

Markov Analizi

Yüksek Lisans Tezi

Markov Analizi



60.000.01  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

## MARKOV ANALİZİ

İŞLETME YÖNETİMİ  
YÜKSEK LİSANS BİTİRME TEZİ

ÖZLEM BERAK

İstanbul, 1994

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON  
DAİRE BAŞKANLIĞI

|              |                   |
|--------------|-------------------|
| Kot          | R 363<br>110      |
| Alındığı Yer | Ses. Bilim. Enst. |
| Tarih        | 15.12.94          |
| Fatura       |                   |
| Fiyatı       | 60.000 TL         |
| Ayniyat No   | 1/27              |
| Kayıt No     | 50724             |
| UDC          |                   |
| Ek           |                   |

4

Y. T. O.

KÜTÜPHANE DOK. DAİRE BAŞKANLIĞI



**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

**ÖZET** iii

**GİRİŞ** 1

**I. STOKASTİK SÜREÇLER**

1.1. Stokastik Sürecin Tanımı Ve Stokastik Sürecin Temel Özellikleri 2

1.2. Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması

1.2.1. Stokastik Süreçlerin Temel Özelliklerine Göre Sınıflandırılması 3

1.2.2. Stokastik Süreçlerin Diğer Özelliklerine Göre Sınıflandırılması 4

1.3. n Boyutlu Dağılımlar 6

1.4. Örneklem Eğrisi 7

**II. MARKOV ZİNCİRLERİ**

2.1. Markovien Özellik 9

2.2. Kesikli Parametreli Markov Süreçleri

**Y. T. Ü.  
KÜTÜPHANE DOK. DAL. BAŞKANLIĞI**

2.2.1. Geçiş Olasılıkları Ve Geçiş Matrisleri 10

2.2.1.1. n Adım Geçiş Olasılıkları - Geçiş Matrisleri 12

2.2.1.2. Bağımsızlık, Bağımlılık Ve Geçiş Olasılıkları Vektörleri 14

2.2.2. Chapman - Kolmogorov Eşitliği 15

2.2.3. İlk Dönüş Zamanı 16

2.2.4. Durumların Sınıflandırılması

2.2.4.1. Tekrarlı Durum - Geçişli Durum 18

2.2.4.1.1. Pozitif Tekrarlı Ve Sıfır Tekrarlı Durumlar 18

2.2.4.2. Periyodik, Periyodik Olmayan Ve Ergodik Durumlar 19

2.2.5. Durum Sınıfları 20

2.2.6. Ergodiklik 22

2.2.6.1. Uzun Dönüş Markov Zincirinin Özellikleri 23

2.2.7. Markov Zincirlerinde Teorik Yaklaşımlar 24

2.2.7.1. Dengeli Durum Olasılıkları 24

2.2.7.2. Yeterli Durumlar Ve Yeterli Olasılıkları 25

**Danışman : Doç. Dr. Mehmet Ahlatcıoğlu**



## İÇİNDEKİLER

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET                                                                       | iii |
| GİRİŞ                                                                      | 1   |
| I. STOKASTİK SÜREÇLER                                                      |     |
| 1.1. Stokastik Sürecin Tanımı Ve Stokastik Sürecin Temel Öğeleri           | 2   |
| 1.2. Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması                                |     |
| 1.2.1. Stokastik Süreçlerin Temel Öğelerine Göre Sınıflandırılması         | 3   |
| 1.2.2. Stokastik Süreçlerin Bağımlılık İlişkilerine Göre Sınıflandırılması | 4   |
| 1.3. n Boyutlu Dağılımlar                                                  | 6   |
| 1.4. Örneklem Eğrisi                                                       | 7   |
| II. MARKOV ZİNCİRLERİ                                                      |     |
| 2.1. Markovien Özellik                                                     | 9   |
| 2.2. Kesikli Parametrelili Markov Zincirleri                               |     |
| 2.2.1. Geçiş Olasılıkları ve Geçiş Matrisleri                              | 10  |
| 2.2.1.1. n Adım Geçiş Olasılıkları , Geçiş Matrisleri ve Stokastik Matris  | 12  |
| 2.2.1.2. Başlangıç Olasılık Vektörü ve n Adım Olasılık Vektörü             | 14  |
| 2.2.2. Chapman - Kolmogorov Eşitliği                                       | 15  |
| 2.2.3. İlk Dönüş Zamanı                                                    | 16  |
| 2.2.4. Durumların Sınıflandırılması                                        |     |
| 2.2.4.1. Tekrarlı Durum - Geçişli Durum                                    | 18  |
| 2.2.4.1.a. Pozitif Tekrarlı ve Sıfır Tekrarlı Durumlar                     | 18  |
| 2.2.4.2. Peryodik , Peryodik Olmayan ve Ergodik Durumlar                   | 19  |
| 2.2.5. Durum Sınıfları                                                     | 20  |
| 2.2.6. Ergodik Markov Zincirleri                                           | 22  |
| 2.2.6.1. Uzun Dönem Markov Zincirinin Özellikleri                          | 23  |
| 2.2.7. Markov Zincirlerinde Teorik Yaklaşımlar                             |     |
| 2.2.7.1. Denge Durumu Olasılıkları                                         | 24  |
| 2.2.7.2. Yutucu Durumlar ve Yutulma Olasılıkları                           | 25  |



|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 2.3. Sürekli Parametrel Markov Zincirleri             | 27 |
| 2.3.1. Markovien Özellik ve Geçiş Fonksiyonları       | 27 |
| 2.3.2. Sürekli Durumlarda Chapman-Kolmogorov Eşitliği | 27 |

## II. İŞLETME YÖNETİMİNDE BAZI MARKOV MODELLERİ

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Tüketici Davranışları                                 | 30 |
| 3.2. Pazar Payı Tahminlerinde Markov Zincirleri            | 32 |
| 3.3. Belirsizlik Altında Gelirin Belirlenmesi              | 33 |
| 3.4. Pazarlama Stratejisinde Markov Analizinin Kullanılışı | 34 |
| 3.5. Markov Analizinin Ekipman Tamiri Uygulaması           | 37 |
| 3.6. Markov Analizinin İşgören Verimliliği Uygulaması      | 39 |
| 3.7. Markov Analizinin Alacaklı Hesaplara Uygulaması       | 41 |

|       |    |
|-------|----|
| SONUÇ | 45 |
|-------|----|

|           |    |
|-----------|----|
| KAYNAKLAR | 46 |
|-----------|----|



## GİRİŞ

Markov Analizi, bir değişkenin halihazır davranışlarını aynı değişkenin gelecekteki davranışlarını tahmin etmek üzere analiz eden bir yöntemdir.

## ÖZET

Bu çalışmamızda davranışları analiz etmek için kullanılan bir yöntem anlatılacaktır. Bu yöntem n dönem sonrası sonuçlar için tahmin yapma imkanı sağladığından yaygın olarak kullanılmıştır. Günümüzde matrisyel yaklaşımlar ile markov analizinin gerçekleştirilmesinde bazı bilgisayar programları hesaplamalarda yardımcı olmaktadır.

Yöntemde stokastik süreçler özel olarak ve rasgele değişimle aynı zamanda kuantumlaşmış rasgele değişkenlerin aldığı her bir özel değere durum denmektedir. Aynı değişkenimiz kesikli ise kesikli stokastik süreçten söz ederiz.

Markov Analizinde "mevcut duruma göre bir sonraki durumun belirli olasılıkla hangi durumlardan oluşacağı" kabulü geçerlidir. Markov Analizinde astronomi, fizik, işletme yönetimi vb. pek çok kullanımı yapılmaktadır.

İlk bölümde, markov zincirlerinin esasları oluşturan stokastik süreçlerin genel yapısı ve sınıfları üzerinde durulmaktadır. İkinci bölümde, parametrik olmayan kesikli ya da sürekli olmasına göre değişen kesikli parametrik ve sürekli parametrik markov zincirlerinin matematiksel ifadeleri verilmektedir. Son bölümde ise bu analizin işletme yönetimine hangi kısımlarda kullanılabileceğine dair örnekler gösterilmektedir.



## GİRİŞ

Markov Analizi , bir değişkenin halihazır davranışlarını aynı değişkenin gelecekteki davranışlarını tahmin etmek üzere analiz eden bir yöntemdir .

Bu yöntem ilk kez Rus matematikçisi Andrei A. Markov tarafından geliştirilmiştir . Markov , bu yöntemi ilk defa kapalı bir kap içindeki gaz parçacıklarının davranışlarını açıklamak için kullanmıştır . En geniş kullanım alanı ise marka bağlılıkları açısından ve bir markadan diğerine değiştirmede müşterilerin davranışlarını inceleme ve tahmin etme olmuştur .

Herhangi bir olaya ait olasılıklardan yola çıkılmak sureti ile geleceğe dayalı bir takım projeksiyonların yapılmasına imkan veren markov analizi stokastik ( olasılıksal ) süreçlerin sınıflarından biridir . Yöntemde stokastik süreç temel alınmış ve rasgele deneme ile aynı anlamda kullanılmıştır . Rasgele değişkenlerin aldığı herbir özel değere durum denilmektedir . Şayet değişkenimiz kesikli ise kesikli stokastik süreçten , sürekli ise sürekli stokastik süreçten söz ederiz .

Markov Analizinde " mevcut duruma göre bir sonraki durumun şartlı olasılığı daha önceki durumlardan bağımsızdır " kabulü geçerlidir . Markov Analizinin astronomi , fizik , işletme yönetimi ...vb . pekçok kullanım alanı bulunmaktadır .

İlk bölüm de , markov zincirlerinin esasını oluşturan stokastik süreçlerin genel yapısı ve sınıfları üzerinde durulmuştur . İkinci bölümde , parametre uzayının kesikli yahut sürekli olmasına göre değişen kesikli parametrelili ve sürekli parametrelili markov zincirlerinin matematiksel ifadeleri yer almaktadır . Son bölümde ise bu analizin işletme yönetimince hangi konularda kullanılabileceğine dair örnekler gösterilmiştir .



## BÖLÜM 1

### STOKASTİK SÜREÇLER

İçinde bulunduğumuz XX. yüzyıl bir sistem devri olarak nitelendirilmektedir. İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra, bilim adamları evrende varolan maddelerin ve olayların teker teker değil, bir sistem içinde ele alınmalarının anlamlı çözümlemelere olanak sağladıklarını gözlemlemişlerdir.<sup>1</sup> Dinamik bir sistemin elemanlarının, gerek sistem içi gerekse sistemler arası etkileşimleri sistem faaliyetleri üzerinde etkiler yaratmaktadırlar. Bu etkilerin sistemde yaratmış olduğu etkinin büyüklüğü belirlenemeyebilir. Bu etkilerin tahmini olan sistem davranışları ile stokastik süreçlerin temeli atılmıştır.

Stokastik süreçler 1953 yılında " Stokastik Süreçler " isimli eser ile J. L. Doob tarafından ortaya atılmıştır<sup>2</sup>. Sistemdeki sorunların çözülmesi için sistemdeki tüm etkileşimleri içeren bir model kurulmalıdır. Bu kurduğumuz model bir olasılık dağılımına uygunluk gösteriyor ise bu tür modeller " Raslantı Model " olarak isimlendirilir. Bu tür modeller yardımı ile, sistemin gelecekteki durumları hakkında karar verebiliriz.

#### 1.1.Stokastik Süreçler Tanımı ve Stokastik Sürecin Temel Öğeleri

$X_t$ ,  $t$  parametresine göre değerler alan bir rassal değişken iken  $\{ X_t : t \in T \}$  şeklinde tanımlanan kümeye stokastik süreçler adı verilmektedir. Yani stokastik süreç verilen bir  $T$  kümesinden alınan  $t$  bir zaman parametresi olmak üzere  $X_t$  rassal değişkenler kümesidir.

