

57549

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

TEMEL GRUP VE HESAPLANMASI

Eyüp KIZIL

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Hamit AVCI

İSTANBUL, 1996

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	
ÖZET	i
SUMMARY	ii
GİRİŞ	1
BÖLÜM I	
I. ÖN BİLGİLER	3
1.1 Tasvirlerin Homotopisi	3
1.4 Yolların Homotopisi	5
1.7 Örnekler	8
BÖLÜM II	
II. TEMEL GRUP ve ÖZELLİKLERİ	17
2.2 Örnekler	18
BÖLÜM III	
III. TEMEL GRUBUN HESAPLANMASI	28
3.1 Örtü Uzayları	28
3.5 S^1 in Temel Grubunun Bulunması	34
3.13 $\mathbb{R}^2 - 0$ Delikli Düzleminin Temel Grubu	39
3.18 S^n in Temel Grubu	44
3.19 Özel Van Kampen Teoremi	44
3.23 Yüzeylerin Temel Grupları	46
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında yaptığı eleştiriler ve özellikle de kaynak kitap temini hususunda yapmış olduğu kıymetli yardımlarından ötürü hocam Sayın Prof. Hamit AVCI 'ya teşekkür ederim.

ÖZET

Homeomorfizma problemleri topolojinin temel çalışma alanlarından birisidir. Bizde bu çalışmamızda bir topolojik uzayın temel grubu olarak ifade edilen bir grup kullanmak suretiyle bazı uzaylar üzerinde, bu uzayların temel gruplarını karşılaştırmak suretiyle homeomorfik olup olmadıklarını tespit etmeye çalıştık.

I. Bölüm, Homotopi Teoride geçen bazı temel tanım ve kavramları içermektedir. II. Bölümde ; Temel grubun tanımı ve özelliklerine yer verildi. III Bölümde ise ; Bazı uzayların temel grubunun hesabı gösterildi.

SUMMARY

One of the fundamental problems of topology is to determine whether two given topological spaces are homeomorphic or not. In this study, we deal with homeomorphic spaces using the following theorem. "Two spaces that are homeomorphic have fundamental groups that are isomorphic".

This thesis consists of three chapters. Chapter I contains basic concepts in Homotopy Theory. In Chapter II, the fundamental group and its properties are given. In Chapter III, Calculation of the fundamental groups of some topological spaces are shown.

1. GİRİŞ

Öncelikle hem konuya giriş olması bakımından hem de konu ile olan ilgisi gözönünde bulundurularak Homotopi Teori de geçen bazı temel tanım ve kavramlardan bahsedeceğiz. Temel grup ve hesabı kısmını ise II. ve III. bölümlerde inceleyeceğiz.

Topolojinin temel problemlerinden biri ; Verilen iki topolojik uzayın homeomorfik olup olmadıklarını belirleyebilmektir. Genel olarak bu problemin çözümü için bir yöntem olmamakla beraber ancak bazı özel durumlarda kullanılan teknikler mevcuttur.

Eğer uzaylardan birinde geçerli olan bazı topolojik özellikler bulunabiliyor ve bunların diğer uzayda olmadığı gösterilebiliyorsa, bu durumda problem çözülmüştür. Yani, uzaylar homeomorfik değildir. Örneğin ; $[0, 1]$ kapalı aralığı ile $(0, 1)$ açık aralıkları homeomorfik değildir. Çünkü, $[0, 1]$ aralığı kompakt iken aynı şey $(0, 1)$ aralığı için geçerli değildir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}^2$ -düzlemi $\mathbb{R}$ reel eksenine ile homeomorfik değildir. Çünkü, $\mathbb{R}^2$ den bir nokta çıkarılmak suretiyle elde edilen $\mathbb{R}^2 - p$ uzayı bağlantılı iken bunu $\mathbb{R}$ için söyleyemeyiz.

Kompaktlık, Bağlantılılık, Lokal bağlantılılık ve Metriklenebilirlik gibi bazı topolojik özellikler gözlenmek suretiyle uzayların homeomorfik olup olmadıkları tespit edilebilir. Fakat bu özellikler her zaman yeterli olmayabilir. Bu yüzden basit bağlantılılık ve özellikle de bir topolojik uzayın temel grubu olarak ifade edilen bir grup kullanılmak suretiyle problemin çözümü bir adım daha ileriye götürülmektedir.

İki uzayın temel grupları izomorfik ise, bu uzaylar homeomorfiktir ve bu durumda basit bağlantılılık koşulu, uzayın temel grubunun apaçık (tek-elemanlı) olması koşuluna eşdeğerdir. Örnek olarak ; S^2 Küresi ile T Torunun temel grupları karşılaştırıldığında, $\pi_1(S^2)$ apaçık temel grup iken $\pi_1(T)$ nin böyle olmadığı ifade edilerek S^2 ile T nin homeomorfik uzaylar olmadıkları söylenir.

Benzer şekilde, T değişmeli temel gruba sahip iken T_2 nin temel grubu bu özeliği taşımadığından, bu iki uzay homeomorfik değildir. Benzer örnekler çoğaltılabilir.



BÖLÜM I

ÖN BİLGİLER

Temel grubun tanımını vermeden önce **Homotopi Teori** de geçen ve konuyla ilgili olan bazı temel tanım ve kavramları verelim.

1.1 TASVİRLERİN HOMOTOPİSİ

1.2 Tanım : X ve Y herhangi iki topolojik uzay olmak üzere ; f_0 ve f_1 , X den Y içine sürekli iki tasvir olsun. Eğer herbir $x \in X$ için

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad \text{ve} \quad F(x, 1) = f_1(x) \quad (1.1)$$

olacak şekilde sürekli bir $F : X \times I \rightarrow Y$ tasviri varsa f_0 ve f_1 tasvirlerine **homotopiktir** denir ve $f_0 \simeq f_1$ singesiyle göstereceğiz. F tasviride f_0 ile f_1 arasında bir **homotopi** adını alır. Bunu da $F : f_0 \simeq f_1$ singesiyle gösterelim. (Burada I kapalı birim aralığı göstermektedir)

X den Y içine f_0 ve f_1 gibi iki tasvir homotopik olmayabilir. Fakat Y nin $Y' \supset Y$ gibi bir üst uzayı için f_0 ve f_1 , Y' içine iki tasvir şeklinde düşünüldüğünde homotopik olabilirler.

Ayrıca X yerine I alınmak suretiyle verilen tanım daha basite indirgenebilir. Bu durumda homotopinin $F : I \times I \rightarrow Y$ şeklinde birim kareden Y içine bir tasvir olduğu görülebilir.

Homotopinin tanımını geometrik açıdan daha iyi görebilmek için, herhangi bir $(x, t) \in X \times I$ için

$$f_t(x) = F(x, t) \quad (1.2)$$

şeklinde yazalım. O takdirde, herhangi bir $t \in I$ için $f_t : X \rightarrow Y$ sürekli bir tasvirdir. t yi zamanı gösteren bir parametre olarak düşünebiliriz. Bu takdirde,

$t = 0$ da f_0 ve t nin sürekli olarak değişen değerleri için f_t ve nihayet $t = 1$ için de f_1 tasviri elde edilir.

Yani homotopi, $f_t : X \rightarrow Y$ şeklindeki tasvirlerin sürekli bir tek parametrelili ailesi gibi düşünülebilir. Bu nedenle homotopiden çoğu zaman bir tasvirin sürekli bir **deformasyonu** şeklinde söz edilir.

1.3 Tanım: Ancak ve ancak

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad , x \in X \quad (1.3)$$

$$F(X, 1) = f_1(x) \quad , x \in X \quad (1.4)$$

ve

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \quad , a \in A \quad , t \in I \quad (1.5)$$

olacak şekilde sürekli bir $F : X \times I \rightarrow Y$ tasviri varsa $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ tasvirleri X in $A \subset X$ alt kümesine göre homotopiktir denir.

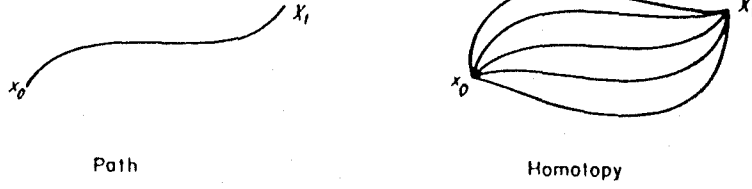
Bu koşul sağlandığında

$$f_0|A = f_1|A \quad (1.6)$$

olduğunu belirtelim.

Şimdiye kadar f_0 ve f_1 , X den Y içine sürekli tasvirler olarak gözönüne alındı. Bu kez f in X de bir yol olması özel halini göz önüne alalım. Bir X topolojik uzayında yol dendiğinde, reel sayıların herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığından X içine sürekli bir tasvir akla gelmelidir. Fakat genelde herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığı yerine $I = [0, 1]$ birim aralığı alınmak suretiyle $f : [0, 1] \rightarrow X$ şeklinde bir tasvir, X de bir yol olarak ifade edilir. Aralığın uç noktalarının görüntüsü yolun uç noktaları olarak alınır. Bu uç noktalardan ilki yolun başlangıç noktası diğeri ise yolun bitim noktası olarak ifade edilir.

Yani $f : [0, 1] \rightarrow X$ sürekli tasviri, $f(0) = x_0$ ve $f(1) = x_1$ olacak şekilde X de x_0 dan x_1 e bir yoldur. Bu bölümde $I = [0, 1]$ kapalı birim aralığını tüm yolların tanım bölgesi olarak kullanacağız.



Şekil (1.1)

f ve g , X de herhangi iki yol ise, aralarında homotopiye göre daha güçlü bir ilişki vardır ki, o da yol-homotopi kavramıdır.

1.4 YOLLARIN HOMOTOPİSİ

1.5 Tanım : f ve g gibi iki yol (Ya da $I = [0, 1]$ den X içine sürekli iki tasvir) Eğer, aynı x_0 başlangıç ve aynı x_1 bitim noktasına sahip iseler ve her bir $s, t \in I$ için

$$F(s, 0) = f(s) \quad \text{ve} \quad F(s, 1) = g(s), \quad (1.7)$$

$$F(0, t) = x_0 \quad \text{ve} \quad F(1, t) = x_1 \quad (1.8)$$

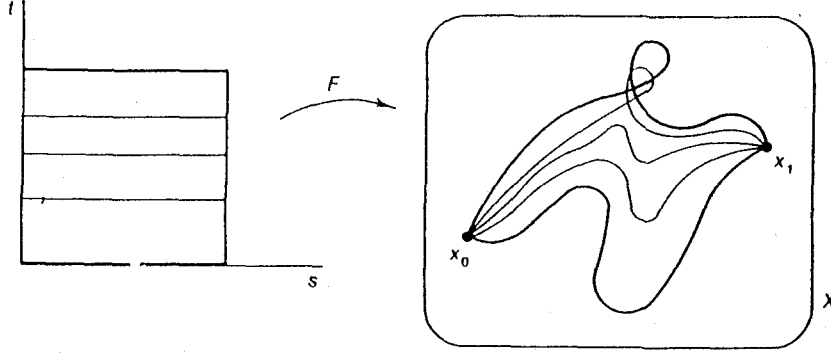
olacak şekilde sürekli bir $F : I \times I \rightarrow X$ tasviri varsa, **yol-homotopiktir**. Şek.(1.2) de f ile g arasındaki bir F yol-homotopisi gösterilmiştir. Eğer f, g ye yol-homotopik ise, $f \simeq_p g$ şeklinde yazılır.

