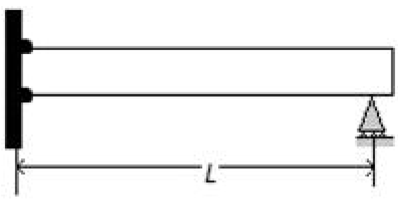
elde edilir. Her $q(t)$ için bu denklemlerin doğru olduğu düşünülürse, serbest uç için koşullar,

$$\frac{\partial^2 Y(x_0)}{\partial x^2} = 0, \tag{2.34}$$

$$\frac{d}{dx} EI \frac{\partial^2 Y(x_0)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.35}$$

olarak sadeleştirilebilir. Kirişlerin eğilme titreşimine ilişkin en sık karşılaşılan sınır koşulları Çizelge 2.1'de beş farklı durum altında incelenmiştir. Bu tabloda v çökme, M eğilme momenti ve Q ise kayma gerilmesidir. İlk olarak basit mesnetli bir kirişi ele alalım.

Çizelge 2. 1 Sık kullanılan kirişlere ait sınır koşulları

Kiriş Modelleri	Sınır Koşulları
 Basit Mesnetli Kiriş (Simply Supported)	$v(0,t)=v(L,t)=0$, $M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(0,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(L,t)=0$
 Sabitlenmiş kiriş (Fixed-Fixed)	$v(0,t)=v(L,t)=0,$ $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial v(L,t)}{\partial x}=0$
 Serbest Kiriş (Free-Free)	$M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(0,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(L,t)=0$ $Q=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2}\right)=0$
 Ankastre Kiriş (Cantilever)	$v(0,t)=0 \quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0$ $M=\frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2}=0$, $Q=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v(L,t)}{\partial x^2}\right)=0$
 Sabit -Mesnetli Kiriş	$v(0,t)=0 \quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0$ $v(L,t)=0 \; M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(L,t)=0$

2.3.7 Uygulamalar

Örnek 2.1 Basit Mesnetli Bir Kirişin Serbest Titreşimi

l uzunluklu basit mesnetli bir kirişi ele alalım. Bu durumda sınır koşullarına göre hem çökme hem de eğilme momenti sıfır olacaktır

$$Y(0)=0=Y(l), \tag{2.36}$$

$$\frac{d^2Y(0)}{dx^2}=\frac{d^2Y(l)}{dx^2}=0. \tag{2.37}$$

Bu sınır koşullarını (2.29) denklemine uygularsak;

$$Y(0)=C_1+C_3, \tag{2.38}$$

$$Y(l)=C_1\cosh\lambda l+C_2\sinh\lambda l+C_3\cos\lambda l+C_4\sin\lambda l, \tag{2.39}$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2}=\lambda^2C_1\cosh\lambda x+\lambda^2C_2\sinh\lambda x-\lambda^2C_3\cos\lambda x-\lambda^2C_4\sin\lambda x \tag{2.40}$$

elde edilir. (2.37) koşulunun (2.40) denkleminde kullanılmasıyla,

$$C_1-C_3=0, \tag{2.41}$$

$$C_1\cosh\lambda l+C_2\sinh\lambda l+C_3\cos\lambda l+C_4\sin\lambda l=0 \tag{2.42}$$

bulunur. (2.38) ve (2.41) denklemlerinin birlikte sağlanabilmesi için $C_1=C_3=0$ olmalıdır. Böylece,

$$C_2\sinh\lambda l+C_4\sin\lambda l=0, \tag{2.43}$$

$$C_2\sinh\lambda l-C_4\sin\lambda l=0. \tag{2.44}$$

$C_2\sinh\lambda l=0$ olması durumu ancak $\sinh\lambda l=0$ yani $\lambda=0$ olmasını gerektirir. Bu ise hiç salınım olmadığı anlamına gelir ki bu doğru olmayan bir ifade olur. Buradan $C_2=0$ olarak bulunur. O halde,

$$C_4\sin\lambda l=0 \tag{2.45}$$

elde edilir. Burada C_4 sabitinin sıfır olması aşikar çözüm vereceğinden $\sin\lambda l=0$ olur. Böylece özdeğerler,

$$\lambda_j l=j\pi \quad j=1,2,3,... \tag{2.46}$$

olarak bulunur. Bu sonuç, (2.25) eşitliği ile ilişkili olarak verilen problem için sıfırdan farklı doğal titreşimlerin bulunduğunu gösterir. O halde,

$$\omega_j = \frac{j^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad j = 1,2,3... \tag{2.47}$$

(2.45) denkleminden özfonksiyonlar,

$$Y_j(x) = \sin\frac{j\pi x}{l}, \quad j = 1,2,3... \tag{2.48}$$

olarak bulunur. Buradan $Y_j(x)$ salınım biçim (mode shape) fonksiyonlarının sonsuz kümesini elde edebiliriz. $Y_j(x)$ fonksiyonu,

$$\sqrt{\int_0^l Y_j^2 dx} = \sqrt{\int_0^l \sin\frac{j\pi x}{l}\sin\frac{j\pi x}{l}dx} = \sqrt{\frac{l}{2}} = \|Y_j\|, \tag{2.49}$$

$$\frac{Y_j}{\|Y_j\|} = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{j\pi x}{l}$$

şeklinde ortonormalleştirilebilir. Görüldüğü gibi $Y_i(x)$ denkleminin her bir özdeğere karşılık sonsuz sayıda çözümü vardır. Böylece (2.23) ve (2.24) denklemleri vasıtası ile $q(t)$ her bir özdeğere karşılık sonsuz sayıda çözüm içerir. Böylece, genel çözüm

$$v(x,t) = \sum Y_j(x)q_j(t) \tag{2.50}$$

şeklinde elde edilir. Buradan özfonksiyonların genişlemesi metodu yardımıyla $q_j(t)$ t'ye bağlı çözüme ulaşılabilir. $d(x)$ ve $s(x)$, $0 \le x \le l$, aralığında tanımlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$v(x,0) = d(x), \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = s(x) \tag{2.52}$$

başlangıç koşulları verilsin. Verilen koşulların (2.50) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\sum Y_j(x)q_j(0) = d(x), \tag{2.53}$$

$$\sum Y_j(x)q_j'(t) = s(x) \tag{2.54}$$

elde edilir. $Y_j(x) = \sin\frac{j\pi x}{l}$ fonksiyonlarının ortogonallik özelliği kullanılırsa,

$$\int_0^l \sin\frac{j\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0 & , j \ne k \\ l/2 & , j = k \end{cases} \tag{2.55}$$

$$q_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l d(x)Y_k(x)dx, \tag{2.56}$$

$$q_k'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l s(x)Y_k(x)dx \tag{2.57}$$

elde edilir. $s(x)$ ve $d(x)$ değerlerinin bilinmesi ile $q_i(t)$ belirlenmiş olur. Böylece kiriş probleminin çözümü

$$v(x,t)=\sum Y_j(x)q_j(t) \tag{2.58}$$

olarak elde edilir [33].

Örnek 2.2 Ankastre Kirişin Serbest Titreşimi

Çizelge 2.1'de belirtildiği gibi l uzunluklu ankastre kirişi ele alalım. Bu durumda sabitlenmiş uç ile serbest uçtaki sınır koşulları,

$$v(0,t)=0,\quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0, \tag{2.59}$$

$$M=\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}=0\,,\; Q=\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}\right)=0 \tag{2.60}$$

şeklinde verilmiştir. Kiriş denkleminin çözümü (2.29)' da

$$Y(x)=C_1\cosh\lambda x+C_2\sinh\lambda x+C_3\cos\lambda x+C_4\sin\lambda x \tag{2.61}$$

olarak bulunmuştu. O halde ilgili sınır koşulları,

$$Y(0)=0,\quad \frac{dY(0)}{dx}=0,\quad \frac{d^2Y(l)}{dx^2}=0,\quad \frac{dY^3(0)}{dx^3}=0 \tag{2.62}$$

yardımıyla (2.61) eşitliğinin ilk üç türevi alınırsa,

$$\frac{dY(x)}{dx}=C_1\lambda\sinh\lambda x+C_2\lambda\cosh\lambda x-C_3\lambda\sin\lambda x+C_4\lambda\cos\lambda x, \tag{2.63}$$

$$\frac{dY^2(x)}{dx^2}=C_1\lambda^2\cosh\lambda x+C_2\lambda^2\sinh\lambda x-C_3\lambda^2\cos\lambda x-C_4\lambda^2\sin\lambda x, \tag{2.64}$$

$$\frac{dY^3(x)}{dx^3}=C_1\lambda^3\sinh\lambda x+C_2\lambda^3\cosh\lambda x+C_3\lambda^3\sin\lambda x-C_4\lambda^3\cos\lambda x \tag{2.65}$$

denklemleri elde edilir. (2.63)-(2.65) denklemlerine (2.62) ile verilen sınır şartlarının uygulanması ile,

$$C_1 + C_3 = 0, \qquad C_2 + C_4 = 0, \tag{2.66}$$

$$C_1 \cosh \lambda l + C_2 \sinh \lambda l - C_3 \cos \lambda l + C_4 \sin \lambda l = 0, \tag{2.67}$$

$$C_1 \sinh \lambda l + C_2 \cosh \lambda l - C_3 \sin \lambda l - C_4 \cos \lambda l = 0 \tag{2.68}$$

bulunur.

$C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$ olduğundan (2.67) ve (2.68) denklemleri C_3 ve C_4 cinsinden yeniden yazılırsa,

$$[\cosh \lambda l + \cos \lambda l] C_3 + [\sinh \lambda l + \sin \lambda l] C_4 = 0, \tag{2.69}$$

$$[\sinh \lambda l - \sin \lambda l] C_3 + [\cosh \lambda l + \cos \lambda l] C_4 = 0 \tag{2.70}$$

elde edilir. (2.69) ve (2.70) denklemleri matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \cosh \lambda l + \cos \lambda l & \sinh \lambda l + \sin \lambda l \\ \sinh \lambda l - \sin \lambda l & \cosh \lambda l + \cos \lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

şeklinde gösterilir. Burada, C_3 ve C_4 katsayılarının sıfır olması C_1 ve C_2 katsayılarının da sıfır olması demektir ki bu aşikar (trivial) çözümdür. O halde (2.71) sisteminde verilen matrisin determinantı sıfır olmalıdır. Böylece,

$$(\cosh \lambda l + \cos \lambda l)^2 - (\sinh \lambda l + \sin \lambda l)(\sinh \lambda l - \sin \lambda l) = 0 \tag{2.72}$$

$$\cosh^2 \lambda l + 2\cosh \lambda l \cos \lambda l + \cos^2 \lambda l - \sinh^2 \lambda l + \sin^2 \lambda l = 0 \tag{2.73}$$

elde edilir. Burada,

$$\cosh^2 \lambda l - \sinh^2 \lambda l = 1, \qquad \cos^2 \lambda l + \sin^2 \lambda l = 1 \tag{2.74}$$

olduğundan,

$$2\cosh \lambda l \cos \lambda l = -2, \tag{2.75}$$

$$\cosh \lambda l \cos \lambda l = -1 \tag{2.76}$$

elde edilir. Böylece her λ_i değerlerine karşılık sonsuz sayıda,

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2.77}$$

doğal titreşim fonksiyonları mevcuttur. (2.61) denkleminde, (2.66), (2.67) ile (2.69) veya (2.70) denklemlerinin kullanılması ile,

$$Y_i(x) = C_3(\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x) + C_4(\sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x) \tag{2.78}$$

denklemi elde edilir. C_3 katsayısının,

$$C_3 = -\frac{\left(\sin\lambda_i l - \sinh\lambda_i l\right)}{\left(\cos\lambda_i l - \cosh\lambda_i l\right)} C_4 \tag{2.79}$$

olarak C_4 cinsinden yazılması ile,

$$Y_i\left(x\right) = C_4 \sin\lambda_i x - \sinh\lambda_i x + C_4\left[\frac{\sin\lambda_i l - \sinh\lambda_i l}{\cos\lambda_i l - \cosh\lambda_i l}\right]\left[\cos\lambda_i x - \cosh\lambda_i x\right] \tag{2.80}$$

elde edilir. $C_4 = 1$ alınır ve

$$a = 1,\;\; b = -1,\;\; c = -1,\;\; d = 1,\; \text{ve}\;\;\; \alpha_i = \frac{\sin\lambda_i l - \sinh\lambda_i l}{\cos\lambda_i l - \cosh\lambda_i l} \tag{2.81}$$

olarak kabul edilirse,

$$Y_i\left(x\right) = a\sin\lambda_i x + b\sinh\lambda_i x + \alpha_i\left[c\cos\lambda_i x + d\cosh\lambda_i x\right] \tag{2.82}$$

çözümü elde edilir. Genel çözüm

$$v\left(x,t\right) = \sum Y_j\left(x\right) q_j\left(t\right)$$

şeklinde elde edilir [33].

BÖLÜM 3

ADOMİAN AYRIŞIM METODU

3.1 Adomian Ayrışım Metodu

Adomian Ayrışım Metodu (AAM), lineer veya lineer olmayan, integral, integro-diferensiyel, diferensiyel ve integral denklem ile bunların oluşturduğu sistemlere kolaylıkla uygulanabilir olması ve daha hızlı yakınsama hatta tam çözüm elde etme gibi avantajları sayesinde, başta matematik, fizik, kimya ve biyoloji olmak üzere, birçok alanda kolaylık sağlamıştır [1]. Aynı zamanda bu metot, lineerleştirme, pertürbasyon veya benzeri yöntemleri kullanmadan çözüme ulaşmayı sağlar. Metot, zaman içerisinde birçok araştırmacı tarafından daha kullanışlı ve verimli hale getirmek amacıyla yeniden düzenlenmiştir.

Bu kısımda, öncelikle metodun prensipleri genel hatları ile incelenecek, Adomian polinomlarının hesaplanmasına ilişkin algoritmalar ile bu polinomlarının elde edilişini destekleyen örnekler verilecektir. Daha sonra modifiye Adomian ayrışım metodu (MAAM) ele alınacak, AAM ile MAAM' nin uygulamaları yapılacaktır. Burada, ayrıca akışkanlar mekaniği, plazma fiziği ve kuantum teorisinde ve aynı zamanda biyoloji ve kimya gibi oldukça geniş bir alanda karşımıza çıkan, lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin uygulamalarına da yer verilecektir.

F hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren diferensiyel operatör olmak üzere,

$$Fu(x) = g(x) \tag{3.1}$$

denklemini ele alalım. (3.1) denklemindeki F operatörü, L tersi mevcut olan ve diferensiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, N diferensiyel denklemin lineer olmayan terimini, R de lineer operatörün kalan kısmını göstermek üzere;

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{3.2}$$

şeklinde ayrıştırılarak yazılsın. (3.2) denklemi yüksek mertebeden türevi yalnız kalmak üzere,

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına n-katlı integral ile ifade edilen L operatörünün tersi,

$$L^{-1} = \int \dots \int (.)\, dt^n \tag{3.4}$$

uygulanırsa,

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.5}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda (3.5) eşitliği;

$$L^{-1}Lu = u(x,t) - u(x,0) - tu'(x,0) - \frac{t^2}{2}u''(x,0) - \cdots\cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x,0) \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. (3.6) denklemi (3.5) denkleminde yerine yazılırsa $u(x,t)$ ayrıştırılmış çözüm fonksiyonu;

$$u(x,t) - u(x,0) - tu'(x,0) - \cdots\cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x,0) = L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu),$$

$$u(x,t) = f(x,t) + L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{3.7}$$

olarak elde edilir ki burada $f(x,t)$ fonksiyonu

$$f(x,t) = u(x,0) + tu'(x,0) + \cdots\cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x,0)$$

şeklindedir. Bu metoda göre $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.8}$$

şeklinde sonsuz seri biçiminde ifade edilirken diğer yandan (3.7) denklemindeki Nu lineer olmayan terimse,

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(u_0, u_1, \cdots, u_n\right) \tag{3.9}$$

biçiminde sonsuz seri ile ifade edilir. Buradaki A_n polinomlarına Adomian polinomları denir. Bu polinomların hesaplanması ileride gösterilecektir. (3.8) eşitliğinin (3.7) denkleminde yerine yazılması ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f\left(x,t\right) + L^{-1}g\left(x,t\right) - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.10}$$

denklemine ulaşılır.

$$u_0 = f\left(x,t\right) + L^{-1}g\left(x,t\right),$$

$$u_1 = -L^{-1}\left(R\left(u_0\right)\right) - L^{-1}\left(A_0\right),$$

$$u_2 = -L^{-1}\left(R\left(u_1\right)\right) - L^{-1}\left(A_1\right)$$

$$\vdots \tag{3.11}$$

bulunur ve genelleştirme ile,

$$u_{n+1} = -L^{-1}\left(Ru_n\right) - L^{-1}\left(A_n\right), \quad n \geq 0 \tag{3.12}$$

iteratif ilişkisi elde edilir. Buradaki A_n polinomları lineer olmayan her bir terim için genelleştirilebilir. Bu genelleştirmede A_0 sadece u_0'a, A_1 sadece u_0 ve u_1'e, A_2 ise, u_0, u_1, u_2'ye bağlı ve benzer şekilde devam eder.

Çözüme ait sayısal değerleri bulmak için,

$$\Phi_n\left(x,t\right) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\left(x,t\right), \quad n \geq 0 \tag{3.13}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n = u\left(x,t\right) \tag{3.14}$$

denklemi kullanılır. Buna ek olarak (3.13) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genellikle fiziksel problemlerde çözüme çok hızlı olarak yakınsamaya neden olmaktadır [34].

3.2 Adomian Polinomlarının Hesaplanması

Bu kısımda Adomian polinomlarının hesaplanmasına ilişkin üç algoritmayı irdeleyeğiz. Bunlardan ilki Taylor seri açılımından yola çıkarak hesaplanan genel formül, ikincisi Neumann serisi yardımıyla polinomların hesaplanması ve son yöntem ise parametrizasyon yöntemidir.

