

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Free Grup, Kar. Tab. ve
Todd-Cox. Alg.

Yüksek Lisans Tezi

Todd-Cox. Alg.

1991

09
84

YILDIZ UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTUSU

15-00071

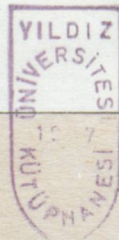
FREE GRUPLAR , KAREKTER TABLOLARI
VE
TODD-COXETER ALGORİTMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ARŞ.GÖR.İLK NUR TULUNAY

İSTANBUL - 1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 209
84
Alındığı Yer : Fen Bilimleri Ens.
Tarih : 18.03.1992
Fatura :
Fiyatı : 15.000.-TL
Ayniyat No : 1/1
Kayıt No : 48201
UDC : 510
Ek :



YILDIZ UNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI

Kot :
Alındığı Yer : *Gen. Bilim. Fari. East*
Tarih : *18/3/1992*
Fatura :
Fiatı : *15.000*
Ayniyat No : *411*
Kayıt No : *48201*
UDC :
Ek :

R 2003 84



FREE GRUPLAR , KAREKTER TABLOLARI

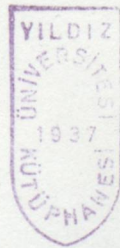
VE

TODD-COXETER ALGORİTMASI

Çalışmalarında hiç bir zaman yardımları esirgeyen ve bilgin
yol gösterici olan sayın Doç.Dr.Erol BALANAY'a
teşekkür ederim. Çalışmalarım sırasında yaptığım çalışmalar
katılarak değerli zamanlarını bana ayıran , Doç.Dr. Ayhan
BACAK ,olmak üzere , Doç.Dr. Mustafa AYDAR , Arş.Gör. Hüseyin
AYDAR ve Arş.Gör. Ayhan YILMAZ'a teşekkür ederim.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ.GÖR.İLKİNUR TULUNAY



İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

&1. Permütasyon Temsilcisi

Tanım 1.1.1	1
Tanım 1.2.1	1
Teorem 1.1.1	1
Tanım 1.1.3	1
Tanım 1.1.4 (Permütasyon Temsilcisi)	2
Tanım 1.1.5	2
Tanım 1.1.6	2
Tanım 1.1.7	2
Teorem 1.1.2	2
Örnek 1.1.1	3
Örnek 1.1.2	4
Tanım 1.1.8	5
Tanım 1.1.9	5
Örnek 1.1.3	5

&2. Free Gruplar

Tanım 1.2.1	5
Teorem 1.2.1	6
Tanım 1.2.2	8
Teorem 1.2.2	8
Teorem 1.2.3	8
Tanım 1.2.4	9

&3. Sonlu Belirtilebilen Grup

Tanım 1.3.1	9
Teorem 1.3.1	9

&4. Lattice

Tanım 1.4.1	13
Tanım 1.4.2	13
Örnek 1.4.1	14
Tanım 1.4.3	14
Örnek 1.4.2	14
Tanım 1.4.4	14

BÖLÜM II

&1. Matrisel Temsil

Tanım 2.1.1	16
Tanım 2.1.2	16
Tanım 2.1.3	16
Tanım 2.1.4	16
Tanım 2.1.5	16
Tanım 2.1.6	17
Teorem 2.1.1 (Maschke Teoremi)	18
Not 2.1.1	18

ÖZET

Grup kavramı, matematikteki en eski ve en temel kavramlardan biridir. Grup kavramının yaratıcıları, Joseph Louis Lagrange (1768-1813), Paulus Haffni (1765-1822) ve Evariste Galois (1811-1832) dir. 19. yüzyıl boyunca bilinen gruplar, sonlu permutasyon gruplarıdır. Bu yüzyılın başlarında, büyük katkılar bulunan matematikçiler Augustin Louis Cauchy (1798-1857), Sylow (1832-1918) ve Camille Jordan (1838-1922) dir.	18
Not 2.1.2	19
Not 2.1.3	19
Teorem 2.1.2	19
Tanım 2.1.7	19
Teorem 2.1.3	19
Not 2.1.4	20

&2.Uniter Temsil

Tanım 2.2.1	20
Teorem 2.2.1	20
Teorem 2.2.2 (Birinci Ortogonalite Bağıntısı)	20
Sonuç 2.2.1	21
Teorem 2.2.3 (İkinci Ortogonalite Bağıntısı)	21
Tanım 2.2.2	21
Not 2.2.1	22
Teorem 2.2.4	22
Not 2.2.2	23
Not 2.2.3	23
Teorem 2.2.5	24
Tanım 2.2.3	25
Not 2.2.4	25
Sonuç 2.2.1	26
Örnek 2.2.1	27

BÖLÜM III

&.Koset Sayma İşlemi.

Örnek 3.1.1	37
Özellik 3.1.1	45
Teorem 3.1.1	46
Not 3.1.1	48
Not 3.1.2	48
Not 3.1.3	48
Teorem 3.1.2	48
Teorem 3.1.3	49

SONUÇ

50-51

Sonuç bölümünde ise Todd-Coxeter algoritması kullanılarak elde edilen sonuçlar ve grup teorisinin bilgisayarla uygulanması konusundaki son gelişmeler ele alınmıştır.

ÖZET

Grup kavramı , matematikteki en eski ve en temel kavramlardan biridir.Grup kavramının yaratıcıları , Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ,Paulo Ruffini (1765-1822) ve Evariste Galois (1811-1832) dir. 19.uncu yüzyıl boyunca bilinen tüm gruplar , sonlu permütasyon grupları idi.Bu yüzyılda , Grup Teoriye büyük katkıları bulunan ünlü matematikçiler Augustin Louis Cauchy (1789-1857) , Ludwig Sylow (1832-1918) ve Camille Jordan (1838-1922) dir.İlk soyut grup kavramını veren ise Arthur Cayley (1821-1895) olmuştur.

Bu çalışmada temel bazı kavramlar üzerinde durulmuş ; Free gruplar ,Karakter Tabloları ve Sonlu Belirtilebilen Gruplar ayrıntılı olarak algoritmik bakış açısıyla incelenmiştir.

İlk bölümde , bir grubun permütasyon grupları şeklinde nasıl temsil edilebildiği açıklanmıştır.Soyut gruplar hakkında bazı bilgileri elde etmek için , permütasyon temsilcileri sık sık kullanılır.Ayrıca , bu bölümde grup teorisinin en temel kavramları olan , free grup , sonlu belirtilebilen grup ve kafes kavramlarına yer verilmiştir.Grup teorisinde bir grubun altgruplarının kafesi kavramı önemli yer tutar.Herhangi iki grubun altgruplarının kafesleri izomorfik ise bu iki grubun da izomorfik olup olmadıkları problemi henüz tam olarak çözülememiştir.

İkinci bölümde sözü edilen grup temsilleri kavramını ortaya koyan Walther Von Dyck (1856-1934) , grup kavramına değişik boyutlar kazandırmıştır.Norveçli matematikçi Sophus Lie (1842-1899) genel lineer grup ve bunların özel altgruplarını , differansiyel denklemler üzerine yaptığı çalışmalar sırasında bulmuştur.Bu gruplar Lie grupları olarak bilinmektedir.

Bu çalışmadaki ikinci bölümde , ulaşılmak istenen amaç ise karakter tablolarının nasıl oluşturulduğu sorusuna cevap aramaktır.

Üçüncü bölümde ise Todd-Coxeter algoritması olarak bilinen koset sayma işlemi açıklanmıştır.Bu algoritmayı ilk bulanlar Todd ve Coxeter (1936) dir. N.S.Mendelson (1963) " altgrubun üreteçleri kümesinden , o altgrubun yeni bir üreteçleri kümesinin elde edilmesini sağlayan bir algoritma geliştirmiştir.Bu yıllarda , indeksi 600 e kadar olan altgruplar için , bu metodlar başarıyla denenmiştir.Daha sonraları , bu konuya büyük katkıları olan matematikçiler ve en önemli yayınları ise: J.Leech , " Computational Problems in Abstract Algebra " , (1977) ,Pergamon ; M.D.Atkinson , " Computational Group Theory " , (1984) Academic Press dir.

Sonuç bölümünde ise Todd-Coxeter algoritması kullanılarak elde edilen sonuçlar ve grup teorisinin bilgisayara uygulanması konusundaki son gelişmeler ele alınmıştır.

SUMMARY

The theory of groups is the oldest branch of algebra. Its origins are to be found in the work of Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ; Paulo Ruffini (1765-1822) and Evariste Galois (1811-1832) on the theory of algebraic equations. (Their groups consisted of permutations of variables , or of the roots of polynomials.) During the nineteenth century all groups were only the finite permutation groups. In this century , many of the fundamental ideals of group theory were introduced by Augustin Louis Cauchy (1789-1857) , Ludwig Sylow (1832-1918) and Camille Jordan (1838-1922).

In this study , we use a computational approach to give the concepts of representations of groups , presentations , coset enumeration etc. We also mentioned the last developments on computational group theory.

In the chapter I , it is introduced permutation representations of groups. The permutation representations are often used for getting some important information about the abstract groups. Moreover , it is offered the concepts of free groups , finitely presented group and lattice. The lattice of subgroups of a group is an important concept ; it is not completely solved the problem whether a lattice isomorphism between two lattice of subgroups of two groups implies a group isomorphism between the two groups.

The chapter II is concerned with matrix representations of a group introduced by Walter Von Dyck (1856-1934). Unitary representations are investigated in detail. One of our aims is to establish character tables of a group.

The chapter III contains the coset enumeration called Todd-Coxeter Algorithm is invented by Todd and Coxeter (1936). The algorithm , by which the generators set of a subgroup of a group obtains a new generators set of the subgroup , is invented by N.S. Mendelson (1963) .

The last chapter deal with the results of application of Todd-Coxeter algorithm. We also give the last developments on the computational group theory.

BÖLÜM 1

TANIM 1.1.1:

S bir küme olsun. S den S üzerine birebir bir fonksiyona bir permütasyon denir. $|S| = n$ ise S üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir.

TANIM 1.1.2:

Permütasyonların bileşke (çarpımı) işlemine göre S_n bir gruptur. Bu S_n grubuna, n dereceli simetrik grup denir. S_n simetrik grubunun herhangi bir alt grubuna bir permütasyon grubu denir.

TEOREM 1.1.1:

G, verilen herhangi bir grup olsun. G grubu, S üzerinde bir permütasyon grubuna izomorfik olacak şekilde bir S kümesi vardır.

İspat:

G grubunun tüm elemanlarını içeren bir X kümesi göz önüne alalım. G grubunun her bir elemanı için $x \in X$ olmak üzere,

$$\pi_g(x) = xg$$

olacak şekilde, X üzerinde π_g fonksiyonu tanımlıyalım. Bu durumda, π_g fonksiyonu, X üzerinde bir permütasyondur. $g, h \in G$ için,

$$\pi_{gh} = \pi_g \pi_h$$

özelligi gerçekleşmektedir. Buradan, π , G grubundan, X üzerindeki simetrik gruba bir homomorfidir.

π_g fonksiyonunun, X üzerinde özdeş (Identity) fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter koşul $g = 1$ olmasıdır. O halde, π bir monomorfidir.

Buradan, G grubu, $\pi(G)$ imajına izomorfiktir. $\pi(G)$ imajı, X üzerindeki simetrik grubun bir alt grubu olduğundan, $\pi(G)$ bir permütasyon grubudur. O halde, G, X üzerindeki bir permütasyon grubuna izomorfiktir.

TANIM 1.1.3:

G, verilen bir grup olsun. S, G grubunun tüm elemanlarını içeren bir küme olsun. S üzerinde, $s \in S$ için, $g \in G$ olmak üzere,

$$\pi_g(s) = sg$$

şeklinde bir π_g fonksiyonu tanımlıyalım. Bu fonksiyon, G

den S_n e bir izomorfidir. π izomorfisine sağ reguler temsil denir.

TANIM 1.1.4:

Bir G grubunun S_n simetrik grubuna herhangi bir homomorfisine, G grubunun, S üzerinde bir permütasyon temsili denir.

TANIM 1.1.5:

G , bir grup olsun. δ , G grubundan S üzerindeki S_n simetrik grubu üzerine bir homomorfi olsun. Bu durumda, (S, δ) çiftine bir G - küme denir. Burada, δ , G grubunun S üzerindeki bir permütasyon temsilidir. Ayrıca, δ homomorfisine grubunun S üzerine etkisi denir veya δ etkisine göre G grubu S üzerine etki eder denir.

TANIM 1.1.6:

$s \in S$ için,

$$G(s) = \{ g(s) \mid \delta(g)(s) = g(s), g \in G \}$$

kümesine s elemanının yörüngesi (orbit) denir. $s \in S$ için,

$$St_G(s) = G_s = \{ g \in G \mid g(s) = s \}$$

şeklinde tanımlanan kümeye s elemanının stabilizeri denir.

TANIM 1.1.7:

S kümesi bir G - küme olsun. $G(s) = S$ ise G - küme olan S e bir transitif G - küme denir. G - küme olan (X, δ) transitif ise G grubunun S üzerindeki δ permütasyon temsiline transitiftir denir.

TEOREM 1.1.2:

G bir grup olsun. Aşağıdaki koşullar birbirlerine denktirler:

(i) G grubunun, n elemanlı bir küme üzerinde transitif bir permütasyon temsili vardır.

(ii) Öyle bir $f: G \rightarrow S_n$ homomorfisi vardır ki, f in görüntüsü transitiftir.

(iii) G grubu, n indeksli bir altgruba sahiptir.