F , f ile g arasında bir homotopi olduğu için yukarıda verilen yol-homotopi koşullarından ilki basitçe görülebilir. İkincisi ise, her bir t için

$$s \rightarrow F(s, t) \quad (1.9)$$

yolunun x_0 dan x_1 e bir yol olduğunu gösterir. Başka bir deyişle, koşullardan ilki F in f yolundan g yoluna sürekli bir deformasyon yolu gösterdiğini ifade eder.

Diğer koşul ise, deformasyon süresince yolların uç noktalarının hep sabit kaldığını göstermektedir. Bir f yolunun yol-homotopilerinin denklik sınıfını $[f]$ simgesiyle göstereceğiz.



Şekil (1.2)

1.6 Yardımcı Teorem: $\simeq$ ve $\simeq_p$ bağıntıları birer denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısının özelliklerinin sağlandığı gösterilmelidir.

(i) $\forall x$ elemanı için

$$F(x, t) = f(x) \quad (1.10)$$

”Sabit homotopi” si ile $f \simeq f$ olduğu açıktır. f in bir yol olması durumunda da söz konusu F bir yol-homotopisidir. Yani, $f \simeq_p f$ dir.

(ii) Bir F homotopisiyle f ile g nin homotopik olduklarını kabul edelim. Yani, $F : f \simeq g$ olsun.

$$G(x, t) = F(x, 1 - t) \quad (1.11)$$

ifadesi, g ile f arasında bir homotopidir. Yani, $G : g \simeq f$ dir. Gerçekten,

$$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x) \quad \text{ve} \quad G(x, 1) = F(x, 0) = f(x) \quad (1.12)$$

olup, $G : g \simeq f$ olduğu görülmektedir. Eğer, F bir yol-homotopisi ise, G de bir yol-homotopisi olacaktır.

(iii) F , f ile g arasında ve F' de g ile h arasındaki homotopiler olsun. Yani, $F : f \simeq g$ ve $F' : g \simeq h$ olsun.

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1.13)$$

denklemleri ile $H : X \times I \rightarrow Y$ tanımlayalım. H tasviri iyi tanımlıdır. Çünkü, $t = \frac{1}{2}$ alındığında,

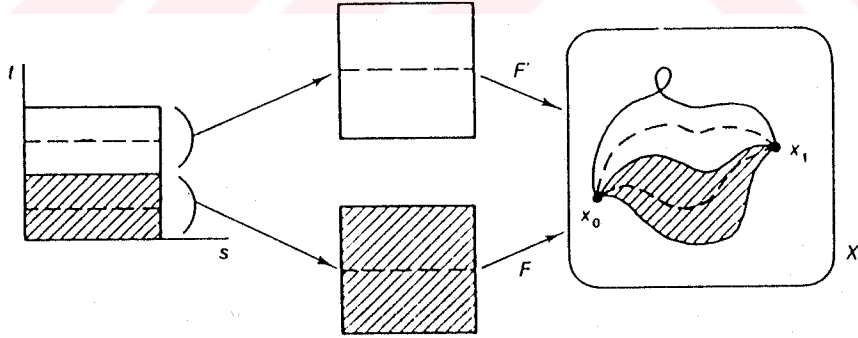
$$F(x, 2t) = F(x, 1) = g(x) = F'(x, 0) = F'(x, 2t - 1) \quad (1.14)$$

dir. H , $X \times I$ nın $X \times [0, \frac{1}{2}]$ ve $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ kapalı alt kümeleri üzerinde sürekli olduğu için $X \times I$ nın tümü üzerinde sürekli dir. (*)

$$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x) \quad \text{ve} \quad H(x, 1) = F'(x, 1) = h(x) \quad (1.15)$$

olduğundan H nın f ile h arasında bir homotopi olduğu görülmektedir. ($H : f \simeq h$)

F ve F' nün yol-homotopiler olması durumunda H nda bir yol-homotopi olacağı açıktır. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil (1.3)

- (*) Geçiş Lemması: A ve B , X de $X = A \cup B$ olacak şekilde kapalı kümeler ve $f : A \rightarrow Y$, $g : B \rightarrow Y$ sürekli tasvirler olsun. $\forall x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ ise, o takdirde f ile g birlikte $x \in A$ için $h(x) = f(x)$ ve $x \in B$ için $h(x) = g(x)$ olacak şekilde sürekli bir $h : X \rightarrow Y$ tasviri verir.

1.7 Örnekler

(1) $\mathbb{R}^n$ de $\forall x$ için $f(x) = x$ ve $g(x) = 0$ tanımlayalım.

$$F(x, t) = (1 - t)x \quad (1.16)$$

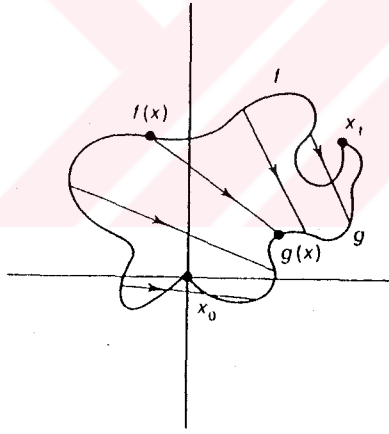
f ile g tasvirleri arasında bir homotopidir.

(2) f ve g , X uzayından $\mathbb{R}^2$ içine herhangi iki tasvir olsun. f ile g nin homotopik oldukları kolayca görülebilir.

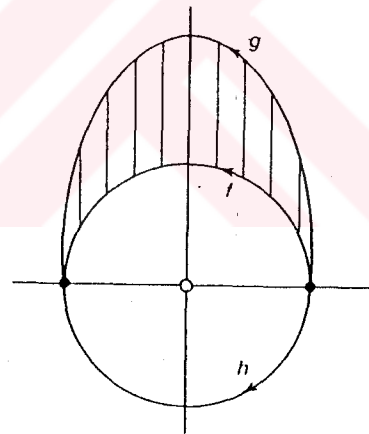
$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \quad (1.17)$$

tasviri f ile g arasında bir homotopidir. Buna "**Doğru homotopisi**" denir. Çünkü bu homotopi $f(x)$ noktasını $g(x)$ noktasına aralarındaki bir doğru boyunca taşır.

f ve g , x_0 dan x_1 e yollar olduklarında, F in bir yol-homotopi olduğu görülebilir. Bu durum Şek.(1.4) de gösterilmiştir.



Şekil (1.4)



Şekil (1.5)

(3) X , $\mathbb{R}^2 - 0$ delikli düzlemini temsil etsin. X deki

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s) \quad (1.18)$$

$$g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s) \quad (1.19)$$

yolları yol-homotopikdir. Aralarındaki doğru homotopisi bir yol-homotopisi olarak alınabilir. Fakat f ve

$$h(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s) \quad (1.20)$$

yolu arasındaki doğru homotopisi aynı şekilde bir yol-homotopisi olarak alınamaz. Çünkü, h ın görüntüsü $X = \mathbb{R}^2 - 0$ uzayında değildir.

Gerçekten, f ve h yolları arasında X de bir yol-homotopi mevcut değildir. Aslında bu sonuç oldukça ilginçtir. Sezgisel olarak bir süreksizlikten bahsetmeksizin 0 daki boşluktan geçen bir f deforme olduğu gösterilemez.

Burada bu geometrik durum için bazı cebirsel kavramlar verelim ve aşağıdaki gibi yol-homotopi sınıfları üzerinde belirli bir işlem tanımlayalım.

1.8 Tanım : f , X de x_0 dan x_1 e bir yol ve g de yine X de bu kez x_1 den x_2 ye bir yol olmak üzere ; f ve g nin $f * g$ bileşkesi,

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1.21)$$

denklemleri ile verilen bir h yolu olarak tanımlanır. $s = \frac{1}{2}$ için,

$$f(2s) = f(1) = x_1 = g(0) = g(2s - 1) \quad (1.22)$$

olduğundan h fonksiyonu iyi tanımlı olup, (*) a göre de süreklidir. Burada h yi , ilk yarısı f yolu diğer yarısı ise g yolu olan bir yol olarak düşünebiliriz.

Yollar üzerindeki bileşke işlemi, yol-homotopi sınıfları için de aşağıdaki tarzda tanımlanmaktadır.

$$[f] * [g] = [f * g] \quad (1.23)$$

Ancak burada hemen belirtelimki, $[f] * [g]$ çarpımı sınıfların her çifti için değil sadece $f(1) = g(0)$ olacak şekildeki $[f]$ ve $[g]$ çiftleri için geçerli olmaktadır.

1.9 Teorem : Yol-homotopi sınıfları üzerindeki $*$ işlemi, iyi tanımlıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(1) (Birleşme özelliği)

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h] \quad (1.24)$$

(2) (Sağ ve sol özdeşlikler)

Bir $x \in X$ elemanı için ; e_x , I nın bütününü bu x noktasına götüren $e_x : I \rightarrow X$ sabit yolunu gösterebilirsin. (Yani, $e_x(I) = x \in X$)

f , X de x_0 dan x_1 e bir yol olmak üzere,

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{ve} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f] \quad (1.25)$$

dir.

(3) (Ters eleman)

X de x_0 dan x_1 e bir f yolu verilsin. $\bar{f}$ de $\bar{f}(s) = f(1-s)$ şeklinde tanımlı bir yol olsun. $\bar{f}$, f in tersi adını alır. Bu takdirde,

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{ve} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}] \quad (1.26)$$

dir.