3.2.1 Taylor Serisi Yöntemi

Bu metot George Adomian tarafından geliştirilen ve en sık kullanılan yöntemdir. $F(u)$ lineer olmayan teriminin u_0 civarındaki Taylor seri açılımı,

$$F(u)=F(u_0)+F'(u_0)(u-u_0)+\frac{1}{2!}F''(u_0)(u-u_0)^2+\frac{1}{3!}F'''(u_0)(u-u_0)^3+\ldots \tag{3.15}$$

şeklindedir.

$$u=u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots \Rightarrow u-u_0=u_1+u_2+u_3+\cdots \tag{3.16}$$

olup bu değer (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}F(u)&=F(u_0)+F'(u_0)(u_1+u_2+u_3+\cdots)+\frac{1}{2!}F''(u_0)(u_1+u_2+u_3+\cdots)^2\\&\quad+\frac{1}{3!}F'''(u_0)(u_1+u_2+u_3+\cdots)^3+\cdots\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir ki burada,

$$\begin{aligned}(u_1+u_2+u_3+\cdots)^2&=u_1^2+2u_1u_2+u_2^2+2u_1u_3+u_3^2+2u_2u_3+2u_1u_4+\cdots,\\(u_1+u_2+u_3+\cdots)^3&=u_1^3+3u_1^2u_2+3u_1u_2^2+u_2^3+6u_1u_2u_3+\cdots.\end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.18) denklemi (3.17) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}F(u)&=F(u_0)+F'(u_0)u_1+F'(u_0)u_2+F'(u_0)u_3+\frac{1}{2!}F''(u_0)u_1^2+\frac{1}{2!}F''(u_0)u_2^2\\&\quad+\frac{1}{2!}F''(u_0)u_3^2+\frac{1}{2!}F''(u_0)u_1u_2+\frac{1}{2!}F''(u_0)u_1u_3+\frac{1}{2!}F''(u_0)u_2u_3\\&\quad+\frac{1}{3!}F'''(u_0)u_1^3+\frac{1}{3!}F'''(u_0)u_2^3+\frac{1}{3!}F'''(u_0)3u_1^2u_3+\cdots\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde, indis toplamı 0 olan terimler A_0 polinomu, indis toplamı 1 olan terimler A_1 polinomu, indis toplamı 2 olan terimler A_2 polinomu ve benzer şekilde indis toplamı n olan terimler A_n polinomları olarak gruplandırılırsa

$$
\begin{aligned}
&A_0 = F(u_0) \\
&A_1 = u_1 F'(u_0) \\
&A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) \\
&A_3 = u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F'''(u_0) \\
&A_4 = u_4 F'(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3\right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(4)}(u_0) \\
&A_5 = u_5 F'(u_0) + (u_2 u_3 + u_1 u_4) F''(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_1 u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_3\right) F'''(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!} u_1^3 u_2 F^{(4)}(u_0) + \frac{1}{5!} u_1^5 F^{(5)}(u_0). \\
&\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

şeklinde Adomian polinomları elde edilir [1].

$\lambda \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ çözüm serisi, $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$ ve lineer olmayan terim $F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$ şeklinde parametrik olarak yazılabilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ noktasında $F(u)$ fonksiyonu analitik olmak üzere (3.19) ile verilen Adomian polinomları

$$
A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \tag{3.20}
$$

formülünden elde edilebilir [1]. Benzer şekilde, $F(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_i, \ldots u_n)$ şeklindeki bir nonlineerliğin Adomian polinomları

$$
A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{ik}, \ldots \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_{nk},\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \tag{3.21}
$$

formülünden hesaplanabilir [34].

Örnek 3.1 $F(u) = u^4$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$A_0 = F(u_0) = u_0^4,$$

$$A_1 = u_1 F'(u_0) = 4u_0^3 u_1,$$

$$A_2 = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) = 4u_0^3 u_2 + 6u_0^2 u_1^2,$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= u_3F'(u_0)+u_1u_2F''(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3F'''(u_0) \\
&= 4u_0^3u_3 + 4u_1^3u_0 + 12u_0^2u_1u_2, \\
A_4 &= u_4F'(u_0)+\frac{1}{2!}\left(u_2^2+u_1u_3\right)F''(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2u_2F'''(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4F^{(4)}(u_0) \\
&= 4u_0^3u_4+\frac{1}{2!}\left(u_2^2+u_1u_3\right)12u_0^2+12u_0u_1^2u_2+u_1^4 \\
&= 4u_0^3u_4+6u_0^2u_2^2+12u_0^2u_1u_3+12u_0u_1^2u_2+u_1^4.
\end{aligned}
$$

Örnek 3.2 $F(u)=uu_x$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$A_0 = F\left(u_0u_{0_x}\right)=u_0u_{0_x},$$

$$A_1 = u_1F'\left(u_0u_{0_x}\right)=u_1u_{0_x}+u_{1_x}+u_0,$$

$$A_2 = u_2F'\left(u_0u_{0_x}\right)+\frac{1}{2!}u_1^2F''\left(u_0u_{0_x}\right)=u_2u_{0_x}+u_1u_{1_x}+u_0u_{2_x},$$

$$A_3 = u_3F'\left(u_0u_{0_x}\right)+u_1u_2F''\left(u_0u_{0_x}\right)+\frac{1}{3!}u_1^3F'''\left(u_0u_{0_x}\right)=u_3u_{0_x}+u_2u_{1_x}+u_1u_{2_x}+u_0u_{3_x}$$

$$
\begin{aligned}
A_4 &= u_4F'\left(u_0u_{0_x}\right)+\left[\left(\frac{1}{2!}\right)u_2^2+u_1u_3\right]F''\left(u_0u_{0_x}\right)+\frac{1}{2!}u_1^2u_2F'''\left(u_0u_{0_x}\right)+\frac{1}{4!}u_1^4F''''\left(u_0u_{0_x}\right) \\
&= u_4u_{0_x}+u_3u_{1_x}+u_2u_{2_x}+u_1u_{3_x}+u_0u_{4_x}.
\end{aligned}
$$

Örnek 3.3 $F(u)=\left(u_x\right)^2$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$A_0 = F\left(\left(u_0\right)_x^2\right)=u_{0_x}^2,$$

$$A_1 = u_1F'\left(\left(u_0\right)_x^2\right)=2u_{0_x}u_{1_x},$$

$$A_2 = u_2F'\left(\left(u_0\right)_x^2\right)+\frac{1}{2!}u_1^2F''\left(\left(u_0\right)_x^2\right)=\left(u_{1_x}\right)^2+2u_{0_x}u_{2_x},$$

$$A_3 = u_3F'\left(\left(u_0\right)_x^2\right)+u_1u_2F''\left(\left(u_0\right)_x^2\right)+\frac{1}{3!}u_1^3F'''\left(\left(u_0\right)_x^2\right)=2u_{3_x}u_{0_x}+2u_{2_x}u_{1_x},$$

$$A_4 = u_4F'\left(\left(u_0\right)_x^2\right)+\left[\left(\frac{1}{2!}\right)u_2^2+u_1u_3\right]F''\left(\left(u_0\right)_x^2\right)+\frac{1}{3!}u_1^2u_2F'''\left(\left(u_0\right)_x^2\right)+\frac{1}{4!}u_1^4F''''\left(\left(u_0\right)_x^2\right)$$

$$=u_{2_x}^2+2u_{3_x}u_{1_x}+2u_{0_x}u_{4_x}.$$

Örnek 3.4 $F(u)=e^{\cos u}$, nonlineer terimi için A_0,A_1,A_2,A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

$$A_0=F(u_0)=e^{\cos u_0},$$

$$A_1=u_1F'(u_0)=-\sin u_0 e^{\cos u_0},$$

$$\begin{aligned}A_2&=u_2F'(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2F''(u_0)\\&=-u_2\sin u_0e^{\cos u_0}+\frac{1}{2!}u_1^2\left(-\cos u_0e^{\cos u_0}+\sin u_0\sin u_0e^{\cos u_0}\right)\\&=-u_2\sin u_0e^{\cos u_0}+\frac{1}{2!}u_1^2\left(\sin^2 u_0e^{\cos u_0}-\cos u_0e^{\cos u_0}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_3&=u_3F'(u_0)+u_1u_2F''(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3F'''(u_0)\\&=-u_3\sin u_0e^{\cos u_0}+u_1u_2\left(\sin^2 u_0e^{\cos u_0}-\cos u_0e^{\cos u_0}\right)\\&\quad+\frac{1}{3!}u_3\left(\sin u_0e^{\cos u_0}+3\cos u_0\sin u_0e^{\cos u_0}-\sin^2 u_0\cos u_0e^{\cos u_0}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_4&=u_4F'(u_0)+\left(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3\right)F''(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2u_2F'''(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4F^{(4)}(u_0)\\&=-u_4\sin u_0e^{\cos u_0}+\left(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3\right)\left(\sin^2 u_0e^{\cos u_0}-\cos u_0e^{\cos u_0}\right)\\&\quad+\frac{1}{2!}u_1^2u_2e^{\cos u_0}\left(\sin u_0+3\cos u_0\sin u_0-\sin^2 u_0\cos u_0\right)\\&\quad+\frac{1}{4!}u_1^4\left(-\sin u_0e^{\cos u_0}\left(\sin u_0+3\cos u_0\sin u_0-\sin^2 u_0\cos u_0\right)\right.\\&\quad\left.+e^{\cos u_0}\left(\cos u_0-3\sin^2 u_0+3\cos^2 u_0-2\cos u_0\sin u_0+\sin^3 u_0\right)\right).\end{aligned}$$

3.2.2 Neumann Serisi Yöntemi

Bu algoritma için işlem adımları aşağıdaki gibidir:

1.Adım: λ bir parametre olmak üzere,

$U_\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\lambda^i=u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2+\lambda^3u_3+\cdots+\lambda^nu_n$ olsun.

2.Adım: $F(u_\lambda)$ fonksiyonu belirlenir ve açılımı yapılır.

3.Adım: λ parametresinin katsayıları cinsinden Adomian polinomları yazılır. Örneğin, A_0 sabit, A_1, λ parametresinin katsayısı ve A_2, λ^2 parametresinin katsayısı v.b. biçimdedir [12].

Örnek 3.5 $F(u)=u^4$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

1.Adım:

$$U_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n \quad .$$

2.Adım:

$$F(u_\lambda) = \left(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n\right)^4$$

$$F(u_\lambda) = u_0^4 + \lambda\left(4u_0^3 u_1\right) + \lambda^2\left(4u_0^3 u_2 + 6u_0^2 u_1^2\right) + \lambda^3\left(4u_0^3 u_3 + 4u_0 u_1^3 + 12u_0^2 u_1 u_2\right)$$
$$+\lambda^3\left(4u_0^3 u_4 + 6u_0^2 u_2^2 + 12u_0^2 u_1 u_3 + 12u_0 u_1^2 u_2 + u_1^4\right)^2 + \cdots.$$

3.Adım:

$$A_0 = u_0^4,$$

$$A_1 = 4u_0^3 u_1,$$

$$A_2 = 4u_0^3 u_2 + 6u_0^2 u_1^2,$$

$$A_3 = 4u_0^3 u_3 + 4u_0 u_1^3 + 12u_0^2 u_1 u_2,$$

$$A_4 = 4u_0^3 u_4 + 6u_0^2 u_2^2 + 12u_0^2 u_1 u_3 + 12u_0 u_1^2 u_2 + u_1^4.$$

Örnek 3.6 $F(u)=uu_x$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

1.Adım:

$$U_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n,$$

$$U_{\lambda_x} = \sum_{i=0}^{\infty} u_{i_x} \lambda^i = u_{0_x} + \lambda u_{1_x} + \lambda^2 u_{2_x} + \lambda^3 u_{3_x} + \cdots + \lambda^n u_{n_x}.$$

2.Adım:

$$F(u_\lambda)=\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\lambda^3 u_3+\cdots+\lambda^n u_n\right)$$

$$\times\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}\right),$$

$$\begin{aligned}F(u_\lambda)&=u_0u_{0_x}+\lambda\left(u_1u_{0_x}+u_{1_x}u_0\right)+\lambda^2\left(u_2u_{0_x}+u_1u_{1_x}+u_0u_{2_x}\right)\\&+\lambda^3\left(u_3u_{0_x}+u_2u_{1_x}+u_1u_{2_x}+u_0u_{3_x}\right)\\&+\lambda^4\left(u_4u_{0_x}+u_3u_{1_x}+u_2u_{2_x}+u_1u_{3_x}+u_0u_{4_x}\right)+\cdots.\end{aligned}$$

3.Adım:

$$A_0=u_0u_{0_x},$$

$$A_1=u_1u_{0_x}+u_{1_x}+u_0,$$

$$A_2=u_2u_{0_x}+u_1u_{1_x}+u_0u_{2_x},$$

$$A_3=u_3u_{0_x}+u_2u_{1_x}+u_1u_{2_x}+u_0u_{3_x},$$

$$A_4=u_4u_{0_x}+u_3u_{1_x}+u_2u_{2_x}+u_1u_{3_x}+u_0u_{4_x}.$$

Örnek 3.7 $F(u)=(u_x)^2$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

1. Adım:

$$U_{\lambda_x}=\sum_{i=0}^{\infty}u_{i_x}\lambda^i=u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}.$$

2. Adım:

$$F(u_\lambda)=\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}F(u_\lambda)&=\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}\right)\\&\times\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(u_\lambda)&=u_{0_x}^2+\lambda\left(2u_{0_x}u_{1_x}\right)+\lambda^2\left(u_{1_x}^2+2u_{0_x}u_{2_x}\right)\\&+\lambda^3\left(2u_{1_x}u_{2_x}+2u_{0_x}u_{3_x}\right)+\lambda^4\left(u_{2_x}^2+2u_{3_x}u_{1_x}+2u_{0_x}u_{4_x}\right)+\cdots.\end{aligned}$$

3. Adım:

$$A_0=u_{0_x}^2,$$

$A_1 = 2u_{0_x}u_{1_x}$,

$A_2 = \left(u_{1_x}\right)^2 + 2u_{0_x}u_{2_x}$,

$A_3 = 2u_{3_x}u_{0_x} + 2u_{2_x}u_{1_x}$,

$A_4 = u_{2_x}^2 + 2u_{3_x}u_{1_x} + 2u_{0_x}u_{4_x}$.

3.2.3 Parametrizasyon Yöntemi

Parametrizasyon yöntemi ile Adomian polinomlarını üç adımda elde edebiliriz. Bu metot için işlem adımları aşağıdaki gibidir [13].

1.Adım:

$u(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} u_k \lambda^k$ ve $F(u) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k$ tanımlansın.

2.Adım:

$\sum_{k=0}^{n} u_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k$ olduğunu kabul edelim.

3.Adım:

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^n A_k\right)\Bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} F\left(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n\right)\Big|_{\lambda=0}$$

Örnek 3.8 $F(u) = u^4$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

1.Adım:

$$u(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \lambda^k\right)^4 = \left(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n\right)^4$$

2.Adım:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k = \left(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \cdots + \lambda^n A_n\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k = \left(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \cdots + \lambda^n A_n\right)$$

3. Adım:

$n = 0$ için, $A_0 = u_0^4$,

$n=1$ için,

$n=1$ için, $\left.\frac{\partial\left(A_0+\lambda A_1\right)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial\left(u_0+\lambda u_1\right)^4}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow \quad A_1=4u_0^3u_1,$

$n=2$ için,

$$\left.\frac{\partial^2\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2\right)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial^2\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2\right)^4}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow A_2=4u_0^3u_2+6u_0^2u_1^2,$$

$n=3$ için,

$$\left.\frac{\partial^3\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3\right)}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial^3\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\lambda^3 u_3\right)^4}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_3=4u_0^3u_3+4u_0u_1^3+12u_0^2u_1u_2,$$

$n=4$ için,

$$\left.\frac{\partial^4\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3+\lambda^4 A_4\right)}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial^4\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\lambda^3 u_3+\lambda^4 u_4\right)^4}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_4=4u_0^3u_4+6u_0^2u_2^2+12u_0^2u_1u_3+12u_0u_1^2u_2+u_1^4.$$

Örnek 3.9 $F(u)=uu_x$, nonlineer terimi için A_0,A_1,A_2,A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

1.Adım:

$$u(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\lambda^k\right)=\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\lambda^3 u_3+\cdots+\lambda^n u_n\right),$$

$$u(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\lambda^k\right)_x=\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}\right).$$

2.Adım:

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A_k=\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3+\cdots+\lambda^n A_n\right).$$

3. Adım:

$n=0$ için, $A_0 = u_0 u_{0_x}$,

$n=1$ için,

$$\left.\frac{\partial\left(A_0+\lambda A_1\right)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{\partial\left(\left(u_0+\lambda u_1\right)\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}\right)\right)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow A_1 = u_1 u_{0_x} + u_{1_x} + u_0,$$

$n=2$ için,

$$\left.\frac{\partial^2\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2\right)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{\partial^2\left(\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2\right)\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}\right)\right)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_2 = u_2 u_{0_x} + u_1 u_{1_x} + u_0 u_{2_x},$$

$n=3$ için

$$\left.\frac{\partial^3\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3\right)}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0}$$

$$= \left.\frac{\partial^3\left(\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\lambda^3 u_3\right)\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}\right)\right)}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_3 = u_3 u_{0_x} + u_2 u_{1_x} + u_1 u_{2_x} + u_0 u_{3_x},$$

$n=4$ için,

$$\left.\frac{\partial^4\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3+\lambda^4 A_4\right)}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0}$$

$$= \left.\frac{\partial^4\left(\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\lambda^3 u_3+\lambda^4 u_4\right)\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2 u_{2_x}+\lambda^3 u_{3_x}+\lambda^4 u_{4_x}\right)\right)}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0},$$

$$A_4 = u_4 u_{0_x} + u_3 u_{1_x} + u_2 u_{2_x} + u_1 u_{3_x} + u_0 u_{4_x}.$$

Örnek 3.10 $F(u)=(u_x)^2$, nonlineer terimi için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını hesaplayalım.