İspat:

$X = \{ 1, 2, \dots, n \}$, G grubunun bir δ transitif permütasyon temsilcisi varsa, G -küme olan (X, δ) transitiftir. Buradan

da , $St_G(1)$ stabilizeri n indeksli bir altgruptur.

Tersine , H , G grubunun n indeksli bir altgrubu olsun. H , altgrubunun tüm kosetlerinin kümesini Γ_H ile gösterelim. Γ_H üzerinde ,

$$Hx \longrightarrow Hxg$$

etkisini tanımlıyalım. Buradan , G grubundan , Γ_H kümesi üzerindeki simetrik gruba bir δ homomorfisi vardır.

$|\Gamma_H| = n$ olduğundan $\delta : G \longrightarrow S_n$ şeklindedir. Buradan da , δ , G grubunun bir transitif permütasyon temsilidir. Çünkü , Γ_H kümesi üzerindeki simetrik grup , S_n simetrik grubuna izomorfiktir. Böylece , G grubu n indeksli bir altgruba sahip ise G den S_n bir homomorfi vardır ve bu homomorfi transitiftir.

ÖRNEK 1.1.1:

H , G grubunun herhangi bir altgrubu olsun. H altgrubunun G deki indeksi n (yani $[G:H] = n$) olsun. Bu durumda G - küme olan bir S vardır. $\delta : G \longrightarrow S_n$ olacak şekilde bir δ homomorfisi oluşturulabilir. $g \in G$ için,

$$\delta(g) = P_g = \begin{bmatrix} x_1H & x_2H & \dots & x_nH \\ gx_1H & gx_2H & \dots & gx_nH \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı δ fonksiyonu bir homomorfidir. Şimdi , δ fonksiyonunun homomorfi olduğunu gösterelim.

$$P_g(x_1) = gx_1H = \overline{gx_1}$$

olmak üzere ,

$$\delta(g_1g_2) = P_{g_1g_2} = \begin{bmatrix} x_1H & x_2H & \dots & x_nH \\ g_1g_2x_1H & g_1g_2x_2H & \dots & g_1g_2x_nH \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \dots & \overline{x_n} \\ \overline{g_1g_2x_1} & \overline{g_1g_2x_2} & \dots & \overline{g_1g_2x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{g_2 x_1} & \dots & \overline{g_2 x_n} \\ \overline{g_1 g_2 x_1} & \dots & \overline{g_1 g_2 x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \dots & \overline{x_n} \\ \overline{g_2 x_1} & \dots & \overline{g_2 x_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.Çünkü , H altgrubu G grubunda sonlu indekslidir.i,j = 1,2,...,n için ,

$$\overline{g_2 x_1}$$

ifadesi , $\overline{x_j}$ ifadelerinden birine eşittir.Buradan ,

$$P_{\mathfrak{S}} = \begin{bmatrix} \overline{g_2 x_1} & \dots & \overline{g_2 x_n} \\ \overline{g_1 g_2 x_1} & \dots & \overline{g_1 g_2 x_n} \end{bmatrix}$$

bulunur.O halde , grubuna semireguler denir.

$$P_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2} = P_{\mathfrak{S}_1} P_{\mathfrak{S}_2}$$

G bir permutasyon grubu olsun.G grubu , semireguler ve olup buradan da , grubuna reguler denir.

$$\delta(g_1 g_2) = \delta(g_1) \delta(g_2)$$

bulunur. δ bir homomorfidir.

ÖRNEK 1.1.2:

$$G = \{ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$$

kümesine Klein 4-grubu denir.Klein 4-grubu transitifdir.bir ispat:

Burada, $S = \{ 1,2,3,4 \}$ kümesidir.

$$\pi_1 = (1), \pi_2 = (12)(34), \pi_3 = (13)(24), \pi_4 = (14)(23)$$

olsun.Her $s \in S$ için

$$G(s) = S$$

olduğunu göstermeliyiz.1 $\in S$ alalım.G grubunun 1 $\in S$ elemanına etkisi ,

$$\pi_1(1) = 1, \pi_2(1) = 2, \pi_3(1) = 3, \pi_4(1) = 4$$

olduğundan $S = G(1)$ bulunur. $2 \in S$ alalım. G grubunun $2 \in S$ elemanına etkisi ,

$$\pi_1(2) = 2 , \pi_2(2) = 1 , \pi_3(2) = 4 , \pi_4(2) = 3$$

olduğundan $S = G(2)$ bulunur. Benzer şekilde devam edilirse

$$S = G(3) \quad \text{ve} \quad S = G(4)$$

olduğu görülür. O halde , her $s \in S$ için

$$G(s) = S$$

olduğundan G grubu transitiftir.

TANIM 1.1.8:

G bir permütasyon grubu ve $f : G \longrightarrow S_n$ G grubunun bir permütasyon temsili olsun. Her $s \in S$ için ,

$$St_G(s) = 1$$

ise G permütasyon grubuna semireguler denir.

TANIM 1.1.9:

G bir permütasyon grubu olsun. G grubu , semireguler ve transitif ise G grubuna reguler denir.

ÖRNEK 1.1.3:

Örnek 1.1.2 de sözü edilen Klein 4-grubu regulerdir.
Her $s \in S$ için

$$\pi_1(s) = s , \pi_2(s) \neq s , \pi_3(s) \neq s , \pi_4(s) \neq s$$

dir. Her eleman , birim permütasyon haricinde diğer tüm permütasyonların etkisi altında kendisinden farklı bir elemana gönderilir. Buradan , her $s \in S$ için ,

$$St_G(s) = (1)$$

olduğundan Klein 4-grubu regulerdir.

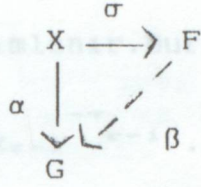
TANIM 1.2.1 (FREE GRUPLAR) :

F bir grup , X boştan farklı bir küme , G bir grup ve $\sigma : X \longrightarrow F$ bir fonksiyon olsun. $\alpha : X \longrightarrow G$ fonksiyona

$$\alpha = \beta \sigma$$

olacak şekilde tek bir $\beta : F \longrightarrow G$ homomorfisi varsa F grubuna (veya (F, σ) sistemine) X üzerinde freedir

denir. Burada , $\alpha = \beta \sigma$ ifadesi,



şeklindedir. Uygun bir küme üzerinde free olan grubu free grup denir. Burada , α , β homomorfisinin X e kısıtlanmışdır (restriction). Bu , $\alpha = \beta | X$ ile gösterilebilir. Ayrıca , β , α fonksiyonunun F grubuna genişlemesidir (extension). $\text{Im } \sigma \subset F$ (tir. v) için gerek

TEOREM 1.2.1:

$\text{Im } \sigma$, F grubunu üretir. Yani , $F = \langle \text{Im } \sigma \rangle$ dir.

ispat:

ispata başlanmadan önce bazı ön tanımlar ve bilgiler verilecektir.

$|X| = |X^{-1}|$ olmak üzere , X kümesinden farklı bir

$$X^{-1} = \{ x^{-1} \mid x \in X \}$$

kümesini ele alalım. X ile X^{-1} arasında birebir bir tasvir vardır.

$$\bar{X} = X \cup X^{-1} = \{ x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1} \}$$

kümesini ele alalım.

$$x_i \in X ; r_i = \pm 1 ; r \geq 0 \text{ için ,}$$

$$w = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_r^{r_r}$$

şeklindeki bir ifadeye $\bar{X}$ nin elemanları ile oluşturulan bir sözcük (word) denir. r ye ise w sözcüğünün uzunluğu denir. Eğer $r = 0$ ise w sözcüğüne boş sözcük denir. Bu e veya 1 ile gösterilir.

$$w = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_r^{r_r} (v)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan , $\beta : F \longrightarrow G$ fonksiyonu ,

$$v = y_1^{n_1} y_2^{n_2} \dots y_m^{n_m}$$

sözcüklerinin çarpımı, $\langle \text{Im } \sigma \rangle$ dir. Ayrıca , β fonksiyonu

$$w.v = x_1^{-1} x_2^{-1} \dots x_r^{-1} y_1^{-1} y_2^{-1} \dots y_s^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $w.1 = 1.w = w$ dir. w sözcüğünün inversi ,

$$w^{-1} = x_r^{-1} x_{r-1}^{-1} \dots x_1^{-1}$$

şeklindedir. Ayrıca , $1^{-1} = 1$ dir. $\bar{X}$ deki tüm sözcüklerin kümesini S ile gösterelim. S üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlıyalım.

w ve v sözcüklerinin denk olabilmeleri ($w \approx v$) için gerek ve yeter koşul ($x \in X$) sözcüklerden birine ,

(a) xx^{-1} veya $x^{-1}x$ in eklenmesi,

(b) xx^{-1} veya $x^{-1}x$ in çıkarılması,

ile birinin diğerinden elde edilebilmesidir. Bu denklik bağıntısı , w sözcüklerinin denklik sınıflarını oluşturulur. w sözcüğüne ait denklik sınıfı ,

$$[w]$$

ile gösterelim. Bu durumda ,

$w \approx w'$ ve $v \approx v'$ ise $wv \approx w'v'$ şeklindedir. Ayrıca,

$$1-) [w] [v] = [w v]$$

$$2-) [w] [1] = [w] = [1] [w]$$

$$3-) [w] [w^{-1}] = [w w^{-1}] = [1]$$

$$4-) ([w] [v]) [u] = [w] ([v] [u])$$

koşulları sağlanır. Buradan , $[w]$ denklik sınıflarının oluşturduğu küme bir gruptur ve bu grup F dir. $\sigma : X \longrightarrow F$ tasviri $\sigma(x) = [x]$ şeklindedir. $\alpha : X \longrightarrow G$ tasviri ise

$$\alpha(x_1) = g_1$$

şeklinde tanımlıyalım. $\bar{\beta} : S \longrightarrow G$ tasvirini ,

$$w \approx v \text{ ise } \bar{\beta}(w) = \bar{\beta}(v)$$

şeklinde tanımlıyalım. Buradan , $\beta : F \longrightarrow G$ fonksiyonu ,

$$\beta([w]) = \bar{\beta}(w)$$

olur. O halde , $F = \langle \text{Im } \sigma \rangle$ dir. Ayrıca , β fonksiyonu

homomorfidir ve bir tekdir.

TANIM 1.2.2:

w sözcüğü, xx^{-1} veya $x^{-1}x$ ($x \in X$ için) şeklinde ardışık ifadeler içermiyorsa w sözcüğüne indirgenmiş sözcük (reduced word) denir.

TANIM 1.2.3:

F bir free grup, $w = x_1^{-1} \dots x_r^{-1}$ indirgenmiş sözcük olsun. F grubunun her elemanı, $[w]$ şeklinde tek türlü ifade edilebilir. w , $[w]$ denklik sınıfındaki en basit sözcüktür. Bu durumda, $[w]$ ya w sözcüğünün normal formu denir. Normal formun varlığı, free grupların karakteristiğidir.

TEOREM 1.2.2:

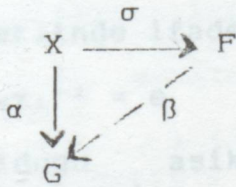
G bir grup ve X , G grubunun bir alt kümesi olsun. $x_1 \in X$, $s \geq 0$, $l_1 = 0$, $x_1 = x_{1+1}$ olsun. Her $g \in G$ için,

$$g = x_1^{-1} x_2^{-1} \dots x_n^{-1}$$

tek türlü yazılabiliyorsa, G , X üzerinde freedir.

İspat:

F bir free grup ve $\sigma : X \rightarrow F$ olsun. $\beta \sigma : X \rightarrow G$ olacak şekilde $\beta : F \rightarrow G$ homomorfisi vardır.



g grubunun her elemanı,

$$g = x_1^{-1} x_2^{-1} \dots x_n^{-1}$$

şeklinde tek türlü yazılabildiğinden, $G = \langle X \rangle$ dir. Diğer taraftan, F free grup olduğundan $F = \langle \text{Im } \sigma \rangle$ dir. Buradan β homomorfisi üzerinedir. F free grubunda, normal formun tekliğinden, β bir birebir tasvirdir. Buradan, β^{-1} tasvirinden bahsedilebilir. β^{-1} , bir homomorfidir. Böylece, G grubu X üzerinde freedir.

TEOREM 1.2.3:

$G = \langle X \rangle$ ve F , Y üzerinde bir free grup olsun. $\alpha : Y \rightarrow X$ üzerine bir tasvir ise $\beta : F \rightarrow G$ şeklinde bir epimorfi vardır. β , α ün bir genişlemesidir. Böylece, her grup, bir

free grubun imajıdır.

İspat:

F free grup olduğundan , $\beta : F \longrightarrow G$ bir homomorfidir.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\beta} & G \\ \uparrow \sigma & & \uparrow \sigma \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

$F = \langle \text{Im } \sigma \rangle$ dir. $\alpha : Y \longrightarrow X$ üzerine olduğundan ve $G = \langle X \rangle$ olduğundan , β bir epimorfidir.

TANIM 1.2.4:

F bir free grup olsun. $\pi : F \longrightarrow G$ epimorfisine G grubunun bir free tasviri (free presentation) denir.

TANIM 1.3.1:(SONLU BELİRTİLEBİLEN GRUP)

$\pi : F \longrightarrow G$ free tasvirini ele alalım. Teorem 1.2.3 den $R = \text{Ker } \pi$ ve $R \triangleleft F$ dir. Buradan , $F / R \cong G$ olur. R kümesinin elemanlarına , free tasvirin "relator" "*" ları denir. $G = \langle X / R \rangle$ dir. G grubunun üreteçleri , $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ olsun.

$$G = \langle x_1 , x_2 , \dots , x_n \mid w = e \rangle$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ,

$$x_1 x_1^{-1} = e \quad x_1^{-1} x_1 = e$$

olduğu aşikar olduğundan bunlar tanımlayıcı olarak alınamazlar.