İspat: Biraz önce verilen ifadelerin her birinin elementer geometrik ispatları vardır. İşlemin iyi-tanımlı olduğunu göstermek istiyoruz. F ,

$$F(s, 0) = f(s) \quad \text{ve} \quad F(s, 1) = f'(s), \quad (1.27)$$

$$F(0, t) = x_0 \quad \text{ve} \quad F(1, t) = x_1 \quad (1.28)$$

olacak şekilde f ile f' arasında bir yol-homotopisi olsun. ($F : f \simeq_p f'$) Aynı şekilde, G de

$$G(s, 0) = g(s) \quad \text{ve} \quad G(s, 1) = g'(s), \quad (1.29)$$

$$G(0, t) = x_1 \quad \text{ve} \quad G(1, t) = x_2 \quad (1.30)$$

olacak şekilde g ile g' arasında bir yol-homotopisi olsun. ($G : g \simeq_p g'$)

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1.31)$$

tanımlayalım. $s = \frac{1}{2}$ için,

$$F(2s, t) = F(1, t) = x_1 = G(0, t) = G(2s - 1, t) \quad (1.32)$$

olduğundan H tasviri iyi-tanımlıdır ve aynı zamanda süreklidir. Burada H , $f * g$ ve $f' * g'$ arasında bir yol-homotopisidir. Gerçekten,

$$H(s, 0) = F(2s, 0) = f(2s) \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \quad (1.33)$$

$$H(s, 0) = G(2s - 1, 0) = g(2s - 1) \quad s \in [\frac{1}{2}, 1] \quad (1.34)$$

olup $[0, \frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2}, 1]$ aralıkları için $H(s, 0)$, f ile g in bileşkesi şeklinde yazılabilir. Yani,

$$H(s, 0) = (f * g)(s) \quad (1.35)$$

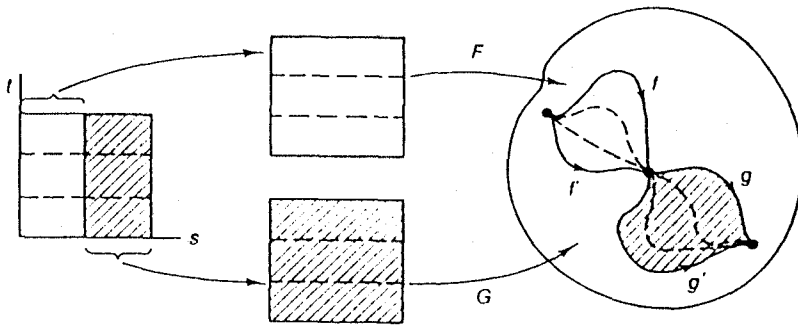
dir. Benzer şekilde

$$H(s, 1) = (f' * g')(s) \quad (1.36)$$

olduğuda gösterilebilir.

$$H(0, t) = F(0, t) = x_0 \quad \text{ve} \quad H(1, t) = G(1, t) = x_2 \quad \text{dir.} \quad (1.37)$$

O halde, $H : f * g \simeq_p f' * g'$ dir. H m, $f * g$ ve $f' * g'$ arasında bir yol-homotopisi olması aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (Şek.(1.6)).



Şekil (1.6)

(1) Birleşme özeliğinin geçerli olduğunu ispatlamak için,

$$f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h \quad (1.38)$$

olduğunu göstermek gerekir.

$f * (g * h)$ altında, s noktasının görüntüsü s 0 dan $\frac{1}{2}$ ye giderken f in görüntüsünü, s $\frac{1}{2}$ den $\frac{3}{4}$ e giderken g nin görüntüsü ve son olarakda s $\frac{3}{4}$ den 1 e giderken h in görüntüsünü çizer.

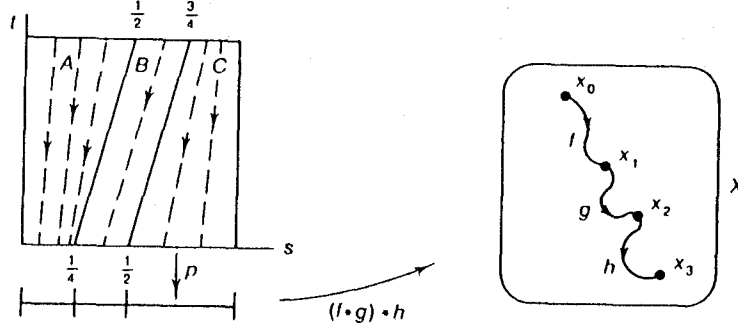
$(f * g) * h$ altında ise, farklı bir oranda fakat yine aynı görüntü elde edilir. Bu kez s 0 dan $\frac{1}{4}$ e giderken f in görüntüsü, s $\frac{1}{4}$ den $\frac{1}{2}$ ye giderken g nin görüntüsü ve son olarakda s $\frac{1}{2}$ den 1 e giderken h in görüntüsü bulunur. Aşağıdaki tarzda bir F homotopisi tanımlayalım. İlk tasvir, Şek.(1.7) 'de gösterilen A , B ve C dörtgenlerinin herbirini kendi tabanına izdüşüren sürekli bir p tasviri vasıtasıyla I^2 birim kareden I üzerinedir.

$(f * g) * h$ tasviri ile p , aşağıda Şek.(1.7) üzerinde gösterilmiştir. Sonuç, istenilen F yol-homotopisidir. Daha formel olarak,

$$F(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{4s}{t+1}\right) & 0 \leq s \leq \frac{(t+1)}{4} \\ g(4s - t - 1) & \frac{(t+1)}{4} \leq s \leq \frac{(t+2)}{4} \\ h\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \frac{(t+2)}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.39)$$

tanımlayalım.

$\frac{4s}{t+1}$, $4s - t - 1$ ve $\frac{4s-t-2}{2-t}$ göz önüne alındıklarında bunların f , g ve h in $[0, 1]$ tanım bölgesinde oldukları, dolayısıyla bu formüllerin anlamlı oldukları ve F in iyi-tanımlı olduğu (*) a göre de aynı zamanda sürekli olduğu görülür.



Şekil (1.7)

Örneğin ;

$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (g * h)(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad yada \quad 2s - 1 \in [0, 1] \quad (1.40)$$

olup, dolayısıyla

$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (g * h)(2s - 1) & 2s - 1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(2(2s - 1) - 1) & 2s - 1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad yada \quad \begin{cases} s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \quad (1.41)$$

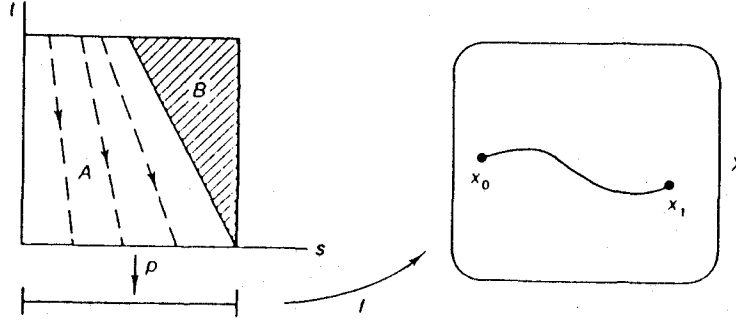
elde edilir. Bu da $F(s, 1)$ in kendisidir.

Benzer şekilde,

$$((f * g) * h)(s) = F(s, 0) \quad (1.42)$$

dır.

(2) $f \simeq_p f * e_{r_1}$ olduğunu ispatlayalım. İstenilen yol-homotopisi aşağıdaki gibi oluşturulabilir. İlk tasvir, Şek.(1.8) deki A dörtgenini kendi tabanı üzerine ve B üçgeninide kendi alt köşesine izdüştüren sürekli bir p tasviri vasıtasıyla I^2 den I üzerinedir. f ve p tasvirleri Şek.(1.8) üzerinde gösterilmiştir.



Şekil (1.8)

Sonuç, istenilen G yol-homotopisidir. Formel olarak,

$$G(s, t) = \begin{cases} f(\frac{2s}{2s-t}) & 0 \leq s \leq \frac{(2s-t)}{2} \\ x_1 & \frac{(2s-t)}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.43)$$

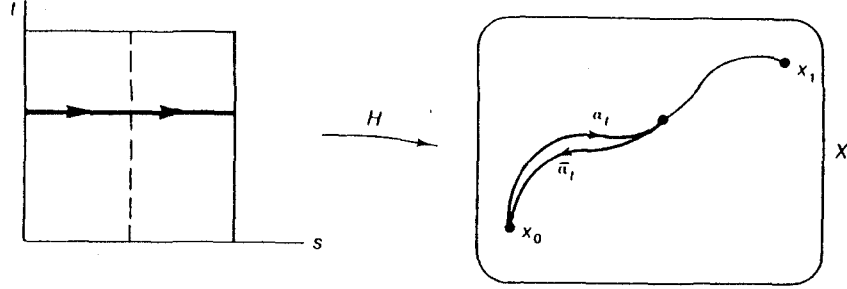
G nin iyi-tanımlı ve sürekli olduğu görülebilir ve aynı zamanda G nin kendisi aranan yol-homotopisidir.

$$c_{x_0} * f \simeq_p f \quad (1.44)$$

nin ispatı benzer şekilde yapılır.

(3) $f * \bar{f} \simeq_p c_{x_0}$ olduğunu gösterelim. İddiyanın ispatı açıktır. $f * \bar{f}$ önce x_0 dan x_1 e giden, sonra da aynı yol boyunca x_0 a geri dönen bir yoldur. t bir parametre α_t ise, x_0 dan başlayıp $f(t)$ noktasına kadar olan uzaklık boyunca f in bir parçası olsun. O takdirde, aradığımız yol-homotopisi, $\alpha_t * \bar{\alpha}_t$ yoludur.

Söz konusu homotopi bir yol-homotopisi olarak da kabul edilebilir. Çünkü, uç noktalarının her ikisinde x_0 da sabittir. Bu durum Şek.(1.9) 'da gösterilmiştir.



Şekil (1.9)

Formel olarak,

$$H(s, t) = \begin{cases} f(2ts) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t(1-s)) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1.45)$$

tanımlayalım.

$2ts$ ve $2t(1-s)$ göz önüne alındıklarında bunların f in tanımlı bölgesinde kaldıkları ve yine bu formüllerin bir anlam ifade ettiği kolayca görülebilir. H , hem iyi-tanımlı hem de (*) a göre süreklidir. Dolayısıyla H , c_{x_0} ve $f * \bar{f}$ arasındaki istenen yol-homotopisidir.

Benzer yaklaşımlar

$$\bar{f} * f \simeq_p c_{x_1} \quad (1.46)$$

olduğunu göstermek için de kullanılabilir. Fakat, bunu daha iyi ifade edebilmek amacıyla, herhangi bir g yolu için

$$g * \bar{g} \simeq_p c_x \quad (1.47)$$

şeklinde gösterilir (Burada x , g nin başlangıç noktasıdır).