<sup>1</sup>Kemal Tosun ; *İşletme Yönetimi* , İ.Ü. Yayınları , 1987 , s. 1

<sup>2</sup>P.Kumar and P.Varaiya ; *Estimation, Identification and Adaptive Control* , Printice-Hall Co. , 1986 , s. 57



$T$ , parametre uzayını ( parametre space ) ifade etmektedir . Genellikle  $T$  bir zaman aralığı olarak ele alınır ve  $t \in T$  olacak şekilde  $t$  ile indekslenen rassal değişken (  $X_t$  ), sürecin  $t$  anındaki durumu olarak söylenir <sup>3</sup>.

Rasgele değişkenlerin almış olduğu herbir özel değere durum (state) adı verilir . Bir stokastik süreçte  $X_t$  ' lerin mümkün değerlerinin kümesi ise  $E$  olarak adlandırdığımız durum uzayını ( state space ) oluşturur<sup>4</sup> .

Bir stokastik süreç  $X : T \rightarrow E$  şeklinde bir fonksiyon olarak düşünülebilir .

## 1.2.Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması

Stokastik süreçlerin sınıflandırılmasını sürecin temel öğelerine ya da bağımlılık ilişkilerine göre olmak üzere iki farklı kriterde sınıflandırabiliriz .

### 1.2.1.Stokastik Süreçlerin Temel Öğelerine Göre Sınıflandırılması

Bir stokastik süreç parametre ve durum uzaylarının reel sayı ya da tam sayı olmalarına göre sınıflandırılabilir .<sup>5</sup>

|                         |                       | Durum Uzayı ( $E$ )                                   |                                                       |
|-------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
|                         |                       | $E : ( 0, \infty )$                                   | $E : ( 1, 2, 3, \dots )$                              |
| Parametre Uzayı ( $T$ ) | $T : ( 0, \infty )$   | sürekli parametrelili<br>sürekli durum<br>uzaylı s.s. | sürekli parametrelili<br>kesikli durum<br>uzaylı s.s. |
|                         |                       | kesikli parametrelili                                 | kesikli parametrelili                                 |
|                         | $T : ( 1, 2, \dots )$ | sürekli durum<br>uzaylı s.s                           | kesikli durum<br>uzaylı s.s                           |
|                         |                       | kesikli durum<br>uzaylı s.s                           | kesikli durum<br>uzaylı s.s                           |

<sup>3</sup>Petar Todorović ; *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications* , Springer-Verlag , 1992 , s. 1

<sup>4</sup>İlhan Or ; *Introduction to Stochastic Models in Operations Research* , B.Ü. Publication , 1986 , s. 51

<sup>5</sup>Osman Halaç ; *Kantitatif Karar Verme Teknikleri* , Evrim Basım , 1991 , s. 101



Sürekli parametrelili , sürekli durum uzaylı stokastik süreç için  $t$  zaman periyodunda herhangi bir andaki envanterdeki hammadde miktarı ya da şamandıra koordinatlarını örnek olarak verebiliriz .

Sürekli parametrelili , kesikli durum uzaylı stokastik süreç için  $t$  zaman periyodundaki herhangi bir anda mağazadaki müşteri sayısı örnektir .

Kesikli parametrelili ve sürekli durum uzaylı stokastik sürece örnek olarak  $t$  saat sonunda envanterdeki hammadde miktarı veya belirli bir saatteki şamandıra koordinatları gösterilebilir .

Kesikli parametrelili ve kesikli durum uzaylı stokastik süreç için ise  $t$  saat sonunda mağazadaki müşteri miktarı ya da  $t$  günü süresince talep edilen araba sayısı örneklerini vermek mümkündür .<sup>6</sup>

Parametre ve durum uzayının nitelikleri , stokastik süreçleri tasvir etmek için kullanılan analitik modelin tipini belirler . Örneğin ; kesikli parametrelili ve kesikli durum uzaylı stokastik süreçler (sonlu) kesikli olasılık dağılımları ile tanımlanabilir .

Bazı hallerde sürecin parametre ve durum uzayı amaca göre belirlenir. Örneğin , bir telefon santraline gelen telefonlarda parametre uzayı kesikli ya da sürekli alınabilir ancak durum uzayı kesikli alınmalıdır . Kesikli parametrelili süreçlerde gözlemler yalnızca belirlenmiş zamanlarda yapılır . Sürekli parametrelerde ise gözlemler tüm olası zamanlarda düşünülür .

### 1.2.2.Stokastik Süreçlerin Bağımlılık İlişkilerine Göre Sınıflandırılması

Bir stokastik süreci karakterize eden temel özelliklerden biriside rassal değişkenler arasındaki ilişkilerdir .<sup>7</sup>

Bu ilişkilere göre sınıflandırma şu şekilde sağlanır :

<sup>6</sup>Osman Halaç ; a.g.e. , s. 101

<sup>7</sup>Atilla Aslanargun ; *Stokastik Süreçler Ders Notları* , Anadolu Üniversitesi , 1991



a ) Bağımsız artmalı süreçler :  $\{ X_t : t \in T \}$  stokastik sürecinde  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  olsun .  $\{ X_{t_i} - X_{t_j} : i \neq j, i > j \}$  kümesinin elemanları birbirinden bağımsız iseler  $X_t$  sürecine bağımsız artmalı stokastik süreçler denir .

b ) Durağan süreçler :  $\{ X_t : t \in T \}$  stokastik süreci zamana bağlı olmayan bir bileşik dağılıma sahip ise ya da rassal değişkenlerin bileşik dağılım fonksiyonu zaman içinde değişmiyorsa bu sürece durağan süreç denir .

c ) Tekrarlayan Süreçler : Sürecin akışını etkileyen rassal bir noktanın varlığı ile karakterize edilirler . Bu noktaya yenileyici nokta ya da Markov noktası adı verilir . Böyle bir noktaya ulaşıldıktan sonra sürecin geçmişteki durumu geleceğini hiçbir şekilde etkilemez .

d ) Markov süreci :  $\{ X_t : t \in T \}$  sürecinin parametre kümesindeki herhangi bir  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  kümesi için  $X_{t_n}$  ' in değeri  $X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots, X_{t_{n-1}}$  ' in verilen değerlerine göre koşullu dağılımı yalnızca  $X_{t_{n-1}}$  değerine bağlı ise  $\{ X_t : t \in T \}$  sürecine markov süreci denir .

$$P ( X_{t_n} = x_n \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} )$$

$$= P ( X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1} )$$

şeklinde ise bu sürece markov süreci denir . Daha açık bir deyiş ile sürecin bir  $t_{n-1}$  anındaki durumu biliniyorsa izleyen  $t_n$  zamanındaki durum geçmiş  $t_1, t_2, \dots, t_{n-2}$  durumlarından bağımsızdır . Bu özelliğe markovien özellik adı verilir .<sup>8</sup>

Bir devre sonraki davranışı , sadece şu anki bulunduğu duruma bağlı olan süreçler markov süreçleridir. Markov süreçleri parametre ve durum uzayının kesikli ya da sürekli oluşuna göre aşağıdaki biçimde sınıflandırılır .<sup>9</sup>

<sup>8</sup>A.Bruce Klarke and Ralph L.Disney ; *Probability and Random Processes : A First Course with Applications* , John Wiley & Sons Inc. , 1986 , s. 199

<sup>9</sup>Mehmet Şahinoğlu ; *Applied Stochastic Processes* , Set Ofset Ltd. , 1. Baskı , 1992 , s. 20



| Durum Uzayı     |         |                                      |                                     |
|-----------------|---------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| Parametre Uzayı | Kesikli | Kesikli                              | Sürekli                             |
|                 |         | kesikli parametrelili markov zinciri | kesikli parametrelili markov süreci |
|                 | Sürekli | sürekli parametrelili markov zinciri | sürekli parametrelili markov süreci |

### 1.3. n Boyutlu Dağılımlar

$A_n = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$  T'de n tane noktadan oluşan bir küme olsun.  $F_{A_n}(X_1, X_2, \dots, X_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$  ifadesine sürecin n boyutlu dağılım fonksiyonu adı verilir.

$\{X_t : t \in T\}$  gibi genel bir stokastik sürecin olasılık davranışlarını tanımlamak için T'den  $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'in bütün sonlu kümeleri için  $X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots, X_{t_n}$ 'in bileşik dağılımına ihtiyaç duyarız.

Kısaca  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ve her  $x_j \in E$  için  $P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$ 'i bilmemize ihtiyacımız vardır. Bu da,

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

şeklindeki dağılım fonksiyonudur.<sup>10</sup>

Eğer  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  bağımsız ve aynı dağılımda iseler,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1) P(X_2 \leq x_2) \dots P(X_n \leq x_n) \end{aligned}$$

<sup>10</sup>A.Bruce Klarke and Ralph L.Disney ; a.g.e. , s. 196-197







## BÖLÜM 2

### MARKOV ZİNCİRLERİ

Olasılık çalışmalarının pekçoğu bağımsız denemeler süreci ile ilgilidir. Bu süreçler olasılığın daha çok ta istatistiğin temelidir. Bu süreçler için görülen iki temel yaklaşımdan birisi Büyük Sayılar Kanunu bir diğeri de Merkez Limit Teoremi'dir.

Bir bağımsız denemeler sürecinde bağılı deneylerin ardışıklık formları söz konusu olduğu zaman her deney için mümkün sonuçlar ve olasılıklar aynıdır. Ayrıca, önceki deney sonuçlarına ait bilgiler sonraki deneyin sonucu için yaptığımız tahmini etkilemez.

Modern olasılık teorisi, geleceğe yönelik deney sonuçları için daha önceki sonuçların etkilediği şans prosesleri için çalışmaktadır. Esasında tesadüfi deneylerin ardışıklılığı hesaplandığı zaman bütün geçmiş sonuçlar bizim bir sonraki deneyimize ilişkin tahminlerimizi etkileyebilecektir.<sup>11</sup>

Eğer ilgilendiğimiz durum bir önceki duruma bağılı ise bu tip süreçlere markov süreçleri ve durum uzayı kesikli olan markov sürecine de markov zinciri adı verilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  bir denemeler dizisi ise her sonuç sistemin durum uzayı denilen  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  sonuçlarının sonlu kümesine bağılı ve herhangi bir denemenin sonucu en fazla bir önceki denemenin

<sup>11</sup>J.Laurie Snell ; *Introduction to Probability*, Mc-Graw Hill, 1989, s. 408-409



sonucuna bağlı olup ondan evvelki hiçbir sonuca bağlı olmaz ise bu olasılıksal sürece markov zinciri denir.<sup>12</sup>

## 2.1. Markovien Özellik

$\{ X_t : t \in T \}$  bir kesikli durumlu stokastik süreç ve  $T$  reel sayılarının bir alt kümesi olsun. Böylece  $T$ ,  $\{ t : 0 \leq t \leq \infty \}$  ya da  $\{ 1, 2, 3, \dots \}$  şeklinde olabilir.  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n$  olsun.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

ifadesi

$$P(X_{t_1} = x_1) P(X_{t_2} = x_2 \mid X_{t_1} = x_1) P(X_{t_3} = x_3 \mid X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1) \dots$$

çarpımlarına eşittir. Bu şekilde devam edilerek aşağıdaki genel ifadeye varılır:

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1)$$

**Tanım :**  $\{ X_t : t \in T \}$  bir kesikli durumlu stokastik süreç ve  $T$  reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun.  $E$  durum uzayındaki her  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  ve  $T$  kümesindeki  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_{n+1}$  ve  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  için

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n)$$

şeklinde yukarıdaki eşitlik ile ifade edilen markov özelliği sağlanıyorsa  $\{ X_t : t \in T \}$ 'ye markov süreci denir.<sup>13</sup>

<sup>12</sup>Richard Bronson; *Schaum's Outline Series "Theory and Problems of Operation Research"* Mc-Graw Hill, s. 224

<sup>13</sup>Osman Halaç; a.g.e., s. 102



$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_{n+1}$  ifadesinde  $t_n$  "şimdiki" anı ;  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  "geçmiş" ve  $t_{n+1}$  ise "geleceği" ifade etmektedir.<sup>14</sup>

## 2.2. Kesikli Parametrelili Markov Zincirleri.

Daha önce yazmış olduğumuz bölümde kesikli durumlu ve markovien özelliğe sahip raslantı süreci olarak tanımladığımız markov zincirleri hakkında genel bir fikir verilmişti . Bu başlık altında ise kesikli durum uzayı olan  $E'$ 'ye benzer şekilde  $T = \{ 0, 1, 2, \dots \}$  olarak belirtilen kesikli parametre uzayına sahip markov zincirleri ile ilgileneceğiz .