G grubunun tanımlıyıcıları $w_1 , w_2 , \dots , w_r$ ise

$$G = \langle x_1 , x_2 , \dots , x_n \mid w_1 = e , \dots , w_r = e \rangle$$

şeklinde yazılır. Üreteçlerinin ve tanımlıyıcıların kümesi sonlu ve bu şekilde tanımlanabilen gruplara sonlu belirtilebilen grup (finitely presented group) denir. belirtilebilen bir gruptur.

TEOREM 1.3.1:

S_n simetrik grubunun aşağıdaki şekilde bir free tasviri

(Bundan sonra , "*" "relator" yerine "tanımlıyıcı" kullanılacaktır.)



vardır. S_n bir sonlu belirtilebilen gruptur.

S_n in free tasviri : $x_1^{-1} \dots$ dir. Buradan ,

$n > 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-2$, $1 \leq l \leq k-1 < n-1$ olmak üzere , S_n in üreteçleri

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, x_i elemanı ile çarpalım.

ve tanımlıyıcıları ,

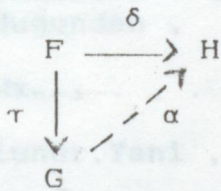
$x_1^2 = (x_1 x_{j+1})^2 = (x_k x_1)^2 = 1$ olsun ($j < i-1$) . Bu

şeklindedir.

İspat:

EK: (VON DYCK TEOREMİ)

G ve H gruplar olsunlar.



$\tau : F \longrightarrow G$, $\delta : F \longrightarrow H$ fonksiyonları var olsun. Yani , G ve H F free grubunun imajı olduklarından G ve H grupları sonlu belirtilebilen gruplardır. Burada , G nin tanımlıyıcıları , H nin tanımlıyıcılarıdır. Yani , $\text{Ker } \tau = \text{Ker } \delta$ dir. Bu durumda , $\tau(f) \longrightarrow \delta(f)$ ($f \in F$) olacak şekilde bir iyi-tanımlı $\alpha : G \longrightarrow H$ epimorfisi vardır.

$n > 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-2$, $1 \leq l \leq k-1 < n-1$ olmak üzere ,

$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_1^2 = (x_1 x_{j+1})^2 = (x_k x_1)^2 = 1 \rangle$

olsun. $|G| = n$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ,

$H = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-2} \rangle$

altgrubunu ele alalım. $[G : H] \leq n$ veya $|H| < (n-1)!$ olduğunu göstermeliyiz. $[G : H] \leq n$ olduğunu gösterelim. H nin farklı n tane koseti :

H , Hx_{n-1} , $Hx_{n-1}x_{n-2}$, $\dots$, $Hx_{n-1}x_{n-2}\dots x_1$

olsun. Herhangi bir x_i elemanının bu kosetlerle sağdan çarpımının yine bu kosetlerden biri olduğunu göstermeliyiz.

$j < i-1$ olsun. $1 \leq i \leq n-1$ için ,

$x_i^2 = e$ den $x_i = x_i^{-1}$ dir. Buradan ,

$$x_i x_j = x_i^{-1} x_j^{-1} = (x_j x_i)^{-1} = x_j x_i = (x_i x_j)^{-1}$$

bulunur.Çünkü , $j \rightarrow 1$, $i \rightarrow k$ seklindedir.H nin her hangi bir sağ kosetini x_j elemanı ile çarpalım.

$$Hx_{n-1} \dots x_1$$

H nin her hangi bir sağ koseti olsun ($j < i-1$). Bu durumda ,

$$(Hx_{n-1} \dots x_1) x_j = Hx_j x_{n-1} \dots x_1$$

olur.Çünkü , $j < i-1$ için , x_j elemanı ,

$$x_{n-1} , \dots , x_1$$

elemanları ile değişme özelliğine sahiptir. $x_j \in H$ olduğundan ,

$$(Hx_{n-1} \dots x_1) x_j = Hx_{n-1} \dots x_1$$

bulunur.Yani , farklı bir sağ koset elde edilmemiştir.

$j > i$ olsun.

$$|j - k| > 1 \text{ ise ,}$$

$$j - k > 1 \quad j > 1 + k \quad ; \quad j \rightarrow k \quad , \quad k + 1 \rightarrow 1$$

$$-j + k > 1 \quad j < k - 1 \quad ; \quad j \rightarrow 1$$

seklindedir.Her iki durumda da , $(x_k x_i)^2 = 1$ olduğundan

$$(x_k x_i)^2 = e \quad x_k x_i x_k x_i = e \quad x_k x_i = x_i^{-1} x_k^{-1}$$

olur.Buradan ,

$$x_k x_i x_k x_i = e \quad \text{ise} \quad x_k x_i = x_i^{-1} x_k^{-1}$$

olur.Her x_i için , $x_i = x_i^{-1}$ olduğundan ,

$$x_k x_i = x_i x_k$$

dir.Buradan ,

$$(Hx_{n-1} \dots x_1) x_j = (Hx_{n-1} \dots x_{j+2} x_j x_{j-2} \dots x_1) x_j$$

$$= Hx_{n-1} \dots x_{j+2} (x_j x_{j-2} x_j) x_{j-2} \dots x_1$$

olur.Diğer taraftan , $(x_{j-2} x_j)^2 = 1$ den ,

$$(x_{j-1} x_j) (x_{j-1} x_j) (x_{j-1} x_j) = 1$$

$$(x_{j-1} x_j x_{j-1}) (x_j x_{j-1} x_j) = 1 \quad \text{ise}$$

$$x_{j-1} x_j x_{j-1} = x_j^{-1} x_{j-1}^{-1} x_j^{-1} = x_j x_{j-1} x_j$$

$$x_{j-1} x_j x_{j-1} = x_j x_{j-1} x_j$$

bulunur. Bunu , yukarıdaki ifadede yerine yerleştirelim:

$$Hx_{n-1} x_{n-2} \dots x_{j+1} (x_{j-1} x_j x_{j-1}) x_{j-2} \dots x_1$$

olup

$$x_{j+1} x_{j-1} = x_{j-1} x_{j+1}$$

dir. Çünkü , $j+1 \rightarrow k$, $j-1 \rightarrow l$ şeklindedir. Buradan , benzer düşünce tarzıyla,

$$Hx_{n-1} \dots x_{j+2} x_{j-1} (x_{j+1} x_j x_{j-1}) x_{j-2} \dots x_1$$

$$= Hx_{j-1} x_{n-1} \dots x_1$$

$$= Hx_{n-1} \dots x_1$$

bulunur. Çünkü , $x_{j-1} \in H$ idi. $j > i$ için H nin sağ kosetlerinin x_j elemanı ile sağdan çarpımı sonucu yine H nin bir sağ kosetini elde ettik. O halde , G nin her elemanı bu kosetlerin birinde bulunmaktadır. Buradan , $[G : H] \leq n$ dir. Ayrıca , $i = j$ için ,

$$(Hx_{n-1} \dots x_1) x_1 = Hx_{n-1} \dots x_{i+1} x_{i2} = Hx_{n-1} \dots x_{i+1}$$

olur. O halde , H nin

$$H , Hx_{n-1} , Hx_{n-1} x_{n-2} , \dots , Hx_{n-1} x_{n-2} \dots x_1$$

kosetlerinden başka koseti yoktur diyemeyiz. Çünkü

$$x_1 , x_2 , \dots , x_{n-1}$$

G grubunun üreteçleri olduğundan , bunların değişik şekillerde yanyana gelmesiyle bazı terimler G grubunun birim elemanına (e_G ye) eşit olabilir. Bu yüzden ,

$$[G : H] \leq n$$

dir. Şimdi , S_n in bu free tasviri gerçekleştirdiğini gösterelim. $i = 1, 2, \dots, n-1$ için , $n-1$ tane $\pi = (i \ i+1)$ şeklindeki komşu transpozisyonları ele alalım. Her permütasyonun , transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabildiğini ve her transpozisyonun , komşu transpozisyonların çarpımı olduğunu biliyoruz. $i > j-1$ için , her transpozisyon

$$(i j) = (j-1 j) (i j-1) (j-1 j)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ,

$$S_n = \langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1} \rangle$$

dir. $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-2$, $1 \leq k-1 < n-1$ için

$$\pi_1^2 = (\pi_1 \pi_{j+1})^2 = (\pi_k \pi_1)^2 = 1$$

dir. $x \mapsto \pi_1$ olacak şekilde , $\alpha : G \rightarrow S_n$ epimorfisi vardır. $|G| \leq n!$ idi. $|G : \text{Ker } \alpha| = n!$ olduğundan $\text{Ker } \alpha = 1$ dir. Buradan , α tasviri birebirdir. Dolayısıyla , α bir izomorfidir. O halde , G nin free tasviri , S_n in free tasviridir.

TANIM 1.4.1: (KİSMİ SIRALI KÜME)

S herhangi bir küme olsun. Uygun $a, b \in S$ elemanları için , " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki koşulları gerçekliyorsaa , S kümesine kısmi sıralı (partially ordered) küme denir:

(i) $a \leq a$

(ii) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

(iii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

Bu durumda , $a \leq b$, " a , b den önce gelir " veya " a küçük veya eşit b " şeklinde okunur.

TANIM 1.4.2: (KAFES)

L kısmi sıralı bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar gerçekleşiyorsa , L kümesine "Lattice" (veya kafes) denir:

(1) Her $a, b \in L$ ikilisi için ,

$$c \leq a, \quad c \leq b$$

olacak şekilde bir $c = a.b$ elemanı vardır. c , a ve b elemanlarının çarpımıdır. Bu durumda ,

$$c' \leq a, \quad c' \leq b$$

özelliklerine sahip bir c' varsa $c' \leq c$ dir.

(2) Her $a, b \in L$ için ,

$$d \geq a, \quad d \geq b$$

olacak şekilde bir $d = a+b$ elemanı vardır. d , a ve b elemanlarının toplamıdır. Bu durumda ,

$$d' \geq a, \quad d' \geq b$$

Özelliklerine sahip bir d' elemanı varsa $d' \geq d$ dir.

Şimdi , yukarıdaki tanıma denk olarak kafesin cebirsel tanımını yapalım.

L kümesi , toplam ve çarpım şeklinde iki cebirsel operator tanımlansın. Her $a, b \in L$ çifti için , çarpım $a.b$ ve toplam $a+b$ şeklinde olsun. L kümesi üzerinde , aşağıdaki koşullar gerçekleşiyorsa L kümesine "Lattice" (veya kafes) denir:

(1) Toplam ve çarpım işlemleri değişmeli ve birleşmelidir:

$$ab = ba, \quad a + b = b + a$$

$$a(bc) = (ab)c, \quad a+(b+c) = (a+b)+c$$

(2) Her $a \in L$ için ,

$$aa = a, \quad a + a = a$$

koşulları vardır.

$$(3) \quad ab = a \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

bağıntısı vardır.

ÖRNEK 1.4.1:

Bir G grubunun , tüm altgruplarının kümesini ele alalım. Sıralama bağıntısı , altgruplardaki kapsama işlemi olarak alınsın. Toplam , iki altgrubun birleşimi ve çarpma iki grubun kesişimi olarak tanımlansın. Bu durumda , G grubunun tüm altgruplarının kümesi bir kafestir.

TANIM 1.4.3:

L , bir kafes ve $L' \subset L$ olsun. L' , kümesi L kafesindeki işlemlere göre bir kafes yapısına sahip ise L' kümesine , L nin alt-kafesi denir.

ÖRNEK 1.4.2:

Bir grubun tüm normal altgruplarının kümesi bir kafes dir. Bir grubun normal altgruplarının kafesi , bu grubun altgrupları kafesinin bir alt-kafesidir.

TANIM 1.4.4:

Bir L kafesinin elemanları arasında kafesin diğer tüm elemanları tarafından içerilen elemana en küçük eleman veya boş (null) eleman denir ve 0 sembolü ile gösterilir.

BÖLÜM 2

Her $a \in L$ için ,

$$a0 = 0 \quad , \quad a + 0 = a$$

koşulu gerçekleşir.

Bir L kafesinin elemanları arasında kafesin diğer tüm elemanlarını içeren elemana en büyük eleman veya birimsel (unit) eleman denir ve 1 sembolü ile gösterilir.

Her $a \in L$ için ,

$$a1 = 1 \quad , \quad a + 1 = 1$$

koşulu gerçekleşir.

TEKİR 2.1.3:

χ matrisin izini göstermek üzere ,

$$\chi = \text{tr } f(x) \quad [\quad x \in G \quad]$$

χ matrisin karakteri denir. $(a_{ij}) \in GL_n(K)$ olmak üzere ,

$$\chi(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

TEKİR 2.1.4:

$f : G \rightarrow GL_n(K)$, $h : G \rightarrow GL_n(K)$ iki matris temsili olsun Her $x \in X$ için ,

$$T^{-1}f(x)T = h(x)$$

olacak şekilde $n \times n$ boyutlu bir T matrisi varsa f ve h matrisel temsillerine denktirler (equivalent) denir.

TEKİR 2.1.5:

S , K cismi üzerinde $n \times n$ boyutlu matrislerin bir kümesi ; m , p sabit pozitif tamsayılar olsun.