1.Adım:

$$u(\lambda)=\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\lambda^k\right)_x^2=\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2u_{2_x}+\lambda^3u_{3_x}+\cdots+\lambda^n u_{n_x}\right)^2$$

2.Adım:

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A_k=\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3+\cdots+\lambda^n A_n\right)$$

3. Adım:

$n=0$ için, $A_0=\left(u_{o_x}\right)^2$,

$n=1$ için,

$$\left.\frac{\partial\left(A_0+\lambda A_1\right)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}\right)^2}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\Rightarrow A_1=2u_{0_x}u_{1_x},$$

$n=2$ için,

$$\left.\frac{\partial^2\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2\right)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial^2\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2u_{2_x}\right)^2}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0}$$

$$A_2=\left(u_{1_x}\right)^2+2u_{0_x}u_{2_x},$$

$n=3$ için,

$$\left.\frac{\partial^3\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3\right)}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0}=\left.\frac{\partial^3\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2u_{2_x}+\lambda^3u_{3_x}\right)^2}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0}\Rightarrow$$

$$A_3=2u_{3_x}u_{0_x}+2u_{2_x}u_{1_x},$$

$n=4$ için,

$$\left.\frac{\partial^4\left(A_0+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\lambda^3 A_3+\lambda^4 A_4\right)}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0}$$

$$=\left.\frac{\partial^4\left(u_{0_x}+\lambda u_{1_x}+\lambda^2u_{2_x}+\lambda^3u_{3_x}+\lambda^4u_{4_x}\right)^2}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0}\Rightarrow$$

$$A_4 = u_{2_x}^2 + 2u_{3_x}u_{1_x} + 2u_{0_x}u_{4_x}.$$

3.3 Modifiye Adomian Ayrışım Metodu

Adomian ayrışım metodunun ortaya çıkması ile birlikte bu metodun geliştirilmesine ilişkin birçok çalışmalar yapılmıştır. Modifiye Adomian ayrışım metodunun standart metoda göre daha hızlı yakınsaması ve daha az işlem yükü gerektirmesi onu daha avantajlı kılmıştır. Metot analizi standart metoda benzemekle birlikte birtakım farklılıkları mevcuttur. Buna göre,

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{3.22}$$

denklemini göz önüne alalım. Standart metotta olduğu gibi (3.22) denkleminin her iki yanına L^{-1} operatörünü uygulanırsa,

$$u(x) = f(x) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{3.23}$$

eşitliği elde edilir. Burada $f(x)$ fonksiyonu $g(x)$ kaynak teriminin integrallenmesi ile elde edilmiştir. Bu adımdan sonra Adomian polinomları standart Adomian ayrışım metodunda olduğu gibi hesaplanabilir. Standart ve modifiye Adomian ayrışım metodu arasındaki fark burada ortaya çıkmaktadır. Standart metoda göre $u_0(x)$, $f_0(x)$ fonksiyonu ile verilirken, modiye metoda göre $f(x)$ fonksiyonu, $f_0(x)$ ve $f_1(x)$ olmak üzere iki ayrı fonksiyonun toplamı cinsinden verilir [34].

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

olmak üzere,

$$u_0(x) = f_0(x),$$

$$u_1(x) = f_1 - L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(Nu_0),$$

$$u_2(x) = -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(Nu_1),$$

$$u_{k+2}(x) = -L^{-1}(Ru_{k+1}) - L^{-1}(Nu_{k+1}), \qquad k \geq 0. \tag{3.24}$$

olarak elde edilir [34].

3.4 Adomian Ayrışım Metodunun Uygulamaları

Örnek 3.11 Adomian ayrışım metodunu kullanarak verilen homojen olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemi çözünüz.

$$u_x + u_y = x + y, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0. \tag{3.25}$$

Çözüm 3.11 (3.25) denklemi operatör formda $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $L_y = \frac{\partial}{\partial y}$ olmak üzere,

$$L_x u = x + y - L_y u \tag{3.26}$$

şeklinde yazılabilir. L_x ve L_y operatörünün tersi,

$L_x^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx$ ve $L_y^{-1}(.) = \int_0^\infty (.)dy$

şeklinde ifade edilmek üzere,

x- çözümü:

Bu çözüm bulunurken (3.26) ile verilen denklemin her iki yanına L_x^{-1} uygulanır.

$$L_x^{-1} L_x u(x,y) = u(x,y) - u(0,y) = L_x^{-1}(x+y) - L_x^{-1}(L_y u) \tag{3.27}$$

(3.27) eşitliği, $u(0,y) = 0$ koşulunun kullanılması ve $f(x) = x + y$ nin x' e göre integrallenmesi ile,

$$u(x,y) = u(0,y) + \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}(L_y u) = \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}(L_y u) \tag{3.28}$$

eşitliği elde edilir. Adomian ayrışım metodu tanımı gereği (3.8) eşitliğinin (3.28) denkleminde yerine koyulmasıyla;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}\left(L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) \right) \right) \tag{3.29}$$

elde edilir.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \frac{1}{2}x^2 + xy - L_x^{-1}\left(L_y (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) \right) \tag{3.30}$$

$f(x,y) = x + y$

fonksiyonunun integrallenmesi ile

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy \tag{3.31}$$

olacağından ardışık ilişki belirlenmiş olur. Böylece,

$$u_0(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x,y)&=-L_x^{-1}\left(L_y u_0\right)=-L_x^{-1}\left(L_y\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\right)=-\frac{1}{2}x^2,\\
u_2(x,y)&=-L_x^{-1}\left(L_y u_1\right)=-L_x^{-1}\left(L_y\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right)=0,\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$u_{k+1}(x,y)=L_x^{-1}L_y\left(u_k\right), \quad k\geq 0 \tag{3.34}$$

elde edilir ki burada $u_k=0, \quad k\geq 0,$ olduğu açıktır ve böylece $u(x,y)$ bileşenlerinin belirlenmesiyle çözüm,

$$u=u_0+u_1+u_2+\cdots=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}x^2=xy \tag{3.35}$$

olarak bulunur.

<u>y-çözümü:</u>

Kesin çözümü bulmada y-çözümü de kullanılabilir. Çözümde benzer işlemler tekrar edilir. (3.25) denklemi operatör formda,

$$L_y=x+y-L_x u \tag{3.36}$$

şeklinde yazılabilir. L_y^{-1} mevcut ve

$$L_y^{-1}(.)=\int_0^{\infty}(.)dy \tag{3.37}$$

şeklinde tanımlı olup, her iki tarafa L_y^{-1}' nin uygulanmasıyla,

$$u(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2-L_y^{-1}\left(L_x u\right) \tag{3.38}$$

olarak bulunur. (3.8) eşitliğinin (3.38) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2-L_y^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)\right)\right) \tag{3.39}$$

elde edilir.

$$u_0+u_1+u_2+\cdots=xy+\frac{1}{2}y^2-L_y^{-1}\left(L_x\left(u_0+u_1+u_2+\cdots\right)\right), \tag{3.40}$$

$$f(x,y)=x+y$$

fonksiyonunun integrallenmesi ile

$$u_0(x,y) = xy + \frac{1}{2}y^2 \tag{3.41}$$

olacağından ardışık ilişki belirlenmiş olur. Böylece,

$$u_0(x,y) = xy + \frac{1}{2}y^2 \tag{3.42}$$

$$u_1(x,y) = -L_y^{-1}(L_x u_0) = -L_y^{-1}\left(L_x\left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\right) = -\frac{1}{2}y^2,$$

$$u_2(x,y) = -L_y^{-1}(L_x u_1) = -L_y^{-1}\left(L_x\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\right) = 0 \tag{3.43}$$

$$\vdots$$

$$u_{k+1}(x,y) = L_y^{-1}L_x(u_k), \quad k \geq 0 \tag{3.44}$$

elde edilir ki burada $u_k = 0, \quad k \geq 0$ olduğu açıktır ve $u(x,y)$ bileşenlerinin belirlenmesiyle çözüm,

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2 = xy \tag{3.45}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.12 Adomian ayrışım metodunu kullanarak aşağıda verilen denklemi çözünüz.

$$u_t + cu_x = 0, \quad u(x,0) = x, \quad c \text{ sabit.} \tag{3.46}$$

Çözüm 3.12 (3.46) denklemi $L_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ olmak üzere, operatör formda,

$$L_t u(x,t) = -cL_x u \tag{3.47}$$

şeklinde ifade edilir. L_t ters çevrilebilir bir operatör olduğundan, tersi mevcut olup

$$L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)\,dt \tag{3.48}$$

şeklinde tanımlanır. L_t^{-1} in (3.46) denkleminin her iki yanına uygulanması ve verilen sınır koşulunun kullanılmasıyla,

$$u(x,t) = x - cL_t^{-1}\left(L_x u(x,t)\right) \tag{3.49}$$

elde edilir. $u(x,t)$ ayrışım serisinin (3.49) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = x - cL_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)\right) \tag{3.50}$$

elde edilir. $u(x,t)$ ayrışımının birkaç teriminin kullanılmasıyla, (3.50) denklemi

$$u_0+u_1+u_2+\cdots=x-cL_t^{-1}\left(L_x\left(u_0+u_1+u_2+\cdots\right)\right) \tag{3.51}$$

halini alır. Böylece, $u_0,u_1,u_2,\ldots$ bileşenleri aşağıdaki ardışık ilişki yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned} u_0(x,t)&=x,\\ u_1(x,t)&=-cL_t^{-1}\left(L_x u_0\right)=-ct,\\ u_2(x,t)&=-cL_t^{-1}\left(L_x u_1\right)=0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Buradan, $u_k=0,\quad k\geq 2,$ olduğu görülür ki aranan çözüm,

$$u(x,t)=x-ct \tag{3.53}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.13 Verilen adi diferensiyel denklemi Adomian ayrışım yöntemiyle çözünüz.

$$u'(x)-u(x)=x\cos-x\sin x+\sin x,\qquad u(0)=0. \tag{3.54}$$

Çözüm 3.13 $L_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$ ve $L^{-1}(.)=\int_0^x(.)dx$ olmak üzere, L_x^{-1}, (3.54) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa;

$$L^{-1}\left[u'(x)\right]-L^{-1}\left[u(x)\right]=L^{-1}\left[x\cos-x\sin x+\sin x\right], \tag{3.55}$$

$$u(x)-L^{-1}\left[u(x)\right]=\int_0^x x\cos xdx-\int_0^x x\sin xdx+\int_0^x \sin xdx,\quad u(0)=0. \tag{3.56}$$

şeklinde elde edilirken, ilgili integrallerin hesaplanmasıyla ve denklemin düzenlenmesi ile,

$$u(x)=x\sin x+x\cos x-\sin x+L_x^{-1}\left(u(x)\right) \tag{3.57}$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} u_0&=x\sin x+x\cos x-\sin x,\\ u_1&=\int_0^x u_0dt=-x\cos x+\sin x+x\sin x+2\cos x-2,\\ u_2&=\int_0^x u_1dt=-x\sin x-2\cos x+3\sin x-2x+2,\\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.58}$$

olarak bulunur ve böylece kesin çözüm,

$$u(x)=x\sin x \tag{3.59}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.14 Verilen ısı denklemini Adomian ayrışım metodu yardımıyla çözünüz.

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \\ &u(\pi,t) = 0, \qquad\qquad t \geq 0, \\ &u(x,0) = \sin x. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Çözüm 3.14

t-çözümü:

(3.60) denklemi $L_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ ve $L_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ olmak üzere, operatör formda,

$$L_t u(x,t) = L_x u(x,t) \tag{3.61}$$

olarak yazılır. L_t ve L_x operatörlerinin tersleri,

$$L_t^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt, \qquad L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx \tag{3.62}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (3.61) denklemin her iki yanına L_t^{-1} operatörü uygulanırsa,

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = u(x,t) - u(x,0) \tag{3.63}$$

elde edilir ve $u(x,0) = \sin x$ koşulunun kullanılması ile,

$$u(x,t) = \sin x + L_t^{-1}\left(L_x u(x,t)\right) \tag{3.64}$$

olarak bulunur. (3.8) eşitliği (3.64) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sin x + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)\right) \tag{3.65}$$

elde edilir veya diğer bir deyişle,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \sin x + L_t^{-1}\left(L_x\left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\right)\right) \tag{3.66}$$

olur. Böylece tekrarlayan algoritma,

$$\begin{aligned} &u_0(x,t) = \sin x, \\ &u_1(x,t) = L_t^{-1}\left(L_x(u_0)\right) = -t\sin x, \\ &u_2(x,t) = L_t^{-1}\left(L_x(u_1)\right) = \frac{1}{2!}t^2 \sin x, \\ &\qquad\vdots \end{aligned} \tag{3.67}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak $u(x,t)$ çözümünün seri formdaki hali,

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+\cdots,$$
$$u(x,t)=\sin x\left(1-t+\frac{1}{2!}t^2-\cdots\right) \tag{3.68}$$

şeklinde olur ki e^{-t}'nin McLaurin seri açılımı yardımıyla,

$$u(x,t)=e^{-t}\sin x \tag{3.69}$$

olarak bulunur. Bulunan sonuç başlangıç ve sınır koşullarını sağlamaktadır.

x-çözümü: (3.60) denklemi operatör formda,

$$L_x u(x,t)=L_t u(x,t) \tag{3.70}$$

şeklinde yazılır. L_x'e ait ters operatör

$$L_x^{-1}=\int_0^x\int_0^x(.)\,dxdx \tag{3.71}$$

olmak üzere, L_x^{-1} in (3.70) denkleminin her iki yanına uygulanmasıyla,

$$u(x,t)=u(0,t)+xu_x(0,t)+L_x^{-1}\left(L_t u(x,t)\right),$$
$$u(x,t)=xh(t)+L_x^{-1}\left(L_t u(x,t)\right) \tag{3.72}$$

elde edilir. $u_x(0,t)=h(t)$ şeklinde tanımlanırsa ve (3.8) denklemi (3.72) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=xh(t)+L_x^{-1}\left(L_t\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\right)\right) \tag{3.73}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $h(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak tekrarlayan algoritma

$$\begin{aligned} u_0(x,t)&=xh(t),\\ u_1(x,t)&=L_x^{-1}(L_t u_0)=\frac{1}{3!}x^3h'(t),\\ u_2(x,t)&=L_x^{-1}(L_t u_1)=\frac{1}{5!}x^5h''(t),\\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.74}$$

şeklinde elde edilir. Buradan çözümün seri formdaki hali,

$$u(x,t)=xh(t)+\frac{1}{3!}x^3h'(t)+\frac{1}{5!}x^5h''(t)+\cdots \tag{3.75}$$

şeklindedir. $h(t)$ bilinmeyen fonksiyonunu bulmak için

$$u(x,0)=\sin x \tag{3.76}$$

başlangıç şartı kullanılabilir. (3.75) denkleminde $t=0$ iken (3.76) başlangıç şartı ile $\sin x$'in $x=0$ civarında Taylor açılımının kullanılması ile,

$$xh(0)+\frac{1}{3!}x^3h'(0)+\frac{1}{5!}x^5h''(0)+\cdots=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots \tag{3.77}$$

bulunur. Buradan x'in kuvvetlerinin katsayılarının eşitlenmesiyle,

$$h(0)=1,\ h'(0)=-1,\ h''(0)=1,\cdots \tag{3.78}$$

elde edilir. Bu değerler yardımıyla $h(t)$'nin $t=0$ civarında Taylor serisi açılımının,

$$\begin{aligned} h(t)&=h(0)+h'(0)t+\frac{1}{2!}h''(0)t^2-\frac{1}{3!}h'''(0)t^3+\cdots,\\ &=1-t+\frac{1}{2!}t^2-\frac{1}{3!}t^3+\cdots,\\ &=e^{-t} \end{aligned} \tag{3.79}$$

değerine eşit olduğu gözlenir. Böylece $u(x,t)$ çözümü seri formda,

$$u(x,t)=e^{-t}\left(x-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right) \tag{3.80}$$

şeklinde ifade edilir ki kapalı formda yazılmak istenirse,

$$u(x,t)=e^{-t}\sin x \tag{3.81}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.15 Verilen dalga denklemini Adomian ayrışım metodu yardımıyla çözünüz.

$$\begin{aligned} &u_{tt}=u_{xx}, && 0<x<\pi, && t>0,\\ &u(0,t)=1+\sin t, && u(\pi,t)=1-\sin t, &&\\ &u(x,0)=1, && u_t(x,0)=\cos x. && \end{aligned} \tag{3.82}$$

Çözüm 3.15 Verilen dalga denklemi $L_t=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ ve $L_x=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ olmak üzere, operatör formda

$$L_tu(x,t)=L_xu(x,t) \tag{3.83}$$

olarak yazılır. L_t operatörünün tersi

$$L_t^{-1}(.)=\int_0^t\int_0^t(.)\,dt\,dt \tag{3.84}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (3.83) denkleminin her iki yanına uygulanırsa,

$$u(x,t)=1+t\cos x+L_t^{-1}\left(L_x u(x,t)\right) \tag{3.85}$$

ifadesi elde edilir. AAM gereği (3.8) denklemi (3.85) denkleminde yerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=1+t\cos x+L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\right)\right) \tag{3.86}$$

elde edilir. Buradan tekrarlayan algoritma,

$$\begin{aligned} u_0(x,t)&=1+t\cos x,\\ u_1(x,t)&=L_t^{-1}\left(L_x(u_0)\right)=-\frac{1}{3!}t^3\cos x,\\ u_2(x,t)&=L_t^{-1}\left(L_x(u_1)\right)=\frac{1}{5!}t^5\cos x,\\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.87}$$

şeklinde bulunur. Böylece $u(x,t)$ seri formda

$$\begin{aligned} u(x,t)&=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+\cdots\\ &=1+\cos x\left(t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5}t^5-\cdots\right) \end{aligned} \tag{3.88}$$

elde edilir ve kapalı formda,

$$u(x,t)=1+\cos x\sin t \tag{3.89}$$

ifadesine dönüştürülür.

Örnek 3.16 Verilen homojen olmayan dalga denklemini Adomian ayrışım metodu yardımıyla çözünüz.

$$\begin{aligned} &u_{tt}=u_{xx}-2, && 0<x<\pi, && t>0,\\ &u(0,t)=0, && u(\pi,t)=\pi^2, && t\geq 0,\\ &u(x,0)=x^2, && u_t(x,0)=\sin x. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Çözüm 3.16 Verilen dalga denklemi $L_t=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ ve $L_x=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ olmak üzere, operatör formda,

$$L_t u(x,t)=L_x u(x,t)-2 \tag{3.91}$$

olarak yazılır. Burada, L_t operatörünün tersi (3.91) denklemin her iki yanına uygulanması ve verilen koşulların kullanılması ile,

$$u(x,t)=x^2+t\sin x-t^2+L_t^{-1}\left(L_x u(x,t)\right) \tag{3.92}$$

olarak elde edilir. AAM gereği (3.8) denklemi (3.92) denkleminde yerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = x^2 + t\sin x - t^2 + L_t^{-1}\left(L_x\left(u_n(x,t)\right)\right) \tag{3.93}$$

elde edilir. Buradan tekrarlayan algoritma,

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= x^2 + t\sin x - t^2, \\ u_1(x,t) &= L_t^{-1}\left(L_x(u_0)\right) = t^2 - \frac{1}{3!}t^3\sin x, \\ u_2(x,t) &= L_t^{-1}\left(L_x(u_1)\right) = \frac{1}{5!}t^5\sin x \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.94}$$

şeklinde bulunur. Böylece $u(x,t)$ çözümü seri formda,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots, \\ &= x^2 + \sin x\left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \cdots\right) \end{aligned} \tag{3.95}$$

olarak bulunur ve kapalı formda

$$u(x,t) = x^2 + \sin x \sin t \tag{3.96}$$

ifadesine dönüşür.