### 2.2.1. Geçiş Olasılıkları ve Geçiş Matrisleri

$X_n : n = 0, 1, 2, \dots$  şeklindeki bir markov zincirinde  $n$  adımda süreç  $i$ . durumda iken  $j$ . durumda olma olasılığı bir-adım ( one-step ) olasılığı olarak tanımlanır .<sup>15</sup>

$P ( X_{n+1} = j_{n+1} \mid X_n )$  olasılığının  $n$ 'e bağlı olmadığı varsayılır . Bu varsayım hem kullanışlıdır hem de karışık bazı hesapları kolay ve basit kılar . Bu varsayıma " zaman homojenlik özelliği " ya da " homojenlik özelliği " denir . O halde her  $k$  ve  $n \in T$  için homojen özelliğe sahip bir markov zincirinde ,

$$p_{ij} = P ( X_{k+1} = j \mid X_k = i ) = P ( X_{n+1} = j \mid X_n = i )$$

şeklinde bir-adım olasılıkları ifade edilir ve her  $n \geq 0$  için aynı değere sahiptir .

<sup>14</sup>İlhan Or ; a.g.e. , s. 52

<sup>15</sup>A.Bruce Klarke and Ralph L.Disney ; a.g.e. , s. 214



Geçiş olasılıkları , sürecin başlangıç ve izleyen adımlardaki ( devre ya da dönemlerdeki ) durumları ile geçiş anına bağlıdır .

Her  $j \in E$  için  $p_j = P ( X_0 = j )$  olasılığı ilk geçiş olasılığı ( initial transition probability ) olarak adlandırılır .

Uygulamalarda  $p_j$  ve  $p_{ij}$  olasılıkları teorik karşılıklardan belirlenerek ya da datalardan tahmin edilmek sureti ile ayrı ayrı elde edilmelidir .

Bir-adım geçiş olasılıkları matrisi ,

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde ya da ilk olasılıklar vektörü adı ile  $p^{(0)} = (p_0, p_1, \dots)$  şeklindeki satır vektörü olarak tanımlanır.<sup>16</sup>  $P$ 'deki sayıların tümü ve  $p^{(0)}$  vektörü sonlu ya da sonsuz , bağlı oldukları  $E$  durum uzayıda sonlu ya da sonsuz olabilir .

Bir markov zincirinin geçiş olasılıkları geçiş zamanına bağlı değilse , markov zincirinin durağan ( stationary ) geçiş olasılıklarına sahip olduğu söylenir . Şayet geçiş olasılıkları durağan ise ,

$$p_{ij} = P ( X_{n+1} = j \mid X_n = i ) = P ( X_1 = j \mid X_0 = i )$$

şeklinde yazılır .

<sup>16</sup> E.S. Buffa and J.S.Dyer ; *Managment Science - Operation Research* , Holden-day Inc. 1968 , s. 405-407

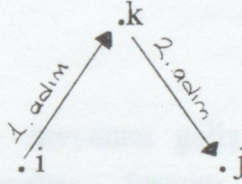


### 2.2.1.1. n Adım Geçiş Olasılıkları , Geçiş Matrisleri ve Stokastik Matris

R.A.Howard markov zincirini bir kurbağanın göl üzerindeki yapraklar üzerindeki sıçramalarını resimleyerek açıklamaktadır.<sup>17</sup> Bir yapraktan başlayarak diğerlerine sıçramak sureti ile yaptığı hareketler geçiş olasılıklarını açıklamak için uygundur .

Herhangi bir  $n, m \in T$  için durağan bir markov zincirinde  $P(X_n = j \mid X_0 = i)$  ya da  $P(X_{n+m} = j \mid X_m = i)$  olasılığına  $n$ -adım ( $n$  step) geçiş olasılığı adı verilir.<sup>18</sup> Homojenlik varsayımımız altında ikinci olasılık  $m$ 'ye bağlı değildir ve ilk olasılık ile aynıdır .

$n = 2$  durumunda  $P(X_2 = j \mid X_0 = i)$  olasılığı iki-devre ( two-step ) geçiş olasılığı olarak adlandırılır .



Farzedelim ki ,  $k$  ( hatta belki  $i$  ya da  $j$  ) durumu sürecin ilk adımda uğradığı adım olsun . Markovien özellik kullanılarak  $i$  'den  $k$  'ya ,  $k$  'dan da  $j$  'ye giderken ki bu iki adımın olasılığı ,

$$P_{ik} \cdot P_{kj} = P(X_1 = k \mid X_0 = i) P(X_2 = j \mid X_1 = k) = P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i)$$

şeklindedir .  $p_{ij}^{(2)} = \sum_k P_{ik} \cdot P_{kj}$  ' yi gözlemleyebiliriz . Genelleştirilmiş ifade ile ,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i)$$

<sup>17</sup>R.A.Howard ; *Dynamic Probabilistik System* , Volume 1 , John Wiley & Sons , 1971

<sup>18</sup>U.Narayan Bhat ; *Elements of Applied Stochastic Processes* , 2nd Edition , John Wiley & Sons , 1984, s. 33



değeri  $n$ -adım geçiş olasılığı olarak adlandırılır .

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj} \text{ formülü matris formunda } P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

şeklinde dir . Burada  $P$  ,  $p_{ij}$  kayıtlarının bulunduğu matristir .  $P^{(2)}$  iki-adım geçiş olasılıkları matrisi , bir - adım geçiş olasılıkları matrisinin kare matrisi ile teşkil edilmiştir .

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  şeklindeki bir olay ya da bir olayın değişik durumlarının sözkonusu olduğu ve her bir olayın meydana gelme olasılıklarının  $(p_{ij})$  farklı olduğunu farzedelim .  $p_{ij}$  gerçekte ,  $a_i$  olayından ( ya da durumundan )  $a_j$  olayına geçişte elde edilen olasılıklar olup ,

$$p_{ij} = P(a_j \setminus a_i)$$

şeklinde formüle edilebilir .<sup>19</sup>

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  olaylarının meydana geliş olasılıklarını daha önce göstermiş olduğumuz gibi  $P$  matris formatı ile gösteririz . Bu geçiş olasılıkları matrisi hem bir kare matris hem de stokastik matris özelliğine sahiptir . Stokastik matris , markov zincirinin temel ögesidir . Bir markov zinciri geçiş olasılıkları matrisi ve başlangıç olasılıkları vektörü ile tam olarak tanımlanabilir . Ancak bazı zamanlarda adım sayısı arttıkça olayı değişik durumlara erişme olasılığı başlangıç durumuna bağlı olmayabilir . Bu nedenle bir stokastik matris tek başına bir markov süreci oluşturabilir .

Şayet bir matris stokastik matris ise  $n$  . kuvveti de stokastik matris olur .

Eğer bir  $P$  stokastik matrisinin  $n$  . kuvvetinde hiç sıfır eleman yoksa  $P$  matrisine düzenli ( regular ) matris denir . Markov zincirlerinde

<sup>19</sup>E.S.Buffa and J.S.Dyer ; a.g.e. , s. 173-195



kullanılan geçiş olasılıkları matrisi de düzenli matris özelliğine sahiptir . Yani ,

a ) Bu matrsten elde edilecek herhangi bir sabit olasılık vektörünün ( V ) tüm elemanları pozitiftir .

b ) P matrisinden elde edilecek  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$  matris dizisi giderek satırların herbirinin durağan nokta w olduğu V matrisine yaklaşır .

c ) p herhangi bir olasılık vektörü ise  $pP, pP^2, pP^3$  vektörlerinin dizisi w durağan noktasına yaklaşır.<sup>20</sup>

### 2.2.1.2.Başlangıç Olasılık Vektörü ve n Adım Olasılık Vektörü

Markov analizinin ilk safhası , başlangıç noktası yani  $a_j$  gibi herhangi bir olaya ait başlangıç olasılıkları vektörünün belirlenmesidir . Sürecin başladığı andaki olasılıklara başlangıç olasılıkları vektörü denir

$$P_0(i) = p_i = P(X_0 = i) \quad \text{Her } i \in E \text{ için}$$

Bu vektör daha önce ilk olasılıklar vektörü olarak adlandırdığımız p vektörüdür. Bu vektör , toplamı bire eşit ve pozitif değerlere sahip bir satır vektördür . Bu olasılık vektörünü  $\Pi_0$  ile göstereyim .

$\Pi_0 = (p_0, p_1, \dots)$  şeklindedir .

n- adım olasılık vektörü ise ,

$$\Pi_n = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)})$$

ile gösterilir .

$i_0, i_1, \dots, i_n \quad n \in N \text{ için}$

$$P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots)$$

<sup>20</sup>Seymour Lipschutz , *Probability (Olasılık)* , Güven Kitabevi , 1979 , s. 129



$$= P ( X_{n-1} = i_{n-1} \setminus X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0 )$$

Markovien özellikten yararlanarak ,

$$P ( X_n = i_n \setminus X_{n-1} = i_{n-1} ) = P ( X_{n-1} = i_{n-1} \setminus X_{n-2} = i_{n-2} ) = P ( X_0 = i_0 )$$

$$= P_{i_{n-1} i_n} P_{i_{n-2} i_{n-1}} \dots P_{i_0 i_1} \prod_0$$

elde edilir <sup>21</sup>. Durağan geçiş olasılıklarına sahip bir markov modeli geçiş olasılıkları matrisi ve başlangıç olasılıkları ile tam olarak belirlenir .

### 2.2.2. Chapman - Kolmogorov Eşitliği

Bu eşitlik n adım geçiş olasılıklarını hesaplamak için kullanılan bir yöntemdir . Bu eşitlikler ,

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^m P_{ik}^{(v)} \cdot P_{kj}^{(n-v)} \quad \text{Bütün } i, j \in E ; n ; 0 \leq v \leq n$$

şeklinde ifade edilir .<sup>22</sup>

Bu eşitlik yalnızca i . durumdan j . duruma giderken n adım içinde  $v \leq n$  olmak şartı ile sürecin v adım sonra k . durumda olacağını gösterir . Böylece  $P_{ik}^{(v)} P_{kj}^{(n-v)}$  koşullu olasılığı , i . adımda başlayan sürecin v adım sonra k . duruma , buradan ( n-v ) adım sonra j . duruma gittiğini ifade eder . Böylelikle k üzerindeki tüm koşullu olasılıkların toplamı  $P_{ij}^{(n)}$  ortaya koymaktadır . geçen zamana ya da adım  $v = 1$  ve  $v = n-1$  özel durumları şu ifadeyi verir :

<sup>21</sup>F.S.Hillier and Gerald J.Lieberman; Introduction to Operation Research , Holden\_Day Inc. 1968 , s. 412

<sup>22</sup>F.S.Hillier and Gerald J.Lieberman ; a.g.e. , s. 405-407



$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^m p_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj} \quad \text{Her } i, j \in E \text{ için}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^m p_{ik} \cdot p_{kj}$$

$m, n \in \mathbb{N}$  için

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^m p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n)} \quad \text{Her } i, j \in E \text{ için}$$

Şuna işaret edelim ki  $p_{ij}^{(2)}$ 'ler  $P^2$  matrisinin elemanlarıdır. Bu ifade ilk geçiş olasılıkları matrisinin kendisiyle çarpılması ile oluşturulmuş  $\sum_{k=0}^m p_{ik} \cdot p_{kj}$  elemanlarını da vermek zorundadır.

Bu eşitlikler matrisyel olarak

$$P^{(n+m)} = P^n \cdot P^m$$

şeklinde yazılabilir.