Özel olarak,

$$\bar{f} * \bar{\bar{f}} \simeq_p e_{x_1} \quad (1.48)$$

dir. Burada $\bar{\bar{f}}, \bar{f}$ nin tersini göstermektedir. $\bar{f}$ in tersinin f olacağı açıktır. Böylece istenildiği gibi

$$\bar{f} * f \simeq_p e_{x_1} \quad (1.49)$$

dir.



BÖLÜM II

TEMEL GRUP VE ÖZELLİKLERİ

Bir X uzayındaki yolların yol-homotopi sınıflarının kümesi, $*$ işlemi altında bir grup oluşturmayıp, sadece bir grupoid dir. Oysa, X in x_0 noktası için, uzaydaki tüm yolları başlangıç ve bitimi bu x_0 noktası olacak şekilde düşündüğümüzde böyle yol-homotopi sınıflarının kümesi $*$ işlemi altında bir grup oluşturur. Buna X in temel grubu (**Ya da Poincare grubu**) denir.

Uzayın $x_0 \in X$ noktasında başlayıp biten yollar için x_0 a tabanlanmış yollar da denir. Bu bölümde, temel grubun bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

Ayrıca temel grubun, X uzayının bir topolojik invaryantı olduğunu göstereceğiz. Bu gerçek, homeomorfizma problemlerinde oldukça önemlidir.

2.1 Tanım : X bir topolojik uzay ve x_0 X in bir noktası olmak üzere, X de x_0 noktasına tabanlanmış kapalı yolların yol-homotopi sınıflarının kümesi $*$ işlemi ile birlikte x_0 taban noktasına göre X in temel grubu adını alır ve $\pi_1(X, x_0)$ simgesi ile gösterilir.

f ve g x_0 a tabanlanmış herhangi iki kapalı yol olsun. Bunların $f * g$ bileşkeside yine x_0 a tabanlanmış kapalı bir yoldur. Birleşme özelliği, $[e_{x_0}]$ birim elemanın varlığı ve $[f]$ in $[\bar{f}]$ gibi bir tersinin mevcut olduğu bilindiğinden grup aksiyomlarının sağlandığı açıktır. Bu grup bazen X in **birinci homotopi grubu** olarak da ifade edilmektedir. Gerçekten tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayıları için $\pi_n(X, x_0)$ grupları vardır. Ancak bunlar daha çok Homotopi Teorinin genel konuları içinde olduğundan, bu çalışmada diğerlerine yer vermiyerek, sadece $\pi_1(X, x_0)$ ile ilgileneceğiz.

2.2 Örnekler

(1) $\mathbb{R}^n$, n boyutlu Euclid uzayını göz önüne alalım. O takdirde, $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ apaçık gruptur (Yalnızca birim elemanı içeren grup). Çünkü $\mathbb{R}^n$ deki x_0 a tabanlanmış kapalı bir f yolu için,

$$F(s, t) = tx_0 + (1 - t)f(s) \quad (2.1)$$

doğru homotopisi, f ile x_0 daki sabit e_{x_0} kapalı yolu arasında bir yol-homotopisidir.

(2) Daha genel olarak X $\mathbb{R}^n$ in konveks alt kümesi ise, o takdirde $\pi_1(X, x_0)$ apaçık gruptur. Doğru homotopisi burada da bir yol-homotopisi olarak düşünülebilir.

X in konveks olmasının anlamı, X in x ve y gibi farklı iki noktasını birleştiren

$$\{tx + (1 - t)y \mid 0 \leq t \leq 1\} \quad (2.2)$$

doğru parçalarının yine X de kalmasıdır. Özel olarak $\mathbb{R}^n$ deki

$$\mathbb{B}^n = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \quad (2.3)$$

birim yuvar apaçık temel gruba sahiptir. Bir uzayın apaçık olmayan temel grubunu bulmak daha zordur. Bunu bir sonraki bölümde ele alacağız.

2.3 Tanım : α , X de x_0 dan x_1 e bir yol olsun.

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] \quad (2.4)$$

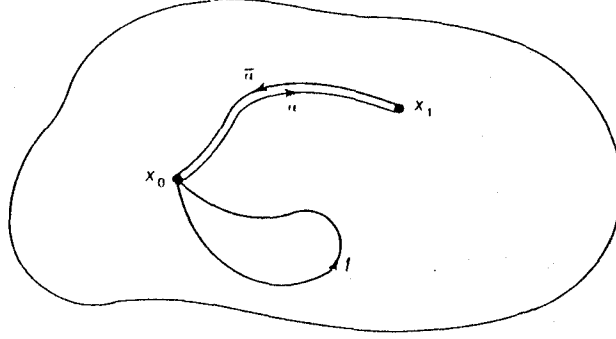
denklemlerle bir

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad (2.5)$$

tasvirini tanımlayalım. Bu tasvir, aşağıdaki Şek.2.1 'de gösterilmiştir. $*$ işlemi iyi-tanımlı olduğu için $\hat{\alpha}$ da iyi-tanımlıdır. f , x_0 a tabanlanmış kapalı bir yol ise o takdirde,

$$\bar{\alpha} * (f * \alpha) \quad (2.6)$$

x_1 e tabanlanmış kapalı bir yoldur. Dolayısıyla, $\hat{\alpha}$ tasviri $\pi_1(X, x_0)$ yı $\pi_1(X, x_1)$ içine tasvir eder.



Şekil 2.1

2.4 Teorem : $\hat{\alpha}$ tasviri bir grup izomorfizmasıdır.

İspat : Önce $\hat{\alpha}$ nın bir homomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = \hat{\alpha}([f] * [g]) \quad (2.7)$$

olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Tasvirin tanımını kullandığımızda

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha]) \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dir.

Burada (Böl.II, Teorem 1.9) de ispatlanan $*$ işleminin grupoid özelliklerini kullanıyoruz. $\hat{\alpha}$ nın bir izomorfizma olduğunu göstermek için, β yı $\beta = \bar{\alpha}$ şeklinde α nın tersi olarak gösterelim. Bu durumda $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ nın bir tersidir. $\forall [h] \in \pi_1(X, x_1)$ için $\hat{\beta}([h])$ ve $\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h]))$ yi hesaplayalım.

$$\hat{\beta}([h]) = [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}] \quad (2.9)$$

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h] \quad (2.10)$$

$\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$ için

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f] \quad (2.11)$$

olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

2.5 Sonuç : X yol-bağlantılı ve x_0 ile x_1 X in herhangi iki noktası olmak üzere ,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad (2.12)$$

dir

X uzayı yol-bağlantılı olduğunda tüm $\pi_1(X, x)$ grupları izomorfiktir. Dolayısıyla, bu gruplardan herhangi biri diğeriyle özdeşlenebilir ve uzayın temel grubundan taban noktası gözönüne alınmaksızın basitçe bahsedilir. Burada x_0 dan x_1 e farklı α ve β yolları gözönüne alındığında, bu gruplar arasında farklı izomorfizmaların kurulabileceğini belirtelim. Bu sebeple taban noktasını göz önüne almamak hataya neden olur. Ancak ve ancak temel grup değişmeli ise, $\pi_1(X, x_0)$ ile $\pi_1(X, x_1)$ in izomorfizmaları yola bağımlı değildir.

2.6 Tanım : X yol-bağlantılı ve $\forall x_0 \in X$ için

$$\pi_1(X, x_0) = 0 \quad (2.13)$$

ise, X e basit bağlantılıdır denir.

2.7 Yardımcı Teorem : Basit bağlantılı bir X uzayında aynı başlangıç ve bitim noktalı herhangi iki yol, yol-homotopiktir.

İspat : f ve g , x_0 dan x_1 e herhangi iki yol olsun. Bu takdirde, $f * \bar{g}$ tanımlı olup, X de x_0 a tabanlanmış kapalı bir yoldur. X basit bağlantılı olduğu için

$$f * \bar{g} \simeq_p e_{x_0} \quad (2.14)$$

dir. Grupoid özellikleri uygulandığında,

$$[(f * \bar{g}) * g] = [e_{x_0} * g] = [g] \quad (2.15)$$

olduğu görülür. Oysa,

$$[(f * \bar{g}) * g] = [f * (\bar{g} * g)] = [f * e_{x_1}] = [f] \quad (2.16)$$

dir. Böylece, f ile g nin yol-homotopik oldukları görülür. ($[f] = [g]$)

Sezgisel olarak temel grubun X uzayının bir topolojik invaryantı olduğu açıktır. Formel olarak bu gerçeği ispatlamanın uygun bir yolu, sürekli bir tasvir vasıtasıyla üretilen homomorfizma kavramını vermektir.

$h : X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$ için, $h(x_0) = y_0 \in Y$ olacak şekilde sürekli bir tasvir olsun. Bu bazen

$$h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \quad (2.17)$$

şeklinde yazılarak da gösterilir. ($h(x_0) = y_0$)

f , X de x_0 a tabanlanmış kapalı bir yol ise o takdirde,

$$h \circ f : I \rightarrow Y \quad (2.18)$$

bileşkesi de Y de y_0 a tabanlanmış kapalı bir yoldur. Bu durumda

$$f \rightarrow h \circ f \quad (2.19)$$

e karşılık getirilmek suretiyle $\pi_1(X, x_0)$ yı $\pi_1(Y, y_0)$ içine götüren bir tasvir elde edilir. Bunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

2.8 Tanım : $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sürekli bir tasvir olsun.

$$h_*([f]) = [h \circ f] \quad (2.20)$$

denklemleriyle bir

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad (2.21)$$

tasvirini tanımlayalım. h_* tasviri x_0 taban noktasına göre h nin ürettiği homomorfizma olarak ifade edilir. h_* in iyi-tanımlı olduğu kolayca görülebilir. Eğer,

f ve f' , yol-homotopik ise, $F : I \times I \rightarrow X$ de bunlar arasında bir yol-homotopisi olmak üzere, $h \circ F$, $h \circ f$ ve $h \circ f'$ kapalı yolları arasında bir yol-homotopisidir. (Yani, $F : f \simeq_p f'$ için $h \circ F : h \circ f \simeq_p h \circ f'$)

Aynı zamanda h_* ın bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. Çünkü,

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.22)$$

olup,

$$h((f * g)(s)) = \begin{cases} h(f(2s)) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(g(2s - 1)) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.23)$$

dir. Böylece, $h \circ (f * g)$ bileşkesi, $(h \circ f) * (h \circ g)$ bileşkesine denktir.

$$h_*([f] * [g]) = h_*([f]) * h_*([g]) \quad (2.24)$$

olduğundan h_* bir homomorfizmadır.

h_* üretilmiş homomorfizması sadece $h : X \rightarrow Y$ tasvirine değil aynı zamanda x_0 taban noktasının seçimine de bağlıdır. Eğer, X in bir kaç farklı noktası gözönüne alınırsa, bu kez biraz daha farklı bir durum söz konusu olacaktır. Şöyle ki: x_0 ve x_1 , X in farklı iki noktası olduğunda tanım bölgeleri $\pi_1(X, x_0)$ ve $\pi_1(X, x_1)$ olan iki farklı homomorfizma bulunduğu için aynı h_* sembolünü kullanamayız.

