

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİLBERT UZAYINDA KENDİNE EŞ KOMPAKT
OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

106284

İsmail GÜLTEN

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu

Prof. Dr. Akın Taşdizen

Prof. Dr. Mustafa Sivri

İSTANBUL, 2001

106284

İM KURULU
MÜHÜRLEME MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Ön Bilgiler.....	1
2. KENDİNE EŞ KOMPAKT OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ.....	5
2.1 Sonsuz Boyutlu Bir Genelleme Örneği.....	6
2.2 Özdeğerler ve Özvektörlerin Varlık Problemi.....	7
2.3 Sonlu Boyutlu Operatörlerin Özdeğerler ve Özvektörleri.....	9
2.4 Özdeğerlerin Varlık Teoremi.....	10
2.5 Spektral Teorem.....	14
2.6 Özdeğerler ve Özvektörlerin Taban Sistemleri.....	16
2.7 Spektral Teoremin İkinci Biçimi.....	20
2.8 Ters Operatörler İçin Formül.....	21
2.9 Özdeğerlerin Minimum-maksimum Özellikleri.....	24
3. HILBERT-SCHMİDT TEOREMİ.....	27
3.1 Hilbert-Schmidt Teoremi.....	27
3.2 Mercer Teoremi İçin Ön bilgi.....	31
3.2.1 DINI Teoremi.....	32
3.3 Mercer Teoremi.....	33
3.4 İntegral Operatörü İçin İz Formülü.....	36
4. STURM-LIOUVILLE SİSTEMİ.....	40
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	46

ÖNSÖZ

Tezimi yöneten ve yüksek lisans öğrenimim süresince değerli bilgi ve yardımlarıyla her zaman destek olan sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu 'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezin yazımında emeği geçen eşim Öğr.Gör.Dr. Dilek Çağırğan Gülten 'e manevi katkılarından dolayı teşekkür ederim.



ÖZET

Tez çalışmasında Hilbert Uzayında dönüşüm yapan kendine eş kompakt operatörlerin spektral özellikleri incelenmiş ve soyut sonuçların regular Sturm-Liouville problemine uygulanması gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hilbert Uzayı, sınırlı lineer operatör, kompakt operatör, özdeğer, spektrum.



ABSTRACT

In the thesis spectral properties of compact self adjoint operators which transforms in Hilbert space are investigated and applications of abstract results to the regular Sturm-Liouville problem are shown.

Keywords: Hilbert space, bounded linear operator, compact operator, eigenvalue, spectrum



1. GİRİŞ

Sonsuz sayıda cebirsel denklemler sisteminin, çok sayıda kısmi türevli diferansiyel denklemler ve matematiksel fiziğin denklemleri için sınır değer probleminin incelenmesi, Hilbert uzayında dönüşüm yapan kompakt (tam sürekli) operatörlerin spektral incelenmesine indirgenir. Bundan dolayı kendine eş kompakt operatörlerin incelenmesi çok sayıda kitaplarda ve makalelerde yer almıştır. Bu konuya ait Weidmann (1980), Stakgold (1999), Edmunds ve Evans (1987), Gohberg ve Goldberg (1981), Kreyszig (1978) kitaplarını gösterebiliriz. Bu tez çalışmasında Hilbert uzayında dönüşüm yapan kendine eş kompakt operatörlerin özvektörlerinin tam ortonormal baz oluşturduğu, Hilbert-Schmidt tipli integral operatörlerin özvektörlerinin özellikleri, özdeğerler için minimax prensipleri elde alınmıştır. Bunun yanı sıra soyut teoremin regular Sturm-Liouville diferansiyel denklemlerine uygulanması gösterilmiştir.

1.1. Ön Bilgiler

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız esas terimlerin tanımlarını verelim.

Hilbert Uzayında Sınırlı Lineer Operatörler

H_1, H_2 Hilbert uzayları olmak üzere H_1 'i H_2 'ye dönüştüren sınırlı lineer operatörler kümesini $L(H_1, H_2)$ ile gösterelim. Bilindiği gibi $L(H_1, H_2)$ kümesi iki operatörün toplamı ve skalar ile çarpım işlemlerine göre lineer uzay oluşturur (Weidman, 1980).

$A : H_1 \rightarrow H_2$ lineer operatör olmak üzere,

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty$$

ise A sınırlı olup A 'nın normu

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ile verilir. Eğer $A \in L(H_1, H_2)$ operatörünün normunu

$$\|A\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$$

formülü ile tanımlarsak $L(H_1, H_2)$ bir Banach uzayı oluşturur.

Kendine Eş Operatör

$A \in L(H_1, H_2)$ olsun. Her bir $y \in H_2$ için $f_y(x) = \langle Ax, y \rangle$ sınırlı lineer fonksiyoneldir. Riesz teoremine göre her $x \in H_1$ için

$$\langle Ax, y \rangle = f_y(x) = \langle x, y^* \rangle$$

olacak şekilde tek bir $y^* \in H_1$ vardır. Bu, $A^* : H_2 \rightarrow H_1$, $A^*y = y^*$ ile tanımlı bir operatör verir. Böylelikle her $x \in H_1$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

A^* operatörüne A 'nın eşleniği denir.

Bir $A \in L(H)$ operatörü, $A^* = A$ ise kendine eş adımı alır (Gohberg ve Goldberg, 1981; Kreyszig, 1978).

Sonlu Boyutlu Operatör

$A \in L(H_1, H_2)$ 'nin boyutu $\text{Im } A$ olup, $AH_1 = \{Ax : x \in H_1\}$ alt uzayıdır. Eğer $\text{Im } A$ sonlu boyutlu ise A , sonlu boyutlu operatör adımı alır ve A 'nın boyutu $\dim \text{Im } A$ dır (Gohberg ve Goldberg, 1981).

Kompakt Operatör

$\{x_n\} \in H_1$, $\|x_n\| = 1$ dizisi için $\{Kx_n\}$ dizisi H_2 'de yakınsak olan bir alt diziye sahipse $K \in L(H_1, H_2)$ operatörüne kompakt operatör denir.

Teorem: $\{K_n\}$, $L(H_1, H_2)$ 'de kompakt operatörlerin bir dizisi ve $K \in L(H_1, H_2)$ olmak üzere $\|K_n - K\| \rightarrow 0$ olsun. O zaman K kompakttır (Gohberg ve Goldberg, 1981).

Örnekler

1. $\{\lambda_k\}$, C 'de sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. $K \in L(l_2)$,

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n, 0, 0, \dots)$$

ile tanımlı operatör olsun. K_n sonlu ranklıdır ve bu nedenle kompakttır. Buradan,

$$\|K_n - K\| \leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olup yukarıdaki teoremden K kompakttır.

2. l_2 'de sınırlı lineer operatör sonsuz matrislerle aşağıdaki gibi verilsin:

$$(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

$A: l_2 \rightarrow l_2$, $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ ile tanımlansın. Burada,

$$(a_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \alpha_j.$$

A 'nın kompakt olduğunu gösterelim. $A_n \in L(l_2)$, $n=1,2,\dots$ operatörüne karşılık gelen matris $(a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{\infty}$, $a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ ve diğer hallerde $a_{ij}^{(n)} = 0$ olsun. A_n sonlu boyutlu olup kompakttır (Kreyszig, 1978; Gohberg ve Goldberg, 1981). Bununla birlikte, $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ olup, buradan A kompakttır.

Sınırlı Lineer Operatörün Matris Temsili

Kompakt kendine eş operatörün matris temsili de verileceğinden genel olarak sınırlı lineer operatörün matris temsili verilecektir.

Bir ayrılabilir Hilbert uzayı üzerinde verilen bir lineer operatör ile bir matrisin ilişkisi gösterilecektir (Weidmann, 1980; Gohberg ve Goldberg, 1981).

$H; \varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormal tabanlı bir Hilbert uzayı olmak üzere $A \in L(H)$ olsun. O zaman her $x \in H$ için $x = \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j$. A 'nın lineer ve sürekli olmasından aşağıdakiler alınır:

$$Ax = \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle A\varphi_j \quad (1.1)$$

$$A\varphi_j = \sum_k \langle A\varphi_j, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad (1.2)$$

(1.1) ve (1.2) 'den

$$Ax = \sum_j \sum_k \langle x, \varphi_j \rangle \langle A\varphi_j, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_k \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle \langle A\varphi_j, \varphi_k \rangle \varphi_k. \quad (1.3)$$

Buradan, eğer $Ax = y$ ise (1.3) ten

$$\begin{pmatrix} \langle A\varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle A\varphi_2, \varphi_1 \rangle & \dots \\ \langle A\varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle A\varphi_2, \varphi_2 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x, \varphi_1 \rangle \\ \langle x, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, \varphi_1 \rangle \\ \langle y, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Bu matris denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım: $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ H Hilbert uzayı için bir taban ve $A \in L(H)$ olsun. A 'ya ve $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ye uygun (a_{ij}) matrisi

$$a_{ij} = \langle A\varphi_j, \varphi_i \rangle$$

ile tanımlanır.

2.KENDİNE EŞ KOMPAKT OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu esas kısımda kendine eş kompakt operatörlerin ve özel olarak Hilbert-Schmidt operatörünün spektral analizi verilecektir. Bununla beraber bu teori Sturm-Liouville problemine uygulanacaktır.

Lineer cebirde aşağıdaki şekilde ifade edilen ve spektral açılım denilen sonuç bellidir:

H sonlu boyutlu Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ kendine eş operatör olsun. Bu takdirde,

$$A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

olacak şekilde $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H$ ortonormal tabanı ve $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reel sayıları vardır (Edmunds ve Evans, 1987).