Örnek 3.17 Verilen lineer olmayan adi diferensiyel denklemi Adomian ayrışım metodu yardımıyla çözünüz.

$$y' - y^2 = 1, \qquad y(0) = 0 \tag{3.97}$$

Çözüm 3.17 (3.97) denklemi $L_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ olmak üzere operatör formda,

$$L_x y = 1 + y^2$$

olarak yazılır. L_x operatörünün tersi,

$$L_x^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx$$

olmak üzere, (3.97) denkleminin her iki yanına uygulanırsa,

$$y = x + L_x^{-1}\left(y^2\right) \tag{3.98}$$

elde edilir. AAM' nin tanımı gereği,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{3.99}$$

olduğundan, y^2 lineer olmayan terimler,

$$y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklindedir. Burada $y_n(x)$, $n \geq 0$, $y(x)$'in bileşenleridir ve A_n Adomian polinomlarını temsil etmektedir. (3.99) denkleminin (3.98) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = x + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \tag{3.100}$$

elde edilir. Böylece tekrarlayan algoritma,

$$\begin{aligned} &y_0(x) = x, \\ &y_{k+1}(x) = L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{3.101}$$

şeklinde ifade edilirken Adomian polinomları,

$$\begin{aligned} &A_0 = y_0^2 \\ &A_1 = 2y_0y_1, \\ &A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2 \\ &A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \\ &A_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 \\ &\quad \vdots \end{aligned} \tag{3.102}$$

şeklinde bulunur. Bulunan polinomların (3.101) eşitliğinde kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} &y_0(x) = x, \\ &y_1(x) = L^{-1}A_0 = L^{-1}\left(y_0^2\right) = \frac{1}{3}x^3, \\ &y_2(x) = L^{-1}A_1 = L^{-1}(2y_0y_1) = \frac{2}{15}x^5, \\ &y_3(x) = L^{-1}A_2 = L^{-1}\left(2y_0y_2 + y_1^2\right) = \frac{17}{315}x^7, \\ &\qquad \vdots \end{aligned} \tag{3.103}$$

elde edilir. Böylece çözüm seri formda,

$$y(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \tag{3.104}$$

şeklinde bulunur ve kapalı formda,

$$y(x) = \tan x$$

ifadesine dönüştürülür.

Örnek 3.18 Verilen denklemi modifiye Adomian ayrışım metodu ile çözünüz.

$$u_x + u_y = 3x^2y^2,\ u(0,y) = 0 \tag{3.105}$$

Çözüm 3.18 (3.105) denklemi $L_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ olmak üzere, operatör formda,

$$L_x u = 3x^2y^3 + 3x^3y^2 - u_y \tag{3.106}$$

olarak yazılır. L_x operatörünün tersi,

$$L_x^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx$$

olmak üzere, (3.97) denkleminin her iki yanına uygulanırsa,

$$u(x,y) = x^3y^3 + \frac{3}{4}x^4y^2 - L_x^{-1}(u_y) \tag{3.107}$$

elde edilir. MAAM metoduna göre, $f(x,y) = x^3y^3 + \dfrac{3}{4}x^4y^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^3y^3 \\ f_2(x,y) &= \frac{3}{4}x^4y^2 \end{aligned} \tag{3.108}$$

şeklinde iki ayrı fonksiyon cinsinden yazılsın. Böylece modifiye tekrarlayan ilişkisi,

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= x^3y^3, \\ u_1(x,y) &= \frac{3}{4}x^4y^2 - L^{-1}(u_0)_y, \\ u_2(x,y) &= -L^{-1}(u_k)_y, \qquad k \geq 1 \end{aligned} \tag{3.109}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= x^3y^3, \\ u_1(x,y) &= \frac{3}{4}x^4y^2 - L^{-1}\left(3x^3y^2\right) = 0, \\ u_{k+1}(x,y) &= 0, \qquad k \geq 1 \end{aligned} \tag{3.110}$$

elde edilir. Böylece çözüm,

$$u(x,y) = x^3y^3 \tag{3.111}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.19 Verilen Ricatti denklemini modifiye Adomian ayrışım metodu ile çözünüz.

$$y' = 1 - x^2 + y^2, \quad y(0) = 0 \tag{3.112}$$

Çözüm 3.19 (3.112) denkleminin her iki yanına L operatörünün tersi

$L^{-1}(.) = \int_0^x (.)dx$ olmak üzere (3.112) denklemine uygulanırsa,

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + L^{-1}y^2 \tag{3.113}$$

denklemi elde edilir. $y(x)$ ayrışım serisinin kullanılması ve y^2 ifadesinin Adomian polinomları cinsinden yazılması ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \tag{3.114}$$

elde edilir. Modifiye ayrışım metodu gereğince, $x - \frac{1}{3}x^3$ polinomu x ve $-\frac{1}{3}x^3$ olarak iki kısıma ayrılır. Böylece, modifiye rekürans ilişkisi

$$\begin{aligned} y_0 &= x, \\ y_1 &= -\frac{1}{3}x^3 + L^{-1}(A_0), \\ y_{k+2} &= -L^{-1}(A_{k+1}), \qquad k \geq 0 \end{aligned} \tag{3.115}$$

olarak bulunur. Buradan bileşenler,

$$\begin{aligned} y_0 &= x, \\ y_1 &= -\frac{1}{3}x^3 + L^{-1}(A_0) = -\frac{1}{3}x^3 + L^{-1}\left(y_0^2\right) = 0, \\ y_{k+2} &= 0, \qquad\qquad k \geq 0 \end{aligned} \tag{3.116}$$

şeklinde bulunur. Buradan verilen Ricatti denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = x$$

olarak elde edilir [34].

BÖLÜM 4

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ KİRİŞLERİN ADOMİAN AYRIŞIM METODU YARDIMIYLA TİTREŞİM ANALİZİ

Bu kısımda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilen Euler-Bernoulli kirişinin titreşim probleminin, Adomian ayrışım metodu yardımıyla çözümü yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya değişen, iki veya daha fazla maddenin belirli oranlarda karıştırılmasıyla üretilen malzemelerdir. FDM'lerin özelliklerinin sürekli değişimi, yüksek ısıya dayanıklı olma ve malzeme içerisinde gerilimler oluşmasına yol açacak yığılmalar içermemesi, onları birçok farklı uygulama alanı için uygun hale getirmiştir [24]. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, kirişin düzlem kesit alanının, kirişin eğilmesinden sonra düzlem ve kiriş eksenine dik kalması kabulüne dayanır. Bu teoride kirişteki çökmeyi ifade eden diferensiyel denklem $w(x,t)$ çökme, $EI(x)$ eğilme momenti (Young Modülü), $\mu(x)$ birim uzunluğa düşen kütle, $q(x,t)$ birim uzunluktaki yük olmak üzere,

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=q(x,t) \tag{4.1}$$

şeklinde dördüncü mertebeden parabolik kısmi türevli diferensiyel denklem ile modellenir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış Euler-Bernoulli kirişinde, eğilme momenti (Young modülü) ile kirişin birim uzunluğa düşen kütlesi, α homojenite parametresi, $E_0 I_0$ ile μ_0 sabitler olmak üzere,

$$EI(x)=E_0 I_0 e^{\alpha x}, \qquad \mu(x)=\mu_0 e^{\alpha x} \tag{4.2}$$

biçimininde üstel fonksiyonları şeklinde ifade edilir.

4.1 Titreşim Probleminin Analizi

Euler-Bernoulli kiriş titreşim problemi,

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=q(x,t) \tag{4.3}$$

şeklinde dördüncü mertebeden parabolik dalga denklemi ile verilir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kullanıldığından (4.2)'deki ifadelerin (4.3) denkleminde yazılmasıyla,

$$\mu_0 e^{\alpha x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 I_0 e^{\alpha x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=q(x,t) \tag{4.4}$$

veya,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{\mu_0 e^{\alpha x}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 I_0 e^{\alpha x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=\frac{q(x,t)}{\mu_0}e^{-\alpha x} \tag{4.5}$$

denklemi elde edilir. (4.5) denklemi operatör formda,

$$L_t=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ ,\quad L_x=\frac{1}{\mu_0 e^{\alpha x}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 I_0 e^{\alpha x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\quad \text{ve}\quad \frac{q(x,t)}{\mu_0}e^{-\alpha x}=Q(x,t)$$

olmak üzere,

$$L_t w+L_x w=Q(x,t) \tag{4.6}$$

olarak yazılır. L_x operatörü ilgili türevler alınarak yeniden düzenlenirse,

$$L_x=\varepsilon e^{-\alpha x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[e^{\alpha x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right],\qquad \varepsilon=\frac{E_0 I_0}{\mu_0}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}L_x w&=\varepsilon e^{-\alpha x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[e^{\alpha x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],\\ &=\varepsilon e^{-\alpha x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha e^{\alpha x}w_{xx}+e^{\alpha x}w_{xxx}\right],\\ &=\varepsilon e^{-\alpha x}\left[\alpha^2 e^{\alpha x}w_{xx}+2\alpha e^{\alpha x}w_{xxx}+e^{\alpha x}w_{xxxx}\right],\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$L_x w = \alpha^2 \varepsilon w_{xx} + 2\alpha\varepsilon w_{xxx} + \varepsilon w_{xxxx} \tag{4.9}$$

ifadesine dönüştürülür. $w(x,t)$ genel çözümü, $u(x,t)$ homojen kısmın ve $v(x,t)$ homojen olmayan kısmın çözümünü göstermek üzere,

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t) \tag{4.10}$$

şeklindedir veya operatör formda,

$$\underbrace{L_t u + L_x u}_{0} + \underbrace{L_t v + L_x v}_{Q(x,t)} = Q(x,t) \tag{4.11}$$

olarak gösterilir.

4.2 Homojen Problem

Ele alınan kiriş probleminde, (4.11) denkleminin sağ tarafındaki kaynak teriminin ihmal edilmesiyle homojen kısım,

$$L_t u + L_x u = 0 \tag{4.12}$$

operatör gösterilir. Denklemin her iki yanına L_t operatörünün tersi olan ve iki-katlı integral ile tanımlanan,

$$L_t^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)\, dt\, dt \tag{4.13}$$

operatörünün uygulanmasıyla,

$$L_t^{-1}[L_t u] + L_t^{-1} L_x u = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) denkleminde $L_t^{-1}[L_t u]$ ifadesi,

$$L_t^{-1}[L_t u] = \int_0^t \int_0^\eta \frac{\partial^2}{\partial s \partial \eta} u(x,s)\, ds d\eta, \tag{4.15}$$

$$L_t^{-1}[L_t u] = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \eta} u(x,s)\Big|_0^\eta d\eta = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \eta} u(x,\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} u(x,0)\right] d\eta,$$

$$L_t^{-1}[L_t u] = u(x,\eta)\Big|_0^t - \eta u_\eta(x,0)\Big|_0^t,$$

$$L_t^{-1}[L_t u] = u(x,t) - u(x,0) - t u_t(x,0), \tag{4.16}$$

olduğundan, (4.16) denkleminin, (4.14)’ de yazılmasıyla,

$$u(x,t)=u(x,0)+tu_t(x,0)-L_t^{-1}[L_x u] \tag{4.17}$$

elde edilir. Başlangıç şartları,

$$u(x,0)=a_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=a_1(x)$$

olmak üzere $u(x,t)$ çözüm fonksiyonu,

$$u(x,t)=a_0(x)+ta_1(x)-L_t^{-1}L_x u \tag{4.18}$$

şeklinde bulunur. AAM’ye göre, $u(x,t)$ çözüm fonksiyonu,

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t) \tag{4.19}$$

biçiminde sonsuz seri ile ifade edilir ve (4.19) eşitliğinin (4.18) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t)=a_0(x)+ta_1(x)-L_t^{-1}L_x\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,t) \tag{4.20}$$

elde edilir. Aynı indeksli terimlerin birbirine eşitlenmesi ile,

$$u_0(x,t)=a_0(x)+ta_1(x)$$

olarak bulunur. Böylece tekrarlayan bağıntı,

$$u_i(x,t)=-L_t^{-1}L_x u_{i-1}(x,t) \tag{4.21}$$

iteratif denklemi ile gösterilir. Homojen çözüm olan $u_i(x,t)$’ nin bileşenleri,

$$u_0(x,t)=a_0(x)+ta_1(x),$$

$$u_1(x,t)=-L_t^{-1}L_x u_0(x,t)=-L_t^{-1}\left\{L_x\left[a_0(x)+ta_1(x)\right]\right\},$$

$$u_1(x,t)=-L_t^{-1}\left[\underbrace{\alpha^2\varepsilon a_0{}''+2\alpha\varepsilon a_0{}'''+\varepsilon a_0{}''''}_{A(x)}+t\underbrace{\left(\alpha^2\varepsilon a_1{}''+2\alpha\varepsilon a_1{}'''+\varepsilon a_1{}''''\right)}_{B(x)}\right],$$

$$u_1(x,t) = -A(x)\frac{t^2}{2!} - B(x)\frac{t^3}{3!},$$

$$u_2(x,t) = -L_t^{-1}\left\{L_x^2\left[-A(x)\frac{t^2}{2!} - B(x)\frac{t^3}{3!}\right]\right\},$$

$$u_3(x,t) = -L_t^{-1}\left\{L_x^2\left[A''(x)\frac{t^4}{4!} + B''(x)\frac{t^5}{5!}\right]\right\},$$

şeklinde bulunur ve böylece devam edilirse genel çözüm,

$$L_x^i = L_x L_x^{i-1}$$

olmak üzere,

$$u_i(x,t) = -L_t^{-1}L_x u_{i-1}(x,t) = (-1)^i L_x^i\left[a_0(x)\frac{t^{2i}}{(2i)!} + a_1(x)\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}\right] \tag{4.22}$$

olarak elde edilir. Başlangıç şartları,

$$u(x,0) = a_0(x) = f(x), \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = a_1(x) = g(x) \tag{4.24}$$

şeklinde verilsin. Başlangıç şartları olan $a_0(x)$ ve $a_1(x)$ fonksiyonları sınır koşullarını da sağlar. Homojen çözüm $u_i(x,t)$ bileşenlerinin toplamı şeklinde olup, eğer tüm $u_i(x,t)$ bileşenleri ayrı ayrı tüm sınır şartlarını sağlarsa, o halde bileşenlerin toplamı da sınır şartlarını sağlar. Fakat (4.22)' de gösterildiği gibi çözüm, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına $(-1)^i L_x^i$ operatörünün uygulanması ile elde edilmektedir ki bu operatör türev operatörü olduğundan $u_i(x,t)$ fonksiyonları sıfır olabilmektedir. Bunu önlemek için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarını $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)...$ şeklinde bilinen ortogonal fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açalım. Buna göre,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j\phi_j(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\phi_j(x) \tag{4.25}$$

şeklinde tanımlanır ki ortogonalite özelliğinden yararlanarak,

$$b_j = \int_0^l f(x)\phi_j dx, \qquad c_j = \int_0^l g(x)\phi_j dx, \tag{4.26}$$

katsayı değerleri elde edilir. Ele alınan fiziksel problemin çözümü,

$$L_x\phi = \lambda\phi(x), \tag{4.27}$$

$$B_i\phi(x) = 0 \tag{4.28}$$

şeklinde verilen kendine-eş (self-adjoint) sistemin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması ile ilgilidir. (4.27) ve (4.28) denklemlerinden,

$$L_x\phi_j(x) = \lambda_j\phi_j(x), \tag{4.29}$$

$$L_x^i\phi_j(x) = \lambda_j^i\phi_j(x) \tag{4.30}$$

λ_i özdeğerleri ile $\phi_i(x)$ özfonksiyonları elde edilir. (4.29) Denkleminde, (4.9) denklemi ile tanımlanan L_x'in yazılmasıyla,

$$\alpha^2\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\alpha\varepsilon\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \varepsilon\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} = \lambda\phi(x), \tag{4.31}$$

elde edilir. Böylece denklem,

$$\phi^{iv} + 2\alpha\phi''' + \alpha^2\phi'' - \frac{\lambda}{\varepsilon}\phi = 0 \tag{4.32}$$

şeklinde dördüncü mertebeden bir diferensiyel denkleme dönüşür. O halde denklemin çözümü,

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} = \beta^4 \tag{4.33}$$

olmak üzere,

$$\phi(x) = c_1 e^{\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}\right)} + c_2 e^{\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}\right)} + c_3 e^{\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta^2}}{2}\right)} + c_4 e^{\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta^2}}{2}\right)} \tag{4.34}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan (4.23) ve (4.24) başlangıç şartlarının (4.25) ile ifade edilmesi ve (4.22) denkleminde ifade edilmesiyle,

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t),$$

$$= a_0(x) + t a_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i L_x^i \left[a_0(x) \frac{t^{2i}}{(2i)!} + a_1(x) \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \right],$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \phi_j(x) + t \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i L_x^i \left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j \phi_j(x) \frac{t^{2i}}{(2i)!} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(x) \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \right],$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\left(t\sqrt{\lambda_j}\right)^{2i}}{2i!} \right] \phi_j(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\left(t\sqrt{\lambda_j}\right)^{2i+1}}{(2i+1)!} \right] \phi_j(x),$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j \cos\sqrt{\lambda_j} t + \frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin\sqrt{\lambda_j} t \right) \phi_j(x) \tag{4.35}$$

genel ifadesi elde edilir.