### 2.2.3. İlk Dönüş Zamanı

Bu kavram durumların sınıflandırılmasında kullanılır. Bir  $i$  durumundan  $j$  durumuna ilk defa geçiş için geçen zamana ya da adım sayısına ilk dönüş zamanı denir.  $i$  durumundan tekrar  $i$  durumuna ilk dönüş için geçen zamana yeniden oluşum zamanı denir.

İlk geçiş zamanını  $T_{ij}$  ile gösterelim.  $T_{ij}^{(k)}$ ,  $i$  durumundan  $j$  durumuna ilk gidişin  $k$  adımda olduğunu gösterir.



$T_{ij}^{(1)}, T_{ij}^{(2)}, \dots$  aynı dağılıma sahip raslantı değişkenleridir.

$f_{ij}$  ise ilk geçiş olasılığını (duruma ilk defa ulaşma olasılığını) gösterebilir.

$$f_{ij}^{(k)} = P(T_{ij} = k \mid X_0 = i) \quad \text{ve} \quad f_{ij}^{(1)} = p_{ij} \text{ 'dir.}$$

$$f_{ij} = P(T_{ij} = 1) = P(X_1 = j, X_0 = i)$$

Yani süreç  $i$  durumuna başladıktan sonra  $j$  durumuna ilk kez  $n$  adımda ulaşır.<sup>23</sup>

$p_{ij}^{(n)}$  ile  $f_{ij}^{(n)}$  arasındaki ilişki,

$$P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= P\left[\bigcup_{k=1}^n X_k = j \text{ (ve } i \text{ 'den } j \text{ 'ye geçiş } k \text{ adımda)} \mid X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{k=1}^n P(\underbrace{X_n = j}_{\{A\}}, \underbrace{X_k = j}_{\{B\}}, \underbrace{X_q = k, q=1, \dots, k-1}_{\{C\}} \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^n P[X_n = j \mid X_k = j, X_q \neq j, q=1, \dots, k-1, X_0 = i] P[X_k = j, X_q \neq j, q=1, \dots, k-1 \mid X_0 = i]$$

Koşullu olasılık kuralını uygulayarak

$$= \sum_{k=1}^n P[X_n = j \mid X_k = j] f_{ij}^{(k)}$$

markovien özellikten tanımdan dolayı

$$= \sum_{k=1}^n p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)}$$

elde edilir.<sup>24</sup>

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

<sup>23</sup>F.S.Hillier and Gerald J.Lieberman ; a.g.e. , s. 408-409

<sup>24</sup>Mehmet Şahinoğlu ; a.g.e. , s. 34



## 2.2.4. Durumların Sınıflandırılması

### 2.2.4.1. Tekrarlı Durum -Geçişli Durum

Eğer  $P(T_j < \infty \mid X_0 = j) = 1$  ise  $j$  durumu tekrarlı (recurrent) olarak adlandırılır. Bu ise  $j$  durumundan başlayarak  $j$ 'ye bir sonraki dönüşün olasılığının ( $f_{jj}$ 'nin) bir olması demektir.

Eğer  $P(T_j < \infty \mid X_0 = j) < 1$  ise  $j$  durumu geçişli (transient) olarak adlandırılır. Bu ise sistemin bir daha asla  $j$  durumuna dönemeyeceğini ifade eder.<sup>25</sup>

Örneğin  $E = \{0, 1\}$  ve geçiş matrisi  $P$  ile verilen bir markov zincirine sahip olduğumuzu varsayalım.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

0 durumu  $P(T_j < \infty \mid X_0 = j) = f_{00}^{(1)} + f_{00}^{(2)} + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$  olduğu için tekrarlıdır. Bununla birlikte  $P(T_j < \infty \mid X_0 = j) = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + \dots = 1/2 + 0 + \dots$  sonucu olan  $1/2 < 1$  olduğu için de 1 durumu geçişlidir deriz.

### 2.2.4.1.a. Pozitif Tekrarlı ve Sıfır Tekrarlı Durumlar

$j$  durumu tekrarlı olsun.  $E(T_j \mid X_0 = j)$  değeri sonsuzdan küçük ise  $j$  durumu pozitif tekrarlı, eğer  $E(T_j \mid X_0 = j)$  sonsuza eşit ise sıfır tekrarlı durum denir. Bu suretle  $j$  durumu  $j$  durumuna ilk  $m$  kez ulaşıncaya kadar geçecek beklenen süre sonlu ise pozitif tekrarlıdır. Şayet bu beklenen süre sonsuz ise sıfır tekrarlı durum sözkonusudur.

<sup>25</sup> A. Bruce Klarke and Ralph L. Disney ; a.g.e. , s. 226-229



$$E(T_j \setminus X_0 = j) = f_{jj}^{(1)} + 2f_{jj}^{(2)} + 3f_{jj}^{(3)} + \dots$$

Sıfır tekrarlı durumlar yalnızca sonsuz süreçlerde olabilir .

#### 2.2.4.2.Peryodik , Peryodik Olmayan ve Ergodik Durumlar

Zincirin başladığı  $j$  durumuna yalnızca  $t, 2t, 3t, \dots$  ( $t > 1$  ve tamsayı) zamanlarında geri dönebilmesi mümkün ise yani farklı  $\delta$  adımlarında dönebiliyorsa ( $\delta \geq 2$ )  $j$  durumuna  $t$  periyodu ile periyodiktir denir.<sup>26</sup>

$p_{jj}^{(n)}$  olasılığı  $n = t, 2t, 3t, \dots$  değerleri için bir ve bu değerler dışındaki  $n$ 'ler için sıfıra eşittir .  $\delta \geq 2$  için  $p_j(T = n\delta, n \geq 1) = 1$  olarak periyodik durum ifade edilir . Eğer  $t = 1$  ise  $j$  durumuna periyodik olmayan durum denir .

**2.2.4.2.Teorem :**  $d$ , ancak ve ancak  $p_{jj}^{(n)} > 0$  şartını sağlayan tüm  $n$ 'lerin E.B.O.B.'i ise  $j$  durumunun periyodu  $d$ 'dir . Yani ,

$$d = \text{E.B.O.B} \{ n : p_{jj}^{(n)} > 0 \} \text{ ise } j \text{ durumunun periyodu } d' \text{ dir .}$$

**İspat :**  $j$  durumunun periyodu  $d$  olsun . O halde  $n, d$ 'nin bir katı değilse  $p_{jj}^{(n)} = 0$  olacaktır . Buradan  $p_{jj} > 0$  için  $n, d$ 'nin bir katı olmalıdır . Yani E.B.O.B  $d$ 'nin bir katıdır . Şimdide  $d$ 'nin  $p_{jj} > 0$  olmak üzere  $n$ 'lerin E.B.O.B.'u olduğunu farzedelim .  $d' > d$  alınırsa  $d$ 'nin  $p_{jj} > 0$  olmak üzere  $n$ 'leri böldüğü ortaya çıkar . Ancak bu  $d$ 'nin E.B.O.B. olduğu ile çelişir . O halde  $d$  E.B.O.B.'dur . Böylece  $j$  durumunun  $d$  periyoduna sahip olduğu görülür .

<sup>26</sup>A.Bruce Klarke and Ralph L.Disney ; a.g.e. ; s. 226-229



İndirgenemez bir sürecin bütün durumları aynı peryoda sahiptir. Yani herhangi bir durum peryodik ise diğer tüm durumlar da aynı peryoda sahiptir.

Şayet bir durum hem peryodik olmayan bir durum hem de pozitif tekrarlı durum ise ergodik durum adını alır.

### 2.2.5.Durum Sınıfları

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$  olmak üzere  $p_{ij}^{(n)} > 0$  ise  $j$  durumu  $i$  durumundan erişilebilirdir. Eğer  $j'$  ye  $i'$  den erişilebiliyorsa bu durum  $i \rightarrow j$  şeklinde gösterilir.

Eğer  $j$  durumu  $i'$  den erişilebilir ve  $i$  durumuda  $j'$  den erişilebilir ise  $i$  ve  $j$  durumlarına ilişkili (communicate) durum denir ve bu durum  $i \leftrightarrow j$  sembolü ile gösterilir.

İlişkili durumun bir takım özellikleri vardır. Bunlar :

1.  $i$  durumu için  $i \leftrightarrow i$  (yansıma özelliği)
2.  $i, j$  durumu için  $i \leftrightarrow j$  ise  $j \leftrightarrow i$  'dir. (Simetri özelliği)
3.  $i, j, k$  için  $i \leftrightarrow j$ ,  $j \leftrightarrow k$  ise  $i \leftrightarrow k$  'dir. (Geçişme özelliği)

$C$  durum uzayının alt kümesi olsun.  $i \in C$  ve  $k \notin C$  'ler için  $p_{ik} = 0$  ise  $C$  kümesine kapalı küme (closed set) denir.<sup>27</sup> Diğer bir ifade ile  $C$  kümesinin dışındaki hiçbir duruma  $C$  'deki bir  $a$  durumundan erişilemiyorsa  $C$  kümesi kapalıdır. Eğer  $C$  'deki her bir durum çifti ilişkili ise (yani denklik sınıfı oluşturuyorsa) o halde  $C$  kapalı ilişkili sınıf (closed communicating class) olarak adlandırılır.

<sup>27</sup>Willam Feller ; *Introduction to Probability Theory and Its Applications* , 2nd Edition , John Wiley & Sons , 1964 , s. 349



2.2.6. Eğer durum uzayındaki bütün durumlar ilişkili ise markov zincirine indirgenemez markov zinciri denir. Şayet E kümesi içinde kapalı kümeler mevcutsa markov zinciri indirgenebilir.

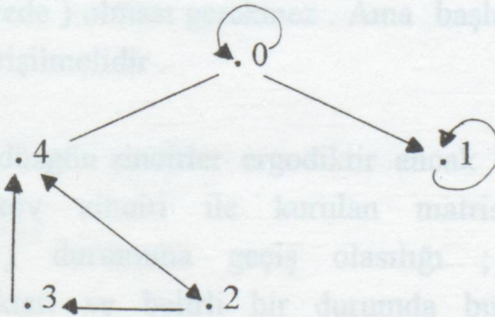
Eğer  $p_{jj} = 1$  ise yani kapalı küme tek bir durum içeriyor ise  $j$  durumuna yutucu durum denir. Bu ise  $j$  durumuna birkez ulaşıldığı zaman zincirin oradan bir daha ayrılamayacağı anlamına gelir.

Sonlu durum uzaylı markov zincirinin indirgenemez olup olmadığı geçiş diyagramları (ya da şebeke) ile belirlenebilir. Geçiş diyagramları her bir duruma uygun gelen noktalar ile belirlenen çizgi diyagramlardır.

Sonlu bir markov zincirinin ergodik olması için yalnız ve yalnız Geçiş matrisi  $P$  olan bir markov zinciri ele alalım.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu geçiş matrisine uygun diyagram aşağıdaki gibidir :



Bu şebekelerde sadece ve sadece,  $p_{ij} > 0$  ve  $p_{ji} > 0$  için  $i$  ile  $j$  arasında çift yönlü ok vardır.



### 2.2.6. Ergodik Markov Zincirleri

Şayet  $E$  kümesi içinde kapalı kümeler mevcut ise markov zinciri indirgenebilir.  $P$  bir markov zincirinin geçiş matrisi olsun.  $i$ 'den bağımsız olarak tüm  $j$ ' ler için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \prod_j \text{ mevcut olur ve } \sum_{j=1}^{\infty} \prod_j = 1$$

oluyorsa bu zincir ergodiktir .

Sonlu bir markov zincirinin ergodik olması için yalnız ve yalnız tüm durumlar aperiodyik olmak üzere ve pozitif tekrarlı durumların sadece tek bir indirgenemez alt kümesi olması gerekmektedir .