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, H nın tabanı kabul edilirse bu tabanda A operatörünün $(a_{ij}) = (\langle A\varphi_j, \varphi_i \rangle)$ matrisi karşılık gelir ve bu matris

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

şeklinde diagonal matristir.

A kendine eş ve H sonsuz boyutlu olduğunda da bu durumun genelleştirilebileceği spektral teoremin doğal bir sorusudur. Bu,

$$A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad 1 \leq i$$

olacak şekilde $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in H$ ortonormal tabanı ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sayılarının var olması demektir.

Bunun anlamı da $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ taban olmak üzere A ya karşılık gelen matris sonsuz boyutlu diagonal matristir.

2.1 Sonsuz Boyutlu Bir Genelleme Örneği

h , sürekli, kompleks değerli 2π periyotlu bir fonksiyon olsun. K operatörü $L_2[-\pi, \pi]$ 'de

$$(Kf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t-s) f(s) ds$$

ile tanımlanmış sınırlı lineer operatör olsun. $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n = 0, \pm 1, \dots$ $L_2[-\pi, \pi]$ için ortonormal taban olmak üzere h nin periyodikliği ve φ_n 'den

$$\begin{aligned} (K\varphi_n)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} h(t-s) \varphi_n(s) ds = \int_{t-\pi}^{t+\pi} h(s) \varphi_n(t-s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \int_{-\pi}^{\pi} h(s) e^{-ins} ds = \lambda_n \varphi_n(t) \end{aligned}$$

olup, burada

$$\lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} h(s) e^{-ins} ds, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

K operatörü ve $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 'e karşılık gelen matris iki kat sonsuz boyutlu diagonal matristir:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_{-2} & & & 0 \\ & & \lambda_{-1} & & \\ & & & \lambda_0 & \\ 0 & & & & \lambda_1 \\ & & & & & \lambda_2 \dots \end{pmatrix}$$

2.2 Özdeğerler ve Özvektörlerin Varlık Problemi

Tanım: Eğer $A\varphi = \lambda\varphi$ olacak şekilde H 'da bir $\varphi \neq 0$ varsa, λ kompleks sayısına $A \in L(H)$ 'ın *özdeğeri* denir. φ vektörüne, A ' λ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* denir.

Örnek:

$$k(t,s) = \begin{cases} 1, & s \leq t \\ -1, & s > t \end{cases}$$

olmak üzere *ik* çekirdek fonksiyonuyla $H = L_2[0,1]$ 'de K integral operatörü tanımlansın.

$K \in L(H)$ olup, K 'nın özdeğer ve özvektörlerini bulmak için, $\varphi \neq 0$ olduğu ve

$$(K\varphi)(t) = i \int_0^t \varphi(s) ds - i \int_t^1 \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t) \quad (2.1)$$

gözönüne alınmakla (2.1) 'in her iki tarafının diferansiyeli alınırsa,

$$2i\varphi(t) = \lambda \varphi'(t). \quad (2.2)$$

Buradan, $\lambda = 0$ K 'nın bir özdeğeri değildir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise, (2.2) 'den

$$\varphi(t) = c e^{\frac{2i}{\lambda}t}, \quad c \neq 0 \quad (2.3)$$

(2.3) her t için geçerli olsun. O zaman (2.1),

$$0 = \varphi(0) + \varphi(1) = c \left(1 + e^{\frac{2i}{\lambda}}\right), \quad c \neq 0$$

olduğunu ifade eder. Buradan,

$$\frac{2}{\lambda} = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Adımları değiştirerek,

$$\lambda_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

'in K 'nın özdeğerleri olduğu ve $e^{i(2k+1)\pi}$ nin λ_k ya karşılık gelen özvektörler olduğu çıkar.

C üzerindeki sonlu boyutlu bir Hilbert uzayındaki her bir lineer operatör esas bir özdeğere sahiptir. Bununla birlikte, sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında kendine eş bir operatör bir özdeğere sahip olmayabilir (Gohberg ve Goldberg, 1981).

Örneğin; $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$,

$$(Af)(t) = tf(t)$$

ile tanımlı operatör olsun. A , kendine eş lineer sınırlı operatördür. Bununla birlikte, A bir özdeğere sahip değildir; $A\varphi = \lambda\varphi$ için

$$(t - \lambda)\varphi(t) = 0$$

olup $\varphi(t) = 0$; bunun anlamı $\varphi = 0$, $L_2[a, b]$ 'deki bir vektör gibi alınabilir.

Aşağıdaki sonuçlar doğrudur:

(a) Kendine eş bir operatörün her bir özdeğeri reeldir. A kendine eş ve $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ olsun.

O zaman,

$$\lambda \|x\|^2 = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

olup $\lambda = \bar{\lambda}$ olur.

(b) Kendine eş bir operatörün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler ortogonaldır.

Gerçekten; A kendine eş ve

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y, \quad y \neq 0$$

olsun. O zaman, μ reeldir ve

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Buradan, $\lambda \neq \mu$ iken, $\langle x, y \rangle = 0$ olur.

(c) λ , $A \in L(H)$ 'a ait bir özdeğer ise $|\lambda| < \|A\|$ dır. Eğer $Ax = \lambda x$ ise,

$$\|A\| \|x\| \geq \|Ax\| = |\lambda| \|x\|. \text{ Buradan, } |\lambda| < \|A\|.$$

2.3 Sonlu Boyutlu Operatörlerin Özdeğer ve Özvektörleri

$K \in L(H)$ sonlu boyutlu operatör olsun:

$$Kx = \sum_{j=1}^n \langle x, \varphi_j \rangle \psi_j$$

K 'nın özdeğerleri ve özvektörleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

x özvektör olmak üzere $\lambda \neq 0$, K 'nın bir özdeğeri olsun. O zaman,

$$\lambda x - \sum_{j=1}^n \langle x, \varphi_j \rangle \psi_j = 0 \quad (2.4)$$

ve

$$\lambda \langle x, \varphi_k \rangle - \sum_{j=1}^n \langle x, \varphi_j \rangle \langle \psi_j, \varphi_k \rangle = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.5)$$

(2.4)'ten bazı j ler için $\langle x, \varphi_j \rangle \neq 0$ olup $x \neq 0$ olur. Böylelikle $\{\langle x, \varphi_j \rangle\}_{j=1}^n$,

$$\lambda c_k - \sum_{j=1}^n \langle \psi_j, \varphi_k \rangle c_j = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.6)$$

denklemler sistemine ait bir non-trivial çözümdür. Bu nedenle, Cramer kuralından

$$\det(\lambda \delta_{jk} - \langle \psi_j, \varphi_k \rangle) = 0. \quad (2.7)$$

Tersine olarak; eğer (2.7) geçerli ise o zaman (2.6) koşulunu sağlayan ve bütün hepsi sıfır olmayan $c_1, \dots, c_n$ vardır. (2.4) kullanılarak, $x = \frac{1}{\lambda} \sum c_j \psi_j$ olur ve $Kx = \lambda x$ alınır.

Özetlenirse; ancak ve ancak

$$\det(\lambda \delta_{jk} - \langle \psi_j, \varphi_k \rangle) = 0$$

ise $\lambda \neq 0$ K 'nın bir özdeğeridir ve ancak ve ancak $x, \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j$ biçiminde sıfır olmayan vektör ise λ ya karşılık gelen bir özvektördür; burada

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle - \lambda & \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle - \lambda & \dots & \langle \psi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_1, \varphi_n \rangle & \langle \psi_2, \varphi_n \rangle & \dots & \langle \psi_n, \varphi_n \rangle - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eğer $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ lineer bağımsız ise K 'nın tanımından açıktır ki: x özvektör olmak üzere ancak ve ancak $x \neq 0$ ve $x \perp \varphi_j$, $1 \leq j \leq n$ ise K 'nın bir özdeğeri sıfırdır (Gohberg ve Goldberg, 1981)..

2.4 Özdeğerlerin Varlık Teoremi

Bu kısımda her bir kendine eş kompakt operatörün bir özdeğere sahip olduğu gösterilecektir.

Teorem 2.4.1: $A \in L(H)$ kendine eş ise o zaman

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

İspat: $m = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$ olsun. O zaman $\|x\|=1$ için

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \leq \|A\|$$

olup, $m \leq \|A\|$. $m \geq \|A\|$ 'yı ispatlamak için ; x ve y H 'da keyfi vektörler olsun. O zaman,

$$\langle A(x \pm y), x \pm y \rangle = \langle Ax, x \rangle \pm 2\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, y \rangle$$

olup buradan,

$$4\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle = \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle.$$

m nin tanımı ve paralelkenar eşitliğiyle aşağıdaki alınır:

$$4\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle \leq m (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2m (\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (2.8)$$

Keyfi θ reel sayısı için $\langle Ax, y \rangle = |\langle Ax, y \rangle| e^{i\theta}$ olsun. (2.8) 'de x yerine $e^{-i\theta} x$ yazılırsa,

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \frac{m}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (2.9)$$

elde edilir. $Ax \neq 0$ olsun. (2.9) 'da $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} Ax$ yazılırsa,

$$\|Ax\| \|x\| \leq m \|x\|^2$$

alınır. Buradan, her bir $x \in H$ için $\|Ax\| \leq m \|x\|$ ve $\|A\| \leq m$ bulunur.

Lemma 2.4.2: Eğer $A \in L(H)$ ve her $x \in H$ için $\langle Ax, x \rangle = 0$ ise $A=0$ dır.