A_{ij} , $m \times m$ boyutlu ; A_{ji} , $p \times m$ boyutlu ; A_{jj} , $p \times p$ boyutlu matrisleri göstersin.
Her hangi bir $A \in S$ için ,

("Matrisel temsil yerine "matrisel gösteriliş" ifadesi de kullanılabilir.)

BÖLÜM 2

TANIM 2.1.1:

K bir cisim olsun. Matrislerdeki çarpma işlemine göre , K üzerinde tüm $n \times n$ boyutlu tersinir matrislerin grubuna genel lineer grup (general linear group) denir ve $GL_n(K)$ ile gösterilir.

TANIM 2.1.2:

G bir grup , $f : G \longrightarrow GL_n(K)$ bir homomorfi olsun. f homomorfisine , K cismi üzerinde n boyutlu (dereceli) , G grubunun bir matrissel temsili (matrix representation) "*" denir. f homomorfisi birebir ise (yani $\text{Ker } f = \{ e \}$ ise) f e sadık temsili (faithful) denir. f , sadık bir temsil ise G grubu $GL_n(K)$ nin bir alt grubuna izomorftur.

TANIM 2.1.3:

tr , matrisin izini göstermek üzere ,

$$\{ \text{tr } f(x) \mid x \in G \}$$

kümesine temsilin karakteri denir. $(a_{11}) \in GL_n(K)$ olmak üzere ,

$$\text{tr } (a_{11}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

olur.

TANIM 2.1.4:

$f : G \longrightarrow GL_n(K)$, $h : G \longrightarrow GL_n(K)$ iki matris temsili olsun. Her $x \in G$ için ,

$$T^{-1}f(x)T = h(x)$$

olacak şekilde $n \times n$ boyutlu bir T matrisi varsa f ve h matrissel temsillerine denktirler (equivalent) denir.

TANIM 2.1.5:

S , K cismi üzerinde $n \times n$ boyutlu matrislerin bir kümesi; m , p sabit pozitif tamsayılar olsun.

A_{11} , $m \times m$ boyutlu ; A_{21} , $p \times m$ boyutlu ; A_{22} , $p \times p$ boyutlu matrisleri gösterebilir. Her hangi bir $A \in S$ için ,

("*" Matrissel temsil yerine "matrissel gösterilis" ifadesi de kullanılabilir.)

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{21} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde sabit bir $n \times n$ boyutlu P matrisi varsa S ye indirgenebilir (reducible) denir.Eğer böyle bir P matrisi yoksa S ye indirgenemez (irreducible) denir.Her $A \in S$ için ,

$$A_{21} = 0_{p \times m}$$

ise S kümesine yarı indirgenebilir (fully - reducible) Burada , $0_{p \times m}$, $p \times m$ boyutlu sıfır matrisi göstermektedir.

Her bir A_{11} indirgenemez matrisler olmak üzere , her $A \in S$ için ,

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ & A_{22} \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_{rr} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir tersinir P matrisi varsa S kümesine tam indirgenebilir (complete reducible) denir.

TANIM 2.1.6:

f , K cismi üzerinde G grubunun bir matrissel temsili olsun.

$$S = \{ f(x) \mid x \in G \}$$

kümesini ele alalım. S kümesi indirgenebilir ise f e indirgenebilir temsil ; S , yarı indirgenebilir ise f e yarı indirgenebilir temsil ve S , tam indirgenebilir ise f e tam indirgenebilir temsil denir.Ayrıca , f ve h , K cismi üzerinde G grubunun iki matris temsili ise $x \in G$ için ,

$$(f + h)(x) = \begin{bmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & h(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.Bu durumda , X_f , f temsiliinin karakterini ; X_h , h temsiliinin karakterini göstermek üzere $x \in G$ için ,

$$(X_F + X_H)(x) = X_F(x) X_H(x)$$

bağıntısı vardır. Çünkü, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{tr} : \text{GL}_n(K) \rightarrow K$ tasvirini lineer bir tasvirdir. Her $A, B \in \text{GL}_n(K)$ $k_1, k_2 \in K$ için,

$$\text{tr}(k_1 A + k_2 B) = k_1 \text{tr}(A) + k_2 \text{tr}(B)$$

bağıntısı vardır. Burada, $X_F : G \rightarrow K$ ve $X_H : G \rightarrow K$ şeklinde birer fonksiyondur.

TEOREM 2.1.1: (MASCHKE TEOREMİ)

G sonlu bir grup ve K cisminin karakteristiği p olsun. $p \nmid |G|$ ise K cismi üzerinde G grubunun her matrisel temsili tam indirgenebilirdir.

NOT 2.1.1:

Bir cismin karakteristiği, ya 0 yada p asal sayıdır. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cisminin karakteristiği 0 olduğundan her sonlu grubun, $\mathbb{C}$ üzerindeki herhangi bir matrisel temsili tam indirgenebilirdir.

NOT 2.1.2:

X , G grubunun verilen herhangi bir karakteri olsun. $i = 1, 2, \dots, t$ için, X_i ler G grubunun indirgenemez temsili olsun. Bu durumda,

$$X = \sum_{i=1}^t m_i X_i$$

koşulunu sağlayan m_i değerleri vardır. Ayrıca,

$$(1) \sum_{x \in G} X(x) \overline{X_i(x)} = m_i |G|$$

bağıntısı vardır. Burada, G grubunun temsili kompleks sayılar cismi üzerindedir.

$X_i(x)$, $X_i(x)$ karakterinin eşleneği anlamındadır.

$$(2) \sum_{x \in G} X(x) \overline{X(x)} = |G| \sum_{i=1}^t m_i^2$$

bağıntısı vardır. X karakterinin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{x \in G} X(x) \overline{X(x)} = |G|$$

olmasıdır. $A_{\mathbb{C}} = P$ matrisel vektörlerdir ve dolayısıyla olmasıdır. Matrisine inversi vardır. Schur Lemma'ından

NOT 2.1.3:

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde , sonlu bir G grubunun denk olmıyan indirgenemez temsillerinin sayısı sonludur ve bu sayı grubun eşlenik sınıflarının (conjugation classes) sayısına eşittir.

TEOREM 2.1.2:

Her $x \in G$ için , $P f_1(x) = f_2(x) P$ olacak şekilde , K cismi üzerinde , G grubunun iki indirgenemez temsili $f_1 : G \rightarrow GL_n(K)$ ve $f_2 : G \rightarrow GL_m(K)$ olsun.Bu durumda iki olasılık vardır:

(1) $P = 0$

(2) P tersinir ve $f_1(x) = P^{-1} f_2(x) P$ dir.Yani , f_1 ve f_2 denk temsillerdir.

TANIM 2.1.7:

K cismi üzerinde her polinom , K cisminde en az bir köke sahip ise K cismine cebirsel olarak kapalıdır (algebraically closed) denir.

TEOREM 2.1.3:

K , cebirsel olarak kapalı bir cisim olsun. $f : G \rightarrow GL_n(K)$ G grubunun indirgenemez bir matrisel temsili olsun. $x \in G$ için , tüm $f(x)$ matrisleri ile değişme özelliğine sahip matrisler aI_n ($a \in K$) şeklindeki skaler matrislerdir.

İspat:

$x \in G$ için , tüm $f(x)$ matrisleri ile değişme özelliğine sahip bir matrisi P ile gösterelim.Bu durumda , $x \in G$ için

$$f(x) P = P f(x)$$

dir. $a \in K$ ele alalım.Her $x \in G$ için ,

$$(1) (aI_n - P) f(x) = f(x) (aI_n - P)$$

dir K cebirsel olarak kapalı olduğundan ,

$$| \lambda I_n - P | = 0$$

koşulunu sağlayan , λ değerleri vardır. Ayrıca , λ değerleri P matrisinin karakteristik kökleridir.

$$| \lambda I_n - P | = 0$$

oldüğundan , $\lambda I_n - P$ matrisi singülerdir ve dolayısıyla $\lambda I_n - P$ matrisinin inversi yoktur.Schur Lemma ' sından

(Teorem 2.1.3. den) $\lambda I_n - P$ matrisi sıfır matris olmak zorundadır. Buradan ,

$\lambda I_n - P = 0 \Rightarrow P = \lambda I_n$ bulunur. Bu da bize ispatı verir.

NOT 2.1.4:

C kompleks sayılar cismi , cebirsel olarak kapalıdır.

TANIM 2.2.1:

A , C kompleks sayılar cismi üzerinde $n \times n$ boyutlu bir matris olsun.

$A^T = A^*$ olmak üzere ,

$$A A^* = I$$

ise A matrisine uniter (unitary) denir. $f: G \rightarrow GL_n(C)$ sonlu bir G grubunun bir matrissel temsili olsun. Her $x \in G$ için , $f(x)$ uniter ise f temsiline uniter temsil denir.

TEOREM 2.2.1:

Herhangi bir $f: G \rightarrow GL_n(C)$ matrissel temsili , bir uniter temsile denktir.

TEOREM 2.2.2:(BİRİNCİ ORTAGONALLIK BAĞINTISI)

$f^{(u)}$ ve $f^{(v)}$, C kompleks sayılar cismi üzerinde sonlu bir G grubunun birbirlerine denk olmıyan matrissel temsilleri olsun.

$$X^{(u)} : G \rightarrow C \quad \text{ve} \quad X^{(v)} : G \rightarrow C$$

karakter tasvirleri olsun. Ayrıca ,

$X(x)$, $X(x)$ karakterinin kompleks eşleniğini göstermek üzere ,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1 & u = v \\ 0 & u \neq v \end{cases}$$

olsun. Bu durumda ,

$$\sum_{x \in G} \overline{X^{(u)}(x)} X^{(v)}(x) = \delta_{uv} |G|$$

bağıntısı vardır.

SONUÇ 2.2.1:

f , C kompleks sayılar cismi üzerinde G sonlu grubunun bir matrissel temsili olsun. $f : G \rightarrow GL_n(C)$ ve karakter tasviri $\chi : G \rightarrow C$ olsun. Bu durumda, f , G grubunun bir indirgenemez temsili olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi(x)} = |G|$$

olmasıdır.

TEOREM 2.2.3: (İKİNCİ ORTAGONALLIK BAĞINTISI)

C kompleks sayılar cismi üzerinde sonlu G grubunun indirgenemez matrissel temsili

$$f^{(u)} : G \rightarrow GL_n(C)$$

olsun ve karakter tasviri $\chi^{(u)}$ ile gösterilsin.

$$\delta(z, y) = \begin{cases} 1 & z, y \text{ } G \text{ nin aynı eşlenik sınıfına ait ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda,

$$(1) \quad \sum_{u=1}^r \chi^{(u)}(z) \overline{\chi^{(u)}(y)} = \sum_{u=1}^r \chi^{(u)}(z) \chi^{(u)}(y^{-1}) = \left(|G| / |Z| \right) \delta(z, y)$$

bağıntısı vardır.

(2) G grubunun denk olmayan indirgenemez matrissel temsillerinin sayısı, G grubunun eşlenikleri sayısına eşittir.

TANIM 2.2.4:

$\langle x \rangle$ bir devresel grup olsun. $u = 1, 2, \dots, n$ için, $n = |\langle x \rangle|$ olmak üzere,

$$f^{(u)}(x) = e^{2\pi i u/n}$$

$\langle x \rangle$ devresel grubunun n tane farklı indirgenemez temsidir ve bu temsillerin derecesi 1 dir. Böyle temsillere lineer temsil denir.

NOT 2.2.1:

$e^{2\pi i/n}$, kompleks sayılar cisminde aritmetik birimin (unity) , n.inci köküdür.

TEOREM 2.2.4:

$f : G \rightarrow GL_m(C)$, C kompleks sayılar cismi üzerinde G devresel grubunun bir matrissel temsili , $X(x) = \text{tr } f(x)$ ve $X : G \rightarrow C$ karakter tasviri olsun. $t \mid |G|$ ve her bir λ_1 C kompleks sayılar cismi üzerinde aritmetik birimin t.inci kökü olmak üzere , her $x \in G$ için ,

$$X(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

bağıntısı vardır.

İspat:

G sonlu ve devresel bir grup olduğundan ve $t \mid |G|$ olduğundan G grubunda t mertebeli en az bir $x_0 \in G$ vardır. Bu durumda , $\langle x_0 \rangle$, G grubunun t mertebeli sonlu devresel bir altgrubudur. $\langle x_0 \rangle$ altgrubunun bir

$$f' : \langle x_0 \rangle \rightarrow GL_m(C)$$

temsili , f temsiliinin $\langle x_0 \rangle$ altgrubuna kısıtlanmışdır. f' temsilli tam indirgenebilirdir. $\langle x_0 \rangle$ altgrubunun indirgenemez temsillerinin derecesi 1 dir (Teorem 2.2.5 den). Bu durumda , $x \in \langle x_0 \rangle$ için ,

$$T^{-1} f'(x) T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir T matrisi vardır. Burada , her bir λ_i ler birer kompleks sayıdır.

$$(T^{-1} f'(x) T)^t = (T^{-1} f'(x) T) (T^{-1} f'(x) T) \dots (T^{-1} f'(x) T)$$

$$= T^{-1} f'(x) T$$

$$= T^{-1} f'(e) T$$

$$= T^{-1} T$$

$$= I_m$$

temellerinin sayısını gösterir. Yani, G grubunun eşlenik bulunur. Buradan, n_i ler ($i = 1, 2, \dots, r$) indirgenemez temellerin derecesi olmak üzere,

$$I_m = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & & 0 \\ & \lambda_2^t & \\ 0 & & \lambda_m^t \end{bmatrix}$$

olduğundan $i = 1, 2, \dots, m$ için, $\lambda_i^t = 1$ bulunur. Aynı zamanda $x \in \langle x_0 \rangle$ için, $x_0 \in G$ olduğundan

$$f(x_0) = f'(x_0)$$

dir. Buradan, denk temsillerinin karakterleri eşit olduğundan,

$$X(x) = \text{tr } f(x) = \text{tr } f'(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

bulunur. $|G|$ nin tüm bölenleri için benzer işlemler yapılabilir. Böylece, G grubundaki tüm elemanlar taranmış olur. Buradan da, her $x \in G$ için,

$$X(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

elde edilir.