X yol-bağlantılı ve dolayısıyla tüm gruplar izomorfik olsalar bile , yine de farklı gruplardır. Böyle bir durumda ilk homomorfizma için

$$h_{x_0*} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad (2.25)$$

diğeri için ise, h_{x_1*} notasyonunu kullanacağız. Sadece tek bir taban noktasının var olduğu göz önüne alınıyorsa, taban noktası ihmal edilecek ve üretilmiş homomorfizmayı h_* ile göstereceğiz.

Üretilmiş homomorfizma uygulamalarda çok önemli olan iki özeliğe sahiptir. Bunlar aşağıdaki teoremden verilen ve üretilmiş homomorfizmanın **funktoriel** özellikleri diye adlandırılan özelliklerdir.

2.9 Teorem : $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ve $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ ise, o takdirde

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] \quad (2.26)$$

dir. $i : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ özdeşlik tasviri için i_* bir **özdeşlik homomorfizmasıdır**.

İspat : Teoremin ispatı açıktır.

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] \quad (2.27)$$

işlemine göre

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = [k_*(h \circ f)] \quad (2.28)$$

$$= [k \circ (h \circ f)] \quad (2.29)$$

dir.

Benzer şekilde,

$$i_*([f]) = [i \circ f] = [f] \quad (2.30)$$

dir.

2.10 Sonuç : $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, X ile Y arasında bir homeomorfizma ise o takdirde h_* , $\pi_1(X, x_0)$ ile $\pi_1(Y, y_0)$ arasında bir izomorfizmadır.

İspat : $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, h in tersi olsun. O takdirde,

$$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_* \quad (2.31)$$

dir. (Burada i , (X, x_0) üzerindeki özdeşlik tasviridir.)

$$h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_* \quad (2.32)$$

(Burada j , (Y, y_0) üzerindeki özdeşlik tasviridir.)

i_* ve j_* sırasıyla $\pi_1(X, x_0)$ ve $\pi_1(Y, y_0)$ gruplarının özdeşlik homomorfizmaları olduğu için k_* , h_* in tersidir.

2.11 Teorem : $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ tasvirleri $\{x\}$ alt kümesine göre homotopik olsunlar. O takdirde,

$$h_{0*} = h_{1*} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, h_0(x)) \quad (2.33)$$

dir. Yani, üretilmiş homomorfizmalar aynıdır.

İspat : h_0 ve h_1 , $\{x\} \subset X$ alt kümesine göre homotopik ve bunlar arasındaki homotopi $H : X \times I \rightarrow Y$ olmak üzere;

$$H(x, t) = h_0(x) = h_1(x), \quad t \in I, \quad x \in \{x\} \quad (2.34)$$

olduğundan

$$h_{0*} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, h_0(x)) \quad (2.35)$$

$$h_{1*} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, h_1(x)) \quad (2.36)$$

üretilmiş homomorfizmalarının aynı oldukları görülmektedir.

Ne yazık ki, homotopinin bir x taban noktasına göre verildiği koşul, bir çok amaç için çok kısıtlayıcıdır. Bu nedenle bu koşul göz ardı edilebilir fakat ileride teoremin ifadesini daha komplike olarak inceleyeceğiz. Şimdi bu teoremin bazı uygulamalarını verelim.

Barınak (Retract) ve barınma (Retraction) tanımlarına Böl.III de yer verilecek olmasına rağmen biraz önce sözü edilen uygulamalarda kullanılması nedeniyle bunların tanımlarını kısaca verelim.

Tanım : X topolojik uzayının bir A alt kümesi, eğer herhangi bir $a \in A$ için $r(a) = a$ olacak şekilde sürekli bir $r : X \rightarrow A$ tasviri (barınma olarak ifade edilir) varsa X in bir barınağıdır denir.

Görüldüğü gibi A alt kümesini, X in bir retractı olarak düşünmek oldukça güçlü bir koşuldur. Uzayların barınağına basit bir örnek olarak Möbius Bandının merkez eğrisi verilebilir.



Şekil (2.2)

$r : X \rightarrow A$, yukarıdaki tanımda verilen barınma olsun. $i : A \rightarrow X$ kapsama tasviri olmak üzere, herhangi bir $a \in A$ için aşağıdaki üretilmiş homomorfizmaları gözönüne alalım.

$$i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a) \quad (2.37)$$

$$r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a) \quad (2.38)$$

$r \circ i = id_A$ olduğu için $r_* \circ i_*$,

$$r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, a)} \quad (2.39)$$

şeklinde $\pi_1(A, a)$ grubunun özdeşlik homomorfizmasıdır (Burada teorem 2.9 ve bu teoremin sonucunda verilen özellikler kullanılmaktadır).

Buradan i_* nin bir **monomorfizma**, r_* nin de bir **epimorfizma** olduğu sonucuna varırız. Bundan başka, $r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, a)}$ koşulu $\pi_1(X, a)$ nın $i_*(\pi_1(A, a))$ alt

grubu üzerinde daha güçlü kısıtlamalar gerektirir.

$h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ sürekli iki tasvir ve $H : X \times I \rightarrow Y$ de h_0 ve h_1 tasvirleri arasındaki homotopi olsun (Yani, $H(s, 0) = h_0(s)$ ve $H(s, 1) = h_1(s)$).

X in bir $x_0 \in X$ taban noktası seçilsin. h_0 ve h_1 sürekli tasvirlerinin ürettiği homomorfizmaları aşağıdaki gibi gösterelim,

$$h_{0*} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h_0(x_0)) \quad (2.40)$$

$$h_{1*} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h_1(x_0)) \quad (2.41)$$

$\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$; $\alpha(0) = h_0(x_0)$, $\alpha(1) = h_1(x_0)$ şeklinde Y de $h_0(x_0)$ noktasından $h_1(x_0)$ noktasına giden yol olsun. Bu, $[h] \in \pi_1(Y, h_0(x_0))$ için

$$\alpha([h]) = [\bar{\alpha}] * [h] * [\alpha] \quad (2.42)$$

denklemleri bir

$$\hat{\alpha} : \pi_1(Y, h_0(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, h_0(x)) \quad (2.43)$$

izomorfizması tanımlar.

2.12 Teorem : Yukarıdaki hipotezler altında aşağıdaki şema değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_{1*}} & \pi_1(Y, h_1(x_0)) \\ h_{0*} \searrow & & \nearrow \hat{\alpha} \\ & \pi_1(Y, h_0(x_0)) & \end{array}$$

Bu teorem, teorem 2.11 in tam bir genelleştirilmesidir.

İspat : $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ olsun.

$$h_{1*}([f]) = [\bar{\alpha}] * [h_{0*}([f])] * [\alpha] \quad (2.44)$$

olduğu gösterilmelidir.

$f : I \rightarrow X$, $x_0 \in X$ noktasına tabanlanmış kapalı yolu gösterebilir.

$$G(s, t) = H(f(s), t) \quad (2.45)$$

ile tanımlı $G : I \times I \rightarrow Y$ tasvirini gözönüne alalım. $s, t \in I$ için

$$G(s, 0) = H(f(s), 0) = h_0(f(s)) = h_{0*}(f) \quad (2.46)$$

$$G(s, 1) = H(f(s), 1) = h_1(f(s)) = h_{1*}(f) \quad (2.47)$$

ve

$$G(0, t) = G(1, t) = H(x_0, t) \quad (2.48)$$

elde edilir.

G tasviri birim karenin tabanı üzerinde $h_{0*}(f)$ tasvirini, tavanında ise $h_{1*}(f)$ tasvirini gösterir. Birim karenin diğer iki kenarı ise α yolunu göstermektedir. Birim karenin kenarları boyunca yol aldığımızda

$$h_{0*}(f) * \alpha * (h_{1*}(f))^{-1} * \bar{\alpha} \quad (2.49)$$

elde edilir. Gösterilmek istenen (2.44) eşitliği, (2.49) eşitliğinin önce sağdan

$$\alpha * h_{1*}(f) \quad (2.50)$$

ile daha sonrada soldan $\bar{\alpha}$ ile çarpılması suretiyle elde edilir.

2.13 Teorem: $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sürekli bir tasvir ve α , X de x_0 dan x_1 e bir yol olsun. Bu durumda aşağıdaki şema değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, h(x_0)) \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \hat{\beta} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, h(x_1)) \end{array}$$

BÖLÜM III

TEMEL GRUBUN HESAPLANMASI

3.1 ÖRTÜ UZAYLARI.

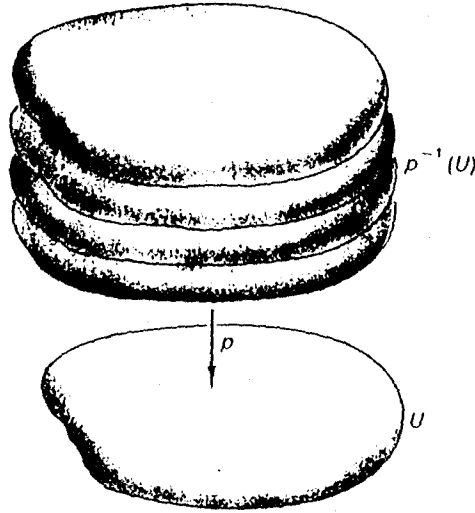
İlk olarak örtü uzayı kavramını vermekle işe başlayacağız. Bizim için örtü uzayları, temel grubun hesaplanmasında bir araç olacaktır. Örtü uzayları, kendi içinde ve özel olarak da Riemann yüzeyleri ve kompleks manifoldların incelenmesinde çok önemlidir.

3.2 Tanım : $p : E \rightarrow B$ sürekli ve üzerine bir tasvir olsun. B nin bir U açık kümesi eğer, $p^{-1}(U)$ ters görüntüsü $\forall \alpha \in I$ için $p|V_\alpha$ kısıtlaması V_α nın U üzerine bir homeomorfizması olacak şekilde (Yani, $p|V_\alpha : V_\alpha \rightarrow U$ bir homeomorfizma olacak şekilde) E deki V_α ayrık açık kümelerin birleşimi olarak yani

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \quad (3.1)$$

yazılabiliyorsa, p vasıtasıyla muntazam örtülmüştür diye ifade edilir. $\{V_\alpha\}$ topluluğuna, $p^{-1}(U)$ nun dilimlere ayrılmış bir bölüntüsü denir (Burada I damga kümesini göstermektedir).