Teorem 2.4.3: A kendine eş operatör olsun.

$$\lambda = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

olsun. Eğer $\|x_0\| = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in H$ varsa ve

$$\lambda = \langle Ax_0, x_0 \rangle$$

ise λ, A 'nın x_0 özvektörüne karşılık gelen bir özdeğeridir.

İspat: Her bir $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $v \in H$ için λ 'nın tanımından

$$\langle A(x_0 + \alpha v), x_0 + \alpha v \rangle \geq \lambda \langle x_0 + \alpha v, x_0 + \alpha v \rangle$$

çıkar. İç çarpım açılır ve $\lambda = \langle Ax_0, x_0 \rangle$ yazılırsa,

$$2\operatorname{Re} \alpha \langle v, (A - \lambda)x_0 \rangle + |\alpha|^2 \langle (A - \lambda)v, v \rangle \geq 0$$

eşitsizliği bulunur. r keyfi reel sayı olmak üzere $\alpha = r \overline{\langle v, (A - \lambda)x_0 \rangle}$ alındığında eşitsizlik her α için geçer

$$\langle v, (A - \lambda)x_0 \rangle = 0$$

ise sağlanır. v keyfi olduğundan $Ax_0 - \lambda x_0 = 0$.

Teorem 2.4.4: $A \in L(H)$ kompakt ve kendine eş olsun. O zaman, $\|A\|$ ya da $-\|A\|$ en az sayılarından biri A 'nın bir özdeğeridir.

İspat: $A=0$ ise teorem aşıkardır. $A \neq 0$ farzedilsin. Teorem 2.4.1 den H 'da bir $\{x_n\}$, $\|x_n\|=1$ dizisi vardır ve $|\lambda| = \|A\| \neq 0$ ve $\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ olacak şekilde bir λ reel

sayısı vardır. λ 'nın A 'nın bir özdeğeri olduğunu ispatlamak için önce aşağıdakileri not edelim:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n \rangle + \lambda^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Böylelikle,

$$Ax_n - \lambda x_n \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

A kompakt olduğundan, $\{Ax_n\}$ 'in keyfi $y \in H$ 'ye yakınsayan bir $\{Ax_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

Dolayısıyla (2.10) dan, $x_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda} y$ olur ve A sürekli olduğundan

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = \frac{1}{\lambda} Ay.$$

Buradan $Ay = \lambda y$ ve $y \neq 0$ olup, $\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| = \|A\|$. Böylelikle λ , A 'nın bir özdeğeridir.

Lemma 2.4.5: Eğer $A \in L(H)$ kompakt ve kendine eş ise o zaman $\max_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$ vardır ve $\|A\|$ ya eşittir.

İspat: Teorem 2.4.4 ten $|\lambda| = \|A\|$ olacak şekilde A 'nın bir λ özdeğeri vardır. φ , $\|\varphi\| = 1$ olmak üzere λ ya karşılık gelen bir özvektör olsun. O zaman $\|x\| = 1$ için,

$$|\langle A\varphi, \varphi \rangle| = |\lambda| = \|A\| \geq |\langle Ax, x \rangle|.$$

Bir kompakt operatör, eğer kendine eş değilse bir özdeğere sahip olması gerekmez (Gohberg ve Goldberg, 1981; Weidmann, 1980).

Örnek: $K : L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$,

$$(Kf)(t) = \int_0^t f(s) ds$$

ile tanımlanmış olsun. $k(t,s) = 1$, $0 \leq s \leq t$ olmak üzere

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds$$

olsun. K kompaktır. Bununla birlikte K bir özdeğere sahip değildir. Eğer $K\varphi = \lambda\varphi$ ise o zaman

$$\int_0^t \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t). \quad (2.11)$$

$L_2[0,1]$ karesi integrale edilebilir fonksiyonlar sınıfı olup (2.11) hemen her yerde gerçekleşir.

$$\varphi(t) = \lambda \varphi'(t), \quad \varphi(0) = 0$$

olup, $\varphi = 0$ olduğunda da gerçekleşir.

2.5 Spektral Teorem

Bu kısımda kendine eş kompakt operatörlere ait spektral teoremin ispatı verilecektir.

Teorem 2.5.1: $A \in H$ kendine eş kompakt operatör olsun. Her $x \in H$ için,

$$Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

olacak şekilde, A ya ait özvektörlerin bir $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormal sistemi ve bunlara karşılık gelen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerleri vardır. Eğer $\{\lambda_k\}$ sonsuz dizi ise bu dizi sıfıra yakınsar.

Teoremden açıktır ki eğer $\{\varphi_k\}$, H için bir ortonormal taban ise A 'ya karşılık gelen diagonal matristir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

İspat: $H_1 = H$ ve $A_1 = A$ olsun. Teorem 2.4.4 ten, A_1 in bir λ_1 özdeğeri vardır ve buna karşılık gelen $\|\varphi_1\| = 1$ olmak üzere bir φ_1 özvektörü vardır ve $|\lambda_1| = \|A_1\|$. $H_2 = \{\varphi_1\}^\perp$, H_1 in kapalı alt uzayıdır ve $AH_2 \subset H_2$. A_2 , A 'nın H_2 ye kısıtlaması olsun. O zaman A_2 , $L(H_2)$ 'de kendine eş kompakt operatördür. Eğer $A_2 \neq 0$ ise, A_2 nin bir λ_2 özdeğeri vardır ve $\|\varphi_2\| = 1$ olan uygun bir φ_2 özvektörü vardır ve

$$|\lambda_2| = \|A_2\| \leq \|A_1\| = |\lambda_1|.$$

Açıktır ki $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ortonormaldir. Şimdi, $H_3 = \{\varphi_1, \varphi_2\}^\perp$, H 'nin kapalı bir alt uzayıdır, $H_3 \subset H_2$ ve $AH_3 \subset H_3$. A_3 , A 'nın H_3 'e kısıtlaması olursa A_3 , $L(H_3)$ 'te kompakt kendine eş operatör olur. Bu düşüncenin devamıyla; ya $A_n = 0$ olduğunda işlem durur ya da A 'nın $\{\lambda_n\}$ özdeğerler dizisini ve buna karşılık gelen özvektörlerin $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ortonormal dizisini elde ederiz; burada

$$|\lambda_{n+1}| = \|A_{n+1}\| \leq \|A_n\| = |\lambda_n|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Eğer $\{\lambda_n\}$ sonsuz bir dizi ise $\lambda_n \rightarrow 0$. Fakat bu, farzedilen durum değildir. $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ den dolayı bütün n ler için $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Buradan, $n \neq m$ için

$$\|A\varphi_n - A\varphi_m\|^2 = \|\lambda_n\varphi_n - \lambda_m\varphi_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 > \varepsilon.$$

Fakat A 'nın kompaktlığı nedeniyle $\{A\varphi_n\}$ yakınsak bir alt diziye sahip olduğundan bu olanaksızdır.

Şimdi teoremden iddia edildiği gibi A 'nın ifadesi gösterilebilir. $x \in H$ verilmiş olsun.

Durum 1. Keyfi n için $A_n = 0$.

$x_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$, φ_i , $1 \leq i \leq n$ 'ye ortogonal olduğundan $x_n \in H_n$ dir. Buradan,

$$0 = A_n x_n = Ax - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Durum 2. Her n için $A_n \neq 0$.

Durum 1 'den görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} \left\| Ax - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| &= \|A_n x_n\| \leq \|A_n\| \|x_n\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n\| \leq |\lambda_n| \|x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olup

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

2.6. Özdeğer ve Özvektörlerin Taban Sistemleri

Aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım: $A \in L(H)$ 'nin sıfır olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormal sistemi, her $x \in H$ için

$$Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad (2.12)$$

ise A 'nın özvektörlerinin *taban sistemi* adını alır.

Sıfır olmayan keyfi kendine eş kompakt operatör için özdeğerlerin ve özvektörlerin bir tabanın varlığı spektral teorem ile verilir (Edmunds ve Evans, 1987; Gohberg ve Goldberg, 1981).

Aşağıdaki (a)-(d) incelemeleri $\{\lambda_n\}$ özdeğerlerine ve $\{\varphi_n\}$ özvektörlerinin bir taban sistemine sahip olan kendine eş kompakt A operatörüyle ilişkilidir.

(a) $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistemi $\overline{\text{Im } A} = \ker A^\perp$ için bir ortonormal tabandır ve her bir $x \in H$ için

$$x = P_0 + \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (2.13)$$

olup burada P_0 , $\ker A$ içine ortogonal projeksiyondur. ($\ker A = \{x : Ax = 0\}$ eşitliğiyle tanımlanır.)

Gerçekten, $\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n} A \varphi_n \in \text{Im } A$ (burada $\text{Im } A = \{y \in H : y = Ax\}$) olduğundan, tanımdaki

(2.12) formülü gösterir ki $\text{sp}\{\varphi_n\}, \text{Im } A$ 'da yoğundur. (Burada $\text{sp}\{\varphi_n\} = \text{span}\{\varphi_n\}$ 'i gösterir.) Kendine eş operatörler için verilen teoremden aşağıdaki geçerlidir:

$$\overline{\text{sp}\{\varphi_n\}} = \overline{\text{Im } A} = \ker A^\perp.$$

Böylelikle $\{\varphi_n\}$, $\ker A^\perp$ için bir ortonormal tabandır. Buradan, $x \in H$ verildiğinde

$$x = P_0 + v = P_0 x + \sum_k \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

olacak şekilde bir $v \in \ker A^\perp$ vardır, burada $\langle v, \varphi_k \rangle = \langle x, \varphi_k \rangle$.