NOT 2.2.2:

G bir grup olsun. $a, b \in G$ için,

$$[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b$$

ile üretilen altgruba, G grubunun komutatör (commutator) altgrubu denir ve genellikle G' ile gösterilir. Bu durumda,

(1) G değişmeli ise $|G / G'| = |G|$ dir.

(2) $G' = e \Leftrightarrow G$ değişmelidir.

(3) $G' \triangleleft G$ dir.

(4) G / G' değişmelidir.

(5) G / N değişmeli ise $G' \subset N$ dir.

NOT 2.2.3:

Buradan, sonlu bir G grubunun denk olmıyan indirgenemez

temsillerinin sayısını gösterebilirsin. Yani, G grubunun eşlenik sınıflarının sayısı olsun. n_i ler ($i = 1, 2, \dots, r$ için) indirgenemez temsillerin derecesi olmak üzere,

$$|G| = X(e) = \sum_{i=1}^r n_i^2$$

bağıntısı vardır.

TEOREM 2.2.5:

G , sonlu bir grup ve G grubunun komutator altgrubu

$$G' = \langle a^{-1} b^{-1} a b \mid a, b \in G \rangle$$

olsun. Bu durumda, G grubunun derecesi 1 olan indirgenemez matrisel temsillerin sayısı,

$$|G / G'|$$

ne eşittir.

İspat:

C^* , sıfırdan farklı tüm kompleks sayıların kümesi olsun. $f: G \rightarrow C^*$, G sonlu grubunun derecesi 1 olan bir indirgenemez temsili olsun. Bu durumda,

$$G / \text{Ker } f \cong f(G)$$

dir. C^* kümesi değişmeli olduğundan, $G / \text{Ker } f$ de değişmelidir. Not 2.2.2 deki (5).inci ifadeden dolayı $G' \subset \text{Ker } f$ olur.

$\bar{g} = gG'$ kosetini göstermek üzere,

$$h(\bar{g}) = f(g)$$

olacak şekilde, bir $h: G / G' \rightarrow C^*$ tasvirini tanımlıyalım. $G' \subset \text{Ker } f$ olduğundan ve

$$G / \text{Ker } f \cong G$$

oldüğünden h tasviri iyi-tanımlıdır. Ayrıca, $h, G / G'$ grubunun C^* içine bir homomorfidir. Buradan, h , derecesi 1 olan G / G' grubunun bir temsiliidir. G / G' değişmeli olduğundan (Not 2.2.2. deki (4).üçüncü ifadeden), G / G' grubu

$$|G / G'|$$

tane eşlenik sınıfına sahiptir. Bunu, r ile gösterelim. Buradan, G / G' grubunun r tane indirgenemez temsili vardır. Not 2.2.3 den dolayı

$$| G / G' | = \sum_{i=1}^r n_i^2$$

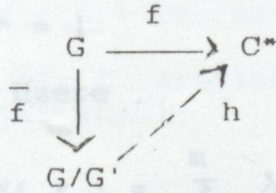
olur. Buradan , n_i , G / G' grubunun i .inci indirgenemez temsilin derecesini göstermektedir. Böylece ,

$$r = \sum_{i=1}^r n_i^2$$

olur. $i = 1, 2, \dots, r$ için , $n_i = 1$ olmak zorundadır. O halde , G / G' grubunun tüm indirgenemez temsillerinin derecesi 1 dir. $g \in G$ için ,

$$\bar{f}(g) = g G'$$

olacak şekilde bir $\bar{f} : G \longrightarrow G / G'$ doğal homomorfisi vardır. Bu durumda ,



diyagramı söz konusudur. Buradan , G grubunun derecesi 1 olan temsilleri ile G / G' grubunun temsilleri arasında birebir bir tasvir vardır. O halde , G grubunun derecesi bir olan indirgenemez temsillerinin sayısı ,

$$r = | G / G' |$$

ne eşittir.

TANIM 2.2.3:

Sonlu G grubunun elemanları üzerinde indirgenemez karakterlerin değerlerini gösteren tabloya karakter tablosu denir.

NOT 2.2.4:

C_1 , G sonlu grubunun i .inci eşlenik sınıfını ve h_1 , C_1 eşlenik sınıfındaki elemanların sayısını gösterebilir. e , G grubunun birim elemanı olmak üzere , $C_1 = \{ e \}$ olsun. Bu durumda , karakter tablosu , aşağıdaki şekildedir.

$X_{i,1}$, i .uncu indirgenemez karakteri göstermektedir. Herhangi bir $x \in C_1$ için , $a_{1,1}$, $X_1(x)$ olup bir kompleks sayıdır.

	$C_1=(e)$ h_1	C_2 h_2	C_3 h_3	$\dots$	C_r h_r
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1r}
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2r}
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3r}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_r	a_{r1}	a_{r2}	a_{r3}	$\dots$	a_{rr}

SONUÇ 2.2.2:

Karakter tablosunun özellikleri şunlardır:

(1) t değerleri için , her bir a_{1j} elemanı , kompleks sayılar cismindeki aritmetik birimin t .inci köklerinin bir toplamıdır.Yani ,

$$\lambda^t = 1$$

olmak üzere ,

$$a_{1j} = X(x_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

dir.

(2) Her $x \in G$ için , $f(x) = 1$ olmak üzere ,

$$f : G \longrightarrow C^*$$

temsiline aşıkâr (trivial) temsil denir ve karakteri X_1 ile gösterilir.

(3) i .inci indirgenemez temsilin derecesi $a_{11} = n_i$ dir.

(4) G grubunun denk olmıyan indirgenemez temsillerinin sayısı r olmak üzere ,

$$\sum_{i=1}^r n_i^2 = \sum_{i=1}^r a_{11}^2 = |G|$$

eşitliği vardır.

(5) Derecesi 1 olan temsillerin sayısı , $|G / G'|$ ne eşittir.

(6) Karakter tablosunda , her $i=1, \dots, r$ için , i .inci satır

$(a_{11}, \dots, a_{12}, \dots, a_{13}, \dots, a_{1r}, \dots)$

şeklinde bir vektördür. Burada a_{1j} , $|C_j| = h_j$ defa bulunmaktadır. Her bir satır, diğer her bir satıra ortagonaldir. Yani, kompleks iç çarpımları sıfırdır. (Teorem 2.2.2, Birinci Ortagonallik Bağıntısı)

(7) Her bir satırın kendisiyle iç çarpımı, $|G|$ ne eşittir. (Teorem 2.2.2 den)

(8) Her bir sütun,

$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj})^T$

şeklinde birer kompleks vektördür. Her sütun, diğer her bir sütun ile ortagonaldir. Yani, kompleks iç çarpımları sıfırdır. (Teorem 2.2.3, İkinci Ortagonallik Bağıntısı)

(9) j.inci sütunun kendisiyle kompleks iç çarpımı

$|G| / |C_j|$

ne eşittir. (Teorem 2.2.3 den)

(10) Bir X karakterinin indirgenemez olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{x \in G} X(x) \overline{X(x)} = |G|$$

olmasıdır.

ÖRNEK 2.2.1:

G sonlu grubu,

$$G = \langle x, y \mid x^4 = e, x^2 = y^2, xy^{-1} = yx \rangle$$

şeklinde olsun. G grubunun karakter tablosunu oluşturalım.

Çözüm:

G grubu,

$$G = \{ e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y \}$$

şeklinde yazılabilir. G grubunun eşlenik sınıfları,

$$[e], [x], [x^2], [y], [xy]$$

dir. Buradan, G grubunun indirgenemez temsillerinin sayısı 5 dir. Bunları sırasıyla, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ile gösterelim.

G / G' değişmeli olduğundan ,

$$G / G' = \langle x, y \mid x^4 = e, x^2 = y^2, xy^{-1} = yx, xy = yx \rangle \\ = \langle x, y \mid x^4 = e, x^2 = y^2, xy = yx \rangle$$

olur. Buradan , $x^4 = e$ olduğundan ,

$$x^2 y^2 = e \Rightarrow xxyy = e$$

olur. $xy = yx$ olduğundan ,

$$x(xy)y = e \Rightarrow x(yx)y = e$$

olur. $xy^{-1} = yx$ olduğundan

$$x(xy^{-1})y = e \Rightarrow x^2 = e$$

bulunur. Buradan ,

$$G / G' = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

bulunur. Böylece ,

$$G / G' = \{ e, x, y, xy \}$$

şeklindedir. $| G / G' | = 4$ olur. O halde , G grubunun derecesi 1 olan 4 tane indirgenemez temsili vardır. X_1 aşıkâr temsili göstermek üzere , G grubunun derecesi bir olan indirgenemez temsilleri X_1, X_2, X_3, X_4 olsun. X_5 temsili'nin derecesini n ile gösterelim.

$$\sum_{i=1}^r n_i^2 = | G |$$

bağıntısından

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + n^2 = 8$$

$$n^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow n = 2$$

bulunur. X_5 karakterinin derecesi 2 dir. Derecesi 1 olan temsiller için , $f(x)$ ve $f(y)$ G grubunun tanımlıyıcılarını gerçeklemek üzere ,

$$f : G \longrightarrow C^*$$

homomorfilerini bulmaya çalışalım. X_1 aşıkâr temsili için , $x \longrightarrow 1, y \longrightarrow 1$ dir. X_2 temsili için ,

$$x \longrightarrow -1, y \longrightarrow 1$$

ile temsil edildiğini kabul edelim. Bu durumda , $f(x) = -1$,

$f(y) = 1$ dir ve $f(x)$, $f(y)$ G grubunun tanımlıyıcılarını gerçeklemek zorundadır.

$$(f(x))^4 = (-1)^4 = 1$$

$$f(x)^2 = (-1)^2 = 1 = f(y)^2$$

$$f(x) = f(y) f(x) f(y) \text{ için } , \quad -1 = 1(-1)1 = -1$$

olur.(Burada , $xy-1= yx \Rightarrow x = yxy$ bağıntısı kullanılmıştır.) Buradan ,

$$X^2(x) = -1 \quad \text{ve} \quad X^2(y) = 1$$

dir.Benzer mantıkla ,

$$X^3(x) = 1 \quad \text{ve} \quad X^3(y) = -1$$

$$X^4(x) = -1 \quad \text{ve} \quad X^4(y) = -1$$

bulunur.Bu durumda , G grubunun karekter tablosu ,

	$C_1=[e]$ 1	$C_2=[x]$ 2	$C_3=[x^2]$ 1	$C_4=[y]$ 2	$C_5=[xy]$ 2
X_1	1	1	1	1	1
X_2	1	-1	1	1	-1
X_3	1	1	1	-1	-1
X_4	1	-1	1	-1	1
X_5	2	a	b	c	d

şeklinde dir.Şimdi a,b,c,d sayılarını belirliyelim.İlk iki sütunun ortagonallığından ,

$$(1,1,1,1,2)(1,-1,1,-1,a) = 0$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

bulunur. 1.inci ve 3.üncü sütunların ortagonallığından ,

$$(1,1,1,1,2)(1,1,1,1,b) = 0$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

bulunur. 1.inci ve 4.üncü sütunların ortagonallığından ,

$$(1,1,1,1,2)(1,1,-1,-1,c) = 0$$

$$1 + 1 - 1 - 1 + 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

bulunur. 1.inci ve 5.üncü sütunların ortagonallığından ,
 $(1,1,1,1,2)(1,-1,-1,1,d) = 0$
 $1 - 1 - 1 + 1 + 2d = 0 \Rightarrow d = 0$

bulunur. Bu durumda , G grubunun karakter tablosu ,

	$C_1=[e]$ 1	$C_2=[x]$ 2	$C_3=[x^2]$ 1	$C_4=[y]$ 2	$C_5=[xy]$ 2
X_1	1	1	1	1	1
X_2	1	-1	1	1	-1
X_3	1	1	1	-1	-1
X_4	1	-1	1	-1	1
X_5	2	0	-2	0	0

şeklindedir. Derecesi 2 olan temsili bulmaya çalışalım.

$$f(x) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad f(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

temsili bir

$$f : G \longrightarrow GL_2(K)$$

homomorfisi tanımlar. $f(x)$ ve $f(y)$, G grubunun tanımlıyıcılarını gerçeklemelidirler.

$$f(x)^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(y)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilerek , $f(x)$ ve $f(y)$ nin G grubunun tanımlıyıcılarını gerçeklediği gösterilir. f homomorfi olduğundan ,

$$f(x^2) = f(x)^2$$

dir. Buradan , $X_5(x^2) = -2$ dir. Benzer düşüncü tarzıyla , devam edilirse , bu karakterlerin karakter tablosundaki değerler olduğu görülür. O halde bu temsil , G grubunun derecesi 2 olan indirgenemez temsildir. Şimdi , X_5 in indirgenemez temsilin karakteri olduğunu gösterelim. Yani ,

$$\sum_{x \in G} X_5(x) \overline{X_5(x)} = 8$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} X_5(x) \overline{X_5(x)} &= X_5(e) \overline{X_5(e)} + 2X_5(x) \overline{X_5(x)} + X_5(x^2) \overline{X_5(x^2)} + \\ &\quad 2X_5(y) \overline{X_5(y)} + 2X_5(xy) \overline{X_5(xy)} \\ &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-2)(-2) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ &= 8 = |G| \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^5 m_i X_i = X_1 + 2X_2 + 0X_3 + X_4 + 2X_5 \\ &= X_1 + 2X_2 + X_4 + 2X_5 \end{aligned}$$

olacak şekilde , X , G grubunun herhangi bir karakteri olsun. Burada ,

$$m_1 = 1 , m_2 = 2 , m_3 = 0 , m_4 = 1 , m_5 = 2$$

keyfi olarak verilmiştir. X karakterinin matrissel temsillerini oluşturalım.

$$\begin{aligned} f_1 : x &\longrightarrow 1 & , & & f_1 : y &\longrightarrow 1 \\ f_2 : x &\longrightarrow -1 & , & & f_2 : y &\longrightarrow 1 \\ f_4 : x &\longrightarrow -1 & , & & f_4 : y &\longrightarrow -1 \end{aligned}$$

$$f_5 : x \longrightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} , \quad f_5 : y \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = X_1 + 2X_2 + X_4 + 2X_5$$

olduğundan

BÖLÜM 3

Soñlu belirlenebilen bir grup G için belirli bir altgrup H için
 Koset H sayı -1 bulan bir algoritma Todd ve Coxeter
 tarafından bulunmuştur (1936). 1967'de J. Leech ve 1984
 G. M. Robinson tarafından geliştirilmiştir. Şimdi, Todd
 Coxeter algoritması için bilinen bu Koset sayma işlemi
 inceliyalım.

$$x \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{KOSET YOLU}$$

G sonlu belirlenebilen bir grup olsun.