4.3 Homojen Olmayan Problem

Homojen olmayan kısım, (4.11) denklemine göre,

$$\frac{q(x,t)}{\mu_0} e^{-\alpha x} = Q(x,t) \tag{4.36}$$

olmak üzere,

$$L_t v + L_x v = Q(x,t) \tag{4.37}$$

olarak operatör formda yazılır. Benzer şekilde, denklemin her iki yanına L_t operatörünün tersi olan ve iki-katlı integral ile tanımlanan,

$$L_t^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.)\, dt\, dt \tag{4.38}$$

operatörünün uygulanmasıyla,

$$v(x,t) = -L_t^{-1} L_x v + L_t^{-1} Q(x,t)$$

elde edilir. AAM' ye göre, $v(x,t)$ çözüm fonksiyonu,

$$v(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x,t) \tag{4.39}$$

biçiminde sonsuz seri ile ifade edilir ve benzer şekilde

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i(x,t) = -L_t^{-1} L_x \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x,t) + L_t^{-1} Q(x,t) \tag{4.40}$$

elde edilir. Aynı indeksli terimlerin birbirine eşitlenmesi ile tekrarlayan algoritma,

$$v_0 = L_t^{-1} Q(x,t), \tag{4.41}$$

$$v_1 = -L_t^{-1} L_x v_0 = -L_t^{-1}\left[L_x Q(x,t)\right],$$

$$v_2 = -L_t^{-1} L_x v_1 = L_t^{-1}\left\{L_t^{-1}\left[L_x Q(x,t)\right]\right\},$$

$$\vdots$$

$$v_i = (-1)^i \left(L_t^{-1}\right)^{(i+1)} L_x^i \, Q(x,t) \tag{4.42}$$

olarak elde edilir ve (4.41) denkleminden

$$v_i = (-1)^i \left(L_t^{-1}\right)^i L_x^i v_0(x,t) \tag{4.43}$$

ifadesi elde edilir. Homojen problemin çözümünde olduğu gibi benzer şekilde, (4.36) denklemi ile verilen $Q(x,t)$'nin Fourier serisine açılımı kullanılırsa,

$$Q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(t) \phi_j(x) \tag{4.44}$$

$$N_j(t) = \int_0^l Q(x,t) \phi_j(x) dx \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.42) denkleminde (4.45) eşitliğinin yazılmasıyla,

$$v_i = (-1)^i \left(L_t^{-1}\right)^{(i+1)} L_x^i \sum_{j=1}^{\infty} N_j(t) \phi_j(x) \tag{4.46}$$

olarak bulunur ve böylece (4.30) denkleminden,

$$v_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^i \lambda_j^i \phi_j(x) N_j(t) \left(L_t^{-1}\right)^{(i+1)} \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. L_t^{-1}, L_t operatörünün tersi olup, iki katlı integral ile tanımlandığından,

$$I_{i+1} = N_j(t) \left(L_t^{-1}\right)^i \tag{4.48}$$

olmak üzere,

$$I_1(t) = N_j(t)\left(L_t^{-1}\right) = \int_0^t \int_0^\tau N_j(\sigma)\, d\sigma d\tau = \int_0^t N_j(\sigma)(t-\sigma)\, d\sigma, \tag{4.49}$$

$$I_1(t) = N_j(t)\left(L_t^{-1}\right)^2 = L_t^{-1} I_1(t),$$

$$= \int_0^t I_1(\sigma)(t-\sigma)\, d\sigma,$$

$$= \int_0^t (t-\sigma) \int_0^\sigma N_j(\sigma)(\sigma - t)\, d\tau d\sigma,$$

$$= \int_0^t \int_\tau^t N_j(\tau)(\sigma-\tau)(t-\sigma)\, d\sigma d\tau,$$

$$= \int_0^t N_j(\tau) \int_\tau^t (\sigma-\tau)(t-\sigma)\, d\sigma d\tau,$$

$$= \int_0^t \int_0^\sigma N_j(\sigma)(\sigma - t)(t-\sigma)\, d\tau d\sigma,$$

$$= \int_0^t N_j(\tau) \frac{(t-\tau)^3}{3!} d\tau,$$

$$= \int_0^t N_j(\sigma) \frac{(t-\sigma)^3}{3!} d\sigma \tag{4.50}$$

olarak bulunur ve genelleştirilirse,

$$I_{i+1} = N_j(t)\left(L_t^{-1}\right)^i = \int_0^t N_j(\sigma) \frac{(t-\sigma)^{2i+1}}{(2i+1)!} d\sigma \tag{4.51}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.47) denklemi,

$$v_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^i \lambda_j^i \phi_j(x) \int_0^t N_j(\sigma) \frac{(t-\sigma)^{2i+1}}{(2i+1)!} d\sigma \tag{4.52}$$

ifadesine dönüştürülür ve (4.39) eşitliğinin de kullanılmasıyla homojen olmayan kısmın çözümü,

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^i \lambda_j^i \phi_j(x) \int_0^t N_j(\sigma) \frac{(t-\sigma)^{2i+1}}{(2i+1)!} d\sigma$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_j(x)}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t N_j(\sigma)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\left[(t-\sigma)\sqrt{\lambda_j}\right]^{2i+1}}{(2i+1)!}d\sigma$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_j(x)}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t N_j(\sigma)\sin\sqrt{\lambda_j}(t-\sigma)d\sigma \tag{4.53}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.10) ile verilen homojen ve homojen olmayan kısımların toplamı ile elde edilen $w(x,t)$ genel çözümü,

$$\omega_j=\sqrt{\lambda_j}$$

kirişin doğal salınımını göstermek üzere,

$$w(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j\cos\omega_j t+\frac{c_j}{\omega_j}\sin\omega_j t+\frac{1}{\omega_j}\int_0^t N_j(\sigma)\sin\omega_j(t-\sigma)d\sigma\right)\phi_j(x) \tag{4.54}$$

olarak bulunur [22].

Örnek 4.1 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kullanılan basit mesnetli bir kirişin titreşimini AAM yardımıyla inceleyelim. FDM kullanıldığından kirişin birim uzunluğuna düşen kütlesi ile eğilme momenti (4.2) denklemi ile verilsin. Bölüm 2'de belirtildiği gibi böyle bir kirişin uçlarında çökme ve eğilme momenti sıfırdır (Çizelge 2.1). Buna göre bu kirişe ait sınır şartları,

$$w(0,t)=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=0, \tag{4.55}$$

$$w(l,t)=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)=0 \tag{4.56}$$

şeklinde verilir. Başlangıç koşulları,

$$w(x,0)=f(x)=x-2x^3+x^4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)=0$$

olarak verilsin. Ele alınan titreşim problemi,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{\mu_0 e^{\alpha x}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 I_0 e^{\alpha x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=\frac{q(x,t)}{\mu_0}e^{-\alpha x}$$

şeklindedir. İlk olarak kiriş üzerinde herhangi bir yük olmadığını varsayalım ve homojen kiriş problemini çözelim. (4.34) Denkleminin düzenlenmesiyle,

$$\phi(x)=e^{\frac{-\alpha}{2}x}\left[c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}x\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}x\right)\right.$$

$$\left.+c_3\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-\alpha^2}}{2}x\right)+c_4\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-\alpha^2}}{2}x\right)\right] \tag{4.57}$$

elde edilir. (4.57) Denklemindeki bilinmeyenlerin bulunması için ihtiyaç duyulan sınır koşulları bir kirişin iki ucundaki şartlara bağlı olarak değişir. Basit mesnetli kirişe ait sınır şartları kullanılırsa, $\phi(x)$'e ait sınır şartları,

$$\phi(0)=0, \qquad \frac{d^2\phi(0)}{dx^2}=0, \tag{4.58}$$

$$\phi(l)=0, \qquad \frac{d^2\phi(l)}{dx^2}=0 \tag{4.59}$$

şeklinde ifade edilir. (4.58) ve (4.59) şartlarını, (4.57) denkleminde kullanalım. İlk olarak,

$$\kappa=\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}, \qquad \theta=\frac{\sqrt{4\beta^2-\alpha^2}}{2}$$

olmak üzere

$$\phi(0)=c_1+c_3=0, \tag{4.60}$$

$$\phi(l)=e^{-\frac{\alpha}{2}l}\left[c_1\cosh(\kappa l)+c_2\sinh(\kappa l)+c_3\cos(\theta l)+c_4\sin(\theta l)\right]=0 \tag{4.61}$$

denklemleri ve $\phi''(x)$' in ikinci türevinin alınması ile,

$$\phi''(0)=c_1+c_3-\alpha[c_2\kappa+c_4\theta]+c_1\kappa^2-c_3\theta^2=0, \tag{4.62}$$

$$\phi''(l)=\frac{\alpha^2}{4}e^{-\frac{\alpha}{2}l}\left[c_1\cosh(\kappa l)+c_2\sinh(\kappa l)+c_3\cos(\theta l)+c_4\sin(\theta l)\right]$$

$$+2\left[-\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}l}\left[c_1\kappa\sinh(\kappa l)+c_2\kappa\cosh(\kappa l)-c_3\theta\sin(\theta l)+c_4\theta\cos(\theta l)\right]\right]$$

$$+e^{-\frac{\alpha}{2}l}\left[c_1\kappa^2\cosh(\kappa l)+c_2\kappa^2\sinh(\kappa l)-c_3\theta^2\cos(\theta l)-c_4\theta^2\sin(\theta l)\right]=0 \tag{4.63}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen dört bilinmeyenli denklem sistemi, (4.60) ve (4.62) denklemleri yardımıyla, c_1 ve c_3 katsayılarının c_2 ve c_4 cinsinden yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} &ac_2+bc_4=0,\\ &cc_2+dc_4=0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

şeklinde iki bilinmeyenli denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Bu denklem sistemi matris formda,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

olarak gösterilir ki buradaki katsayılar matrisinin içeriği Ek A'da verilmiştir. Eğer $c_2=c_4=0$ ve dolayısıyla $c_1=c_3=0$ kabul edilirse aşikar çözüm elde edilir ki bu da kiriş üzerinde titreşim hareketlerinin olmaması anlamına gelmektedir. Bunun için (4.65) denkleminde verilen katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$\alpha=1, \quad l=1$ ve $\lambda=\varepsilon\beta^4, \quad \varepsilon=1$

olmak üzere,

$$\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)-1}+\frac{\sqrt{16\beta^4-1}}{\left(8\beta^4-1\right)}=0 \tag{4.66}$$

denklemine ulaşılır. (4.66) Denkleminden elde edilen $\beta_i, \ i=1,2,3,...,$ değerleri ile aranılan doğal salınım bulunmuş olur. Nümerik hesaplama ile (4.66) denkleminin ilk üç kökü,

$\beta_1=3.127, \qquad \beta_2=6.290, \qquad \beta_3=9.432$

şeklinde elde edilmiştir. Diğer yandan (4.57) denkleminde c_1, c_2 ve c_3 katsayılarının c_4 cinsinden yazılmasıyla,

$$\phi(x)=e^{\frac{-\alpha}{2}x}\Bigg\{$$

$$\underbrace{c_4\left(\frac{\left(\sqrt{1+4\beta^2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)-\sqrt{4\beta^2-1}\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)}{-4\beta^2\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)+\left(\sqrt{1+4\beta^2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)-\left(\sqrt{1+4\beta^2}\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)}\right)}_{c_1}$$

$$\times\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}x\right)$$

$$+\underbrace{c_4\frac{\left(-\sqrt{4\beta^2-1}\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)\right)-4\beta^2\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)\right)}{-4\beta^2\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)+\sqrt{4\beta^2+1}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)-\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}\right)\right)}}_{c_2}$$

$$\times\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}}{2}x\right)$$

$$\underbrace{c_4\frac{\sqrt{1+4\beta^2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)-\sqrt{4\beta^2-1}\sinh\left(\frac{\sqrt{4\beta^2+1}}{2}\right)}{-4\beta^2\sinh\left(\frac{\sqrt{4\beta^2+1}}{2}\right)+\sqrt{1+4\beta^2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}\right)-\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2+1}}{2}\right)\right)}}_{c_3}$$

$$\times\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}x\right)+c_4\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2}x\right)\Bigg\}$$

şeklinde ifade edilir. Her β değerine karşılık ilgili katsayılar hesaplanır. Örneğin, $\beta_1=3.127$ için $c_4=1$ alınmak üzere,

$c_1=0.1335,\qquad c_2=-0.1500,\qquad c_3=-0.1335$

katsayıları elde edilir. Benzer şekilde $\beta_2=6.290$ için,

$c_1=0.0734,\qquad c_2=-0.0730,\qquad c_3=-0.0734$

katsayıları ve $\beta_3 = 9.432$ için,

$$c_1 = 0.0502, \qquad c_2 = -0.0502, \qquad c_3 = -0.0502$$

katsayı değerlerine ulaşılır. Problemin özfonksiyonları $\phi_j(x)$,

$$\sqrt{\int_0^l \phi_j^2 dx} = \|\phi_j\|, \qquad \frac{\phi_j}{\|\phi_j\|}$$

şeklinde ortonormalleştirilir. Öyleyse $\phi_j(x)$ salınım fonksiyonları $j = 1, 2, ..., 5$ için,

$$\phi_1(x) = 0.3679 \times 10^{-9} e^{-\frac{1}{2}x} \left(0.6679 \times 10^9 \cosh(3.1658x) - 0.7501 \times 10^9 \sinh(3.1658x) \right.$$
$$\left. -0.6679 \times 10^9 \cos(3.0859x) + 5 \times 10^9 \sin(3.0859x)\right)$$

$$\phi_2(x) = 0.3558 \times 10^{-10} e^{-\frac{1}{2}x} \left(0.3670 \times 10^{10} \cosh(6.3103x) - 0.3654 \times 10^{10} \sinh(6.3103x) \right.$$
$$\left. -0.3670 \times 10^{10} \cos(6.2765x) + 5 \times 10^{10} \sin(6.2765x)\right)$$

$$\phi_3(x) = 0.8886 \times 10^{-10} e^{-\frac{1}{2}x} \left(0.1005 \times 10^{10} \cosh(9.4456x) - 0.1005 \times 10^{10} \sinh(9.4456x) \right.$$
$$\left. -0.1005 \times 10^{10} \cos(9.4191x) + 2 \times 10^{10} \sin(9.4191x)\right)$$

olarak bulunur. Seçilen salınım fonksiyonları ortogonal olduğundan,

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j \cos\sqrt{\lambda_j}\, t + \frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin\sqrt{\lambda_j}\, t \right) \phi_j(x) \tag{4.67}$$

denkleminde b_j ve c_j katsayıları,

$$b_j = \int_0^l f(x)\phi_j\, dx = \int_0^l x - 2x^3 + x^4\, \phi_j\, dx \qquad c_j = \int_0^l g(x)\phi_j\, dx = \int_0^l 0 \cdot \phi_j\, dx = 0$$

olduğundan yine $j = 1$ için,

$$b_1 = \int_0^l x - 2x^3 + x^4\, \phi_j\, dx = 0.22168,$$

olarak elde edilir. O halde,

$$u_1(x,t) = \phi_1(x) b_1 \cos\sqrt{\lambda_1}\, t\,,$$

$$u_1(x,t) = 0.8157\times10^{-10} e^{-\frac{1}{2}x}\Big(0.6679\times10^{9}\cosh(3.1658x) - 0.7501\times10^{9}\sinh(3.1658x)$$
$$-0.6679\times10^{9}\cos(3.0859x) + 5\times10^{9}\sin(3.0859x)\Big)\times\cos(9.7729t)$$

olarak elde edilir. Burada, $\lambda = \beta^4$ olduğundan, $\sqrt{\lambda_1} = \beta_1^2 = 9,77350$ şeklindedir. Benzer şekilde $u_2(x,t)$'yi hesaplayalım. $j=2$ için, $b_2 = 0.03144$ ve $\sqrt{\lambda_2} = 39.57026$ olmak üzere,

$$u_2(x,t) = 0.1118\times10^{-11} e^{-\frac{1}{2}x}\Big(0.3670\times10^{10}\cosh(6.3103x) - 0.3654\times10^{10}\sinh(6.3103x)$$
$$-0.3670\times10^{10}\cos(6.2705x) + 5\times10^{10}\sin(6.2705x)\Big)\times\cos(39.570t)$$

olarak elde edilir. Böylece devam edildiğinde, $j=3$ için, $b_3 = 0.00244$ ve $\sqrt{\lambda_3} = 88.97054$ olmak üzere,

$$u_3(x,t) = 0.2175\times10^{-13} e^{-\frac{1}{2}x}\Big(0.1005\times10^{10}\cosh(9.4456x) - 0.1005\times10^{10}\sinh(9.4456x)$$
$$-0.1005\times10^{10}\cos(9.4191x) + 2\times10^{10}\sin(9.4191x)\Big)\times\cos(88.970t)$$