Eğer A_0 , A 'nın $\overline{\text{Im } A}$ ya kısıtlaması ise A_0 'a karşılık gelen matris ve $\{\varphi_n\}$ $(\delta_{ij}\lambda_i)$ diagonal matrisidir.

(b) H , ancak ve ancak $\ker A = 0$ ise A 'nın özvektörlerine ait bir taban sisteminden meydana gelen bir ortonormal tabana sahiptir. (2.13) 'den aşağıdakiler ifade edilir:

Eğer $\ker A \neq 0$ ayrılabilir ise $\{\psi_k\}$, $\ker A$ için bir taban olur. O zaman H , A 'nın özvektörlerinden oluşan bir ortonormal tabana sahiptir, yani $\{\psi_k\} \cup \{\varphi_n\}$.

(c) Eğer $\lambda \neq 0$ A 'nın bir özdeğeri ise bazı k lar için $\lambda = \lambda_k$.

(d) Her λ_j , $\{\lambda_n\}$ dizisinde $P_j = \dim \ker(\lambda_j I - A)$ olmak üzere P_j defa tekrarlanır.

Bunu göstermek için spektral teoremden hatırlanırsa; eğer $\{\lambda_n\}$ sonsuz bir dizi ise $\lambda_n \rightarrow 0$ olup λ_j nin, $\{\lambda_n\}$ dizisinde sonlu sayıda tekrarlandığı ortaya çıkar. $\lambda_j = \lambda_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, p$ gözönüne alınsın. O zaman,

$$\ker(\lambda_j I - A) = \text{sp} \{\varphi_{n_i}\}_{i=1}^p.$$

Eğer bu durum sözkonusu değilse, o zaman $\ker(\lambda_j - A)$ 'da $v \perp \varphi_{n_i}$, $1 \leq i \leq p$ olacak şekilde bir $v \neq 0$ vardır. Fakat $k \neq n_i$, $1 \leq i \leq p$ için; v , $\lambda_j \neq \lambda_k$ dan dolayı φ_k ya ortogonal değildir. Buradan,

$$\lambda_j v = Av = \sum_k \lambda_k \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k = 0$$

olup, $\lambda_j \neq 0$ ve $v \neq 0$ dan dolayı olanaksızdır.

$\ker(\lambda_j I - A)$ nin boyutu λ_j nin katlılığı olarak adlandırılır. Yukarıdakiler gözönüne alındığında sonuçta, kendine eş kompakt bir A operatörünün özdeğerleri ve özvektörlerinin her bir taban sistemi aşağıdaki gibi alınır:

A nın sıfır olmayan özdeğerlerinin kümesi $\{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ olsun. $\ker(\mu_j I - A)$ için bir B_j tabanı seçilsin. B_j , (d) 'den dolayı sonlu bir kümedir. $\{\varphi_n\}$, $\bigcup_j B_j$ 'deki bütün vektörlerden ibaret olan bir dizi olsun. A nın farklı özdeğerlerince karşılık gelen özvektörler ortogonal olduğundan $\{\varphi_n\}$, A nın özvektörlerinin bir ortonormal cümlesidir. λ_n , A nın φ_n 'e karşılık gelen özdeğeri olsun. O zaman $\{\lambda_n\}$, A nın özdeğerleri ve $\{\varphi_n\}$, özvektörlerin bir taban sistemidir.

Spektral teoremin karşısı da doğrudur.

Teorem 2.6.1: $\{\varphi_k\}$, H 'da bir ortonormal sistem olsun ve $\{\lambda_k\}$, ya sonlu dizi ya da sıfıra yakınsayan dizi olmak üzere reel sayılı bir dizi olsun. H 'da

$$Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

ile tanımlanmış A lineer operatörü kompakt ve kendine eşittir.

İspat: $A \in L(H)$ tır. Eğer $\{\lambda_k\}$ sonlu bir dizi ise A 'nın boyutu sonludur ve bu nedenle kompakttır. $\lambda_n \rightarrow 0$ farzedilsin. $A_n \in L(H)$ kompakt operatörü,

$$A_n x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

ile tanımlansın. Buradan, $n \rightarrow \infty$ için

$$\|A - A_n\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \rightarrow 0$$

olup, A kompakttır. $x, y \in H$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Böylelikle, A kendine eşittir.

2.7. Spektral Teoremin İkinci Biçimi

Özdeğer ve özvektörlerin bir taban sistemi üzerindeki yapı, ortogonal projeksiyonun lineer kombinasyonlarının kendine eş kompakt operatöre nasıl yaklaşılabacağına ışık tutar. Bu, aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.7.1: $A \in L(H)$ kendine eş kompakt operatör olsun. $\{\mu_j\}$, A 'nın sıfır olmayan özdeğerlerinin kümesi olsun ve P_j , $\ker(\mu_j I - A)$ içine ortogonal projeksiyon olsun. O zaman,

$$(i) \quad P_j P_k \neq 0, \quad j \neq k$$

$$(ii) \quad A = \sum_j \mu_j P_j,$$

burada serinin yakınsaması $L(H)$ daki norma uygundur.

(iii) Her $x \in H$ için

$$x = P_0 x + \sum_j P_j x,$$

olup burada P_0 , $\ker A$ içine ortogonal projeksiyondur.

İspat: $\{\lambda_n\}$, A 'nın özdeğerleri ve $\{\varphi_n\}$, özvektörlerin bir taban sistemi olsun. Her bir k için $\{\varphi_n\}$ 'in bir alt kümesi $\ker(\mu_k - A)$ için bir ortonormal taban olup, φ_n , $i \leq i \leq p$ olsun. O zaman, $P_k x = \sum_{i=1}^p \langle x, \varphi_{n_i} \rangle \varphi_{n_i}$ ve (2.13) ten,

$$x = P_0 x + \sum_k P_k x \quad \text{ve} \quad Ax = \sum_k \mu_k P_k x.$$

Bu nedenle, $\ker(\mu_j - A) \perp \ker(\mu_k - A)$ olduğundan $P_j P_k \neq 0$, $j \neq k$. Sonuç olarak $\{\lambda_j\}$ sonsuz bir dizi olup, $n \rightarrow \infty$ iken

$$\left\| A - \sum_{k=1}^n \mu_k P_k \right\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \left\| Ax - \sum_{k=1}^n \mu_k P_k x \right\|^2 \leq \sup_{\|x\|=1} \sum_{j \geq n} \lambda_j^2 |\langle x, \varphi_j \rangle|^2 \leq \sup_{j \geq n} \lambda_j^2 \rightarrow 0.$$

2.8. Ters Operatörler İçin Formül

Aşağıdaki teorem her bir $y \in H$ için tek bir çözüme sahip olan $\lambda x - Kx = y$ denklemi için yeterli şartı verir.

Teorem 2.8.1: $\{\lambda_n\}$ özdeğerler ve $\{\varphi_n\}$, özvektörlerin taban sistemi olmak üzere $K, L(H)$ 'da kendine eş kompakt operatör olsun. Eğer $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq \lambda_n$ $n \geq 1$ ise $\lambda I - K$ 'nın tersi alınabilir ve

$$(\lambda I - A)^{-1} y = \frac{1}{\lambda} \left[y + \sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k \right].$$

İspat: $(\lambda I - A)x = y$ farzedilsin. O zaman,

$$\lambda x = y + Kx = y + \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad (2.14)$$

olup,

$$\lambda \langle x, \varphi_j \rangle = \langle y, \varphi_j \rangle + \lambda_j \langle x, \varphi_j \rangle$$

ya da

$$(\lambda - \lambda_j) \langle x, \varphi_j \rangle = \langle y, \varphi_j \rangle, \quad 1 \leq j. \quad (2.15)$$

Böylelikle (2.14) ve (2.15) ten

$$x = \frac{1}{\lambda} \left[y + \sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k \right]. \quad (2.16)$$

$\left\{ \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \right\}$ sınırlı olduğundan dizi yakınsaktır. Karşıt olarak; eğer x , (2.16) ile tanımlanıyorsa,

o zaman $(\lambda I - K)x = y$ gerçekleşir. O halde her bir $y \in H$ için ; $(\lambda I - K)x = y$ olacak şekilde tek bir $x \in H$ vardır ve bu x , (2.16) ile verilir. Buradan,

$$(\lambda I - K)^{-1}y = \frac{1}{\lambda}(I + K_1)y, \quad (2.17)$$

olup, burada $K_1 y = \sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k$.

$K_1 \in L(H)$ tir. Bu durumda Teorem 2.6.1 'in ispatı gösterir ki K_1 kompaktır. Burada (2.17), $\lambda I - K$ nm tersinin alınabilir olduğunu belirtir (Gohberg ve Goldberg, 1981).

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \sup \left\{ \frac{1}{|\lambda - \mu|} : \mu, K \text{ nin bir özdeğeri} \right\}.$$

H sonsuz boyutlu ise ve $K \in L(H)$ kompakt ise o zaman K tersi alınabilir değildir; diğer taraftan $I = K^{-1}K$ kompakt olacaktır.

K kompakt ve kendine eş olduğunda aşağıdaki teorem $\text{Im } K$ yı tanımlar.

Teorem 2.8.2: $\{\lambda_n\}$ özdeğerler ve $\{\varphi_n\}$, özvektörlerin taban sistemi olmak üzere $K \in L(H)$ kendine eş kompakt operatör olsun. $y \in H$ verildiğinde, ancak ve ancak

$$(i) \quad y \perp \ker K$$

ve

$$(ii) \quad \sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} |\langle y, \varphi_n \rangle|^2 < \infty$$

ise $Kx = y$ denklemi bir çözüme sahiptir.