$G = \langle S \rangle$ $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ n elemanlı bir küme
 şeklinde verilsin. $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ m elemanlı bir küme
 $y \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $G = (S/R)$ yazalım.
 Her bir $s_i \in S$ için $s_i^2 = 1$ ve $r_j \in R$ için $r_j = 1$ olarak alalım.

bulunur. X , G grubunun derecesi 8 olan indirgenebilir
 bir temsili karakteridir. Burada, $X(x) = -2$, $X(y) = 2$
 olur. Derecesi 1 olan tüm temsillerin karakterleri G
 grubundan C^* içine bir homomorfiyi belirtirler. Buradan,
 $i = 1, 2, 3, 4$ için,

$$X_i : G \rightarrow C^*$$

bir homomorfidir.

H alt grubunu ele alalım. H grubunun bir alt grubu olsun. H
 alt grubu S kümesi ile üretilsin. Koset sayma işleminde
 kullanılan iki temel gerçeği:

- (1) $H = \langle S \rangle$ olduğundan $s_i \in S$ için $Hs_i = H$
 dir.
- (2) $r_j \in R$ için $r_j^2 = 1$ olduğundan $Hr_j = H$
 ($x \in G$ bir Hx koseti için)

$$Hx = \{x, s_1x, \dots, s_nx\}$$

dir.

$$s_i \in S \text{ için,}$$

$$r_j \in R \text{ için,}$$

olarak alalım. $s_i \in S$ için,

BÖLÜM 3

Sonlu belirilebilen bir grubun , belirli bir altgrubunun koset sayısını bulan bir algoritma Todd ve Coxeter tarafından bulunmuştur (1936).1967 ' de J.Leech ve 1984 de M.D.Atkinson tarafından geliştirilmiştir.Şimdi , Todd - Coxeter algoritması olarak bilinen bu koset sayma işlemini inceleyelim.

KOSET SAYMA İŞLEMİ:

G sonlu belirtilebilen bir grup olsun.

$$G = \langle g_1, \dots, g_n \mid r_1(g_1, \dots, g_n) = e, \dots, r_m(g_1, \dots, g_n) = e \rangle$$

şeklinde verilmiş olsun. $E = \{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$ üreteçler kümesi,

$$R = \{ r_i(g_1, \dots, g_n) \mid i = 1, 2, \dots, m \}$$

tanımlıyıcı kümesi olmak üzere , $G = \langle E / R \rangle$ yazılabilir. Her bir

$$r_i(g_1, g_2, \dots, g_n) = g_{i1} g_{i2} \dots g_{it}$$

tanımlıyıcıları $g_1, g_2, \dots, g_n$ üreteçlerinden oluşan birer sözcüktür.

$$g_{i1} \in \{ g_1, g_2, \dots, g_n, g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1} \} = \bar{E}$$

olacak şekilde , $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{it}$ sonlu bir kümedir. G grubunun sözcüklerinden oluşan

$$S = \{ s_1(g_1, \dots, g_n), \dots, s_p(g_1, \dots, g_n) \}$$

kümesini ele alalım. H , G grubunun bir altgrubu olsun. H altgrubu S kümesi ile üretilsin. Koset sayma işleminde kullanılan iki temel gerçek :

(1) $H = \langle S \rangle$ olduğundan $s(g_1, \dots, g_n) \in S$ için $Hs = H$ dir.

(2) $r(g_1, \dots, g_n) \in R$ için , $r(g_1, \dots, g_n) = e$ olduğundan $(x \in G)$ bir Hx koseti için ,

$$Hx r(g_1, \dots, g_n) = Hx$$

dir.

$$g_{i1} \in \bar{E} \text{ için ,}$$

$$r(g_1, \dots, g_n) = g_{i1} g_{i2} \dots g_{it}$$

olarak alalım. $s(g_1, \dots, g_n) \in S$ için ,

$$H_0 = H s = H$$

$$H_1 = H_0 g_{11} = H g_{11}$$

$$H_2 = H_1 g_{12} = H_0 g_{11} g_{12}$$

...

$$H_3 = H_{3-1} g_{13} = H g_{11} g_{12} \dots g_{13}$$

...

$$H_t = H_{t-1} g_{1t} = H g_{11} g_{12} \dots g_{1t} = H$$

dir. Çünkü , $g_{11} g_{12} \dots g_{1t} = e$ dir. $x \in G$ için , $H_0 = H x$ ise ,

$$H_1 = H_0 g_{11}$$

$$H_2 = H_1 g_{12} = H_0 g_{11} g_{12} = H x g_{11} g_{12}$$

...

$$H_t = H_0 g_{11} g_{12} \dots g_{1t} = H x = H_0$$

dir. H alt grubunu 1 ile gösterelim. Yani , H alt grubunun göstericisi 1 olsun. $g_{1i} \in E$ için ,

$$s(g_1, \dots, g_n) = g_{11} g_{12} \dots g_{1t}$$

olsun. Bu durumda , alt grup tablosu ,

	g_{11}	g_{12}	...	g_{1t}
1				1

şeklinde dir. Alt grup tablosu , 1 ile başlayıp 1 ile biter. Çünkü , 1 , H alt grubunun temsilcisi idi. k , H alt grubunun herhangi bir kosetini göstermek üzere ,

$$k g_{1i} = q$$

bağıntısı , alt grup tablosunda , H alt grubunun koseti olan

	g_{1i}
k	q

şeklinde ifade edilebilir. Her bir

$$r(g_1, \dots, g_n) = g_{11} \dots g_{1t}$$

tanımlıyıcıları için , birer tanımlıyıcı tablosu oluşturulur. Tanımlıyıcı tabloları ,

	g_{11}	g_{12}	...	g_{1t}
1				1
2				2
...				...
k				k

şeklinde dir. Bu durumda , $k = 1, 2, \dots, n$ için , her bir satır k ile başlar ve k ile sona erer. Çünkü ,

$$r(g_1, \dots, g_n) = g_{11} g_{12} \dots g_{1t} = e$$

dir. Her üretecin ve bunların inverslerinin yer aldığı bir koset tablosu oluşturulur. G grubunun involusyon elemanları koset tablosunda tek bir sütunda yer alır.

($g \in G$ için , $g^2 = e$ koşulunu sağlayan g elemanına involusyon (involution) denir.)

Koset tablosu ,

	g_1	g_1^{-1}	g_2	g_2^{-1}	...	g_n	g_n^{-1}
1							
2							
...							
k							

şeklinde dir. $g \in E$ için , k , H alt grubunun koseti olmak üzere ,

$$k g = q$$

koseti tanımlanır. Tüm tablolarda , k .inci satır , g .inci sütuna q koset göstericisi yerleştirilir. Burada ,

$$k g = q \quad \Leftrightarrow \quad k = q g^{-1}$$

olduğundan , tüm tablolarda , q .uncu satır g^{-1} .inci sütuna k koset göstericisi yerleştirilir.Bu durumda , tablolardan yeni bazı bilgiler elde edilebilmektedir.Yani , tablolar kullanılarak yeni bir koset göstericisi elde edilebilir. Böyle bir işleme tümdengelim (deduction) adı verilir. Tümdengelim işlemi sonucunda ulaşılabilecek üç olasılık vardır.

Tümdengelim sonucunda ,

$$k_1 g_1 = q_1 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = q_1 g_1^{-1}$$

bulunmuş olsun.Bu durumda , bu üç olasılık ;

(1) Koset tablosunda , $k_1 g_1$ ve $q_1 g_1^{-1}$ in yerleri boştur.Bu durumda , $k_1 g_1$ yerine q_1 ; $q_1 g_1^{-1}$ yerine k_1 yerleştirilir.

(2) Koset tablosunda , $k_1 g_1$ ve $q_1 g_1^{-1}$ in yerlerinde sırasıyla q_1 ve k_1 bulunmaktadır.Bu durumda ,bu tümdengelim sonucunda hiç bir yeni bilgi elde edilemez.

(3) Koset tablosunda , $k_1 g_1$ ve $q_1 g_1^{-1}$ yerlerinden en az birinde farklı bir koset göstericisi bulunabilir.Yani , aynı koset iki farklı koset göstericisine sahip olabilir. Buna , çakışım (coincidence) denir.Bu durumda , koset göstericisi olarak daima küçük olan alınır.Böylece , işlemin çok büyük sayılara ulaşması önlenmiş olur.Bu işlemler , tüm tablolar aynı anda sonuçlanana kadar devam edilir.H altgrubu , G grubunda sonlu indeksli ise işlem sonlu adımda tamamlanacaktır.

Şimdi , çakışimleri ortadan kaldıracak bir yöntem verelim:

$a \neq b$ olmak üzere , a ve b sayıları aynı koseti temsil etsinler.Her $g \in G$ için ,

$$ag = bg$$

olsun.Yani , a ve b çakışım durumunda olsunlar.Bu durumda , bir denklik bağıntısı kuralım.Bu şekildeki a ve b sayılarına denktir denir. $a < b$ olsun.Bu durumda , sırasıyla şu işlemlere yapılır:

(1) Tüm tablolarda , her $g \in E$ için , bg yerine ag ler yerleştirilir.

(2) Yeni bir çakışım olup olmadığı kontrol edilir.Bunun için , ag ve bg lerin bulundukları yerlere bakılır.

(a) bg nin yeri boş ise hiç bir işlem yapılmaz.

(b) bg yerinde bulunan eleman bu denklik sınıfında ise hiç bir işlem yapılmaz.

(c) bg nin yerinde bir c elemanı varsa ve ag nin yeri boşsa, bu durumda, ag yerine c elemanı yerleştirilir.

(d) ag nin yerinde c , bg nin yerinde c' varsa c ve c' kosetleri denktirler denir. Yani, c ve c' çakışım durumundadır. c ve c' için, aynı işlemler tekrarlanır.

(3) Tüm tablolardan, b.inci satır silinir.

İlk çakışım belirlendikten sonra koset tablosunda aşağıdaki koşul gerçekleşmelidir.

(P) $g \in E$ için, $ag = b$ ise $bg^{-1} = a$ olmalıdır. Yani, tüm ag yerlerinde b varsa tüm bg^{-1} yerlerinde de a olmalıdır.

Eğer bir çakışımından sonra diğer bir çakışım daha bulunmuş ise koset tablosunda aşağıdaki koşul gerçekleşmelidir.

(P') Önceki çakışımın sonucu oluşan denklik sınıfını A ile, sonraki çakışım sonucu oluşan denklik sınıfını B ile gösterelim. Bu durumda,

$g \in E$, $ag = b$ olmak üzere $a \in A$ ve $b \in B$ için,
 $b'g^{-1} = a'$

olacak şekilde, $a' \in A$ ve $b' \in B$ vardır.

ÖRNEK 3.1.1:

$$G = \langle a, b \mid a^4 = e, a^2 b a b^{-2} = e \rangle$$

ve $H = \langle a \rangle$ olsun. H altgrubunun G grubundaki indeksini belirliyelim.

Çözüm:

$H = \langle a \rangle$ olduğundan, altgrup tablosu

	a
1	1

şeklindedir. Buradan, $1a = a$ dir. Koset tanımlarımız,

$$2 = 1b, \quad 3 = 1b^{-1}, \quad 4 = 2a, \quad 5 = 2a^{-1},$$

$$6 = 3a, \quad 7 = 3a^{-1}, \quad 8 = 3b^{-1}$$

olsun. Bunları , tanımlıyıcı tablolarında yerlerine yerleştirelim.