Eğer U , p tarafından muntazam örtülmüş açık bir küme ise genellikle $p^{-1}(U)$ kümesini her biri U ile aynı biçim ve büyüklükte olan parçaların bir topluluğu gibi çizebiliriz. Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi p tasviri bunların hepsini U üzerine götürür.



Şekil (3.1)

3.3 Tanım : $p : E \rightarrow B$, sürekli ve üzerine olsun. Eğer, B nin her b noktası p tarafından muntazam örtülmüş bir U komşuluğuna sahip ise o takdirde, p bir örtü tasviri adını alır ve E ye de B nin bir örtü uzayı denir.

Eğer, $p : E \rightarrow B$ bir örtü tasviri ise o takdirde, her bir $b \in B$ için E nin $p^{-1}(b)$ alt kümesinin ayırtık topolojiye sahip olduğunu belirtelim. Her bir V_α dilimi E de açıktır ve $p^{-1}(b)$ kümesini bir tek noktada keser. Bu nedenle bu nokta $p^{-1}(b)$ üzerindeki alt uzay topolojisinde açıktır.

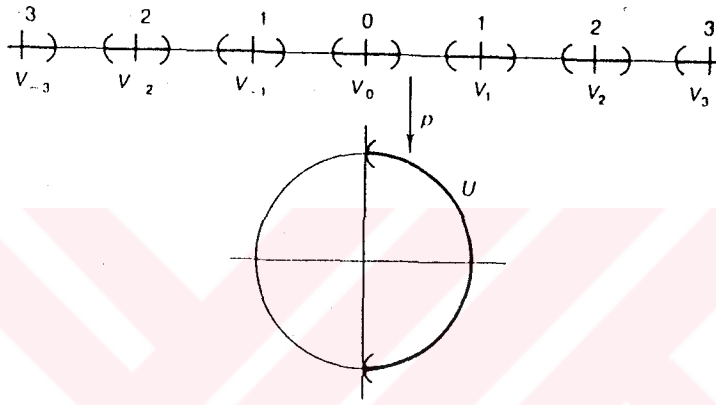
Örnek (1). X herhangi bir uzay ve $i : X \rightarrow X$ özdeşlik tasviri, bir örtü tasviridir. Daha genel olarak, E, X in n tane ayrık kopyası olan $X \times \{1, 2, 3, \dots, n\}$ uzayı olsun. $\forall j$ için $p(x, j) = x$ ile verilen $p : E \rightarrow X$ tasviri yine bir örtü tasviridir. Bu durumda, E tümel uzayını X üzerinde X in n tane ayrık kopyasının bir yığını olarak çizebiliriz. ($j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

3.4 Teorem : $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ işlemi ile verilen $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tasviri bir örtü tasviridir. p tasviri, $\mathbb{R}$ reel eksenini S^1 birim çemberi etrafına saran bir fonksiyon olarak çizilebilir ve tasvir etme işleminde her bir $[n, n + 1]$ aralığı S^1 üzerinedir.

İspat : p nin bir örtü tasviri olması $\sin$ ve $\cos$ fonksiyonlarının elemanter özelliklerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin ; İlk koordinatı pozitif olan böyle noktalardan oluşmuş S^1 in U alt kümesini gözönüne alalım. $p^{-1}(U)$ kümesi, $\cos 2\pi x$ in pozitif olduğu bu x noktalarından meydana gelir. Yani, $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \quad (3.2)$$

aralıklarının birleşimidir. Bu durum Şek.(3.2) de gösterilmiştir.



Şekil (3.2)

Herhangi bir $\bar{V}_n$ kapalı aralığına kısıtlanmış p tasviri, $1 - 1$ dir. Çünkü, $\sin 2\pi x$ böyle bir aralık üzerinde kesin olarak monotondur. Böylece p tasviri ara değer teoreminden V_n i U ya , $\bar{V}_n$ i de $\bar{U}$ üzerine örtecek şekilde taşır. $\bar{V}_n$ kompakt olduğu için

$$p|_{\bar{V}_n} : \bar{V}_n \rightarrow \bar{U} \quad (3.3)$$

bir homeomorfizmadır. Özel olarak,

$$p|_{V_n} : V_n \rightarrow U_n \quad (3.4)$$

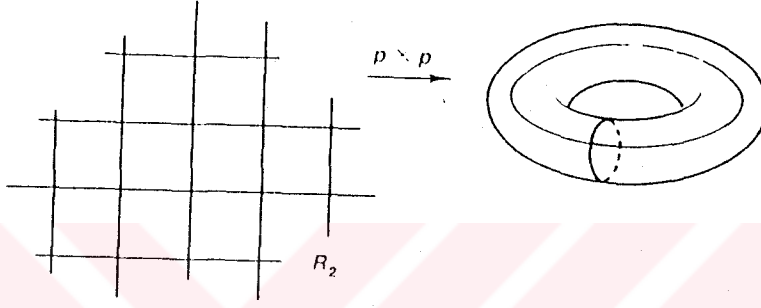
de bir homeomorfizmadır.

Benzer düşünceler alt ve üst açık yarı-düzlem ve soldan açık yarı-düzlem ile S^1 in arakesitine de uygulanabilir. Bu açık kümeler S^1 i örter ve bunların herbiri p vasıtasıyla muntazam örtülmüştür. O halde $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, bir örtü tasviridir.

Örnek (2). $T = S^1 \times S^1$ torunu gözönüne alalım. İki örtü tasvirinin çarpımı yine bir örtü tasviridir. Bu nedenle, Şek.(3.3) de de görüldüğü gibi

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1 \quad (3.5)$$

çarpımı $\mathbb{R}^2$ düzlemiyle torun bir örtüsüdür (Burada p , Teorem 3.4 de bahsedilen örtü tasviridir).



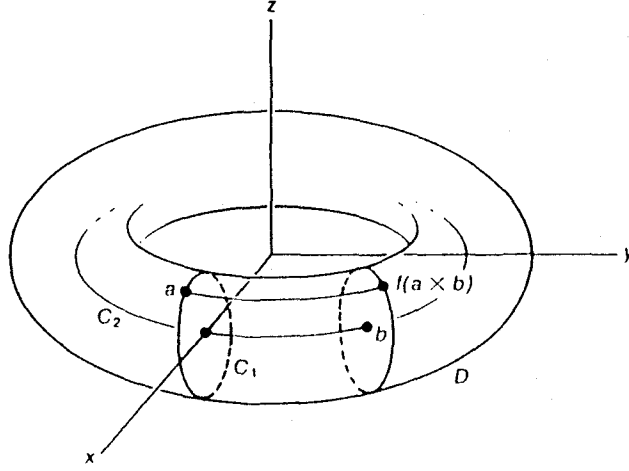
Şekil (3.3)

$[n, n+1] \times [m, m+1]$ birim karelerinin herbiri $p \times p$ vasıtasıyla toru tamamen örter. Bu şekilde toru $S^1 \times S^1$ çarpımı gibi değil, $\mathbb{R}^4$ ün bir alt uzayı olarak gösterdik. Bundan dolayıdır ki, bunu gözönünde canlandırmak kolay değildir.

Fakat, Şek.(3.4) de de görüldüğü üzere $\mathbb{R}^3$ de xz -düzlemindeki $(1, 0, 0)$ merkezli, $\frac{1}{3}$ yarıçaplı C_1 çemberinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen D yüzeyi olarak çizebiliriz. $S^1 \times S^1$ in D yüzeyi ile homeomorfik olduğu kolayca görülebilir.

C_2 , xy -düzleminde merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı çember olsun. C_1 çemberi, merkezi b noktaya gelinceye kadar z -ekseni etrafında bir kez döndürülerek a noktasını, merkezi b olan çember üzerindeki $f(a \times b)$ noktasına götürecek şekilde $f(a \times b)$ tanımlanarak $C_1 \times C_2$ nin D içine bir tasvirini oluşturalım. f tasviri, $C_1 \times C_2$ ile D arasında bir homeomorfizmadır. İstendiği takdirde, $1 - 1$ lik, süre-

lilik ve örtenlik özelliklerini görmek açısından f için denklemler yazılabilir. f^{-1} in sürekliliği ise $C_1 \times C_2$ nin kompaktlığından görülebilir.



Şekil (3.4)

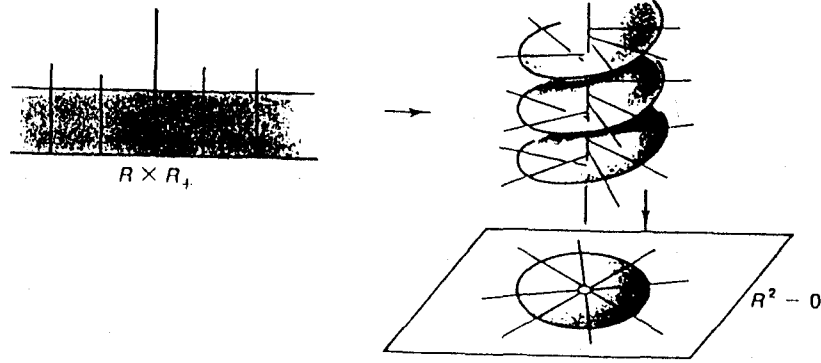
Örnek (3). $p \times i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}_+$ örtü tasvirini gözönüne alalım (Burada i , $\mathbb{R}_+$ üzerindeki özdeşlik tasvirini ve p de Teorem 3.4 de verilen tasviri göstermektedir).

Eğer $x \times t$ yi xt ye götürmek suretiyle $S^1 \times \mathbb{R}_+$ ile $\mathbb{R}^2 - 0$ arasındaki **standart homeomorfizma** yı alırsak, yukarıdaki örtü tasviri ile standart homeomorfizmanın bileşkesi bize açık üst yarı-düzlem ile delikli düzlemin

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0 \quad (3.6)$$

örtüsünü verir (Şek.(3.5)).

Bu örtü tasviri ile Riemann yüzeyi kompleks logaritmik fonksiyonuna eşlenirken, kompleks değişkenlerin incelenmesinde karşılaşılmaktadır.