Her bir çözüm, aşağıdaki biçimdedir:

$$x = u + \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad u \in \ker K.$$

İspat: (i) ve (ii) doğru olsun. O zaman, $x_0 = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n \in H$ tır ve (2.13) denkleminde,

$$Kx_0 = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle y, \varphi_n \rangle K\varphi_n = \sum_n \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n = y.$$

O halde $Kx = y$ olup, $u = x - x_0 \in \ker K$ ve,

$$x = u + \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Karşıt olarak, $Kx = y$ gözönüne alınsın. O zaman, $y \in \operatorname{Im} K \subset \ker K^\perp$ ve

$$\sum_n \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n = y = Kx = \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Buradan, $\langle y, \varphi_n \rangle = \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle$ ve,

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} |\langle y, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_n |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Teorem 8.1 'de bazı n ler için $\lambda = \lambda_n \neq 0$ farzedilsin. $\lambda x - Kx = y$ denklemi ancak ve ancak $y \in \ker(\lambda_n - K)^{-1}$ ise bir çözüme sahiptir. Bu durumda denklemin genel çözümü $z \in \ker(\lambda_n - K)$ olmak üzere,

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k + z$$

olur.

2.9. Özdeğerlerin Minimum-maksimum Özellikleri

Tanım: Bir $A \in L(H)$ operatörü her $x \in H$ için eğer $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ ise *non-negatif* ya da *pozitif* adını alır.

Kendine eş kompakt bir A operatörü, ancak ve ancak özdeğerleri non-negatif ise non-negatiftir. $\{\lambda_n\}$, A 'nın özdeğerleri ve $\{\varphi_n\}$, özvektörlerin taban sistemi olsun. Eğer A non-negatif ise $\lambda_k = \langle A\varphi_k, \varphi_k \rangle \geq 0$ dir. Diğer taraftan, her bir λ_k non-negatif ise 2.6.(a) 'dan

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \left\langle \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle, \\ &= \sum_k \lambda_k |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

A kompakt ve non-negatif olsun. Spektral teoremin ispatından, $\{\lambda_n\}$, A 'nın özdeğerleri ve $\{\varphi_n\}$, özvektörlerin taban sistemi olmak üzere ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \langle A\varphi_1, \varphi_1 \rangle \\ \lambda_2 &= \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \varphi_1}} \langle Ax, x \rangle = \langle A\varphi_2, \varphi_2 \rangle \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}}} \langle Ax, x \rangle = \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle \end{aligned} \tag{2.18}$$

Aşağıdaki teorem, λ_n ler (2.18) 'deki gibi tanımlandığında $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ özvektörlerini bulmanın gereksiz olduğunu gösterir (Gohberg ve Goldberg, 1981).

Teorem 2.9.1: $A \in L(H)$ kompakt ve non-negatif operatör ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, A 'nın bütün özdeğerler dizisi olsun. O zaman her bir pozitif n tamsayısı için,

$$\lambda_n = \min_{\substack{M \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in M}} \langle Ax, x \rangle.$$

İspat: $\max\{\langle Ax, x \rangle : \|x\|=1, x \perp M\}$ dir. Bunun, Lemma 2.4.5 'den $P, M^\perp$ içine ortogonal projeksiyon olmak üzere PA 'nın $M^\perp$ 'e kısıtlaması olduğu görülebilir. $n=1$ için sıfır boyutlu tek alt uzay $\{0\}$ dir. Böylelikle λ_1 için formül, $\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ 'e indirgenir.

$\{\varphi_n\}$, A 'nın $\{\lambda_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin bir taban sistemi olsun. $n-1$ boyutlu keyfi M uzayı verisin, o zaman $x_0 \perp M$ ve $\|x_0\|=1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \text{sp}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ vardır (Gohberg ve Goldberg, 1981). $x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ olsun. $\lambda_k \geq \lambda_n, 1 \leq k \leq n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Ax, x \rangle &\geq \langle Ax_0, x_0 \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2 \geq \lambda_n \|x_0\|^2 = \lambda_n \end{aligned} \quad (2.19)$$

Fakat,

$$\lambda_n = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \text{sp}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}}} \langle Ax, x \rangle. \quad (2.20)$$

M , keyfi $n-1$ boyutlu alt uzay olduğundan (2.19) ve (2.20) 'den teorem gerçekleşir.

Şimdi min-max teoreminin bazı basit uygulamaları verilecektir.

A ve $B, L(H)$ 'da kompakt non-negatif operatörler olsun. $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots$, A 'nın özdeğerleri ve $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ özvektörlerinin bir taban sistemi olsun. $\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \dots$, B 'nin özdeğerleri ve $\psi_1, \psi_2, \dots$ özvektörlerinin bir taban sistemi olsun.

(a) Her $x \in H$ için $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ ise, o zaman

$$\lambda_n(A) = \min_{\substack{M \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Ax, x \rangle \leq \min_{\substack{M \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Bx, x \rangle = \lambda_n(B).$$

$$(b) \quad |\lambda_n(A) - \lambda_n(B)| \leq \|A - B\|.$$

Bunu görmek için; eğer $\|x\| = 1$ ise, o zaman

$$| \langle Ax, x \rangle - \langle Bx, x \rangle | = | \langle (A - B)x, x \rangle | \leq \|A - B\|$$

olup buradan,

$$\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle + \|A - B\| \quad (2.21)$$

$$\langle Bx, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle + \|A - B\|. \quad (2.22)$$

(2.21), (2.22) ve Teorem 2.9.1 'den,

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B) + \|A - B\|$$

$$\lambda_n(B) \leq \lambda_n(A) + \|A - B\|$$

olup,

$$|\lambda_n(A) - \lambda_n(B)| \leq \|A - B\|.$$

O halde; eğer K_j , $j > 0$ olmak üzere $\|K_j - K_0\| \rightarrow 0$ ise $L(H)$ 'da kompakt non-negatif operatör ise o zaman K_0 da kompakt ve non-negatiftir. $\lambda_1(K_j) \geq \lambda_2(K_j) \geq \dots$, K_j , $j = 0, 1, \dots$ 'nin özdeğerlerinin taban sistemi olsun. O zaman (b) eşitsizliğinden, $\lambda_n(K_j) \rightarrow \lambda_n(K_0)$, $j \rightarrow \infty$.

(c) A ve B kompakt ve non-negatif olduğunda $A+B$ de böyledir. $\lambda_1(A+B) \geq \lambda_1(A) + \lambda_1(B) \geq \dots$, $A+B$ 'nin özdeğerlerinin taban sistemi olsun. O zaman,

$$\lambda_n(A) + \lambda_m(B) \geq \lambda_{n+m-1}(A+B).$$

Gerçekten (2.18) denkleminde,

$$\lambda_n(A) = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}} \langle Ax, x \rangle \quad (2.23)$$

$$\lambda_m(B) = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp (\psi_1, \dots, \psi_{m-1})}} \langle Bx, x \rangle. \quad (2.24)$$

$M = sp\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}$ alımsın. O zaman $j \geq 2$ için $\dim M = n + m - j$.

$M^\perp = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}^\perp \cap \{\psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}^\perp$ olduğundan (2.23), (2.24) ve Teorem 9.1 'den,

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) + \lambda_m(B) &\geq \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Ax, x \rangle + \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle Bx, x \rangle \\ &\geq \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp M}} \langle (A+B)x, x \rangle \geq \lambda_{n+m-j+1}(A+B) \\ &\dots \geq \lambda_{n+m-1}(A+B) \end{aligned}$$

3. HILBERT- SCHMIDT TEOREMİ

Bu kısımda kendine eş integral operatörlerin spektral teorisi ile ilişkili temel teoremler gösterilecektir. Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörlerin spektral teorisine ilişkin bilgiler verilecektir(Stakgold,1999; Gohberg ve Goldberg, 1981).

3.1. Hilbert-Schmidt Teoremi

$k \in L_2([a,b] \times [a,b])$ ve $\overline{k(t,s)} = k(s,t)$ ise,

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds$$

ile tanımlı K integral operatörü $L_2[a,b]$ 'de kendine eş kompakt operatördür. Dolayısıyla K 'nın $(K \neq 0)$, $\{\lambda_k\}$ özdeğerleri ve $\{\varphi_k\}$ özvektörlerinin bir taban sistemi vardır, öyle ki

$$(Kf)(t) = \sum_k \lambda_k \left(\int_a^b f(s) \overline{\varphi_k(s)} ds \right) \varphi_k(t). \quad (3.1)$$

Serinin yakınsaklığı $L_2[a, b]$ 'de norm anlamında yakınsaklıktır, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| (Kf)(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(t) \right|^2 dt = 0.$$

Teorem 3.1: $k, [a, b] \times [a, b]$ 'de Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyon olsun, öyle ki

$$\overline{k(t, s)} = k(s, t) \quad \text{ve} \quad \sup_t \int_a^b |k(t, s)|^2 ds < \infty.$$

k çekirdek fonksiyonu olmak üzere K integral operatörünün özdeğerleri $\{\lambda_n\}$ ve özvektörlerinin bir taban sistemi $\{\varphi_n\}$ olsun. O zaman her $f \in L_2[a, b]$ için

$$\int_a^b k(t, s) f(s) ds = \sum_k \lambda_k \left(\int_a^b f(s) \overline{\varphi_k(s)} ds \right) \varphi_k(t).$$

Seri, $[a, b]$ 'de düzgün ve mutlak yakınsaktır.