$a^4 = e$ için , tanımlıyıcı tablosu ;

	a	a	a	a
1	1	1	1	1
2	4			2
3	6		7	3
4		5	2	4
5	2	4		5
6				6
7	3	6		7
8				8

şeklindedir. $a^2 b a b^{-2} = e$ için , tanımlıyıcı tablosu ;

	a	a	b	a	b^{-1}	b^{-1}
1	1	1	2	4	$\langle - \rangle$ 2	1
2	4					2
3			5	2	1	3
4						4
5	2	4				5
6						6
7	3	6				7
8	$\langle - \rangle$ 7	3	1	1	3	8

şeklindedir. $4 b^{-1} = 2$ bağıntısı , tümdengelim ile elde edilmiş olup bu " $\langle - \rangle$ " ile gösterilmiştir. Şimdi , $4 b^{-1} = 2$ olduğunu , tanımlıyıcıları kullanarak gösterelim.

$4 = 2a$, $2 = 1b$ den $4 = (1b) a = 1ba$ olur.

$1a = 1$ den , $4 = (1) ba = 1aba$ olduğundan ,

$4 = (1a) aba = 1a^2ba$

bulunur. $a^2bab^{-2} = e$ tanımlıyıcısından , $a^2ba = b^2$ olup ,

$4 = 1a^2ba \Rightarrow 4 = 1b^2$;

$1b = 2$ den , $4 = 1b^2 = (1b) b = 2b \Rightarrow 4 = 2b$

bulunur. $4 = 2b \Leftrightarrow 4b^{-1} = 2$ dir.

Ayrıca , ' $\langle - \rangle$ ' ile gösterilen $8a = 7$ bağıntısı da tümdengelim ile bulunmuştur. Benzer şekilde , $8a = 7$ olduğu grubun tanımlıyıcıları ve tanımlı koset göstericileri kullanılarak gösterilebilir. Bu durumda , tanımlıyıcı tabloları ;

	a	a	a	a
1	1	1	1	1
2	4			2
3	6	<->	8	7
4			5	2
5	2	4		5
6				6
7	3	6	8	7
8	7	3	6	<->

	a	a	b	a	b ⁻¹	b ⁻¹
1	1	1	2	4	2 ₁	1
2	4				4	2
3	6		5	2	1	3
4						4
5	2	4				5
6						6
7	3	6				7
8	7 ₂	3	1	1	3	8

şeklinde. Buradan , " 2₁" deki , 1 alt indisi 1.inci tündengelimi olduğunu göstermektedir. Buradan , a⁴ = e tanımlıyıcı tablosunun 3.üncü satırından 6a = 8 bulunmuştur. Bu , 3.üncü tündengelimidir. Tanımlıyıcı tablolarına , 6a = 8 ifadesini yerleştirelim. Bu durumda , tanımlıyıcı tabloları ;

	a	a	a	a
1	1	1	1	1
2	4			2
3	6	8 ₂	7	3
4		5	2	4
5	2	4		5
6	8	7	3	6
7	3	6	8	7
8	7	3	6	8

	a	a	b	a	b ⁻¹	b ⁻¹
1	1	1	2	4	2 ₁	1
2	4				4	2
3	6	8	<->	5	1	3
4						4
5	2	4				5
6	8	7				6
7	3	6				7
8	7 ₂	3	1	1	3	8

şeklindedir. Buradan , $8b = 5$ tündengelimini elde ettik. Oysa , tanımlarımızdan dolayı ,

$$8 = 3b^{-1} \Leftrightarrow 8b = 3$$

idi. Bu durumda , 5 ve 3 kosetleri arasında bir çakışım bulunmaktadır:

(1) Tüm tablolarda , 5 yerine 3 yerleştirilir.

(2)(d) Koset tablosunda $g \in \{ a , a^{-1} , b , b^{-1} \}$ için , $5g$ ve $3g$ yerlerini karşılaştırılır. Koset tablosu ,

	a	a^{-1}	b	b^{-1}
1	1	1	2	3
2	4	5	4 ₁	1
3	6	7	1	8
4		2		2 ₁
5	2			
6	8	3		
7	3	8		
8	7	6		

şeklinde olacaktır. Bu durumda , $5a$ ve $3a$ nın yerlerini karşılaştıralım.

$$3a = 6 \quad 5a = 2$$

olduğundan , 2 ve 6 kosetleri arasında bir çakışım söz konusudur. Yani , 2 ve 6 kosetleri denktirler. Buradan , $\{ 2, 6 \}$ denklik sınıfını elde ederiz.

$$g \in \{ a^{-1} , b , b^{-1} \}$$

için , $5g$ nin yerleri boştur.

(3) Tüm tablolarda , 5.inci satır silinir.

Bu durumda , koset tablosu ,

	a	a^{-1}	b	b^{-1}
1	1	1	2	3
2	4	3	4	1
3	6	7	1	8
4		4		
6	8	3		
7	3	8		
8	7	6	3	

şeklindedir. Şimdi , 2 ve 6 kosetleri arasındaki çakışımı inceliyelim.

(1) Tüm tablolarda , 6 yerine 2 yerleştirilir.

(2) Tüm tablolarda , $g \in \{ a, a^{-1}, b, b^{-1} \}$ için , tüm $6g$ ve $3g$ elemanları karşılaştırılır.

(d) $6a = 8$ idi. 6 yerine 2 bulunduğu , $2a = 8$ bulunur. Oysa , $2a = 4$ şeklinde tanımlamıştık. Buradan , 4 ve 8 kosetleri arasında bir çakışım vardır.

(b) $6a^{-1}$ ile $2a^{-1}$ elemanlarını karşılaştıralım. $6a^{-1} = 3$ idi.

$$2a^{-1} = 3$$

olduğundan , herhangi bir çakışım söz konusu değildir. $6b^{-1}$ ve $6b$ in yerleri boş olduğundan bunlar için bir işlem yapılmaz.

(3) Tüm tabloların , 6.ıncı satırı silinir.

Bu durumda , koset tablosu ,

	a	a^{-1}	b	b^{-1}
1	1	1	2	3
2	4	3	4	1
3	2	7	1	8
4	2			
7	3	8		
8	7	2	3	

şeklindedir. Şimdi , $\{ 4, 8 \}$ denklik sınıfını ele alalım.

(1) Tüm tablolarda , 8 yerine 4 yerleştirilir.

(2) $g \in \{ a, a^{-1}, b, b^{-1} \}$ için , tüm tablolarda , $4g$ ve $8g$ elemanlarını karşılaştıralım.

(c) $4a$ nın yeri boştur. $8a = 7$ idi. 8 yerine 4 yerleştirildiğinde $4a = 7$ bulunur.

(b) $8a^{-1} = 2$ ve $4a^{-1} = 2$ olduğundan herhangi bir çakışım söz konusu değildir. Bu durumda , hiç bir işlem yapılmaz.

(c) $4b$ nin yeri boştur. $8b = 3$ idi. 8 yerine 4 yerleştirildiğinde $4b = 3$ bulunur.

$8b^{-1}$ in yeri boştur ve $4b^{-1} = 2$ dir. Bu durumda , herhangi bir işlem yapılmaz.

(3) Tüm tabloların 8.inci satırı silinir.

Buradan , koset tablosu ,

	a	a ⁻¹	b	b ⁻¹
1	1	1	2	3
2	4	3	4	1
3	2	7	1	4
4	7	2	3	2
7	3	4		

şeklindedir. Bu durumda , tanımlayıcı tabloları ,

	a	a	a	a
1	1	1	1	1
2	4	7	3	2
3	2	4	7	3
4	7	3	2	4
7	3	2	4	7

	a	a	b	a	b ⁻¹	b ⁻¹
1	1	1	2	4	2	1
2	4	7	7	3	4	2
3	2	4	3	2	1	3
4	7	3	1	1	3	4
7	3	2	4	7		7

şeklindedir. $7b = 7$ tündengelimi elde edilmiştir. Buradan ,

$$7b = 7 \quad \langle \Rightarrow \rangle \quad 7b^{-1} = 7$$

olur. Buradan , $a^2bab^{-2} = e$ tanımlayıcı tablosu ve koset tablosu tamamlanmış olur. Tüm tablolar aynı anda tamamlanmıştır. Öyleyse , koset sayma işlemi sona ermiştir. Buradan ,

$$[G : H] = 5$$

bulunur.

Aynı örneği , $2 = 1b^{-1}$, $3 = 2a$, $4 = 3a$, $5 = 4a$ tanımlamaları yapılarak çakışımından bağımsız bir şekilde çözelim. Bu durumda , altgrup tablosu değişmeyeceğinden $1a = 1$ dir.

$a^4 = e$ için , tanımlayıcı tablosu ;

	a	a	a	a
1	1	1	1	1
2	3	4	5	2
3	4	5	2	3
4	5	2	3	4
5	2	3	4	5

şeklindedir. Buradan , $5a = 2$ tündengelimi elde edilir.

$a^2bab^{-2} = e$ için , tanımlayıcı tablosu ;

	a	a	b	a	b^{-1}	b^{-1}
1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	1	5	1	2
3	4	5				3
4	5	2	1	1	2	4
5	2	3				5

şeklindedir. Buradan , $2b^{-1} = 4$ tündengelimi elde edilir.

$2b^{-1} = 4$ ve $2 = 4b$ yi tablolara yerleştirelim.

	a	a	b	a	b^{-1}	b^{-1}
1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	2	3	1	2
3	4	5				3
4	5	2	1	1	2	4
5	2	3				5

bulunur. $3b^{-1} = 1$ tündengelimi elde edilir. Bu durumda tanımlayıcı tablosu ;

	a	a	b	a	b^{-1}	b^{-1}
1	1	1	3	4	3	1
2	3	4	2	3	1	2
3	4	5				3
4	5	2	1	1	2	4
5	2	3				5

bulunur. Şimdi , $4b^{-1} = 3$ tündengelimini kullanalım.

	a	a	b	a	b^{-1}	b^{-1}
1	1	1	3	4	3	1
2	3	4	2	3	1	2
3	4	5				3
4	5	2	1	1	2	4
5	2	3	4	5		5

bulunur. Bu durumda , $5b^{-1} = 5$ tanımını yapıldığında tüm

tablolar tamamlanmış olur.

	a	a	b	a	b^{-1}	b^{-1}
1	1	1	3	4	$\langle - \rangle$	3
2	3	4	2	3	$\langle - \rangle$	1
3	4	5	5	2	4	3
4	5	2	1	1	2	$\langle - \rangle$
5	2	3	4	5	5	5

bulunur. Burada , hiç bir çakışım söz konusu değildir. koset sayma işlemi tamamlanmıştır. Bu durumda , koset tablosu ;

	a	a^{-1}	b	b^{-1}
1	1	1	3	2
2	3	5	1	4
3	4	2	4	1
4	5	5	2	3
5	2	4	5	5

şeklinde dir. O halde , $[G : H] = 5$ dir. Bu durumda , G grubunun permütasyon temsili belirlenebilir.

$$1a = 1 , 2a = 3 , 3a = 4 , 4a = 5$$

olduğundan , a elemanının permütasyon temsilcisi ,

$$(2\ 3\ 4\ 5)$$

permütasyonudur.

$$1b = 3 , 3b = 4 , 4b = 2 , 2b = 1$$

olduğundan , b elemanının permütasyon temsilcisi ,

$$(1\ 3\ 4\ 2)$$

permütasyonudur. Bunu ,

$$a \longrightarrow (2\ 3\ 4\ 5) \quad \text{ve} \quad b \longrightarrow (1\ 3\ 4\ 2)$$

ile gösterebiliriz. Bu permütasyon temsilcileri grubun tanımlıyıcılarını gerçeklemelidirler. Şimdi , bunu gösterelim.

$$a^4 = e \quad \text{olduğundan} , \quad ((2\ 3\ 4\ 5))^4 = (1) \quad \text{olmalıdır.}$$

$$(2\ 3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4\ 5) = (2\ 4)(3\ 5)$$

$$(2\ 4)(3\ 5)(2\ 4)(3\ 5) = (1)$$

bulunur. O halde , $((2\ 3\ 4\ 5))^4 = (1)$ dir. Burada , a ve b permütasyonlar olmak üzere , a.b permütasyon

çarpımı soldan yapılmıştır (yani , önce a' sonra b').
Çünkü , ele alınan H altgrubunun sağ kosetleridir. Şimdi ,
 a ve b permütasyon temsilcilerinin

$$a^2bab^{-2} = e \quad \Leftrightarrow \quad a^2ba = b^2$$

tanımlıyıcılarını gerçeklediğini gösterelim.

$$a^2ba \longrightarrow (2 \ 3 \ 4 \ 5) (2 \ 3 \ 4 \ 5) (1 \ 3 \ 4 \ 2) (2 \ 3 \ 4 \ 5)$$

$$= (2 \ 4) (3 \ 5) (1 \ 3 \ 4 \ 2) (2 \ 3 \ 4 \ 5)$$

$$= (4 \ 1 \ 3 \ 5) (2 \ 3 \ 4 \ 5)$$

$$(1) \quad G = (4 \ 1) (3 \ 2)$$

bulunur. Diğer taraftan ,

$$\begin{aligned} b^2 \longrightarrow (1 \ 3 \ 4 \ 2) (1 \ 3 \ 4 \ 2) \\ = (1 \ 4) (3 \ 2) \end{aligned}$$

bulunur. Burada ,

$$(4 \ 1) (3 \ 2) = (1 \ 4) (3 \ 2)$$

olduğundan , a ve b nin bu permütasyon temsilcileri grubun tanımlıyıcılarını gerçeklerler. Yani , a ve b permütasyon temsilcileri ile , G grubunun tüm elemanlarının permütasyon temsilcileri elde edilir (a ve b üretici olduğundan , bunların permütasyon temsilcileri de üreticidir).