Şekil (3.5)

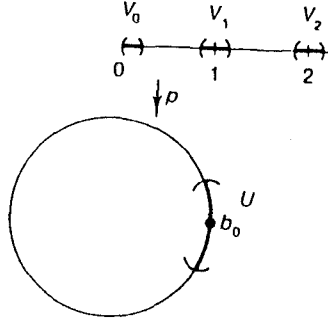
Eğer $p : E \rightarrow B$ bir örtü tasviri ise o takdirde p , E ile B arasında bir **lokal homeomorfizma** dır. Yani, E nin herbir e noktası p vasıtasıyla B nin bir açık alt kümesi üzerine homeomorfik olarak tasvir edilmiş bir komşuluğa sahiptir.

Aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi p nin bir lokal homeomorfizma olması, p nin bir örtü tasviri olması için yeterli bir koşul değildir.

Örnek (4). $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ denklemleriyle verilen $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$ tasviri üzerinedir ve aynı zamanda bir lokal homeomorfizmadır (Şek.(3.6)).

Fakat $b_0 = (1, 0)$ noktası p tarafından muntazam olarak örtülmüş bir U komşuluğuna sahip olmadığı için bir örtü tasviri değildir. b_0 ın tipik bir U komşuluğu, $(0, \epsilon)$ biçimindeki küçük bir V_0 aralığı ile birlikte her bir $n > 0$ tamsayısı için küçük V_n komşuluklarını içeren bir ters görüntüye sahip değildir.

$n > 0$ için V_n aralıklarının herbiri p vasıtasıyla U üzerine homeomorfik olarak tasvir edilmiştir. Fakat V_0 aralığı p vasıtasıyla sadece U içine götürülmüştür.



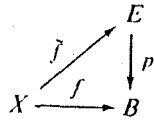
Şekil (3.6)

Örnek (5). Önceki örnek sadece $\mathbb{R}$ nin S^1 in basit bağlantılı bir örtü uzayı olduğunu düşünmemize sebep olabilir. Fakat, S^1 in $\mathbb{R}$ dışında da basit bağlantılı olan örtü uzayları vardır. Buna örnek olarak $p(z) = z^2$ ile verilen $p : S^1 \rightarrow S^1$ tasviri verilebilir. (Burada S^1 i , $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} \subset \mathbb{C}$ şeklinde $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesi olarak düşünüyoruz.)

3.5 S^1 İN TEMEL GRUBUNUN BULUNMASI.

Bir X uzayının örtü uzaylarının incelenmesi , X in temel grubunun incelenmesi ile ilgilidir. Bu kısımda bu iki kavram arasında bir ilişki kurmaya çalışacak ve S^1 in temel grubunu hesaplayacağız.

3.6 Tanım : $p : E \rightarrow B$ bir tasvir olsun. Eğer f, X den B içine sürekli bir tasvir ise, f in bir lifti $p \circ \tilde{f} = f$ olacak şekilde bir $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tasviridir.



p bir örtü tasviri olduğunda liftlerin varlığı, örtü uzayları ve temel grubun incelenmesinde önemli bir araçtır. İlk olarak, bir örtü uzayı için yolların lift edi-

lebileceğini sonra da aynı şekilde yol-homotopilerin de lift edilebileceğini göstere-
lim. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

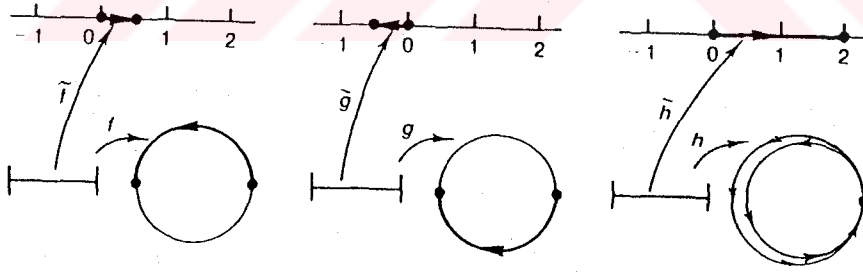
Örnek (1). Teorem 3.4 deki $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örtüsünü gözönüne alalım.

$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$ ile verilen ve $b_0 = (1, 0)$ da başlayan $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ yolunun lifti 0 da başlayıp, $\frac{1}{2}$ de biten $\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}$ yoludur.

$g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$ yolunun lifti 0 da başlayan ve $\frac{-1}{2}$ de biten $\tilde{g}(s) = \frac{-s}{2}$ yoludur.

$h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$ yolunun lifti ise, 0 da başlayan ve 2 de biten $\tilde{h}(s) = 2s$ yoludur.

Burada h , $[0, 1]$ aralığını çember etrafında iki kez sarmaktadır. Lift edilmiş $\tilde{h}$ yolunun 0 da başlayıp, uç noktasının 2 olması da bu gerçeğe işaret etmektedir. Bu yollar Şek.(3.7) de gösterilmiştir.



Şekil (3.7)

3.7 Yardımcı Teorem: $p : E \rightarrow B$ bir örtü tasviri ve $p(e_0) = b_0$ olsun. b_0 da başlayan herhangi bir $f : [0, 1] \rightarrow B$ yolu E de e_0 da başlayan tek bir $\tilde{f}$ yoluna sahiptir.

3.8 Yardımcı Teorem : $p : E \rightarrow B$ bir örtü tasviri ve $p(e_0) = b_0$ olsun.

$F : I \times I \rightarrow B$ tasviri de $F(0,0) = b_0$ olacak şekilde sürekli olsun. O takdirde, F in lifti $\tilde{F}(0,0) = e_0$ olacak şekilde sürekli bir $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$ tasviridir. Eğer $\tilde{F}$ bir yol-homotopi ise, $\tilde{F}$ de yol-homotopi olacaktır. Ayrıca F in $\tilde{F}$ lifti tektir.

3.9 Teorem $p : E \rightarrow B$, bir örtü tasviri ve $p(e_0) = b_0$ olsun. Ayrıca f ve g , B de b_0 dan b_1 e iki yol ve $\tilde{f}$ ile $\tilde{g}$ de sırasıyla bunların E de bir e_0 noktasında başlayan liftleri olsunlar. Eğer, f ile g yol-homotopik ise $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ nin her ikisi de E nin aynı noktasında biter ve yol-homotopikdirler.

Özel Hal : Eğer kapalı bir f yolu sabit yola yol-homotopik ise, f in $\tilde{f}$ liftide kapalıdır.

Şimdi bu teoremi S^1 e uygulayalım.

3.10 Teorem : S^1 in temel grubu sonsuz çevrimseldir.

İspat : $b_0 = (1, 0) \in S^1$ olsun. $\pi_1(S^1, b_0)$ grubu ile tamsayıların $(\mathbb{Z}, +)$ grubu arasında bir izomorfizma kuralım. Bunun için $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ denklemi ile verilen $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örtü tasvirini gözönüne alalım. f , S^1 üzerinde bir b_0 noktasına tabanlanmış kapalı bir yol ve $\tilde{f}$ de f in $\mathbb{R}$ de 0 noktasında başlayan lifti olsun. $\tilde{f}(1)$ noktası $p^{-1}(b_0)$ kümesinin bir noktası olmalıdır. Yani, $\tilde{f}(1)$ bir n tamsayısına eşit olmalıdır.

Teorem 3.9 bize bu tamsayının sadece f in yol-homotopi sınıflarına bağlı olduğunu ifade etmektedir. Dolayısıyla, $\Phi([f])$ bu tamsayı olacak şekilde

$$\Phi : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

tasvirini tanımlayabiliriz. Bu durumda Φ nin bir grup izomorfizması olduğu gösterilmelidir.

Φ tasviri üzerinedir.

$p^{-1}(b_0)$ ın bir noktası n olsun. $\mathbb{R}$, yol-bağlantılı olduğu için $\mathbb{R}$ de 0 dan n e bir $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ yolu seçebiliriz. $f = p \circ \tilde{f}$ tanımlansın. O takdirde, f S^1 de b_0 noktasına tabanlanmış kapalı bir yol ve bu yolun lifti de $\mathbb{R}$ de 0 noktasında başlayan bir yoldur. Tanıma göre

$$\Phi([f]) = n \quad (3.8)$$

dir.

Φ tasviri 1 – 1 dir.

$\Phi([f]) = n = \Phi([g])$ olduğunu kabul edelim. $[f] = [g]$ olduğunu göstermeliyiz. $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ sırasıyle f ile g nin $\mathbb{R}$ de 0 noktasında başlayan liftleri olsunlar. Hipoteze göre $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ nin herikisinin de uç noktaları n dir. $\mathbb{R}$ basit bağlantılı olduğundan $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ yol homotopiktirler. $\tilde{F}$ bunlar arasındaki yol-homotopisi olsun. $F = p \circ \tilde{F}$ tasviri de f ile g arasında bir yol-homotopisi olacaktır.

Φ tasviri bir homomorfizmadır.

f ve g , S^1 de b_0 noktasına tabanlanmış iki kapalı yol olsun. $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ de sırasıyle bunların $\mathbb{R}$ de 0 noktasında başlayan liftleri olsun. Ayrıca $\tilde{f}(1) = n$ ve $\tilde{g}(1) = m$ olduğunu varsayalım.

$\mathbb{R}$ üzerinde

$$h(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ n + \tilde{g}(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3.9)$$

denklemleriyle bir h yolu tanımlasın. Bu durumda h , $\mathbb{R}$ üzerinde 0 noktasında başlayan bir yoldur. h nin $f * g$ nin bir lifti olduğunu gösterelim. İlk olarak, $\sin$ ve $\cos$ fonksiyonları 2π periyodlu fonksiyonlar olduklarından

$$\forall x \text{ için } p(n + x) = p(x) \quad (3.10)$$

şeklinde alabileceğimizi ifade edelim. O takdirde,

$$p(h(s)) = \begin{cases} p(\tilde{f}(2s)) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p(n + \tilde{g}(2s - 1)) = p(\tilde{g}(2s - 1)) = g(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3.11)$$

dir. Böylece $p \circ h = f * g$ olup, h $f * g$ nin 0 noktasında başlayan lifti olur. Tanıma göre $\Phi([f * g])$, $n + m$ toplamına eşit olan $h(1)$ dir. Dolayısıyla aranan

$$\Phi([f * g]) = \Phi([f]) + \Phi([g]) \quad (3.12)$$

elde edilir.

Teorem 3.9 un ispatı, herhangi bir basit bağlantılı örtü uzayına genelleştirilebilir. Yalnız burada $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örtüsüne özgü bir durum sözkonusudur. O da, $\mathbb{R}$ de toplama işleminin varlığıdır. Bu işlem, Φ nin bir homomorfizma olduğunu göstermemize olanak sağlar. Oysa genel bir örtü uzayında her zaman bu şekilde uygun bir toplama işleminden söz edilemiyebilir.

3.11 Teorem : $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ bir örtü tasviri olsun. Eğer E yol-bağlantılı ise, üzerine bir

$$\Phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0) \quad (3.13)$$

tasviri vardır.