İspat: Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{j=m}^n |\lambda_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j(t)| \leq \left(\sum_{j=m}^n |\lambda_j \varphi_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=m}^n |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

$k_t(s) = k(t, s)$ olmak üzere,

$$\lambda_j \varphi_j(t) = (K\varphi_j)(t) = \int_a^b k(t, s) \varphi_j(s) ds = \langle k_t, \overline{\varphi_j} \rangle.$$

Bu nedenle, $k_t \in L_2[a, b]$ 'de olduğundan Bessel eşitsizliğinden ve hipotezden:

$$\begin{aligned}
\sum_j |\lambda_j \varphi_j(t)|^2 &= \sum_j |\langle k, \overline{\varphi_j} \rangle|^2 \leq \|k\|^2 \\
&= \int_a^b |k(t,s)|^2 ds \leq \sup_t \int_a^b |k(t,s)|^2 ds = C^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\sum_j |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ olup, $n > m \geq N$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır, o halde

$$\sum_{j=m}^n |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{3.4}$$

(3.2), (3.3) ve (3.4) 'ten

$$\sum_{j=m}^n |\lambda_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j(t)|^2 \leq C\varepsilon, \quad n > m \geq N, \quad t \in [a, b].$$

Buradan $\sum_j \lambda_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j(t)$, Cauchy kriterine göre $[a, b]$ 'de düzgün ve mutlak yakınsaktır. Bu seri, $L_2[a, b]$ nin norm anlamında da $(Kf)(t)$ 'ye yakınsar, buradan da bu serinin t 'ye göre hemen her yerde limitinin $(Kf)(t)$ 'ye eşit olduğu çıkar.

İntegralle toplam sembolünün yerinin değişmesine önem vermeden formal olarak aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\int_a^b k(t,s) f(s) ds &= \sum_k \int_a^b \lambda_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(s)} f(s) ds \\
&= \int_a^b \sum_k \lambda_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(s)} f(s) ds.
\end{aligned}$$

Buradan f , $L_2[a, b]$ 'de keyfi olup,

$$k(t,s) = \sum_k \lambda_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(s)}$$

yaklaşım koşulu doğrudur.

Bu sonuç; eğer k sürekli ve her bir λ_k , non-negatif ise (3.5) serisi $[a,b] \times [a,b]$ 'de $k(t,s)$ 'ye düzgün ve mutlak yakınsak olmak üzere Mercer teoreminde gösterilecektir.

Şimdi diğer kısmı ispatlayalım. 2.6.(b) 'den biliyoruz ki $L_2[a,b]$, K 'nın özvekrörlerinden ibaret olan bir $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormal tabanına sahiptir. $\varphi_i(t,s) = \varphi_i(t) \overline{\varphi_j(s)}$ olduğundan $L_2([a,b] \times [a,b])$ için ortonormal taban aşağıdaki gibi olur:

$$k = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle k, \varphi_{ij} \rangle \varphi_{ij} \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle k, \varphi_{ij} \rangle &= \int_a^b \int_a^b k(t,s) \overline{\varphi_i(t)} \varphi_j(s) ds dt \\ &= \int_a^b \overline{\varphi_i(t)} \left[\int_a^b k(t,s) \varphi_j(s) ds \right] dt \\ &= \langle K \varphi_j, \varphi_i \rangle = \lambda_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \lambda_j \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Böylelikle (3.6) ve (3.7) 'den,

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt = \|k\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\langle k, \varphi_{ij} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2$$

olup, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2: $k \in L_2([a,b] \times [a,b])$ ve $\overline{k(t,s)} = k(s,t)$ olsun. K , k çekirdek fonksiyonuyla bir integral operatör olmak üzere eğer $\{\lambda_k\}$, K 'nın özdeğerlerinin bir taban sistemi ise, o zaman

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2.$$

Eğer (a_{ij}) , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ özdeğerler olmak üzere $n \times n$ lik kendine eş bir matris ise formül benzer şekilde olur:

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Burada $k(t,s)$, $k(i,j) = a_{ij}$ ile ve integral işareti toplamla yer değiştirmiştir.

3.2 Mercer Teoremi İçin Önbilgi

Lemma 3.2.1: Eğer k , $[a,b] \times [a,b]$ 'de sürekli ise ve $f \in L_2[a,b]$ için,

$$\int_a^b \int_a^b k(t,s) f(s) \overline{f(t)} ds dt \geq 0$$

ise o zaman her $t \in [a,b]$ için

$$k(t,t) \geq 0$$

olur.

İspat: $k(t,t)$ fonksiyonu reel değerlidir. Gerçekten, k çekirdek fonksiyonlu integral operatörü pozitifdir ve kendine eştir. Buradan, $\overline{k(t,t)} = k(t,t)$.

Bazı $t_0 \in [a,b]$ ler için $k(t_0, t_0) < 0$ farzedilsin. k nın sürekliliğinden her (t,s) için (t_0, t_0) 'ı içine alan $[c,d] \times [c,d]$ karcsında $\operatorname{Re} k(t,s) < 0$ olur. Fakat $s \in [c,d]$ ise $g(s) = 1$ için

$$0 \leq \int_a^b \int_a^b k(t,s) g(s) \overline{g(t)} ds dt = \operatorname{Re} \int_c^d \int_c^d k(t,s) ds dt < 0$$

olur ki anlamsızdır. O halde her $t \in [a,b]$ için $k(t,t) \geq 0$ dır.

Lemma 3.2.2: Eğer $k, [a,b] \times [a,b]$ 'de kompleks değerli sürekli fonksiyon ise keyfi $\varphi \in L_2[a,b]$ için

$$h(t) = \int_a^b k(t,s)\varphi(s) ds,$$

$[a,b]$ 'de sürekli dir.

İspat: Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |h(t) - h(t_0)| &\leq \int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)| |\varphi(s)| ds \\ &\leq \|\varphi\| \left(\int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Son eşitsizlik, k nın $[a,b] \times [a,b]$ 'de düzgün sürekliliğiyle teoremi ispatlar (Gohberg ve Goldberg, 1981).

3.2.1. DINI Teoremi: $\{f_n\}, [a,b]$ 'de reel değerli sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $t \in [a,b]$ için $f_1(t) \leq f_2(t) \leq \dots$ ve $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$, $[a,b]$ 'de sürekli olduğu gözönüne alınsın. O zaman $\{f_n\}, [a,b]$ 'de f 'ye düzgün yakınsar.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun ve

$$F_n = \{t : f(t) - f_n(t) \geq \varepsilon\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olsun. O zaman $F_n \supset F_{n+1}$ ve $f - f_n$ sürekli olduğundan F_n kapalı bir kümedir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

olup, F_n 'in tümleyeni F_n' olmak üzere $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n'$. $[a,b]$ kapalı ve sınırlı olduğundan ve her bir F_n' açık küme olduğundan $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^N F_n'$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır.

Böylelikle,

$$F_N = \bigcap_{n=1}^N F_n = \emptyset.$$

Bu, her $n \geq N$ ve $t \in [a, b]$ için doğru olup,

$$|f(t) - f_n(t)| = f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_N(t) < \varepsilon.$$

Buradan $\{f_n\}$, $[a, b]$ 'de f 'ye düzgün yakınsar.

3.3. Mercer Teoremi

k , $[a, b] \times [a, b]$ 'de sürekli olsun. Her $f \in L_2[a, b]$ için,

$$\int_a^b \int_a^b k(t, s) f(s) \overline{f(t)} ds dt \geq 0$$

farzedilsin. Eğer $\{\varphi_n\}$, k çekirdek fonksiyonu ile integral operatörün $\{\lambda_n\}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin bir taban sistemi ise, o zaman her t ve $s \in [a, b]$ için

$$k(t, s) = \sum_j \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$$

serisi, $[a, b] \times [a, b]$ 'de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: K , k çekirdek fonksiyonu olmak üzere bir integral operatör olsun. Hipotezden K nın kompakt, pozitif ve $\{\sqrt{\lambda_j} \varphi_j(t)\}$ ve $\{\sqrt{\lambda_j} \varphi_j(s)\}$ serilerine Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{j=m}^n |\lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}| \leq \left(\sum_{j=m}^n \lambda_j |\varphi_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=m}^n \lambda_j |\varphi_j(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

İlk olarak her t için,

$$\sum_j \lambda_j |\varphi_j(t)|^2 \leq \max_s |k(s,s)| \quad (3.9)$$

olduğunu gerçekleyelim.

$$k_n(t,s) = k(t,s) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$$

olsun. Her bir φ_j , K 'nın bir özvektörü olduğundan, Lemma 3.2.2 'den k_n sürekli olup, φ_j sürekli. Doğru bir hesaplamayla,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b k_n(t,s) f(s) \overline{f(t)} dt &= \langle Kf, f \rangle - \sum_{j=1}^n \lambda_j |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j>n} \lambda_j |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Böylece Lemma 3.2.1 'den her t için,

$$0 \leq k_n(t,t) = k(t,t) - \sum_{j=1}^n \lambda_j |\varphi_j(t)|^2$$

elde ederiz. n kcyfi olduğundan (3.9) çşitsizliği çıkar. t sabiti ve $\varepsilon > 0$ için, (3.8) ve (3.9), $n > m \geq N$ olacak şekilde bir N tamsayısının var olduğunu belirtir, öyle ki

$$\sum_{j=m}^n \lambda_j |\varphi_j(t) \varphi_j(s)| \leq \varepsilon C, \quad s \in [a,b]$$

olup, burada $C^2 = \max_{x \in [a,b]} k(x,x)$. Böylelikle her bir t için Cauchy kriterinden $\sum_{j=m}^n \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$,

düzgün ve mutlak yakımsaktır (Gohberg ve Goldberg, 1981).