Eğer elde ettiğimiz ilk koset tablosunu ele alırsak a ve b nin yeni bir permütasyon temsilcisi elde edilir. Bu durumda

$$a \longrightarrow (2 \ 4 \ 7 \ 3)$$

$$b \longrightarrow (1 \ 2 \ 4 \ 3)$$

şeklindedir ve de bu permütasyon temsilcileri grubun tanımlıyıcılarını gerçeklerler. Burada , grubun her iki permütasyon temsili de transitiftir. Fakat , reguler değildirler.

ÖZELLİK 3.1.1:

Çakışimleri bulunan bir koset tablosunu ele alalım. $g \in \bar{E}$,
 $k < q$ için , k ve q koset göstericileri olmak üzere ,

$$q = k g$$

olacak şekilde bir koset sayısını ele alalım. Burada ,

$$gg^{-1} = k$$

dır.Çakışım işlemi uygulandığında ,

$$q = k' g$$

olacak şekilde $k' < k < q$ koşulunu sağlayan k' koset göstericisi bulunmalıdır (bu durumda , k koset göstericisi yerine k' koset göstericisi yerleştirilir).

TEOREM 3.1.1:

Yukarıda açıklanan koset sayma işlemi tamamlandığında ,

(1) $[G : H]$ elde edilir.

(2) G grubunun bir permütasyon temsili elde edilir.

(Fakat , burada H altgrubunun sağ kosetleri söz konusu olduğundan permütasyon çarpımı soldan yapılır.)

İspat:

Bu yöntemde , H altgrubunun koset temsilcileri tamsayılardır.Her bir koset göstericisi , G grubunun her bir üreteci ve bu üreteçlerin inversleri ile sağdan çarpılmaktadır.Dolayısıyla , elde edilen kosetler sayılardır. K koset göstericilerinin kümesi olsun. Bu durumda ,

$$[G : H] \leq | K |$$

dir.Her bir koset göstericisi için , her $g_i \in \bar{E}$ olmak üzere ,

$$a g_i = b \quad \Leftrightarrow \quad b g_i^{-1} = a$$

şeklinde koset göstericilerinin imajı tektir.Burada ,

$$g_i : a \longrightarrow b \quad , \quad g_i^{-1} : b \longrightarrow a$$

şeklindedir.Buradan , her bir g_i üreteci , K kümesi üzerinde bir permütasyon göstermektedir.Bu permütasyonu ,

$\bar{g}_i$

ile gösterelim.Buradan ,

$$\{ \bar{g}_1 , \bar{g}_2 , \dots , \bar{g}_n \}$$

kümesi ile üretilen grup , K kümesi üzerinde transitif olmalıdır.Yani , her $a, b \in K$ ise , a yı b ye dönüştüren bir permütasyon vardır.Buradan , G grubunun üreteçleri ve bunların inversleri tanımlayıcı tablolarını

oluşturduklarından , her bir

$\overline{g_1}$

permütasyon temsilcisi de G grubunun tanımlıcalarını gerçeklemek zorundadır.Buradan ,

$g_1 \longrightarrow \overline{g_1}$

tasviri , G grubunun ,

Sırası

simetrik grubu içine bir homomorfisini tanımlar. G grubunun etkisi altında , G grubunun 1 elmanının stabilizeri ,

$$G_1 = \{ g \in G \mid (1) g = 1 \}$$

kümesidir. H altgrubunun temsilcisi 1 olduğundan ve altgrup tablosundan

$$H \subset G_1$$

olmak zorundadır.Çünkü , H , 1 i sabit tutan elemanlar ile üretilmektedir.Lagrange Teoreminden ,

$$(1) \quad |G| = [G : G_1] |G_1|$$

olduğunu biliyoruz.Ayrıca ,

$$(2) \quad |G| = |G_1| |G(1)|$$

dir.Burada , 1 permütasyonunun yörüngesi ,

$$G(1) = \{ g(1) \mid f(g)(1) = g(1) , g \in G \}$$

şeklindedir.Bu , 1 permütasyonunun G grubunun her elemanına etkisi sonucunda oluşan elemanların kümesidir.

$$f : G \longrightarrow K$$

homomorfisinden ,

$$|G(1)| = |K|$$

dur.(1) ve (2) ifadelerinin eşitliğinden

$$[G : G_1] |G_1| = |G_1| |G(1)|$$

$$[G : G_1] = |G(1)| = |K|$$

bulunur. $H \subset G_1$ olduğundan $|H| \leq |G_1|$ dir.

Lagrange Teoreminden ,

$$| H | = \frac{| G |}{[G : H]} \quad \text{ve} \quad | G_1 | = \frac{| G |}{[G : G_1]}$$

olduğundan ,

$$\frac{| G |}{[G : H]} \leq \frac{| G |}{[G : G_1]}$$

$$[G : H] \geq [G : G_1]$$

bulunur. $[G : G_1] = | K |$ olduğundan ,

$$[G : H] \geq | K |$$

olur. Diğer taraftan , $[G : H] \leq | K |$ idi. Buradan ,

$$[G : H] = | K |$$

bulunur.

NOT 3.1.1:

Her sonlu grup , sonlu belirtilebilen gruptur. Fakat , her sonlu belirtilebilen grup , sonlu değildir.

NOT 3.1.2:

G grubu sonlu olmak üzere , $H = \langle e \rangle$ alınarak , G grubunun mertebesi , bu yöntemle belirlenebilir. Eğer , G grubu sonlu değilse sayma işlemi sonuçlandırılmayacaktır.

NOT 3.1.3:

G grubu sonsuz olsa bile , $H \neq \langle e \rangle$ olmak üzere , $[G : H]$ sonlu olduğunda , bu yöntemin sonlu olacağı ispatlanmıştır.

TEOREM 3.1.2:

Tabloların ilk r.inci satırı sabittir.

İspat:

Bu teoremi , r üzerinde indüksiyon uygulayarak ispatlıyalım. Tüm tablolar , 1 ile başlar. 1 altgrubun göstericisi olduğundan çakışım işlemi sonucunda tüm tabloların 1.inci satırı asla silinmez.

Tabloların , r-1.inci satırının sabit olduğunu kabul edelim. Yani , r-1 satırdaki tüm çakışımalar belirlenmiş olsun ve çakışım işlemi uygulanmış olsun.

SONUÇ

r .inci satırında bir çakışım bulunsun. i_r , r .inci satırında çakışım durumunda bulunan koset göstericisi olsun. $q < i_r$ için ,

$$i_r = g q$$

olacak şekilde $q \in E$ ve bir q koset göstericisi vardır. Özellik 3.1.1. den , $r' < r$ olacak şekilde , i_r koset göstericisiyle çakışım durumunda olan bir i_r koset göstericisi vardır.

İndüksiyon hipotezinden , ilk $r-1$ satırda çakışım bulunmadığından bu bir çelişkidir. O halde , çakışım işlemi sonucunda ilk r satır sabit olacaktır.

TEOREM 3.1.3:

$[G : H]$ sonlu indeksli ise bu yöntem sonlu adım sonunda tamamlanacaktır.

İspat:

Teorem 3.1.1. den dolayı ,

$$[G : H] \geq |K|$$

idi. Eğer K sonsuz bir küme ise $[G : H]$ de sonsuz olacaktır. Bu da , hipotez ile çelişir. O halde , teorem doğrudur.

(6) Grubun normal altgruplarının mertebesi

(7) Grubun kamutator altgruplarını

(8) Grubun kamutator altgrupları ile oluşan bölün grupların mertebesi

(9) Grubun merkezi ve merkezinin mertebesi

(10) Grubun karakter tablosu

(11) Grubun altgruplarının sayısı

(12) Grubun izotomorfiler kümesinin mertebesi

(13) Grubun otomorfiler kümesinin mertebesi

(14) Grubun altgruplarının ve bölün gruplarının tipi (yani izomorf oldukları özel gruplar)

Bilgileri bulunmaktadır.

1987 de Sidney / Avustralya da Warwick Üniversite sinde Vex / 780 tipii bir makine de D.F.Holt tarafından çok genli bir program yapılmıştır. Bu programın ismi , CAYLEY dir. Grubun tanımlayıcıları ve üreticileri girilerek

SONUÇ :

yukarıda sözüünü ettiğimiz tüm bilgiler elde edilmiştir. Cayley programı , milyon mertebeli grupların Bölüm 3 deki koset sayma işlemi bilgisayara uygulanabilir. Bu yöntemde sıralama söz konusu olduğundan , bunun programı yapılırken , bir tarafı kuyruk (queue) yapısına sahip link yapısı kullanılır. Bu Todd-Coxeter algoritması kullanılarak sonlu belirtilebilen gruplar hakkındaki bilgileri içeren Grup Tabloları yapılmıştır. Grubun karakter tabloları için , Bölüm 2 deki bilgiler kullanılmıştır. 1980 yılında A.D. Thomas ve G.V.Wood tarafından mertebesi 32 ye kadar olan grupların grup tabloları oluşturulmuştur. Bu grup tablolarında Bölüm 2 ve Bölüm 3 deki bilgiler temel olmak üzere başka bilgiler de yer almaktadır. Buradaki grup tablolarında ,

(1) Grubun mertebesi ve tipi (yani izomorf oldukları özel gruplar)

(2) Grubun elemanlarının tamsayı temsilcilerinden oluşan işlem tablosu

(3) Grubun devresel olup olmadığı

(4) Grubun değişmeli olup olmadığı

(5) Grubun altgruplarının neler olduğu ve bu altgrupların mertebesi

(6) Grubun normal altgruplarının mertebesi

(7) Grubun kamutator altgruplarını

(8) Grubun kamutator altgrupları ile oluşan bölüm grubunun mertebesi

(9) Grubun merkezi ve merkezinin mertebesi

(10) Grubun karakter tablosu

(11) Grubun altgruplarının kafesi

(12) Grubun iç otomorfiler kümesinin mertebesi

(13) Grubun otomorfiler kümesinin mertebesi

(14) Grubun altgruplarının ve bölüm gruplarının tipi (yani izomorf oldukları özel gruplar)

bilgileri bulunmaktadır.

1987 de Sidney / Avusturalya 'da Warwick Üniversite 'sinde Vax / 780 tipli bir makinada D.F.Holt tarafından çok geniş bir program yapılmıştır. Bu programın ismi , CAYLEY dir. Grubun tanımlıyıcıları ve üreteçleri girilerek

yukarıda sözünü ettiğimiz tüm bilgiler elde edilmektedir.Cayley programı , milyon mertebeli grupların karakter tablosu veya birkaç yüz mertebeli bir grubun altgruplarının kafesini çok kısa bir sürede (10 dakika gibi) verebilmektedir.Ayrıca , Cayley programı üreteçleri üzerinde bir free grubu tanımladığımızda , free tasviri verebilmektedir.Cayley programının hafızasına , ele alınan grubun bilgileri kayıt edebilmektedir.Bu program tamsayı , küme , tasvir , grup , cisim , matris halkası ve vektör uzayı yapılarını tanımaktadır.Cayley programı , sonlu bir grubun permütasyon temsilcilerini permütasyon gruplarını matris gruplarını ve asal mertebeli grupları belirliyebilmektedir.Cayley programı bunlardan başka bilgiler de içermekte olup , şu anda Avusturalya 'da Warwick Üniversitesi 'nde çalıştırılmakta ve geliştirilmektedir. G.V.Wood ; " Group Tables " ; Shiva

Yalnız , grup sonsuz ise Cayley programının yapısı bozulmaktadır.Henüz , buna , bir çözüm bulunamamış , bunun için bir koşul verilememiştir.

4-) H.Suzuki ; " Group Theory I " ; Springer - Verlag , New York , Heidelberg , Berlin ; (1982)

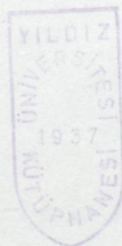
5-) A.G.Kurosh ; " The Theory Of Groups " ; Vol:1 and 2 ; Chelsea Publishing Co. ; (1968)

6-) N.S.Mendelson ; " An Algorithmic Solution In Group Theory " ; Canadian Journal Of Mathematics ; 555-575 ; Vol:16 ; (1964)

7-) D.F.Holt ; " The Cayley Group Theory System " ; University Of Warwick ; (June 2 , 1987)

KAYNAKÇA

- 1-) D.J.S.Robinson ; " A Course In The Theory Of Groups " ; Springer - Verlag , New York ,Heildelberg Berlin ;(1982)
- 2-) G.F.Gardiner ; " Algebraic Structures " ; Ellis Horwood Limited ; (1986)
- 3-) A.D.Thomas - G.V.Wood ; " Group Tables " ; Shiva Publishing Limited ; (1980)
- 4-) M.Suzuki ; " Group Theory I " ; Springer - Verlag , New York ,Heildelberg Berlin ; (1982)
- 5-) A.G.Kurosh ; " The Theory Of Groups " ; Volume two ; Chelsea Publishing Co. ; (1960)
- 6-) N.S.Mendelson ; " An Algorithmic Solution In Group Theory " ; Canadian Journal Of Mathematics ; 509-516 ; Vol:16 ; (1964)
- 7-) D.F.Holt ; " The Cayley Group Theory System " ; University Of Warwick ; (June 9 , 1987)



ÖZGEÇMİŞ

1968 'de İstanbul'da doğdum. İlk öğrenimimi , Hattat İsmail Hakkı İlkokulu'nda (1974-1979) yaptım. Orta öğrenimimi , Halide Edip Adıvar (1979-1982) ve Kenan Evren (1983-1985) Lisesinde başarıyla tamamladım. Lisans öğrenimimi , Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü'nde (1985-1989) yaptıktan sonra Yıldız Üniversitesi , Matematik Bölümü , Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilimdalı'nda araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım. Halen , bu görevimi sürdürmekteyim.