Bir gerçek hayat sürecinin markov zinciri ile modeli kurulduğu zaman her zaman ergodik olmayabilir ancak uygulamalarda genellikle ergodik olmaktadır . Eğer süreç uzun zaman sonra sonuçlanıyor ise o zaman model genellikle yutucu markov zinciri formundadır . Süreç bu durumlara girdiği zaman bir daha süresiz orada kalır.

Ergodik zincir , matematiksel olarak bir durumdan diğer bir duruma geçişin mümkün olduğu süreci tanımlar .<sup>28</sup> Bu geçişin tam olarak bir adımda ( devrede ) olması gerekmez . Ama başlangıç durumuna bakılmaksızın bir duruma erişilmelidir .

Bütün düzgün zincirler ergodiktir ancak bunun tersi doğru olmayabilir.

Şayet markov zinciri ile kurulan matris düzgün ise  $n$  adımda  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş olasılığı ;  $n$  adım sonunda oluşacak geçişlerin miktarı ve belirli bir durumda bulunma olasılık dağılımı elde edilebilir .

<sup>28</sup>J.Laurie Snell ; a.g.e. , s. 438-442



### 2.2.6.1. Uzun Dönem Markov Zincirlerinin Özellikleri

Sürecin uzun süreli davranışlarında başlangıç durumu etkilidir . Uygulamalarda genellikle indirgenemez markov zincirlerinin uzun dönem davranışı incelenir .<sup>29</sup>

$n$  adım geçiş olasılığı  $n = 1, 2, \dots$  için

$$p_{ij}^{(n)} = P ( X_n = j \mid X_0 = i ) \quad i, j \in E$$

olmak üzere  $i$  ve  $j$  farklı indirgenemez kümelerin elemanları iseler ,

$$p_{ij}^{(n)} = 0$$

ve  $i$  ve  $j$  geçişli durum iseler ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j$$

olur .

$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \cdot \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \Pi_j$  dağılımı sözkonusudur . Her  $i, j \in E$  için ,

$$\Pi_j \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_k \Pi_j = 1$$

koşullarını sağlayan  $\Pi_j$  dağılımı vardır . Şayet indirgenemez markov zinciri ergodik ise ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j \quad \text{Her } i, j \in E \text{ için}$$

ifadesi geçerlidir .

$\Pi_j$  artan sayıdaki geçişlerden sonra sistemin ( sürecin )  $j$  ' de bulunma olasılığı olup , başlangıç durumu ve  $n$  ' den bağımsızdır .

<sup>29</sup>F.S.Hillier and G.J.Lieberman ; a.g.e. , s. 411-415



### 2.2.7. Markov Zincirlerinde Teorik Yaklaşımlar

Markov zincirlerinde pekçok teorik yaklaşım söz konusudur . Ancak bunlardan en çok kullanılanlar denge durumu ( steady state ) ile yutucu durum (absorbing state )' dur .

#### 2.2.7.2.Yutucu Durumlar

##### 2.2.7.1.Denge Durumu Olasılıkları

$P$  geçiş olasılıkları matrisi ve  $E$  durum uzayı olsun . Eğer  $i$  ile  $j$  bir sınıfa ait ve ergodik iseler  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j$  ifadesi gösterilebilir .<sup>30</sup>

Eğer  $\Pi_j$  değerleri aşağıdaki özelliklere sahip iseler ;

1.  $\sum_{j=0}^M \Pi_j = 1$
2.  $\Pi_j \geq 0$
3.  $\Pi_j = \sum_{i=0}^M \Pi_i p_{ij} \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$  için

$\Pi_j$ 'ler markov zincirinin denge durum olasılıkları olarak adlandırılırlar .

Yine bu eşitlikleri sağlayan  $\Pi = ( \Pi_j : j \in E )$  vektörüne  $P$ 'nin denge olasılık vektörü denir .

Markov zincirinin geçiş olasılıkları matrisinde  $n$  yeterince büyütüldüğü zaman  $P^{(n)}$ 'in satırları aynı olma eğilimindedir . Yani  $j$  durumu pekçok geçişten sonra  $\Pi_j$  değerine yönelir . Denge olasılık vektörü  $\Pi$  olan bir markov zincirinde  $\Pi = \Pi \cdot P$  denkleminin tek çözümü  $\Pi$ 'dir . Bir markov zinciri indirgenemez ve aperiodyik ise yalnız ve yalnız

<sup>30</sup>F.S.Hillier and G.J.Lieberman ; a.g.e. , s. 413-415



tüm durumlar pozitif tekrarlı olmak üzere  $\Pi = \Pi \cdot P$  lineer denkleminin yukarıdaki üç şartı sağlayan ve denge durum olasılık vektörü olarak adlandırdığımız bir  $\Pi$  çözümü vardır<sup>31</sup>. Eğer  $P$  indirgenemez ve bu denklemin  $\Pi$  gibi tek bir çözümü var ise o halde zincir ergodik ve  $j \in E$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  için  $\Pi_j = 1/\mu_{ij}$  'dir.

### 2.2.7.2. Yutucu Durumlar

Markov zincirlerinin özel bir hali, önceden bilinen koşullara erişmeyi engelleyen sistemleri tanımlamakta kullanılmaktadır. Bu tip süreçler yutucu markov zincirleri ile model kurularak incelenirler. Süreç yutucu duruma girdikten sonra oradan ayrılması imkansızdır. Zincirin geçişli durumları dışındaki diğer durumları yutucu durum, kapalı küme oluşturan durum ya da ergodik durum değil ise markov zinciri indirgenebilir zincir olarak adlandırılır.

$E = \{ 0, 1, 2, \dots, M \}$  olan bir markov zincirini ele alalım. Bu zincirde yalnızca sıfır (0) durumu yutucu durum diğerleri geçişli durum olsun. O halde  $p_{i0} = 1$  'dir ve bu yutucu duruma giren her girişin olasılığı yutulma olasılığı olarak adlandırılır. Bu olasılıklar herhangi bir  $i$  durumu için kolayca hesaplanabilir.

Eğer  $E$  durum uzayında birden fazla yutucu durum söz konusu ise problem daha karmaşık olacaktır.  $\{ 0, 1, \dots, k \}$  durumları yutucu olsun.

<sup>31</sup>Mehmet Şahinoğlu ; a.g.e. , s. 56-57



Geçiş matrisi  $P$ , nonsingular matris olduğu için

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$R \quad Q$

şeklinde olacaktır.

$Q = \{ p_{ij} \} \quad i = k+1, \dots, M ; j = k+1, \dots, M$  (  $j$  ve  $i$  geçişli )  
 $Q$  matrisi herhangi bir yutucu olmayan durumdan diğer yutucu olmayan durumlara tam olarak bir adımda geçiş olasılıklarını vermektedir. Yutucu markov zincirlerin de sürecin  $n$  adımda yutulma olasılığı sıfırdır. Dolayısı ile  $n$ 'in sonsuza gitmesi ile  $Q^n$ 'in her bir elemanı sıfıra yaklaşır.

$$R = \{ p_{ij} \} \quad i = k+1, \dots, M ; j = k+1, \dots, M \text{ ( } i \text{ geçişli, } j \text{ yutucu )}$$

$R$  matrisi  $n$ . adımda sürecin  $k$ . yutucu olmayan durumdan başlaması halinde  $r$ . yutucu durumda yutulma olasılığını verir. Kısaca  $R$  matrisi bir yutucu olmayan durumdan bir yutucu duruma geçiş olasılıklarını içermektedir.

$$f_{ik} = p_{ik} + \sum_{j=k+1}^M p_{ij} \cdot f_{jk} \quad (\text{Herhangi bir } i \text{ geçişli, } k \text{ yutucu durum için})$$

$$F = \{ f_{ik} \} \quad i = k+1, \dots, M \quad j = k+1, \dots, M \text{ ( } i \text{ geçişli, } j \text{ yutucu )}$$

$$F = R + Q \cdot F$$

$$(I - Q) \cdot F = R$$



$(I - Q)$  daima nonsingular matris olduğu için

$$F = (I - Q)^{-1} \cdot R$$

Her  $F = (I - Q)^{-1} \cdot R$  için  $P(X_{t+s} = j | X_t = i) = p_{ij}(s)$  olasılıkları ise sürekli parametrelili markov zincirlerinin geçiş fonksiyonları adı verilir.

eşitliği ile verilen  $P$  geçiş olasılıkları matrisi yardımı ile yutulma olasılıkları  $(f_{ik})$  kolayca hesaplanabilir<sup>32</sup>.  $(I - Q)^{-1}$  matrisine temel matris denir. Her markov zincirleri  $p_{ij}(s)$  olasılığı zaman aralığının başlangıcına değil yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır.

$$p(s) = (p_{00}(s), p_{01}(s), \dots)$$

### 2.3. Sürekli Parametrelili Markov Zincirleri

Bir önceki bölümde markovien özelliğe sahip kesikli rassal değişkenlerden oluşan markov zincirleri üzerinde durduk. Bu bölümde ise sürekli parametrelili markov zincirlerine kısaca değinilecektir. Sürekli parametrelili markov zincirlerinde parametre uzayımız bir aralıktır. Kısa bir zaman aralığındaki davranışların sürekli bir model ile incelenmesi daha uygundur.

#### 2.3.1. Markovien Özellik ve Geçiş Fonksiyonları

$\{X_t : t \in R^+\}$  ile gösterilen bir stokastik süreç  $k_j \in E$  ve tüm  $n$ 'ler için  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  olacak şekilde

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

<sup>32</sup>İlhan Or ; a.g.e. , s. 29-30

<sup>33</sup>Osman Halaç ; a.g.e. , s. 129-130



ise  $\{X_t\}$  stokastik süreci bir markov sürecidir.

Her  $i, j \in E$ ,  $t \geq 0$  ve  $s \geq 0$  için  $P(X_{t+s} = j \mid X_t = i) = p_{ij}(s)$  olasılıkları ise sürekli parametrelili markov zincirlerinin geçiş fonksiyonları adı verilir. Bu geçiş fonksiyonlarından geçiş matrisi elde edilir. Eğer geçiş fonksiyonları  $i, j \in E$ ,  $t \geq 0$  ve  $s \geq 0$ 'dan bağımsız ise sürekli parametrelili homojen markov zincirleri denir.  $p_{ij}(s)$  olasılığı zaman aralığının başlangıcına değil yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır.

Sürekli parametrelili markov zincirleri ile çalışılırken elemanları  $P_{ij}(t)$  olan  $P(t)$  ile elemanları  $P(X_0 = j) = p_j$  olan  $p^{(0)}$  vektörüne ihtiyaç duyarız.

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)$$

$$p = p^{(0)} = (p_0, p_1, \dots)$$

$$P(t) = (p_{ij}(t)) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & \dots & \dots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$p(t) = p \cdot P(t)$  ile  $p_j = \sum_i p_i \cdot p_{ij}(t)$  elde edilebilir.

$0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  ve  $j_1, j_2, j_3, \dots$  tam sayılar ise

$$P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) = \left[ \sum_i p_i p_{ij_1}(t_1) \right] p_{j_1 j_2}(t_2 - t_1) \dots p_{j_{n-1} j_n}(t_n - t_{n-1})$$

olasılığı elde edilebilir<sup>34</sup>.

<sup>34</sup>A.Bruce Klarke and R.L.Disney ; a.g.e. , s. 261



### 2.3.2.Sürekli Durumlarda Chapman - Kolmogorov Eşitliği

Bir markov sürecinin geçiş olasılıkları her bir  $i, j, t \geq 0$  için  $0 \leq p_{ij}(t) \leq 1$  özelliğine sahiptir .

$$\begin{aligned} P(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i) &= P(X_0 = i, X_{t+s} = j, X_t = k) / P(X_0 = i) \\ &= \frac{P(X_0 = i, X_t = k)}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_0 = i, X_{t+s} = j, X_t = k)}{P(X_0 = i, X_t = k)} \\ &= P(X_t = k \mid X_0 = i) P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i, X_t = k) \\ &= P(X_t = k \mid X_0 = i) P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) \\ &= p_{ik}(t) p_{kj}(s) \end{aligned}$$

Her  $i, j$  ve  $t \geq 0$  için ,

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

oluşturulmuş olur<sup>35</sup> . Bu da Chapman - Kolmogorov eşitliğidir .