İspattaki ikinci adım, serinin $k(t,s)$ 'ye yakınsadığını göstermektir. Dini teoreminin uygulanmasıyla ispat yapılır.

$$\tilde{k}(t,s) = \sum_j \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$$

olsun. $f \in L_2[a,b]$ ve t sabiti için s 'de serinin düzgün yakımsaklığı ve her bir $\overline{\varphi_j}$ nin sürekliliği, $\tilde{k}(t,s)$ 'nin s 'nin bir fonksiyonu olarak sürekli olduğunu belirtir ve

$$\int_a^b [k(t,s) - \tilde{k}(t,s)] f(s) ds = (Kf)(t) - \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j(t). \quad (3.10)$$

Eğer $f \in \ker K = \text{Im } K^\perp$ ise, o zaman $\varphi_j = \frac{1}{\lambda_j} K\varphi_j \in \text{Im } K$ olduğundan $Kf = 0$ ve $\langle f, \varphi_j \rangle = 0$ bulunur. Böylelikle, (3.10) 'un sağ tarafı sıfırdır. Eğer $f = \varphi_j$ ise, o zaman (3.10) 'un sağ tarafı $\lambda_j \varphi_j(t) - \lambda_j \varphi_j(t) = 0$ dır. O halde her bir t için 2.6.(a) 'dan $k(t, \cdot) - \tilde{k}(t, \cdot)$, $L_2[a,b]$ 'ye ortogonaldır. Buradan hemen hemen her s için $\tilde{k}(t,s) = k(t,s)$. O zaman, $\tilde{k}(t, \cdot) = k(t, \cdot)$ sürekli olduğundan her t ve s için $\tilde{k}(t,s) = k(t,s)$.

Bu serinin kısmi toplamaları sürekli, artan dizi oluşturduğundan ve $k(t,t)$ 'ye noktasal yakımsadığından bu fonksiyon sürekli dir. Dini Teoremi bu serinin $k(t,t)$ 'ye düzgün yakımsadığını gerç ekler. Böylelikle $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $t \in [a,b]$ için

$$\sum_{j=m}^n \lambda_j |\varphi_j(t)|^2 < \varepsilon^2$$

olmak üzere, $n > m \geq N$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. (3.8) ve (3.9) ile birlikte bu incelemeden, her $n > m \geq N$ ve her $(t,s) \in [a,b]$ için

$$\sum_{j=m}^n \lambda_j |\varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}|^2 < \varepsilon C.$$

Buradan $\sum_j \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$, $[a,b] \times [a,b]$ 'de mutlak ve düzgün yakımsar.

3.4. İntegral Operatörü İçin İz Formülü

Bu kısımda; (a_{ij}) $n \times n$ lik sonlu boyutlu matris, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bu matrisin özdeğerleri olmak üzere bilinen $\sum_{j=1}^n a_{jj} = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ iz formülünden bahsedilecektir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem: $k, [a, b] \times [a, b]$ 'de sürekli olsun. Her $f \in L_2[a, b]$ için,

$$\int_a^b \int_a^b k(t, s) f(s) \overline{f(t)} ds dt \geq 0$$

olsun. Eğer $\{\lambda_j\}$, K 'nın özdeğerlerinin bir taban sistemi ve k , çekirdek fonksiyonu olmak üzere K , integral operatör ise o zaman

$$\sum_j \lambda_j = \int_a^b k(t, t) dt.$$

İspat: $\{\varphi_j\}$, K 'nın $\{\lambda_j\}$ özvektörlerine karşılık gelen bir taban sistemi olsun. Mercer teoreminden

$$k(t, t) = \sum_j \lambda_j |\varphi_j(t)|^2$$

serisi, $[a, b]$ 'de düzgün yakımsaktır. Buradan,

$$\int_a^b k(t, t) dt = \sum_j \lambda_j \|\varphi_j\|^2 = \sum_j \lambda_j.$$

3.5. Diferansiyel Operatörlerin Tersisi Olarak İntegral Operatörler

İntegral operatör teorisinin gelişimi için temel motivasyonlardan biri, şüphesiz, verilmiş sınır

şartlarıyla birlikte diferansiyel denklemlerin eş integral denklemlere dönüşebilmesidir(Stakgold, 1999; Gohberg ve Goldberg, 1981). Örnek olarak aşağıdaki basit sınır değer problemi ele alınabilir:

$f, L_2[a, b]$ 'de bir fonksiyon olmak üzere,

$$-y''(x) = f(x) \quad (3.11)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (3.12)$$

sınır değer problemini gözönüne alalım.

Bir çözüm bulmak için (3.11) 'in her iki yanı iki defa integre edilirse,

$$y(x) = - \int_0^x \int_0^t f(s) ds dt + c_1 x + c_2, \quad (3.13)$$

olup burada

$$c_2 = y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad c_1 = \int_0^1 \int_0^t f(s) ds dt. \quad (3.14)$$

(3.13) ve (3.14) 'de integrasyon sırası değiştirilirse,

$$\begin{aligned} y(x) &= - \int_0^x \int_s^x f(s) dt ds + x \int_0^1 \int_s^1 f(s) dt ds \\ &= \int_0^x (s-x) f(s) ds + \int_0^1 x(1-s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Buradan,

$$y(x) = \int_0^1 g(x, s) f(s) ds \quad (3.16)$$

olup, burada

$$g(x,s) = \begin{cases} s(1-x), & 0 \leq s \leq x \\ x(1-s), & x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Tersine olarak; eğer y , (3.16) ile verilirse, doğru bir hesapla (3.11) ve (3.12) 'yi gerçekler. Sınır değer problemine karşılık gelen g fonksiyonu, *Green fonksiyonu* adını alır.

Yukarıdaki sonuç operatörler teorisi açısından gözönüne alınsın. $-y''$ ifadesini, (3.12) sınır koşullarıyla birlikte bir lineer operatör olarak ifade edilmek istensin. Operatörün etkisi açıktır. Bununla birlikte, operatörün tanım bölgesini belirlemek gerekir. (3.13) belirtir ki y' türevi sonsuz bir integraldir, yani y' mutlak sürekli. Mutlak sürekli fonksiyonların önemli bir özelliği olarak; f mutlak sürekli ve g , Lebesgue anlamında integre edilebilir olmak üzere fg integrali için kısmi integrasyon formülü kullanılabilir (Gohberg ve Goldberg, 1981).

$D(L) \in L$ bölgesi, (3.12) koşulunu sağlayan kompleks değerli y fonksiyonlarından oluşan $L_2[0,1]$ 'in alt uzayı olsun; burada y 'nin birinci basamaktan türevleri $[0,1]$ 'de mutlak sürekli ve ikinci türevleri, $L_2[0,1]$ 'dedir. y' mutlak sürekli olduğundan, hemen her x için $y''(x)$ vardır ve $Ly = -y''$ ile tanımlanır.

G , (3.17) 'de tanımlı g çekirdek fonksiyonuyla integral operatör olsun. g , $[0,1] \times [0,1]$ 'de sürekli olduğundan ve $\overline{g(x,s)} = g(s,x)$ olduğundan G , $L_2[0,1]$ 'de kendine eş bir kompakt operatördür. Yukarıdakilerden, her bir $f \in L_2[0,1]$ için $y = Gf$ doğrudur. Böylelikle,

$$LGf = f \quad (3.18)$$

olup, her bir $y \in D(L)$ için

$$GLy = y. \quad (3.19)$$

Gerçekten, (3.18) 'de f yerine Ly fonksiyonu yazılmakla, $Ly = LGLy$. O halde G injektif olduğundan $y = GLy$ olup G , L 'nin tersidir. (3.18) ve (3.19) 'dan ancak $\varphi, \frac{1}{\lambda}$

özdeğeriyle G 'nin bir özvektörü ise, λ özdeğeriyle L 'nin bir özvektörüdür. Böylelikle, G , kendine eş kompakt operatör ve $\ker(G)=0$ olduğundan $L_2[0,1]$, L 'nin özvektörlerinden ibaret olan bir ortonormal tabana sahiptir. L 'nin λ özdeğerleri reel olmak üzere,

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (3.20)$$

ve

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (3.21)$$

bir non-trivial çözüme sahiptir. (3.20) 'nin genel çözümünden,

$$y = ax + b, \quad \lambda = 0 \text{ durumunda}$$

$$y = a \cos \sqrt{\lambda} x + b \sin \sqrt{\lambda} x, \quad \lambda > 0 \text{ durumunda}$$

$$y = ae^{\sqrt{-\lambda} x} + be^{-\sqrt{-\lambda} x}, \quad \lambda < 0 \text{ durumunda}$$

olup, (3.21) sınır koşullarından $b_n \sin n\pi x$, $b_n \neq 0$ uygun özvektörleriyle, $\lambda = n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$ özdeğerlerdir. $\sqrt{2} \sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$ özvektörler olup, $L_2[0,1]$ için bir ortonormal tabandır.

Benzer olarak, (3.21) sınır koşullarında $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$ ile L 'nin bölgesi değiştirilirse, L 'nin özdeğerlerine ait

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

sınır değer problemi bir non-trivial çözüme sahiptir. L 'nin özdeğerleri, $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, \dots$ olup karşılık gelen özvektörler $a_n \cos nt + b_n \sin nt$, ($|a_n|^2 + |b_n|^2 \neq 0$). O halde,

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \cos nt, \sin nt \right\}_{n=1}^{\infty}$, L 'nin özvektörlerinin bir ortonormal sistemidir.