şeklinde ilk üç bileşen hesaplanmış olur. Şimdi, ele alınan kiriş üzerinde herhangi bir yük olması durumunu ele alarak homojen olmayan kısmın çözümünü yapalım. (4.1) Denklemindeki $q(x,t)$ yükü,

$$q(x,t) = x^2 e^{-x-t} \tag{4.68}$$

şeklinde tanımlansın. O halde (4.36) denklemi,

$$\frac{x^2 e^{-x-t}}{\mu_0} e^{-\alpha x} = Q(x,t) \tag{4.69}$$

olarak yazılabilir. Burada, μ_0 sabit ve $\alpha = 1$ alınmasıyla,

$$Q(x,t) = x^2 e^{-2x-t}$$

olarak elde edilir ve bulunan değer (4.45) denkleminde yerine konursa,

$$N_j(t) = \int_0^l Q(x,t)\phi_j(x)\,dx = \int_0^l x^2 e^{-2x-t}\phi_j(x)\,dx \tag{4.70}$$

elde edilir. $l=1$ ve $\phi_j(x)$ değerlerinin, $j=1,2,...,5$, (4.70) denkleminde yerine konulmasıyla $N_j(x)$ değerleri bulunur. Bu değerlerin $v(x,t)$ genel ifadesinde yazılmasıyla homojen olmayan çözüm elde edilir. Homojen, $u(x,t)$, ve homojen olmayan denklemin, $v(x,t)$, çözümleri birleştirildiğinde,

$$w(x,t)=u(x,t)+v(x,t)$$

problemin genel çözümü elde edilir. Bu çözüme ait sayısal değerler Ek B'da verilmiştir. Homojenite parametresi $\alpha=0.01$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, homojene yakın bir malzemeden üretilmiş kirişin titreşim problemi ele alınmış olur. $\alpha=0.01$ için, problemin özdeğerleri

$$\beta_1=3.1415, \qquad \beta_2=6.2831, \qquad \beta_3=9.4247$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse,

$$\phi_1(x)=0.1417\times10^{-11}e^{-\frac{1}{2}x}\Big(0.1588\times10^{10}\cosh(3.14160x)-0.1732\times10^{10}\sinh(3.1416x)$$
$$-0.1588\times10^{10}\cos(3.1415x)+10\times10^{11}\sin(3.0859x)\Big)$$

$$b_1=0.22182$$

olarak elde edilir. Böylece bulunan değerler,

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j\cos\sqrt{\lambda_j}t+\frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}}\sin\sqrt{\lambda_j}t\right)\phi_j(x)$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_1(x,t)=0.3144\times10^{-12}e^{-0.005x}\Big(0.1588\times10^{10}\cosh(3.1416x)-0.1732$$
$$\times10^{10}\sinh(3.1416x)-0.15588\times10^{10}\cos(3.1415x)$$
$$+1\times10^{12}\sin(3.1415x)\Big)\cos(9.7729t)$$

elde edilir. Devam edilirse $b_2=-0.00049$ ve $b_3=0.00083$,

$$u_2(x,t)=0.45382\times10^{-15}e^{-0.005x}\Big(0.1588\times10^{10}\cosh(6.2831x)-0.1732$$
$$\times10^{10}\sinh(6.2831x)-0.15588\times10^{10}\cos(6.2831x)$$
$$+1\times10^{12}\sin(6.2831x)\Big)\cos(39.4784t)$$

$$
\begin{aligned}
u_3(x,t) = 0.1294\times10^{-16} e^{-0.005x} \Big(& 0.7951\times10^{10}\cosh(9.4247x) - 0.7921 \\
& \times10^{10}\sinh(9.4247x) - 0.7951\times10^{10}\cos(9.4217x) \\
& +1\times10^{13}\sin(9.4217x)\Big)\cos(88.8264t)
\end{aligned}
$$

olarak ilk üç bileşen elde edilir. Denklemin homojen olmayan kısmının çözümünü ele alalım. Kiriş üzerinde (4.68) denkleminde olduğu gibi tanımlansın. O halde,

$$
\frac{x^2 e^{-x-t}}{\mu_0} e^{-\alpha x} = Q(x,t) \;\Rightarrow\; Q(x,t) = x^2 e^{-1.01x-t}
$$

yazılabilir. Elde edilen değerler (4.53) denkleminde yerine konulursa, benzer şekilde homojen olmayan kısmın çözümüne ulaşılır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş, dördüncü mertebeden değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilen, Euler-Bernoulli kirişinin titreşim problemi Adomian Ayrışım Metodu (AAM) yardımıyla ele alınmıştır.

Euler-Bernoulli kiriş teorisi genel hatları ile incelenerek, farklı sınır koşullarına sahip kirişler tanıtılmıştır. Ardından, Adomian ayrışım metodu analizi üzerinde durularak, Adomian polinomlarının hesaplanmasına ilişkin algoritmalar verilmiştir. Metodun adi ve kısmi türevli denklemlere uygulamaları çeşitli örneklerle gösterilmiştir.

Homojen olmayan bir kirişin bu metot ile çözümünün yanı sıra, yeterince küçük homojenite parametresi kullanıldığında, homojen kiriş üzerinde çalışan Haddadpour'un [22] değerleriyle örtüştüğü görülmüştür. Çözüme ait değerler Çizelge 5. 1 ile verilmiş olup grafiklerle gösterilmiştir.

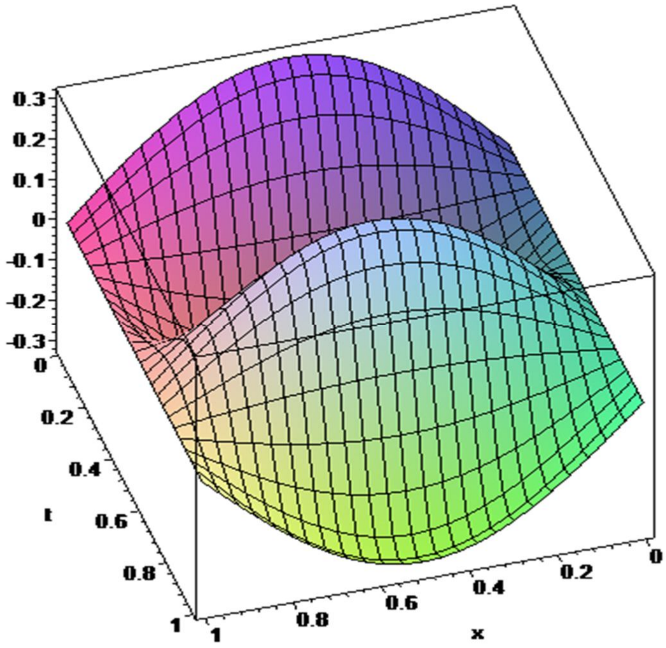
İleride aynı metot, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış plakanın titreşim problemi gibi farklı örneklere uygulanabilir.

Çizelge 5. 1 $\alpha = 0.01$ için $u(x,t)$ çözümlerinin Haddadpour'un çalışması ile karşılaştırılması

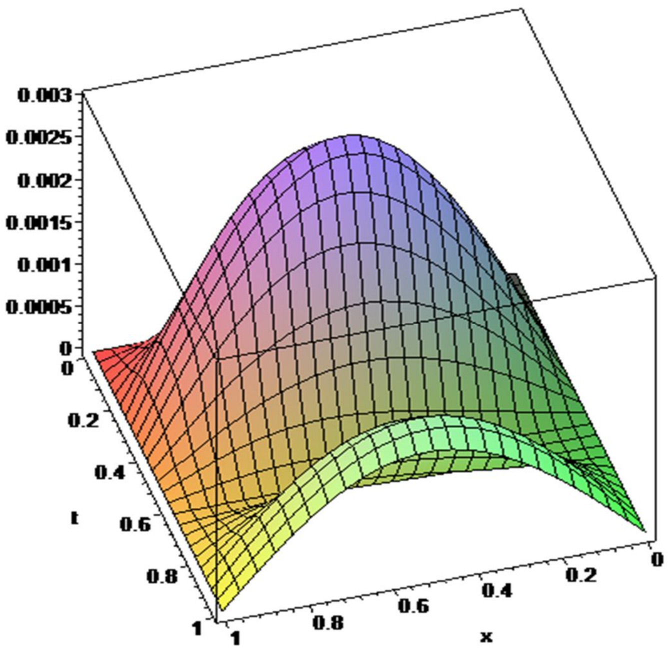
	$t = 0.25$		$t = 0.75$	
x	Haddadpour [22]	Yiğit	Haddadpour [22]	Yiğit
0	0	0	0	0
0.1	-0.0743	-0.0751	0.0415	0.0476
0.2	-0.1452	-0.1420	0.0795	0.0913
0.3	-0.1987	-0.1941	0.1105	0.1269
0.4	-0.2323	-0.2279	0.1309	0.1503
0.5	-0.2438	-0.2386	0.1380	0.1584
0.6	-0.2323	-0.2280	0.1309	0.1498
0.7	-0.1987	-0.1956	0.1105	0.1264
0.8	-0.1452	-0.1435	0.0795	0.0908
0.9	-0.0767	-0.0761	0.0415	0.0473
1.0	0	0	0	0

Çizelge 5. 2 Farklı α değerleri için problemin özdeğerleri

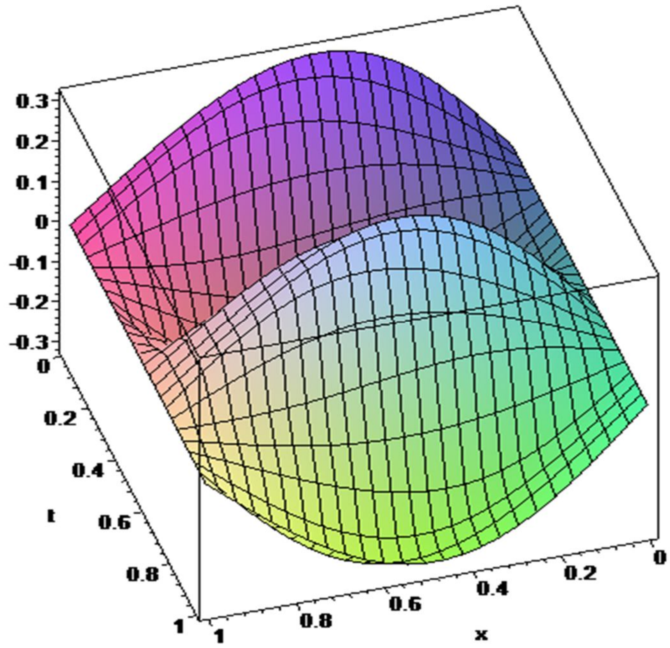
α değerleri	Özdeğerler		
	β_1	β_2	β_3
$\alpha = 0.01$	3.14160	6.28319	9.42478
$\alpha = 0.5$	3.13773	6.28350	9.42669
$\alpha = 1.0$	3.12617	6.29050	9.43242
$\alpha = 2.0$	3.08139	6.31869	9.45543



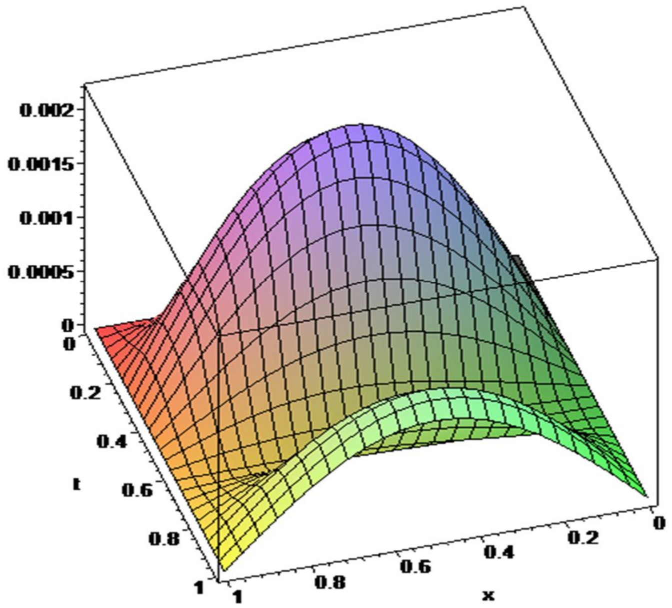
Şekil 5. 1 $\alpha = 0.01$ için homojen, $u(x,t)$, kısmın çözümü



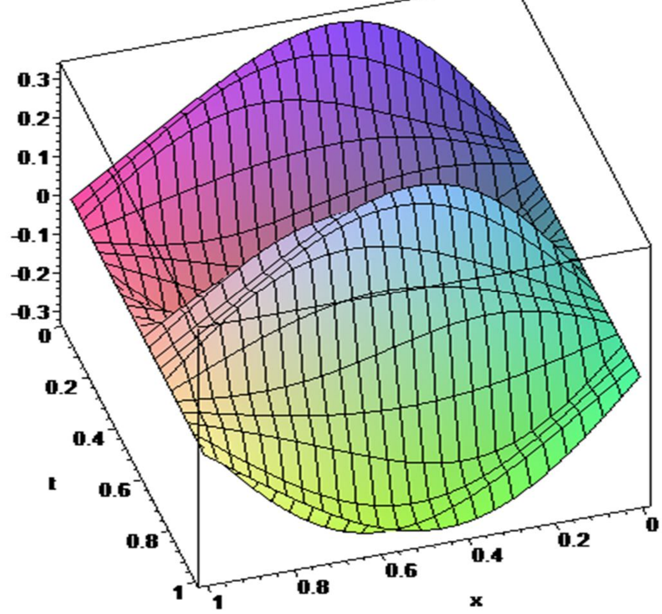
Şekil 5. 2 $\alpha = 0.01$ için homojen olmayan, $v(x,t)$, kısmın çözümü



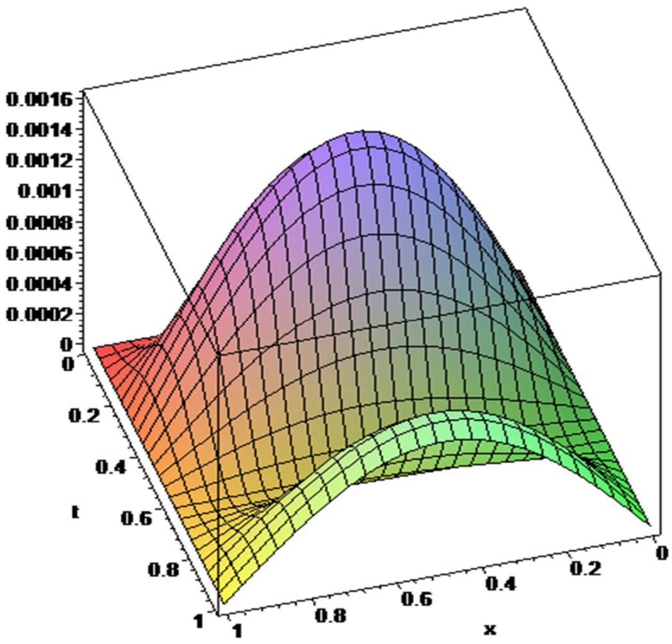
Şekil 5. 3 $\alpha = 0.5$ için homojen, $u(x,t)$, kısmın çözümü



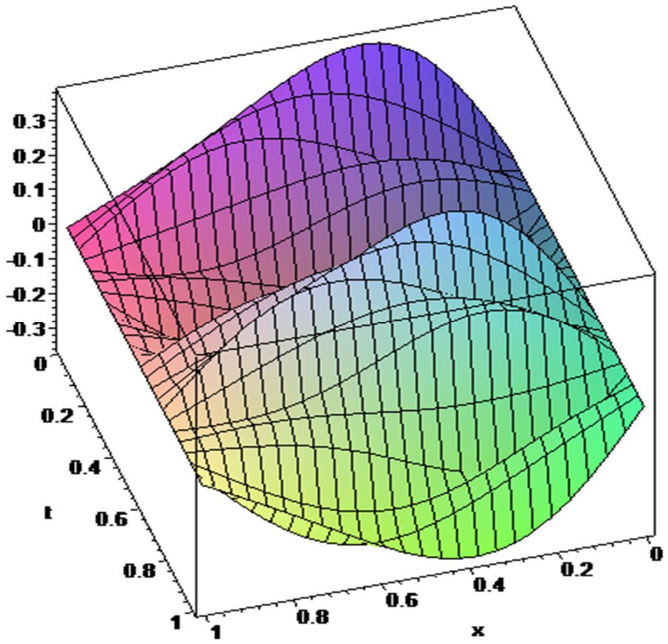
Şekil 5. 4 $\alpha = 0.5$ için homojen olmayan, $v(x,t)$, kısmın çözümü



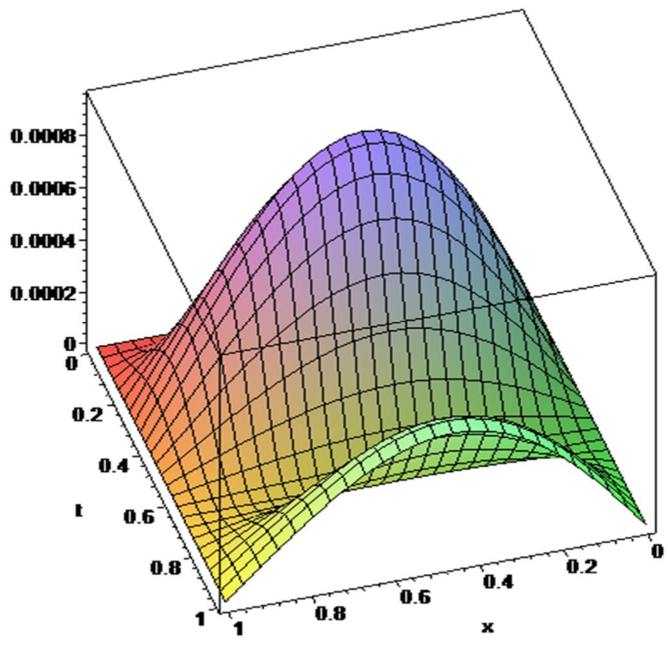
Şekil 5. 5 $\alpha = 1.0$ için homojen, $u(x,t)$, kısmın çözümü



Şekil 5. 6 $\alpha = 1.0$ için homojen olmayan, $v(x,t)$, kısmın çözümü



Şekil 5. 7 $\alpha = 2.0$ için homojen, $u(x,t)$, kısmın çözümü



Şekil 5. 8 $\alpha = 2.0$ için homojen olmayan, $v(x,t)$, kısmın çözümü

KAYNAKLAR

[1] Adomian, G., (1983). Stochastic Systems, Academic Press, London.

[2] Adomian, G., (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, London.

[3] Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (1994). "Convergence of Adomians method applied to differential equations", Comp. Math. Appl., 28: 103-109.

[4] Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (1994). "Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations", Math. Comput. Modell., 20:69-73.

[5] Cherruault, Y. ve Adomian, G., (1993). "Decomposition methods: A new proof of convergence", Math. Comput. Modell., 18:103-106.

[6] El-Kalla, I.L., (2008) "Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations", Appl. Math. Lett., 21:372-376.

[7] Wazwaz, A.M., (1999). "A reliable modification of Adomian decomposition method", Apply. Math. Comput., 102:72-86.

[8] Wazwaz, A.M., (1998). "A comparison between Adomian decomposition and Taylor series solutions", Apply. Math. and Comput., 97:37-44.

[9] Abassy, T.A., (2010). "Improved Adomian Decomposition Method", Comput. Math. Apply., 59:42-54.

[10] Babolian, E., Biazar, J. ve Vahidi, A.R., (2004). "On the decomposition method for system of linear Volterra integral equations", Appl. Math. Comput., 147:19-27.

[11] Babolian, E., Biazar, J. ve Vahidi, A.R., (2004). "Solution of system of nonlinear equations by Adomian decomposition method", Appl. Math. Comput., 150:847-854.

[12] Pourdavish, A., (2006) "A Reliable Symbolic Implemtation Of Algortihm For Calculating Adomian Polynomials", Appl. Math. And Comput. 172:545-550.