**Tanım :** 0 noktasında  $p_{ij}(t)$  geçiş olasılığı sürekli olmalıdır .Buna göre

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olacaktır . Ayrıca geçiş olasılıkları her  $i, j \in E$  ,  $t \geq 0$  için

$$p_{ij}(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$$

şartlarına sahip olmalıdır .

<sup>35</sup>A.B.Klarke and R.L.Disney ; a.g.e. , s. 263-264



çalışmasında belirlenmemiş olan bir markanın tüketicilerindeki artmış olan kazanç ve kayıpların tahmini değerleri ve değişmez davranışları gibi tipik özellikleri hesaba katmıştır. Tüketici davranışlarında markov modellerine ilişkin daha karmaşık yaklaşımlar ve Howard ( 1964 ), Ekrenberg (1965 ), Carmon (1966 )..... tarafından geliştirilmiştir<sup>36</sup>.

### BÖLÜM 3

#### İŞLETME YÖNETİMİNDE BAZI MARKOV MODELLERİ

##### 3.1.TÜKETİCİ DAVRANIŞLARI

Pazarlamada temel olgu , tüketicinin satın alma davranışlarıdır . Pekçok teşebbüs , bu davranışları yeterince tanımlayabilecek bir analitik modele ulaşmak için çaba sarfetmektedirler . Pazarlama sürecinde kolayca farkedilmeyen ancak birbirini etkileyen güçlerin yapısı stokastik (olasılıksal ) dır. Bu nedenle pekçok olasılıksal model denenmiştir .Tüketicilerin marka değiştirme davranışlarına ait ilk model Bernoilli süreci olmuştur .Bu süreçte , daha önce bir markanın satın alınması ve sonuçları tekrar o markanın satın alınmasını etkilememektedir . Modelin yapısı basit olmasına rağmen tüketici davranışlarının gerçek şartlarını açıkça belirtememiştir. Bu olayların yapısına daha uygun bir model olarak Markov zincirleri kullanılmıştır .<sup>36</sup>

Pazarda belirli bir ürünün m tane markasının varolduğunu farzedelim . Bir marka seçimi için tüketici tercihini , yalnızca bireyin ürünün belirli bir markasını kullanıyor olması etkiliyor varsayımını yapalım .  $X_n$  , n . periyodda bireysel tercihleri gösterebilir .  $X_n$  , ürünün m markasına karşılık gelen 1, 2 , 3,....., m değerlerini alabilir . Yeterli sayıda tüketicinin davranışları gözlemlenmek sureti ile geçiş olasılıkları matrisi tahmin edilebilir . Bu konuda 1960 yılında Maffei <sup>37</sup>, yalnızca iki markanın bulunduğu pazarda tüketicilerin marka tercihini tanımlamak için iki durumlu markov zincirini kullanmıştır . Bu iki ürünü satın alan tüketicilerin gerçek sayısı olarak belirli bir hata içeren tahmini tüketici sayısı ile çalışılmıştır . Maffei , bu

<sup>36</sup>U.Narayan Bhat ; a.g.e. ; s. 556-559

<sup>37</sup>U.N.Bhat , a.g.e. , s.556



çalışmasında belirtilmemiş olan bir markanın tüketicilerindeki artmış olan kazanç ve kayıpların tahmini değerleri ve değişmez davranışları gibi tipik özellikleri hesaba katmıştır. Tüketici davranışlarında markov modellerine ilişkin daha karmaşık yaklaşımlar Hertiner ve Howard ( 1964 ) , Ekrenberg (1965 ) , Carmen (1966 ).....tarafından geliştirilmiştir<sup>38</sup> .

3.2.P Lipstein tarafından zaman bağımlı geçiş olasılıkları matrisi içeren markov modelleri , reklamların tüketici davranışları üzerindeki etkileri için kullanılmıştır .Bu çalışmada  $A_n$  matrisi elemanları  $n$  . zaman periyodunda reklamların etkisini temsil etmektedir .  $R_n$  matrisi ise bu peryod için reklamdan önceki tüketici davranışlarını veren matristir .Açıkça ,

$$R_{n+1} = R_n A_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

$A_n$  matrisinin elemanları reklam harcamalarının regresyon analizi ile açıklanır . Böylece eğer  $(b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \dots, b_m^{(n)})$  ticari eşyanın  $m$  markası için  $n$  zaman periyodunda reklamcılık maliyetleri ise ve  $\beta_{ijr}^{(n)}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots, m$ ) regresyon katsayılarının benzeri ise o halde  $A_n$  matrisinin  $a_{ij}^{(n)}$  elemanları

$$a_{ij}^{(n)} = \beta_{ij1}^{(n)} b_1^{(n)} + \beta_{ij2}^{(n)} b_2^{(n)} + \dots + \beta_{ijm}^{(n)} b_m^{(n)} \quad (2)$$

ile açıklanabilir .

$n$  devre geçiş olasılıkları matrisi ,

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n) = R_0 (R_0 A_0) (R_1 A_1) (R_2 A_2) \dots (R_{n-1} A_{n-1}) \\ = R_0 (R_0 A_0) (R_0 A_0 A_1) \dots (R_0 A_0 A_1 \dots A_{n-1})$$

olarak gerçekleştirilebilir .

$A_n$  elemanlarının hesaplanmasının dolaylı bir yoluda

$$A_n = R_n^{-1} R_{n+1}$$

<sup>38</sup>U.N.Bhat ; a.g.e. , s. 557



$R_n^{-1}$  'in varolması halinde sağlanmıştır . ( Bir matris dominant köşegene sahip ise ve eğer bir satırdaki köşegen elemanı aynı satırda köşegen olmayan elemanların toplamından büyük ise , bu şart matrisinin varolması için yeterlidir .)

### 3.2.Pazar Payı Tahmininde Markov Zincirleri

Markov zincirleriyle pazar payı tahmininde ilişkin ,

- a ) Tüketicilerin firmaların mamüllerine karşı marka bağımlılığı ,
- b ) İşletmenin , rakiplerinin müşterilerini kazanma oranı ,
- c ) Rekabetten etkilenen müşteri oranı

sorularına yanıt aranmaktadır .<sup>39</sup> Markov analizi ile bu yanıtlar aranırken aşağıdaki varsayımlar yapılır .<sup>40</sup>

1. Pazar büyüklüğü sabit kalmaktadır .
2. Tüketicilerin marka tercihi geçmişteki tercihlerden etkilenmektedir .
3. İşletmenin gelecek döneme ait pazar payı bu dönemdeki pazar payına bağlıdır .
4. Pazara yeni rakipler girmemektedir .
5. Tüm tüketiciler söz konusu dönem içinde eşit miktarlarda satın almaktadırlar .
6. Tüketicilerin satın alma kalıpları son şekli ile ve düzenli aralıklar ile devam etmektedir .
7. Bu varsayımlar ile geçiş olasılıkları matrisi değişmemektedir .

Denge durumuna ulaşıldığı zaman markalar arası tüketici kazanç ve kayıpları sonuçta  $\varepsilon$  denilecek kadar küçüktür . (  $t = t - 1$  )Denge durumu , pazardaki gelişmeler ile değil geçiş olasılıkları matrisinin etkisi ile ortaya çıkar .

<sup>39</sup>F.T.Haner and J.C.Ford ; *Contemporary Managment* , Bell&Howell Co. , 1973 , s. 135-150

<sup>40</sup>H.L.Verma and C.W.Ross ; *Introduction to Quantitative Methods : A Managerial Emphasis* , John Wiley & Sons , 1978 , s. 532-540



### 3.3.Belirsizlik Altında Gelir Belirlenmesi

Belirsiz olaylara bağlı işletmelerde gelirin belirlenmesinde de bir markov modeli önerilmiştir. böyle bir olaya ilişkin bir örnek aşağıdaki gibidir :<sup>41</sup>

25.000 ağaçlık küçük bir fidanlığa sahip bir firma olsun . Ağaçlar burada uzunluklarına göre 10 temel sınıf üzerinde gruplandırılmıştır .Bu sınıflar markov zincirinin 10 geçişli durumunu oluştururlar . Satıldıkları zaman getirecekleri iki farklı ücret ile ağacın ölmesi ya da yanma , hastalık , deformasyon ...vb. sebepler ile yok edilmesi ihtimali üç tekrarlı durumu içermektedir .  $C_1$  \$ ( 4-6 ft. uzunluğundaki ağaçlar için ) ve  $C_2$  \$ ( 6 ft.' den uzun ağaçlar için ) iki farklı fiyat olsun .

Durumlar 1 ( $C_1$  \$) , 2 ( $C_2$  \$) , 3 (kırıntılar) , 4 (0-1 ft.) , ..... , 13 (9-10 ft.) ' dir

1 2 3.....12 13.

$P =$

|    |            |           |             |
|----|------------|-----------|-------------|
| 1  | 1          |           |             |
| 2  | 1          |           |             |
| 3  | 1          |           |             |
| 4  |            | $P_{4,3}$ | $P_{4,4}$   |
| 5  |            | $P_{5,3}$ | $P_{5,4}$   |
| 12 |            |           | $P_{12,13}$ |
| 13 | $P_{13,1}$ |           | $P_{13,13}$ |

$c_{ij}$  , bir ağacın  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş maliyeti olsun ( $i, j = 3, 4, 5, \dots, 13$ )

$s_{ij}$  , ağacın satışından elde edilen net peşin hasılat olsun .( $i = 8, \dots, 13$  ve  $j = 1, 2$ )

$v_i$  ,  $i$  geçişli durumundaki bir ağacın gerçekleşebilen net değeri olsun.

<sup>41</sup>U.Narayan Bhat ; a.g.e. , s. 565-569



O halde  $i = 4, 5, \dots, 13$  için

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^2 p_{ij} s_{ij} - p_{i3} c_{i3} + \sum_{j=4}^{13} p_{ij} (v_{ij} - c_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^2 p_{ij} s_{ij} - p_{i3} c_{i3} - \sum_{j=4}^{13} p_{ij} c_{ij} + \sum_{j=4}^{13} p_{ij} v_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

yazılabilir .

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} s_{ij} - p_{i3} c_{i3} - \sum_{j=4}^{13} p_{ij} c_{ij} = h_i$$

yazalım .

$V$  ve  $H$   $v_i$  ve  $h_i$  elemanlı sütun vektörlerini temsil edecek olursa (1) No ' lu ifade matris formunda

$$V = H + QV$$

$$V = (I - Q)^{-1} \cdot H$$

elde edilebilir .

$N_i$  ( $i = 4, 5, \dots, 13$ ) herbir durumdaki ağaç sayısı ve  $N, N_i$  ' nin sütun vektörü olsun .  $N^T V$  ise toplam stok miktarını verir .

### 3.4. Pazarlama Stratejisinde Markov Analizinin Kullanılışı

Markov analizinin pazarlama stratejilerinin belirlenmesinde nasıl yardımcı olacağını açıklamak üzere aşağıdaki örneği dikkate alalım .<sup>42</sup>

<sup>42</sup>Richard I. Levin and Charles A. Kirkpatrick ; *Quantitative Approaches to Managment* , 4th Edition , 1978, s. 555-557



Birbirleri ile rakip üç satıcı için , geçiş matrisi aşağıdaki gibi olsun .

tutma ve kaybetme

|   | A   | B   | C   |         |
|---|-----|-----|-----|---------|
| A | 0,2 | 0,6 | 0,2 | tutma   |
| B | 0,1 | 0,5 | 0,4 | ve      |
| C | 0,2 | 0,3 | 0,5 | kazanma |

Şayet bu üç firmanın pazarlama stratejisi geçiş olasılıkları matrisini etkileyecek biçimde olmadığı takdirde , denge pazar paylarının A için 0,156, B için 0,434 , C için 0,41 olacağını mantıksal olarak söyleyebiliriz .