4. STURM-LIOUVILLE SİSTEMİ

$$(i) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x)$$

diferansiyel denklemi,

$$(ii) \quad a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

sınır koşulları ile birlikte bir Sturm-Liouville Sistemidir, burada $a_1, b_1, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ve $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ olmak üzere reel sayılardır.

p, p' ve q reel değerli fonksiyonlar ve her bir $x \in [a, b]$ için $p(x) \neq 0$ farzedilsin. L Sturm-Liouville operatörüne karşılık gelen özdeğer ve özvektörlerin bazı önemli özelliklerini verelim.

L diferansiyel operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın:

L 'nin $D(L)$ bölgesi (ii) koşulunu sağlayan y fonksiyonlarından ibaret olsun, birinci basamaktan türevleri $[a, b]$ 'de mutlak süreklidir ve ikinci basamaktan türevleri $L_2[a, b]$ 'de dir. $y \in D(L)$ iken

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y$$

olsun.

L 'nin bir özdeğerinin sıfır olmadığı farzedilsin. Bu, (i) ve (ii) nin tek çözümü olduğunu ifade eder; $f = 0$ iken $y = 0$ dir. $f = 0$ için, y_1, y_2 (i) 'yi sağlamak üzere $y_1 \neq 0$ ve $y_2 \neq 0$ reel değerli fonksiyonlardır; y_1'' ve y_2'' süreklidir; y_1 , (ii) 'deki ilk koşulu ve y_2 , (ii) 'deki ikinci koşulu sağlar.

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix},$$

(y_1, y_2) 'nin *wronskian* 'ı olarak adlandırılır. Doğru bir hesaplamayla $(pW)' = 0$ olup pW , reel değeri, sıfır olmayan sabit bir fonksiyondur. $(pW)^{-1} = c$ olsun. Şimdi göstereyim ki,

$$g(x, s) = \begin{cases} c y_2(s) y_1(x), & a \leq x \leq s \\ c y_1(s) y_2(x), & s \leq x \leq b \end{cases} \quad (4.1)$$

ile verilen g fonksiyonu L 'ye karşılık gelen Green fonksiyonudur; yani her bir $f \in L_2[a, b]$ için,

$$y(x) = \int_a^b g(x, s) f(s) ds,$$

$D(L)$ 'dedir ve $Ly = f$.

G , g çekirdek fonksiyonu olmak üzere integral operatör olsun. $g, [a, b] \times [a, b]$ 'de sürekli reel değerli fonksiyon ve $g(x, s) = g(s, x)$ olduğundan, G kompakt ve kendine eştir. Şimdi,

$$LGf = f, \quad f \in L_2[a, b] \quad (4.2)$$

olduğunu ispatlayalım.

İlk olarak, $y = Gf$ 'nin $D(L)$ 'de olduğunu gösterelim. g 'nin tanımından açıktır ki

$$y(x) = y_1(x)Y_2(x) + y_2(x)Y_1(x) \quad (4.3)$$

olup, burada

$$Y_1(x) = \int_a^x c y_1(s) f(s) ds, \quad Y_2(x) = \int_x^b c y_2(s) f(s) ds.$$

(4.3) 'ün her iki tarafının türevinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned} y' &= y_1' Y_2 - y_1 c y_2 f + y_2 c y_1 f + y_2' Y_1 \\ &= y_1' Y_2 + y_2' Y_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4), her x için gerçekleşir. Bunu görmek için, $h = y_1' Y_2 + y_2' Y_1$ ve

$$\tilde{y}(x) = y(a) + \int_a^x h(t) dt$$

olsun. $\tilde{y}' = y'$ ve, $\tilde{y}$ ve y mutlak süreklidir. y_i ve Y_i , $i = 1, 2$ nin mutlak sürekliliğinden bu çıkar. Buradan,

$$(\tilde{y} - y)(x) = \int_a^x (\tilde{y} - y)'(t) dt = 0$$

ya da $\tilde{y} = y$. Böylelikle (4.4), y' mutlak sürekli olmak üzere her x için gerçekleşir. Bununla birlikte,

$$y'' = -y_1' c y_2 f + Y_2 y_1'' + y_2' c y_1 f + Y_1 y_2'' \in L_2[a, b]$$

dir. Sonuç olarak, $Y_1(a) = 0$ ve y_1 , (ii) 'deki ilk denklemi sağladığından

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = (a_1 y_2(a) + a_2 y_2'(a)) Y_1(a) + (a_1 y_1(a) + a_2 y_1'(a)) Y_2(a) = 0.$$

Benzer şekilde,

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0.$$

Böylelikle, y 'nin $D(L)$ 'de olduğunu göstermiş olduk. $Ly = f$ olduğunu göstermek kaldı. c nin tanımı ve y_1 ve y_2 'nin özellikleri (4.4) 'ten:

$$\begin{aligned}
(py')' &= (py_1'Y_2 + py_2'Y_1)' = (py_1')'Y_2 + (py_2')'Y_1 + p(y_1y_2' - y_2y_1')f \\
&= -qy_1Y_2 - qy_2Y_1 + f \\
&= -qy + f.
\end{aligned}$$

O halde $Ly = f$. Buradan (4.2) yi bulmuş olduk. O halde her bir $y \in D(L)$ için

$$GLy = y. \quad (4.5)$$

Gerçekten, (4.2) 'de f yerine Ly yazılırsa $Ly = LGLy$ olur. Buradan $y = GLy$ dir. (4.2) ve (4.5) 'den $\ker G = 0$ dır ve, ancak ve ancak $\frac{1}{\lambda}$ özdeğer olmak üzere φ , G 'nin bir özvektörü ise; λ özdeğer olmak üzere φ , L 'nin bir özvektörüdür. Bununla birlikte spektral teoremden G 'nin sonsuz sayıda özdeğeri olduğunu biliyoruz.

G 'nin her bir λ özdeğeri *tekildir*, yani $\dim \ker(\lambda I - G) = 1$. Eğer u ve v , $\ker(\lambda I - G) = \ker(\frac{1}{\lambda} - L)$ 'de lineer bağımsız ise diferansiyel denklemlerin temel bir sonucu olarak,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left(q(x) - \frac{1}{\lambda} \right) y = 0 \quad (4.6)$$

diferansiyel denkleminin keyfi w çözümü, u ve v nin lineer kombinasyonudur. Bu nedenle w , (ii) 'yi sağlar. Fakat (4.6) 'ya ait $y(a) = \alpha$, $y'(a) = \beta$ sınır şartlarını sağlayan bir çözüm vardır ki (ii) gerçekleşmez. O halde λ *tekildir*.

Aşağıdaki teorem bu sonuçları özetler:

Teorem 4.1: $\ker L = (0)$ olmak üzere L , Sturm-Liouville operatörü olsun. g , (4.1) ile tanımlanmış çekirdek fonksiyon olmak üzere G , $L_2[a, b]$ 'de bir integral operatör olsun. O zaman G , kendine eş kompakt operatördür.

$$LG = I, L_2[a, b] \text{ üzerinde ve } GLy = y, y \in D(L).$$

Böylelikle, ancak ve ancak $\varphi, \frac{1}{\lambda}$ özdeğer olmak üzere G 'nin bir özvektörüysse, λ özdeğer olmak üzere L 'nin özvektörüdür. O halde,

$$\dim \ker(\lambda I - G) \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

ve L , sonsuz sayıda özdeğere sahiptir.

Lemma 4.2: L , Sturm-Liouville operatörünün özdeğerleri reel sayılardan ibaret $\{\mu_i\}$ sonsuz dizisi biçimindedir, burada

$$|\mu_1| < |\mu_2| < \dots \rightarrow \infty.$$

Eğer $\varphi_j, \|\varphi_j\|=1$, L 'nin μ_j 'ye karşılık gelen bir özvektörü ise $\varphi_1, \varphi_2, \dots, L_2[a, b]$ için bir ortonormal tabandır.

Bir $y \in L_2[a, b]$ vektörü, ancak ve ancak

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j|^2 |<y, \varphi_j>|^2 < \infty$$

ise L 'nin tanım bölgesindedir.

$$(Ly)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j <y, \varphi_j> \varphi_j(t)$$

vektörleri için yakınsaklık $L_2[a, b]$ 'de norma uyar.

$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} <y, \varphi_j> \varphi_j(t), \quad y \in D(L)$$

serisi, $[a, b]$ 'de düzgün ve mutlak yakınsaktır.

KAYNAKLAR

Edmunds, D.E. ve Evans, W.D., (1987), Spectral Theory and Differential Operators, Clarendon Press- Oxford.

Gohberg. I. ve Goldberg, S., (1981), Basic Operator Theory, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart.

Kreyszig E., (1978), Introductory Functional analysis with applications, JOHN WILEY & SONS, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.

Stakgold, I., (1999), Green's Functions and Boundary Value Problems, New York, Chicheszer, Brisbane, Toronto.

Weidmann, J., (1980), Lineer Operators in Hilbert Space, Springer-Verlag.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	10.09.1967	
Doğum yeri	Samsun, Terme	
Lise	1982-1986	Şişli Lisesi
Lisans	1989-1997	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Ed.Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1998-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Çalıştığı kurumlar	1998-Devam ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı Fıruzaga İ.Ö. Matematik Öğretmenliği