[13] Zhu, Y., Chang, Q. ve Wu, S., (2005) "A New Algorithm For Calculating Adomian Polynomials", Appl. Math. And Comput. 169:402-416.

[14] Luo, X., (2005) "A Two Step Decomposition Method" , Appl. Math. Comput., 170:570-583.

[15] Meirovitch, L., (2001). Fundamentals of Vibrations, International Edition, McGraw-Hill, Blacklick, OH, U.S.A.

[16] Weaver, W. ve Timoshenko, S.P., Young D.H., (1990). Vibration Problems in Engineering, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc.

[17] Thomson, W., (1981). Theory of Vibration with Applications, Second Edition, Taiwan.

[18] Gere, J. ve Timoshenko, P., (2009). Mechanics of Meterials, Second Edition, Cengage Learning, Canada.

[19] Register, A.H., (1994). "A note on the vibrations of generally restrained, end-loaded beams", Journal of Sound and Vibration, 172 (4):561-571.

[20] Wang, J.T.S. ve Lin, C.C., (1996). "Dynamic analysis of generally supported beams using Fourier series", Journal of Sound and Vibration 196 (3):285-293.

[21] Reddy J.N., 1993, An Introduction To Finite Element Method, Mc-Graw Hill İnternational Editions.

[22] Haddadpour, H., (2006). "An exact solution for variable coefficients fourth-order wave equation using the Adomian method", Math. And Comput. Modelling, 44:1144-1152.

[23] Şahin, Y., (2006). Kompozit Malzemelere Giriş, Seçkin Yay., Ankara.

[24] Shen, H.S., (2009). Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells, CRC Press, New york.

[25] Hirai, T., (1996). "Functional gradient material", in Processing of Ceramic, Mater. Sci.Technol., 293-341.

[26] Mortensen, A. ve Suresh, S., (1995). "Functionally graded metals and metal ceramic composites: Part I 'Processing' ", Int. Mater. Rev., 40:239-265.

[27] Mortensen, A. ve Suresh, S., (1998). Fundamentals of functionally graded materials, IOM Communications Ltd., London.

[28] Sankar, B. V. ve Tzeng, J.T., (2002). "Thermal Stresses in Functionally Graded Beams", AIAA Journal, 40:1228-1232.

[29] Ootao, Y. ve Tanigawa, Y., (2004). "Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply", Compos. Struct., 63:139-146.

[30] Li, Y., Ramesh K.T. ve Chin, E.S.C., (2001). "Dynamic characterization of layered and graded structures under impulsive loading", International Journal of Solids and Structures, 38:6045-6061.

[31] Berezovski, A., Engelbrech, J. ve Maugin, G.A.,(2003). "Numerical solution of two dimensional wave prophagation in functionally graded materials", European Journal Mechanics, 22:257-265.

[32] Beer, P., Johnston J., Dewolf, J. ve Mazurek, D., (2009) Mechanics of Metarials Mc-Graw Hill, Fifth Edition, New York.

[33] Silva, W.de Clarence., (2000), Vibration: Fundementals and Practice., CRC Press, Boca, Raton, London, New York, Washinghton, D.C.

[34] Wazwaz, A.M., (2002). Partial Diffential Equations, A.A.Belkema Publishers, Tokyo.

EK-A

KİRİŞ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İŞLEM BASAMAKLARI

Homojen kiriş probleminin çözümü Bölüm 4'de ele alınmıştır. Bu kısımda Maple sembolik programlama dili kullanılarak elde edilen çözümün ara basamakları verilecektir.

$$\phi^{IV} + 2\alpha\phi''' + \alpha^2\phi'' - \frac{\lambda}{\varepsilon}\phi = 0$$

Denklemi ile verilen problemin genel çözümü $\lambda / \varepsilon = \beta^4$ olmak üzere;

```
dsolve(diff(u(x),x$4)+2*alpha*diff(u(x),x$3)+alpha^2*diff(u(x),x$2)-beta^4*u(x)=0);
```

$$u(x) = \_C1\, e^{\left(\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}\right)x\right)} + \_C2\, e^{\left(\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}\right)x\right)} + \_C3\, e^{\left(\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta^2}}{2}\right)x\right)} + \_C4\, e^{\left(\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta^2}}{2}\right)x\right)}$$

şeklinde bulunur. Burada,

```
>eta:=sqrt(4*beta^2+alpha^2);
> xi  :=sqrt(4*beta^2-alpha^2);
```

$$\eta := \sqrt{1+4\beta^2}$$

$$\xi := \sqrt{4\beta^2-1}$$

verilen değerlerin denklemde yazılmasıyla ;

```
> phi0:=unapply(exp(-alpha/2*x)*(C1*cosh(eta*x/2)+C2*sinh(eta*x/2)+C3*cos(xi*x/2)+C4*sin(xi*x/2)),x,alpha,eta,xi);
```

$$\phi 0 := (x, \alpha, \eta, \xi) \rightarrow e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \left(C1 \cosh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right) + C2 \sinh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right) + C3 \cos\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right) + C4 \sin\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right)\right)$$

elde edilir. Bulunan denklemin ikinci türevi hesaplansın.

```
>phi2:=unapply(collect(diff(phi0(x,alpha,eta,xi),x$2),[C1,C2,C3,C4]),x,alpha,eta,xi);
```

$$\phi 2 := (x, \alpha, \eta, \xi) \rightarrow \Bigg(\left(\frac{1}{4}\alpha^2 e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \cosh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right) - \frac{1}{2}\alpha\, e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \sinh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right)\eta + \frac{1}{4} e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \cosh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right)\eta^2\right) C1 + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \sinh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right) - \frac{1}{2}\alpha\, e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \cosh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right)\eta + \frac{1}{4} e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \sinh\left(\frac{1}{2}\eta\,x\right)\eta^2\right) C2 + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \cos\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right) + \frac{1}{2}\alpha\, e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \sin\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right)\xi - \frac{1}{4} e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \cos\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right)\xi^2\right) C3 + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \sin\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right) - \frac{1}{2}\alpha\, e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \cos\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right)\xi - \frac{1}{4} e^{(-1/2\,\alpha\,x)} \sin\left(\frac{1}{2}\xi\,x\right)\xi^2\right) C4$$

Sınır Şartları yerine koyma;

```
> Eq1:=phi0(0,alpha,eta,xi);
> Eq2:=phi2(0,alpha,eta,xi);
> Eq3:=simplify(exp(1/2*alpha*l)*phi0(l,alpha,eta,xi));
>Eq4:=collect(simplify(exp(1/2*alpha*l)*phi2(l,alpha,eta,xi)),[C1,C2,C3,C4]);
```

$$Eq1 := C1 + C3$$

$$Eq2 := \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\eta^2}{4}\right) C1 - \frac{\alpha\,\eta\,C2}{2} + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\xi^2}{4}\right) C3 - \frac{\alpha\,\xi\,C4}{2}$$

$$Eq3 := C1 \cosh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right) + C2 \sinh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right) + C3 \cos\left(\frac{\xi\,l}{2}\right) + C4 \sin\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)$$

$$Eq4 := \left(\frac{1}{4}\alpha^2 \cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha \sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta + \frac{1}{4}\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta^2\right) C1$$
$$+ \left(\frac{1}{4}\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 \sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha \cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta\right) C2$$
$$+ \left(\frac{1}{4}\alpha^2 \cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right) + \frac{1}{2}\alpha \sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi^2\right) C3$$
$$+ \left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 \sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha \cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi\right) C4$$

```
> C11:=solve((1/4*alpha^2+1/4*eta^2)*C1-
1/2*alpha*eta*C2+(1/4*alpha^2-1/4*xi^2)*(-C1)-
1/2*alpha*xi*C4=0,C1);
```

```
> C33:=-C11;
```

$$C11 := \frac{2\,\alpha\,(\eta\, C2 + \xi\, C4)}{\eta^2 + \xi^2}$$

$$C33 := -\frac{2\,\alpha\,(\eta\, C2 + \xi\, C4)}{\eta^2 + \xi^2}$$

c_1 ve c_3 katsayılarının c_2 ve c_4 cinsinden yazılması ile elde edilen denklem sistemi;

```
> Eqx1:=collect(subs({C1=C11,C3=C33},Eq3),[C2,C4]);` `;
```

```
> Eqx2:=collect(subs({C1=C11,C3=C33},Eq4),[C2,C4]);` `;
```

$$Eqx1 := \left(\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right) - \frac{2\,\alpha\,\eta\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2} + \frac{2\,\alpha\,\eta\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2}\right) C2$$
$$+ \left(\frac{2\,\alpha\,\xi\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2} + \sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right) - \frac{2\,\alpha\,\xi\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2}\right) C4$$

$$Eqx2 := \left(\frac{1}{4}\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta\right.$$
$$- \frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right) + \frac{1}{2}\alpha\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi^2\right)\alpha\,\eta}{\eta^2+\xi^2}$$
$$\left.+ \frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right) - \frac{1}{2}\alpha\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta + \frac{1}{4}\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta^2\right)\alpha\,\eta}{\eta^2+\xi^2}\right) C2 + \Bigg($$

$$\frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)-\frac{1}{2}\alpha\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta+\frac{1}{4}\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta^2\right)\alpha\,\xi}{\eta^2+\xi^2}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi^2$$
$$+\frac{1}{4}\alpha^2\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)-\frac{1}{2}\alpha\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi$$
$$\left.-\frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)+\frac{1}{2}\alpha\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi^2\right)\alpha\,\xi}{\eta^2+\xi^2}\right)C4$$

Bulunan denklem sisteminin matris formda yazılması;

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> KK:=Matrix([[sinh(1/2*eta*l)-
2*alpha*eta/(eta^2+xi^2)*cos(1/2*xi*l)+2*alpha*eta/(eta^2+x
i^2)*cosh(1/2*eta*l),2*alpha*xi/(eta^2+xi^2)*cosh(1/2*eta*l
)+sin(1/2*xi*l)-2*alpha*xi/(eta^2+xi^2)*cos(1/2*xi*l)],
[1/4*sinh(1/2*eta*l)*eta^2+1/4*alpha^2*sinh(1/2*eta*l)-
1/2*alpha*cosh(1/2*eta*l)*eta-
2*(1/4*alpha^2*cos(1/2*xi*l)+1/2*alpha*sin(1/2*xi*l)*xi-
1/4*cos(1/2*xi*l)*xi^2)*alpha*eta/(eta^2+xi^2)+2*(1/4*alpha
^2*cosh(1/2*eta*l)-
1/2*alpha*sinh(1/2*eta*l)*eta+1/4*cosh(1/2*eta*l)*eta^2)*al
pha*eta/(eta^2+xi^2),2*(1/4*alpha^2*cosh(1/2*eta*l)-
1/2*alpha*sinh(1/2*eta*l)*eta+1/4*cosh(1/2*eta*l)*eta^2)*al
pha*xi/(eta^2+xi^2)-
1/4*sin(1/2*xi*l)*xi^2+1/4*alpha^2*sin(1/2*xi*l)-
1/2*alpha*cos(1/2*xi*l)*xi-
2*(1/4*alpha^2*cos(1/2*xi*l)+1/2*alpha*sin(1/2*xi*l)*xi-
1/4*cos(1/2*xi*l)*xi^2)*alpha*xi/(eta^2+xi^2)]]);
```

$KK :=$

$$\left[\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)-\frac{2\,\alpha\,\eta\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2}+\frac{2\,\alpha\,\eta\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2},\right.$$
$$\left.\frac{2\,\alpha\,\xi\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2}+\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)-\frac{2\,\alpha\,\xi\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)}{\eta^2+\xi^2}\right]$$
$$\left[\frac{1}{4}\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta^2+\frac{1}{4}\alpha^2\sinh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)-\frac{1}{2}\alpha\cosh\left(\frac{\eta\, l}{2}\right)\eta\right.$$
$$-\frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)+\frac{1}{2}\alpha\sin\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\xi\, l}{2}\right)\xi^2\right)\alpha\,\eta}{\eta^2+\xi^2}$$

$$+\frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cosh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right)-\frac{1}{2}\alpha\sinh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right)\eta+\frac{1}{4}\cosh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right)\eta^2\right)\alpha\,\eta}{\eta^2+\xi^2},$$

$$\frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cosh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right)-\frac{1}{2}\alpha\sinh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right)\eta+\frac{1}{4}\cosh\left(\frac{\eta\,l}{2}\right)\eta^2\right)\alpha\,\xi}{\eta^2+\xi^2}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)\xi^2$$

$$+\frac{1}{4}\alpha^2\sin\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)-\frac{1}{2}\alpha\cos\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)\xi$$

$$\left.-\frac{2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\cos\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)+\frac{1}{2}\alpha\sin\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)\xi-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\xi\,l}{2}\right)\xi^2\right)\alpha\,\xi}{\eta^2+\xi^2}\right]$$

şeklinde hesaplanır. $\alpha=1$ için elde edilen değerler;

```
> alpha:=1; l:=1;
> eta:=sqrt(4*beta^2+alpha^2);
> xi :=sqrt(4*beta^2-alpha^2);
```

$$\alpha := 1$$
$$l := 1$$
$$\eta := \sqrt{1+4\,\beta^2}$$
$$\xi := \sqrt{4\,\beta^2-1}$$

```
> dd:=Determinant(KK);
```

$$dd := -\frac{1}{8}\Bigg(16\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)\beta^4\sin\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)$$
$$+\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)^2\sqrt{4\,\beta^2-1}\,\sqrt{1+4\,\beta^2}-2\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)$$
$$-\sqrt{1+4\,\beta^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)^2\sqrt{4\,\beta^2-1}-\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)^2\sqrt{1+4\,\beta^2}\,\sqrt{4\,\beta^2-1}$$
$$-\sin\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)^2\sqrt{1+4\,\beta^2}\,\sqrt{4\,\beta^2-1}$$
$$+2\sqrt{1+4\,\beta^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)\sqrt{4\,\beta^2-1}\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)\Bigg)\Big/\beta^2$$

```
> ee:=collect(simplify(dd),sin);
```

$$ee := -\frac{1}{4}\,\frac{\left(8\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)\beta^4-\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)}{\beta^2}$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{-\sqrt{4\,\beta^2-1}\,\sqrt{1+4\,\beta^2}+\sqrt{1+4\,\beta^2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{4\,\beta^2-1}}{2}\right)\sqrt{4\,\beta^2-1}\,\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\,\beta^2}}{2}\right)}{\beta^2}$$

Böylece, ee denklemini sıfır yapan β değerleri aranan çözümün özdeğerlerini verir.

KİRİŞ PROBLEMİNİN GENEL ÇÖZÜMÜNE AİT SAYISAL DEĞERLER

Bu kısımda, Maple sembolik programlama dili yardımıyla elde edilen genel çözüm ve çözüme ait grafiklerin bulunmasında kullanılan sayısal değerler verilecektir.

$\alpha = 1$ için elde edilen değerler;

```
> Rphi:=exp(-alpha/2*x)*(C1*cosh(eta*x/2)+C2*sinh(eta*x/2)+C3*cos(xi*x/2)+C4*sin(xi*x/2));
```

$$Rphi := e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\left(C1\cosh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}\,x}{2}\right)+C2\sinh\left(\frac{\sqrt{1+4\beta^2}\,x}{2}\right)+C3\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}\,x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta^2-1}\,x}{2}\right)\right)$$

```
> SonFi1:=simplify(subs(beta=3.12616544,Rphi));
```

$$SonFi1 := 0.2000000000\ 10^{-9}\ e^{(-0.5000000000\,x)}\,(0.667903495\ 10^{9}\cosh(3.165898034\,x) - 0.750146197\ 10^{9}\sinh(3.165898034\,x) - 0.667903495\ 10^{9}\cos(3.085921314\,x) + 0.5000000000\ 10^{10}\sin(3.085921314\,x))$$

```
> SonFi2:=simplify(subs(beta=6.2904980,Rphi));
```

$$SonFi2 := 0.2000000000\ 10^{-10}\ e^{(-0.5000000000\,x)}\,(0.3670266912\ 10^{10}\cosh(6.310337955\,x) - 0.3654663263\ 10^{10}\sinh(6.310337955\,x) - 0.3670266912\ 10^{10}\cos(6.270595275\,x) + 0.5000000000\ 10^{11}\sin(6.270595275\,x))$$

```
> SonFi3:=simplify(subs(beta=9.4324187169,Rphi));
```

$$SonFi3 := 0.5000000000\ 10^{-10}\ e^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.1005308639\ 10^{10} \cosh(9.445661590\ x) - 0.1005485320\ 10^{10} \sinh(9.445661590\ x) - 0.1005308639\ 10^{10} \cos(9.419157225\ x) + 0.2000000000\ 10^{11} \sin(9.419157225\ x))$$

```
> N1t:=int(SonFi1*x^2*exp(-2*x-t),x=0..1);N2t:=int(SonFi2*x^2*exp(-2*x-t),x=0..1);N3t:=int(SonFi3*x^2*exp(-2*x-t),x=0..1);
```

$$N1t := -0.05726552924 \sinh(t) + 0.05726552924 \cosh(t) + 0.01831137288\ e^{(-1.\ t)} + 0.3115870667\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)} + 0.03542158898 \sinh(5.665898034 + t) - 0.03096222306 \cosh(-0.6658980340 + t) - 0.03542158898 \cosh(5.665898034 + t) + 0.03096222306 \sinh(-0.6658980340 + t)$$

$$N2t := -0.002292788547\ e^{(-1.\ t)} - 0.0002085767874 \sinh(t) + 0.0002085767874 \cosh(t) - 0.1634352728\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)} - 0.00002509736086 \sinh(-3.810337955 + t) + 0.01041556736 \sinh(8.810337955 + t) + 0.00002509736086 \cosh(-3.810337955 + t) - 0.01041556736 \cosh(8.810337955 + t)$$

$$N3t := -0.001462569799\ e^{(-1.\ t)} + 0.00005900666130 \cosh(t) - 0.00005900666130 \sinh(t) + 0.1076876012\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)} - 0.4791859412\ 10^{-6} \cosh(-6.945661590 + t) - 0.004971748663 \cosh(11.94566159 + t) + 0.4791859412\ 10^{-6} \sinh(-6.945661590 + t) + 0.004971748663 \sinh(11.94566159 + t)$$