Kötü performansını iyileştirme gayreti içindeki A satıcısı iki yeni pazarlama stratejisini dikkate alabilir .

1 . Strateji : A satıcısı kendi müşterilerinden daha çoğunu elde tutmaya çalışabilir . Strateji 1 ' in elinde tutma yüzdesini 20 'den 40 ' a çıkardığını ve bu değişikliğin A 'nın B satıcısına kaybettiği müşterileri azaltmasından oluştuğunu varsayalım .

Yeni geçiş olasılıkları matrisi , denge paylarını hesaplırsak A 'nın 0,233 ; B 'nin 0,391 ; C 'nin 0,376 olduğunu buluruz .

|   | A   | B   | C   |
|---|-----|-----|-----|
| A | 0,4 | 0,4 | 0,2 |
| B | 0,1 | 0,5 | 0,4 |
| C | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

şeklindedir .

Yeni denge pazar payları A için 0,2 ; B için 0,4 ; C için 0,4 olarak hesaplanır . Şimdi A 'nın performansı daha iyidir . Ancak A 'nın kampanyası özellikle B 'ye yönelik olmasına karşın C 'nin de olumsuz etkilendiği görülür . Çünkü C , hem A 'dan hem de B 'den yeni müşteriler kazanmakta



ama B' den kazandığı A' dan kazandığından .Şimdi B , A' nın stratejisinin sonucu olarak A' dan daha az müşteri kazandığından C' nin B' den kazancı ( 0,4 ) şimdi daha küçük bir sayıyı simgeleyecektir . A' nın çabaları sonucu C' nin kazançlarının daha fazla etkilenmemesi doğal bir sonuçtur .

2.strateji : Bir alternatif olarak A satıcısı , pazarlama gayretlerini C' 'den uzaklaşan müşterilerin daha büyük payını yakalamak için yoğunlaştırabilir . A' nın kampanyasından C' den uzaklaşan müşterilerin , , şimdiki 0,2 oranı yerine , 0,4 oranının A' ya yönelmesini sağlayacak biçimde tasarımılandığı varsayılın .

Geçiş olasılıkları matrisi şimdi ,

|   | A   | B   | C   |
|---|-----|-----|-----|
| A | 0,2 | 0,6 | 0,2 |
| B | 0,1 | 0,5 | 0,4 |
| C | 0,4 | 0,1 | 0,5 |

şeklinde dir .

Eğer bu tür bir stratejiden ortaya çıkan denge paylarını hesaplarsak A' nın 0,233 ; B' nin 0,391 ; C' nin 0,376 olduğunu buluruz .

Bu örnekten , iki programın maliyetlerinin aynı olması koşulunda ikinci stratejinin açıkça daha iyi olduğunu görürüz . Yine 2. strateji durumunda , A' nın iyileşme çabaları hiçbir şekilde yöneltilmemiş de olsa , A' nın C' ye yöneltlen pazarlama programı nedeni ile B' nin kayba uğradığına dikkat çekilmelidir . Çünkü B , her ay C' nin müşterilerinden 0,3 ' ünü almaktaydı . Şimdi A' nın çabalarının C' nin müşterilerinden 0,4 ' ünü alma konusunda başarı sağlamış olması nedeni ile B' nin değiştirenlerden aldığı pay 0,1 ' e düşmüştür . B ; sonunda A' dan , A' nın C' den almayı başardığı bazı yeni müşterileri geri alabileceği için B' nin payının büyük bir biçimde küçülmemesi doğal bir sonuçtur .



Pazar payı tahmininde yapılan varsayımları anlatırken , matematiksel işlemleri kolaylaştırmak amacı ile hiç bir eski müşterinin pazarı terk etmediğini hiç bir yeni müşterinin pazara girmediğini varsaymıştık .Bu durumun ortaya çıkması çok nadirdir . Öyleyse yeni müşterilerin pazara geldiği ve belirli mağazalardan alış veriş ettiği ve eski müşterilerin yok olduğu ya da pazarı terk ettiği daha gerçekçi deneyimler hakkında ne söylenebilir ? Bu durumda yakın dönemdeki pazar payları ve dengedeki pazar paylarına ait kazanç ve kayıpların etkileri üç değişkene dayanır :

1. Her yeni gelenin hangi markadan satın aldığı ,
2. Her yeni tüketicinin , müşteri almaya son verdiği anda satın almakta bulunduğu marka ,
3. Her yeni gelenin marka bağlılığının , pazara müşteri olarak geldiği zamandaki marka bağlılığı biçiminden ne ölçüde farklılık gösterdiği .

Ele aldığımız firmaların pazarlama problemlerine markov analizinin uygulanması için gerekli bilgileri temin etmek için firma , bir pazar araştırması örgütünün hizmetlerini satın alabilir . Bu örgütlerin bazıları müşterileri için marka bağlılığı ve marka değiştirme verileri toplamaktadır .

### 3.5. Markov Analizinin Ekipman Tamiri Uygulaması

Bir meşrubat bayiinin depo yöneticisi her hafta 24 şişelik kasaları kontrol ederek bunları " bu hafta yenilenmiş " , " iyi iş görür durumda " , " uygun durumda " ya da " kullanılmayacak kadar hasarlı " olarak sınıflandırmaktadır .

Eğer bir kasa kullanılmayacak kadar hasarlı ise tamir mahalline gönderilmekte ve burada bir hafta kullanım dışı kalmaktadır. Depo kayıtları , meşrubat kasaları için uygun geçiş olasılıkları matrisi şu şekilde verilmiş olsun .<sup>43</sup>

<sup>43</sup>Richard I. Levin and Charles A. Kirkpatrick ; a.g.e. , s. 557-559



|            | Yenilenmiş | İyi | Uygun | Hasarlı |
|------------|------------|-----|-------|---------|
| Yenilenmiş | 0          | 0,8 | 0,2   | 0       |
| İyi        | 0          | 0,6 | 0,4   | 0       |
| Uygun      | 0          | 0   | 0,5   | 0,5     |
| Hasarlı    | 1          | 0   | 0     | 0       |

Bu bayiin muhasebecisi bir kasanın tamir edilmesi maliyetinin 2,5 \$ olduğunu ve şirketin bir kasanın kullanılmayacak kadar hasarlı bulunduğu her zaman üretim verimliliğinden 1,85 \$ kayba uğradığını söyler. Verimlilik , hasarlı kasaların kamyon yükleme sürecini yavaşlatmasından dolayı düşmektedir .

Böylelikle haftalık ortalama tamirat maliyeti ve üretim verimliliği kaybı ,

Hem haftalık beklenen tamirat maliyetini , hem de üretim verimliliği kaybını hesaplamak için geçiş matrisinin denge olasılıklarına gereksinimiz vardır . Denge olasılıkları

Yenilenmiş 0,167

İyi 0,333

Uygun 0,333

Hasarlı 0,167

olarak hesaplanabilir .

3.5. Bu durumda haftalık ortalama tamirat maliyeti ve üretim verimliliği kaybı ,

$$0,167 \times 2,5 \$ + 0,167 \times 1,85 \$ = 0,725 \$ \text{ ( kasa / hafta )}$$

olarak bulunur .

Şimdi kasaların kontrol edilip uygun durumda bulunduğu zaman yenilemeyi düşündüklerini varsayalım . Bu durumda yeni geçiş matrisi ,

kategoriye dağılımı şöyledir : 1- %30 , 2- %35 , 3- %25 , 4- %10



7 ay önce Yenilenmiş İyi Uygun , 450 operatör çalıştırarak Mt. Gilcad fabrikasına yeni bir örgütsel sistem getirmiştir. Yeni sistem Yenilenmiş kendi kolları ile 0,8 0,2 ma birimlerine sınıflamaktadır. İyi çalışma biriminde sadece 0,6 0,4 lerini seçmekle kalmamakta , Uygun iş programlarını da belirlemektedir. Yeni düzenlemeye geçildiğinden bu yana tutulan kayıtlar , fabrika yöneticisine aşağıdaki işgörenlerin şeklinde olur . Bu matrisin denge olasılıkları şunlardır :

Yenilenmiş 0,25

İyi 0,50

Uygun 0,25

Böylelikle haftalık ortalama tamirat maliyeti ve üretim verimliliği kaybı ,

$$0,25 \times 2,5 \$ + 0 = 0,625 \$ \text{ (kasa /hafta )}$$

bulunur .

Yeni örgütsel sistemin sonucu olarak verimlilik dağılımı açısından ne bel Sonuçta kasaların , uygun durumda bulunur bulunmaz tamir edilmesi bu meşrubat şirketine kasa başına haftada 10 sentten biraz fazla tasarruf sağlayacaktır . Bu şirketin altı bin kasadan fazla kasası olsa şirket için bu tasarruf oldukça büyüktür .

### 3.6. Markov Analizinin İşgören Verimliliği Uygulaması

Bu uygulamanın nasıl olduğunu bir önceki bölümde olduğu gibi örnek üzerinde anlatmaya çalışalım <sup>44</sup>.

Bayan gecelikleri üreten United Industries , dikiş operatörlerini bir önceki aydaki verimliliklerine göre dört katagoride toplamaktadır . 1 en düşük 4 ise en yüksek kategoridir . Eskilerde , dikiş işgücünün dört kategoriye dağılımı şöyledir : 1= % 30 , 2 = % 35 , 3 = % 25 , 4 = % 10

<sup>44</sup>R.I:Levin and C.A.Kirkpatrick ; a.g.e. , s. 559



7 ay önce United en büyük birimlerinden , 450 operatör çalıştıran Mt. Gilead fabrikasına yeni bir örgütsel sistem getirmiştir . Yeni sistem operatörleri kendi arzuları ile seçtikleri çalışma birimlerine sınıflamaktadır. Bu çalışma birimleri sadece kendi nezaretçilerini seçmekle kalmamakta , kendi iş programlarını da belirlemektedir . Yeni düzenlemeye geçildiğinden bu yana tutulan kayıtlar , fabrika yöneticisine aşağıdaki işgörenlerin verimliliğinde aydan aya olan değişimleri gösteren geçme olasılıkları matrisini kurmasına olanak sağlamaktadır :

|         |   | Enküçük |     | Enbüyük |     |
|---------|---|---------|-----|---------|-----|
|         |   | 1       | 2   | 3       | 4   |
| Enküçük | 1 | 0,5     | 0,3 | 0,2     | 0   |
|         | 2 | 0,3     | 0,4 | 0,2     | 0   |
|         | 3 | 0,1     | 0,2 | 0,2     | 0,5 |
| Enbüyük | 4 | 0,1     | 0,1 | 0,1     | 0,7 |

Yeni örgütsel sistemin sonucu olarak verimlilik dağılımı açısından ne beklenmesi gerektiğini bilmek istiyor olalım .Ayrıca , operatörlerin ayda ortalama 700 \$ kazandığını ve verimlilik kayıpları kategori 1 , 2 , 3 ve 4 için sırasıyla % 40 , % 25 , % 15 , % 5 olduğunda , bu sistemin her ay ki uzun dönem yararını bulmak isteyelim .

3.7. M2 Denge olasılıkları matrisi şu şekilde elde edilebilir :

|          |   |       |
|----------|---|-------|
| En büyük | 1 | 0,247 |
|          | 2 | 0,241 |
|          | 3 | 0,192 |
| En küçük | 4 | 0,329 |

Önceki ve yeni sistemdeki aylık verimlilik kayıplarının hesaplanması için aşağıdaki çizelge oluşturulur :



### Eski ve Yeni Örgüt Sisteminin Maliyet Kıyaslaması

|         | İşgören Kategorisi | İşgören Yüzdesi | Verim Kaybı          |
|---------|--------------------|-----------------|----------------------|
|         | 1                  | 30              | $x \% 40 = \% 12,00$ |
| Eski    | 2                  | 35              | $x \% 25 = \% 8,75$  |
| örgüt   | 3                  | 25              | $x \% 15 = \% 3,75$  |
| sistemi | 4                  | 10              | $x \% 5 = \% 0,50$   |

$$\% 25 \times 700 \$ \times 450 \text{ işgören} = 78.750 \$$$

|         |   |      |                     |
|---------|---|------|---------------------|
|         | 1 | 24,7 | $x \% 40 = \% 9,88$ |
| Yeni    | 2 | 24,1 | $x \% 25 = \% 6,03$ |
| örgüt   | 3 | 19,2 | $x \% 15 = \% 2,88$ |
| sistemi | 4 | 32,0 | $x \% 5 = \% 1,60$  |

$$\% 20,39 \times 700 \$ \times 450 \text{ işgören} = 64.229 \$$$

Bu çizelgedeki hesaplamalar ile Mt. Gilead fabrikasının verimlilik kayıpları açısından ayda 14.000 \$ 'dan fazla bir tasarruf sağlama potansieline sahip olduğu görülmektedir.