```
> v1(x,t):=(SonFi1/(3.12616544^2))*int(N1t*sin((3.12616544^2)*(t-tou)),tou=0..t);
```

$$v1(x, t) := 0.2046473288\ 10^{-10}\ e^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.667903495\ 10^{9} \cosh(3.165898034\ x) - 0.750146197\ 10^{9} \sinh(3.165898034\ x) - 0.667903495\ 10^{9} \cos(3.085921314\ x) + 0.5000000000\ 10^{10} \sin(3.085921314\ x))\ (0.005859618797 \cos(9.772910358\ t) \sinh(t) - 0.005859618797 \cos(9.772910358\ t) \cosh(t) - 0.001873686774 \cos(9.772910358\ t)\ e^{(-1.\ t)} - 0.03188273045 \cos(9.772910358\ t)\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)} - 0.003624466784 \cos(9.772910358\ t) \sinh(5.665898034 + t)$$

$$+ 0.003168168122 \cos(9.772910358\ t)\cosh(-0.6658980340 + t)$$
$$+ 0.003624466784 \cos(9.772910358\ t)\cosh(5.665898034 + t)$$
$$- 0.003168168122 \cos(9.772910358\ t)\sinh(-0.6658980340 + t)$$
$$- 0.005859618797 \sinh(t) + 0.005859618797 \cosh(t) + 0.001873686774\ e^{(-1.\ t)}$$
$$+ 0.03188273045\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)} + 0.003624466784 \sinh(5.665898034 + t)$$
$$- 0.003168168122 \cosh(-0.6658980340 + t)$$
$$- 0.003624466784 \cosh(5.665898034 + t)$$
$$+ 0.003168168122 \sinh(-0.6658980340 + t))$$

```
> v2(x,t):=(SonFi2/(6.2904980^2))*int(N2t*sin((6.2904980^2)*(t-tou)),tou=0..t);
```

$$v2(x,t) := 0.5054287458\ 10^{-12}\ e^{(-0.5000000000 x)} ($$
$$0.3670266912\ 10^{10} \cosh(6.310337955\ x)$$
$$- 0.3654663263\ 10^{10} \sinh(6.310337955\ x)$$
$$- 0.3670266912\ 10^{10} \cos(6.270595275\ x)$$
$$+ 0.5000000000\ 10^{11} \sin(6.270595275\ x)) ($$
$$0.00005794206199 \cos(39.57036509\ t)\ e^{(-1.\ t)}$$
$$+ 0.5271035203\ 10^{-5} \cos(39.57036509\ t)\sinh(t)$$
$$- 0.5271035203\ 10^{-5} \cos(39.57036509\ t)\cosh(t)$$
$$+ 0.004130244248 \cos(39.57036509\ t)\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)}$$
$$+ 0.6342463812\ 10^{-6} \cos(39.57036509\ t)\sinh(-3.810337955 + t)$$
$$- 0.0002632163574 \cos(39.57036509\ t)\sinh(8.810337955 + t)$$
$$- 0.6342463812\ 10^{-6} \cos(39.57036509\ t)\cosh(-3.810337955 + t)$$
$$+ 0.0002632163574 \cos(39.57036509\ t)\cosh(8.810337955 + t)$$
$$- 0.00005794206199\ e^{(-1.\ t)} - 0.5271035203\ 10^{-5} \sinh(t)$$
$$+ 0.5271035203\ 10^{-5} \cosh(t) - 0.004130244248\ e^{(-2.500000000 - 1.\ t)}$$
$$- 0.6342463812\ 10^{-6} \sinh(-3.810337955 + t)$$
$$+ 0.0002632163574 \sinh(8.810337955 + t)$$
$$+ 0.6342463812\ 10^{-6} \cosh(-3.810337955 + t)$$
$$- 0.0002632163574 \cosh(8.810337955 + t))$$

```
>v3(x,t):=(SonFi3/(9.4324187169^2))*int(N3t*sin((9.4324187169^2)*(t-tou)),tou=0..t);
```

$$v3(x,t) := 0.5619838840\ 10^{-12}\ e^{(-0.5000000000\,x)}\ ($$
$$0.1005308639\ 10^{10} \cosh(9.445661590\ x)$$
$$- 0.1005485320\ 10^{10} \sinh(9.445661590\ x)$$
$$- 0.1005308639\ 10^{10} \cos(9.419157225\ x)$$
$$+ 0.2000000000\ 10^{11} \sin(9.419157225\ x))\ ($$
$$0.00001643881313\ \cos(88.97052285\ t)\ e^{(-1.\,t)}$$
$$- 0.6632158541\ 10^{-6} \cos(88.97052285\ t) \cosh(t)$$
$$+ 0.6632158541\ 10^{-6} \cos(88.97052285\ t) \sinh(t)$$
$$- 0.001210373928\ \cos(88.97052285\ t)\ e^{(-2.500000000 - 1.\,t)}$$
$$+ 0.5385895529\ 10^{-8} \cos(88.97052285\ t) \cosh(-6.945661590\ + t)$$
$$+ 0.00005588085249\ \cos(88.97052285\ t) \cosh(11.94566159\ + t)$$
$$- 0.5385895529\ 10^{-8} \cos(88.97052285\ t) \sinh(-6.945661590\ + t)$$
$$- 0.00005588085249\ \cos(88.97052285\ t) \sinh(11.94566159\ + t)$$
$$- 0.00001643881313\ e^{(-1.\,t)} + 0.6632158541\ 10^{-6} \cosh(t)$$
$$- 0.6632158541\ 10^{-6} \sinh(t) + 0.001210373928\ e^{(-2.500000000 - 1.\,t)}$$
$$- 0.5385895529\ 10^{-8} \cosh(-6.945661590\ + t)$$
$$- 0.00005588085249\ \cosh(11.94566159\ + t)$$
$$+ 0.5385895529\ 10^{-8} \sinh(-6.945661590\ + t)$$
$$+ 0.00005588085249\ \sinh(11.94566159\ + t))$$

```
> vn:=v1(x,t)+v2(x,t)+v3(x,t);
```

$$vn := 0.2046473288\ 10^{-10}\ e^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.667903495\ 10^{9} \cosh(3.165898034\ x)$$
$$- 0.750146197\ 10^{9} \sinh(3.165898034\ x) - 0.667903495\ 10^{9} \cos(3.085921314\ x)$$
$$+ 0.5000000000\ 10^{10} \sin(3.085921314\ x))\ ($$
$$0.005859618797\ \cos(9.772910358\ t) \sinh(t)$$
$$- 0.005859618797\ \cos(9.772910358\ t) \cosh(t)$$
$$- 0.001873686774\ \cos(9.772910358\ t)\ e^{(-1.\,t)}$$
$$- 0.03188273045\ \cos(9.772910358\ t)\ e^{(-2.500000000 - 1.\,t)}$$
$$- 0.003624466784\ \cos(9.772910358\ t) \sinh(5.665898034\ + t)$$
$$+ 0.003168168122\ \cos(9.772910358\ t) \cosh(-0.6658980340\ + t)$$
$$+ 0.003624466784\ \cos(9.772910358\ t) \cosh(5.665898034\ + t)$$
$$- 0.003168168122\ \cos(9.772910358\ t) \sinh(-0.6658980340\ + t)$$
$$- 0.005859618797\ \sinh(t) + 0.005859618797\ \cosh(t) + 0.001873686774\ e^{(-1.\,t)}$$
$$+ 0.03188273045\ e^{(-2.500000000 - 1.\,t)} + 0.003624466784\ \sinh(5.665898034\ + t)$$
$$- 0.003168168122\ \cosh(-0.6658980340\ + t)$$
$$- 0.003624466784\ \cosh(5.665898034\ + t)$$
$$+ 0.003168168122\ \sinh(-0.6658980340\ + t)) + 0.5054287458\ 10^{-12}$$

$$e^{(-0.5000000000\,x)}\,(0.3670266912\ 10^{10}\cosh(6.310337955\ x)$$
$$-0.3654663263\ 10^{10}\sinh(6.310337955\ x)$$
$$-0.3670266912\ 10^{10}\cos(6.270595275\ x)$$
$$+0.5000000000\ 10^{11}\sin(6.270595275\ x))\,($$
$$0.00005794206199\ \cos(39.57036509\ t)\,e^{(-1.\,t)}$$
$$+0.5271035203\ 10^{-5}\cos(39.57036509\ t)\sinh(t)$$
$$-0.5271035203\ 10^{-5}\cos(39.57036509\ t)\cosh(t)$$
$$+0.004130244248\ \cos(39.57036509\ t)\,e^{(-2.500000000-1.\,t)}$$
$$+0.6342463812\ 10^{-6}\cos(39.57036509\ t)\sinh(-3.810337955\ +t)$$
$$-0.0002632163574\ \cos(39.57036509\ t)\sinh(8.810337955\ +t)$$
$$-0.6342463812\ 10^{-6}\cos(39.57036509\ t)\cosh(-3.810337955\ +t)$$
$$+0.0002632163574\ \cos(39.57036509\ t)\cosh(8.810337955\ +t)$$
$$-0.00005794206199\ e^{(-1.\,t)}-0.5271035203\ 10^{-5}\sinh(t)$$
$$+0.5271035203\ 10^{-5}\cosh(t)-0.004130244248\ e^{(-2.500000000-1.\,t)}$$
$$-0.6342463812\ 10^{-6}\sinh(-3.810337955\ +t)$$
$$+0.0002632163574\ \sinh(8.810337955\ +t)$$
$$+0.6342463812\ 10^{-6}\cosh(-3.810337955\ +t)$$
$$-0.0002632163574\ \cosh(8.810337955\ +t))+0.5619838840\ 10^{-12}\,e^{(-0.5000000000\,x)}$$
$$(0.1005308639\ 10^{10}\cosh(9.445661590\ x)$$
$$-0.1005485320\ 10^{10}\sinh(9.445661590\ x)$$
$$-0.1005308639\ 10^{10}\cos(9.419157225\ x)$$
$$+0.2000000000\ 10^{11}\sin(9.419157225\ x))\,($$
$$0.00001643881313\ \cos(88.97052285\ t)\,e^{(-1.\,t)}$$
$$-0.6632158541\ 10^{-6}\cos(88.97052285\ t)\cosh(t)$$
$$+0.6632158541\ 10^{-6}\cos(88.97052285\ t)\sinh(t)$$
$$-0.001210373928\ \cos(88.97052285\ t)\,e^{(-2.500000000-1.\,t)}$$
$$+0.5385895529\ 10^{-8}\cos(88.97052285\ t)\cosh(-6.945661590\ +t)$$
$$+0.00005588085249\ \cos(88.97052285\ t)\cosh(11.94566159\ +t)$$
$$-0.5385895529\ 10^{-8}\cos(88.97052285\ t)\sinh(-6.945661590\ +t)$$
$$-0.00005588085249\ \cos(88.97052285\ t)\sinh(11.94566159\ +t)$$
$$-0.00001643881313\ e^{(-1.\,t)}+0.6632158541\ 10^{-6}\cosh(t)$$
$$-0.6632158541\ 10^{-6}\sinh(t)+0.001210373928\ e^{(-2.500000000-1.\,t)}$$
$$-0.5385895529\ 10^{-8}\cosh(-6.945661590\ +t)$$
$$-0.00005588085249\ \cosh(11.94566159\ +t)$$
$$+0.5385895529\ 10^{-8}\sinh(-6.945661590\ +t)$$
$$+0.00005588085249\ \sinh(11.94566159\ +t))$$

```
> wn(x,t):=un+vn;
```

$$\mathrm{wn}(x,t) := 0.2409756052\ 10^{-10}\ \mathrm{e}^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.667903495\ 10^{9} \cosh(3.165898034\ x) - 0.750146197\ 10^{9} \sinh(3.165898034\ x) - 0.667903495\ 10^{9} \cos(3.085921314\ x) + 0.5000000000\ 10^{10} \sin(3.085921314\ x))\cos(9.772910358\ t) +$$

$$0.3534369006\ 10^{-12}\ \mathrm{e}^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.3670266912\ 10^{10} \cosh(6.310337955\ x) - 0.3654663263\ 10^{10} \sinh(6.310337955\ x) - 0.3670266912\ 10^{10} \cos(6.270595275\ x) + 0.5000000000\ 10^{11} \sin(6.270595275\ x))\cos(39.57036509\ t) +$$

$$0.6885599495\ 10^{-13}\ \mathrm{e}^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.1005308639\ 10^{10} \cosh(9.445661590\ x) - 0.1005485320\ 10^{10} \sinh(9.445661590\ x) - 0.1005308639\ 10^{10} \cos(9.419157225\ x) + 0.2000000000\ 10^{11} \sin(9.419157225\ x))\cos(88.97052285\ t) +$$

$$0.2046473288\ 10^{-10}\ \mathrm{e}^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.667903495\ 10^{9} \cosh(3.165898034\ x) - 0.750146197\ 10^{9} \sinh(3.165898034\ x) - 0.667903495\ 10^{9} \cos(3.085921314\ x) + 0.5000000000\ 10^{10} \sin(3.085921314\ x))\ ($$
$$0.005859618797\ \cos(9.772910358\ t)\sinh(t) - 0.005859618797\ \cos(9.772910358\ t)\cosh(t) - 0.001873686774\ \cos(9.772910358\ t)\,\mathrm{e}^{(-1.\,t)} - 0.03188273045\ \cos(9.772910358\ t)\,\mathrm{e}^{(-2.500000000-1.\,t)} - 0.003624466784\ \cos(9.772910358\ t)\sinh(5.665898034+t) + 0.003168168122\ \cos(9.772910358\ t)\cosh(-0.6658980340+t) + 0.003624466784\ \cos(9.772910358\ t)\cosh(5.665898034+t) - 0.003168168122\ \cos(9.772910358\ t)\sinh(-0.6658980340+t) - 0.005859618797\ \sinh(t) + 0.005859618797\ \cosh(t) + 0.001873686774\ \mathrm{e}^{(-1.\,t)} + 0.03188273045\ \mathrm{e}^{(-2.500000000-1.\,t)} + 0.003624466784\ \sinh(5.665898034+t) - 0.003168168122\ \cosh(-0.6658980340+t) - 0.003624466784\ \cosh(5.665898034+t) + 0.003168168122\ \sinh(-0.6658980340+t)) + 0.5054287458\ 10^{-12}$$

$$\mathrm{e}^{(-0.5000000000\,x)}\ (0.3670266912\ 10^{10} \cosh(6.310337955\ x) - 0.3654663263\ 10^{10} \sinh(6.310337955\ x) - 0.3670266912\ 10^{10} \cos(6.270595275\ x) + 0.5000000000\ 10^{11} \sin(6.270595275\ x))\ ($$
$$0.00005794206199\ \cos(39.57036509\ t)\,\mathrm{e}^{(-1.\,t)} + 0.5271035203\ 10^{-5} \cos(39.57036509\ t)\sinh(t) - 0.5271035203\ 10^{-5} \cos(39.57036509\ t)\cosh(t) + 0.004130244248\ \cos(39.57036509\ t)\,\mathrm{e}^{(-2.500000000-1.\,t)} + 0.6342463812\ 10^{-6} \cos(39.57036509\ t)\sinh(-3.810337955+t)$$

$$
\begin{aligned}
&- 0.0002632163574\ \cos(39.57036509\ t)\sinh(8.810337955\ + t)\\
&- 0.6342463812\ 10^{-6}\cos(39.57036509\ t)\cosh(-3.810337955\ + t)\\
&+ 0.0002632163574\ \cos(39.57036509\ t)\cosh(8.810337955\ + t)\\
&- 0.00005794206199\ \mathrm{e}^{(-1.\ t)} - 0.5271035203\ 10^{-5}\sinh(t)\\
&+ 0.5271035203\ 10^{-5}\cosh(t) - 0.004130244248\ \mathrm{e}^{(-2.500000000 - 1.\ t)}\\
&- 0.6342463812\ 10^{-6}\sinh(-3.810337955\ + t)\\
&+ 0.0002632163574\ \sinh(8.810337955\ + t)\\
&+ 0.6342463812\ 10^{-6}\cosh(-3.810337955\ + t)\\
&- 0.0002632163574\ \cosh(8.810337955\ + t)) + 0.5619838840\ 10^{-12}\,\mathrm{e}^{(-0.5000000000\, x)}\\
&(0.1005308639\ 10^{10}\cosh(9.445661590\ x)\\
&- 0.1005485320\ 10^{10}\sinh(9.445661590\ x)\\
&- 0.1005308639\ 10^{10}\cos(9.419157225\ x)\\
&+ 0.2000000000\ 10^{11}\sin(9.419157225\ x))\ (\\
&0.00001643881313\ \cos(88.97052285\ t)\,\mathrm{e}^{(-1.\ t)}\\
&- 0.6632158541\ 10^{-6}\cos(88.97052285\ t)\cosh(t)\\
&+ 0.6632158541\ 10^{-6}\cos(88.97052285\ t)\sinh(t)\\
&- 0.001210373928\ \cos(88.97052285\ t)\,\mathrm{e}^{(-2.500000000 - 1.\ t)}\\
&+ 0.5385895529\ 10^{-8}\cos(88.97052285\ t)\cosh(-6.945661590\ + t)\\
&+ 0.00005588085249\ \cos(88.97052285\ t)\cosh(11.94566159\ + t)\\
&- 0.5385895529\ 10^{-8}\cos(88.97052285\ t)\sinh(-6.945661590\ + t)\\
&- 0.00005588085249\ \cos(88.97052285\ t)\sinh(11.94566159\ + t)\\
&- 0.00001643881313\ \mathrm{e}^{(-1.\ t)} + 0.6632158541\ 10^{-6}\cosh(t)\\
&- 0.6632158541\ 10^{-6}\sinh(t) + 0.001210373928\ \mathrm{e}^{(-2.500000000 - 1.\ t)}\\
&- 0.5385895529\ 10^{-8}\cosh(-6.945661590\ + t)\\
&- 0.00005588085249\ \cosh(11.94566159\ + t)\\
&+ 0.5385895529\ 10^{-8}\sinh(-6.945661590\ + t)\\
&+ 0.00005588085249\ \sinh(11.94566159\ + t))
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Gülsemay YİĞİT
Doğum Tarihi ve Yeri	: 21/09/1987, İSTANBUL
Yabancı Dili	: İNGİLİZCE
E-posta	: gulsemay.yigit@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Yedikule Lisesi	2005