### 3.7. Markov Analizinin Alacaklı Hesaplara Uygulaması

Markov analizi alacaklı hesaplar analizine özellikle alacaklı hesapların tahsil edilemeyecek oranının hesaplanmasında başarı ile uygulanmıştır.<sup>45</sup> Bu uygulamayı , üniversite öğrencilerine hizmet veren bir giyim mağazasını ele alarak açıklayabiliriz .Bu mağaza alacaklı hesaplarını iki grupta toplamaktadır : 0 - 60 günlük ve 61 - 180 günlük 180 günden daha eski alacaklı hesaplar , tahsil edilemeyen alacaklar olarak kapatılmaktadır .

<sup>45</sup>R:I:Levin and C.A:Kirkpatrick ; a.g.e. , s. 560-563



1. Bir Müşterilerin alacak hesabını , hesaptaki en eski ödenmemiş faturaya göre sınıflandırılmaktadır . ( Muhasebe de bu yöntem , eskiyen hesapların " toplam bakiyesi " yöntemi olarak adlandırılmaktadır , zira müşterinin toplam bakiyesi , o müşterinin en eski faturasının kategorisinde sınıflandırılır . ) Alacaklı hesapların eskimesi için kullanılan bu yöntem , şu anda 61 - 180 gün grubunda bulunan bir hesabın gelecek ay , eğer müşteri eski faturasını öderse 0 - 60 gün grubunda yer almasını olanaklı kılmaktadır .

Bu mağazanın hali hazırda 6500 \$ ' lık alacaklı hesabı bulunmaktadır ve geçiş kayıtlarının analizi ile şu geçiş olasılıkları matrisi verilmiştir :

1. İkinci aşamada  $(I - Q)$  matrisini teşkil ederiz .
2. Üçüncü aşamada  $(I - Q)$  matrisinin inversini elde ederiz .
3. Son aşamada ise Ödenmiş R Tahsil Edilmeyen 0 - 60 gün 61 - 180 gün

|                  |     |     |     |     |
|------------------|-----|-----|-----|-----|
| Ödenmiş          | 1   | 0   | 0   | 0   |
| Tahsil Edilmeyen | 0   | 1   | 0   | 0   |
| 0 - 60 gün       | 0,5 | 0   | 0,3 | 0,2 |
| 61 - 180 gün     | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Bu geçiş olasılıkları matrisinin üç özelliği tartışılmalıdır . İlk olarak daire içine alınmış 0 elemanını ele alın . Bu 0 - 60 gün kategorisindeki bir doların bir aylık bir süre içerisinde tahsil edilemeyen alacaklıya dönüşmeyeceğini belirtmektedir . Şimdi de daire içine alınmış 1 değerlerini ele alalım . Bu değerlerde zamanla dolar olarak tüm alacaklı hesapların ya ödeneceğini ya da tahsil edilemeyen alacaklı biçimine dönüşeceğini belirtmektedir . Herhangi bir " tutma " olasılığı 1 ' e eşit olduğunda hiçbir zaman denge olasılıklarını hesaplamamıştık , çünkü sürecin ya da o şirket ya da kategorinin tüm pazarı ( ya da bu durumda olduğu gibi dolarları ) elinde tutması ile sonuçlanacağını biliyorduk . Sonunda tüm dolarların ya ödenmiş olarak ya da tahsil edilmeyen alacaklı olarak sonuçlanacağını gerçek olmasına karşın bu mağaza 0 - 60 günlük ya da 61 - 180 günlük alacak kategorisindeki bir doların sonuçta ya ödenmiş ya da tahsil edilmemiş alacaklara varma olasılıklarını bilmekten yarar sağlayabilir . Örneğimizdeki mağazayı ilgilendiren bu dört olasılığın belirlenmesi dört aşamada gerçekleştirilebilir :



1. Birinci aşama : Önce mağazanın ilk geçiş olasılıkları matrisini her biri bir harf ile belirlenen dört matrise böleriz .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

1. İkinci aşamada  $(I - Q)$  matrisini teşkil ederiz .  
 2. Üçüncü aşamada  $(I - Q)$  matrisinin inversini elde ederiz .  
 3. Son aşamada ise  $(I - Q)^{-1} R$  matrisini hesaplarız .

Tüm bu işlemler yapıldığı takdirde ,

$$\begin{bmatrix} 1,5254 & 0,3390 \\ 0,3390 & 1,1864 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8993 & 0,1017 \\ 0,6441 & 0,3559 \end{bmatrix}$$

sonucu elde edilir .

Şimdi bu sonuçları yorumlayalım . Son matristeki üst sıra 0 - 60 günlük bir dolarlık alacaklı hesabı kategorisinin " ödenmiş " ve " tahsil edilemeyen " olarak sonuçlanma olasılığıdır . Daha açık olarak , halihazırda 0 - 60 günlük kategoride bulunan bir doların ödenme olasılığı 0,8983 ve sonunda tahsil edilmeme oranı 0,1017' dir . Aynı şekilde ikinci satır , 61 - 180 günlük kategoride bulunan ödenme olasılığının 0,6441 , " tahsil edilemeyen " ödeme olmasının olasılığının 0,3559 olduğu görülür .

Şayet bu mağaza başta söylenilen 6500 \$ ' lık alacaklı hesabının geleceğini tahmin etmek istiyorsa , önce toplamın ne kadarının 0 - 60 günlük ve 61 - 180 günlük kategoride olduğunu belirlemesi gerekir . İlk kategoride 4500 \$ , ikinci kategoride 2000 \$ bulunuyorsa ,



$$(4500 \$ \quad 2000 \$) \times \begin{bmatrix} 0,8993 & 0,1017 \\ 0,6441 & 0,3559 \end{bmatrix} = (5330,55 \$ \quad 1169,45 \$)$$

Bu sonuç ise sözkonusu mağazanın sözkonusu alacaklı hesaplarının 5330,55 dolarının ödenmiş olarak sonuçlanabileceğini , 1169,45 dolarının da tahsil edilemeyeceğine dönüşebileceği biçiminde yorumlanmalıdır .

Eğer şüpheli alacaklar için rezerv ayırma standart uygulaması izlenmekte ise , muhasebecisi en iyi tahmin ile 1169,45 dolarlık bir hesap oluşturmalıdır .

Markov analizinin işletmelerdeki uygulamalarında olasılıkların elde edilmesinde en büyük yardımcı örneklem tekniğidir . Örneğin , tüketici davranışlarında markalar arası geçişlerin ne oranda olduğunu tahmin etmek için , aynı farklı zamanlarda aynı seçilmiş örnek grup üzerinde uygulanacak tüketici anketleri yardımcı olmaktadır . Burada gerçeğe uygun hareketler belirli bir hata payı ile saptanabilmektedir . Olasılıkların hesaplanması belirli dağılımlara uygulanmak sureti ile teorik olarak elde edilebilir .

Olasılıkların hesaplanmasından başka bir takım varsayımlar yapılarak analize girilmesi hata paylarına sebebiyet verebilir .

Sonuç olarak , markov analizi tanımlarının doğru şekilde yapılması ile yönetimde yararlanılabilecek bir yöntemdir .



## SONUÇ

Markov analizinin işletmelerdeki uygulamalarında olasılıkların elde edilmesinde en büyük yardımcı örnekleme tekniğidir. Örneğin, tüketici davranışlarında markalar arası geçişlerin ne oranda olduğunu tahmin etmek için, ancak farklı zamanlarda aynı seçilmiş örnek grup üzerinde uygulanacak tüketici anketleri yardımcı olmaktadır. Burada gerçeğe uygun hareketler belirli bir hata payı ile saptanabilmektedir. Olasılıkların hesaplanması belirli dağılımlara uygulanmak sureti ile teorik olarak elde edilebilir.

Olasılıkların hesaplanmasından başka bir takım varsayımlar yapılarak analize girilmesi hata paylarına sebebiyet verebilir.

Sonuç olarak, markov analizi tanımlamaların doğru şekilde yapılması ile yönetimce yararlanılabilecek bir yöntemdir.



## KAYNAKLAR

- Aslan, Argun , *Stokastik Süreçler Ders Notları* ; Eskişehir 1991
- Bhat, U. Narayan , *Elements of Applied Stochastic Processes* , 2nd. Edition , John Wiley & Sons , New York 1984 .
- Bronson, Richard , Schaum's Outline Series : " *Theory and Problems of Operations Research* " , McGraw-Hill Co. , New York .
- Buffa, E.S. , Dyer, J.S. , *Managment Science - Operation Research* , John Wiley & Sons , New York 1978 .
- Feller, William , *Introduction to Probability Theory and Its Applications* , 2nd Edition , John Wiley & Sons , NewYork 1964 .
- Halaç, Osman , *Kantitatif Karar Verme Teknikleri* , 3. Baskı , Evrim Basım , İstanbul 1991.
- Haner, F.T.;Ford J.C. , *Comtemporary Managment* ,Bell & Howell Co. ,1973
- Hillier, F.S. , Lieberman, G.J: , *Introduction to Operation Research* , Holden-Day Inc. , San Francisco 1968 .
- Howard ,R.A. , *Dynamic Probabilistik Systems , Volume 1: Markov Model* , John Wiley & Sons , Canada 1971 .
- Klarke, A.B. , Disney R.L. , *Probability and Random Processes : A First Course with Applications* , John Wiley & Sons Inc. , New York 1986 .
- Levin, L.I., Kirkpatrick , C.A. *Quantitative Approaches to Managment* , 4th Edition , McGraw-Hill Co. , New York 1978 .
- Lipschutz, Seymour , *Probability (Olasılık )* , Çev. Hacer Kutluk , Güven Kitabevi , Ankara 1979 .
- Or İlhan , *Introduction to Stochastic Models in Operations Research* , B.Ü. Publications. , Bebek 1986 .
- Şahinoğlu, Mehmet , *Applied Stochastic Processes* , Set Ofset Ltd. , 1.Baskı Ankara 1992 .



- Todoroviç, Petar , *An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications* , Springer-Verlag , New York 1992
- Verma H.L. , Ross C.W. , *Introduction to Quantitative Methods: A managerial Emphasis* , John Wiley & Sons Inc. , New York 1978

Adı Soyadı : Adnan Terek  
 Doğum Tarihi : 19 Eylül 1973  
 Doğum Yeri : Bursa - Çiftlikköy  
 İlk Öğrenimi : 1980 yılında Pendik İlkokulundan mezun oldu.  
 Orta Öğrenimi : 1985 yılında Pendik Lisesinden mezun oldu.  
 Yüksek Öğrenimi : 1988 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünde başladığı öğrenimini 1992 yılında tamamladı.  
 Görevleri : Y.T.U. Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Uygulama İstatistik Anabilim Dalı Öğretim Görevlisi.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özlem Berak  
Doğum Tarihi : 18 Ekim 1971  
Doğum Yeri : Üsküdar - İSTANBUL  
İlk Öğrenimi : 1982 yılında Pendik Merkez İlkokulundan mezun oldu.  
Orta Öğrenimi : 1988 yılında Pendik Lisesinden mezun oldu.  
Yüksek Öğrenimi : 1988 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünde başladığı öğrenimini 1992 yılında tamamladı.  
Görevi : Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.