E basit bağlantılı olduğunda Φ tasviri 1 – 1 ve üzerinedir.

İspat : İspat hemen hemen Teorem 3.10 un ispatına benzerdir.

3.12 Tanım : E basit bağlantılı bir uzay ve $p : E \rightarrow B$ bir örtü tasviri ise, o takdirde E ye B nin bir **evrensel örtü uzayı** denir.

3.13 $\mathbb{R}^2 - 0$ DELİKLİ DÜZLEMİNİN TEMEL GRUBU

Bu kısımda $\mathbb{R}^2 - 0$ delikli düzleminin temel grubunun sonsuz çevrimsel olduğunu göstereceğiz. Bunun için bir kaç uygulamanın yapılması gerekmektedir. Bununla birlikte aşağıdaki teoremin ispatı bize deformasyon barınaklar (deformation retract) ve bunların temel grup ile olan ilişkileri hakkında azda olsa bir bilgi vermektedir.

3.14 Teorem : $x_0 \in S^1$ olsun.

$$j : (S^1, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2 - 0, x_0) \quad (3.14)$$

kapsama tasviri, temel grupların bir izomorfizmasını üretir.

İspat : $r : \mathbb{R}^2 - 0 \rightarrow S^1$ tasviri

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad (3.15)$$

ile tanımlı sürekli bir tasvir olsun. Burada $\|x\|$, Euclid metriğindeki 0 dan x e kadar olan uzaklığı göstermektedir. r tasviri, $\mathbb{R}^2 - 0$ daki her yarıçap doğrusu, bu doğrunun S^1 ile arakesiti olan nokta üzerine izdüşürülmesi suretiyle çizilebilir. Dolayısıyla, r tasviri S^1 in her x noktasını kendi üzerine tasvir eder.

r_* in j_* in tersi olduğunu gösterelim. İlk olarak,

$$(S^1, x_0) \xrightarrow{j} (\mathbb{R}^2 - 0, x_0) \xrightarrow{r} (S^1, x_0) \quad (3.16)$$

bileşke tasvirini göz önüne alalım. Bu tasvir S^1 in özdeşlik tasvirine eşittir. Böylece üretilmiş homomorfizmanın funktoriyel özelliklerinden, $r_* \circ j_* = \pi_1(S^1, x_0)$ in özdeşlik izomorfizmasıdır.

$j_* \circ r_*$ in $\pi_1(\mathbb{R}^2 - 0, x_0)$ ile kendisinin bir izomorfizması olduğunu göstermek için, $\mathbb{R}^2 - 0$ da x_0 noktasına tabanlanmış kapalı bir f yolu alalım.

O takdirde, $j_*(r_*([f]))$,

$$g(s) = \frac{f(s)}{\|f(s)\|} \quad (3.17)$$

denklemleriyle verilen

$$g = j \circ r \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0 \quad (3.18)$$

kapalı yolunun homotopi sınıfıdır. $g \simeq_p f$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Şek. (3.8) de gösterildiği gibi $f(s)$ noktasını yarıçapa ait olan doğru boyunca $g(s)$ noktasına gelinceye kadar taşıyoruz. Daha formel olarak,

$$F(s, t) = t \frac{f(s)}{\|f(s)\|} + (1 - t)f(s) \quad (3.19)$$

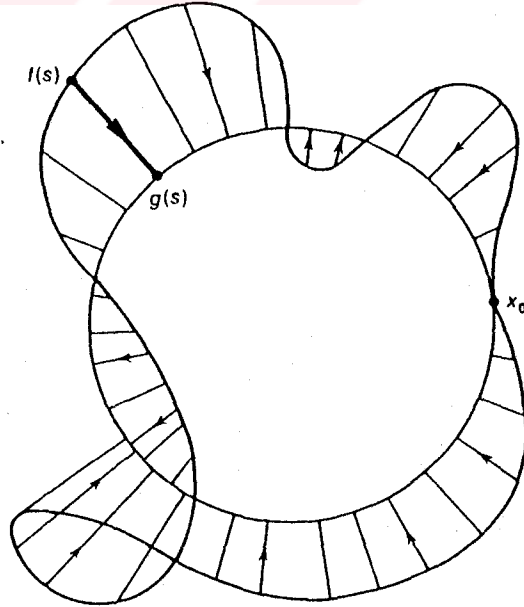
denklemleriyle bir

$$F : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0 \quad (3.20)$$

tasviri tanımlayalım.

$$\frac{t}{\|f(s)\|} + (1 - t) \neq 0 \quad \text{ve} \quad f(s) \neq 0 \quad (3.21)$$

olduğu için $F(s, t)$ nin hiçbir zaman 0 a eşit olmayacağı açıktır.



Şekil (3.8)

Aynı zamanda, tüm t değerleri için

$$F(0, t) = F(1, t) = x_0 \quad (3.22)$$

dır. Böylece F , f ile g arasında bulunmak istenen yol-homotopisidir.

3.15 Teorem : $x_0 \in S^{n-1}$ ise

$$j : (S^{n-1}, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n - 0, x_0) \quad (3.23)$$

kapsaması, temel grupların bir izomorfizmasıdır.

Henüz S^{n-1} in temel grubunu hesaplamadığımız için yukarıdaki teorem bize şu an için pek fazla bir bilgi vermiyor. Bundan önceki teoremin ispatı bize $\mathbb{R}^2 - 0$ daki bir f yolunun S^1 deki $r \circ f$ yolu içine nasıl deforme edildiğini gösterdi. Bu ispata başka bir açıdan bakıldığında istenildiği zaman her yarıçap doğrusu, bu doğru S^1 ile arakesiti olan noktaya izdüşürülmek suretiyle $\mathbb{R}^2 - 0$ tümel uzayının S^1 üzerine deforme edebileceğini ifade etmektedir.

Bu, f yolunu $r \circ f$ yolu içine deforme eden bir deformasyondur ve $\mathbb{R}^2 - 0$ in S^1 üzerine bir güçlü deformasyon barınması (strong deformation retraction) olarak ifade edilir.

İspat bu şekilde analiz edilerek Teorem 3.14 ün genelleştirilmesini sağlar. X in bir A alt uzayı eğer her $a \in A$ için $r(a) = a$ olacak şekilde sürekli bir $r : X \rightarrow A$ tasviri varsa, X in bir barınağıdır. r tasvirine X in A üzerine bir barınması denir.

3.16 Tanım : A , X in bir alt uzayı olsun. Eğer $x \in X$ için

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) \in A \quad (3.24)$$

ve

$$a \in A, t \in I \text{ için } H(a, t) = a \quad (3.25)$$

olacak şekilde sürekli bir

$$H : X \times I \rightarrow X \quad (3.26)$$

tasviri varsa A , X in bir güçlü deformasyon barınması olarak ifade edilir. H tasvirine de, bir güçlü deformasyon barınağı denir.

Başka bir deyişle eğer deformasyon süresince A nın her bir noktası sabit kalacak şekilde X , A içine aşamalı olarak deforme edilebiliyorsa A uzayı X in bir güçlü deformasyon barınağıdır.

Deformasyon sonunda x , $H(x, 1)$ içine tasvir edilerek X in A üzerine bir barınması elde edilir.

Örnek (1): $H(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1 - t)x$ ile tanımlı

$$H : (\mathbb{R}^n - 0) \times I \rightarrow (\mathbb{R}^n - 0) \quad (3.27)$$

tasviri $\mathbb{R}^n - 0$ in S^{n-1} üzerine bir güçlü deformasyon barınmasıdır. Bu tasvir her yarıçap doğrusunu, bu doğrunun S^{n-1} ile arakesiti olan noktaya izdüşürür.

3.17 Teorem : A , X in bir güçlü deformasyon barınması ve $a_0 \in A$ olsun. O takdirde,

$$j : (A, a_0) \rightarrow (X, a_0) \quad (3.28)$$

kapsama tasviri temel grupların bir izomorfizmasını üretir.

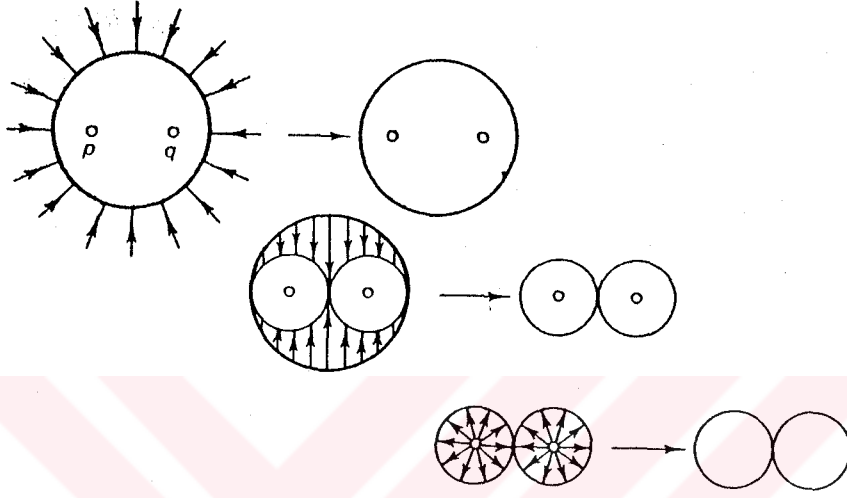
İspat : Teorem 3.14 ün ispatına benzerdir. Bu ispat bildiğimiz bir kaç uzay için temel grupları hesaplamada kullanılabilir. Aşağıda buna tipik bir kaç örnek verelim.

Örnek (2) : B , $\mathbb{R}^3$ deki z -eksenini temsil etsin. $\mathbb{R}^3 - B$ uzayını göz önüne alalım. $(\mathbb{R}^2 - 0) \times 0$ delikli xy -düzlemi bu uzayın bir güçlü deformasyon barınağıdır.

$$H(x, y, z, t) = (x, y, (1 - t)z) \quad (3.29)$$

denklemleri ile tanımlı H tasviri bir güçlü deformasyon barınmasıdır. Bu tasvir z -eksenine paralel olan her doğruyu, bu doğru ile xy -düzleminin arakesiti olan noktaya aşamalı olarak izdüşürmektedir. Sonuç olarak $\mathbb{R}^3 - B$ uzayının sonsuz çevrimsel temel gruba sahip olduğunu ifade edelim. Yani, $\pi_1(\mathbb{R}^3 - B) \cong \mathbb{Z}$ dir.

Örnek (3) : İki noktası çıkartılmış olan $\mathbb{R}^2 - p - q$ uzayını göz önüne alalım. Bu uzayın bir güçlü deformasyon barınağının (8) uzayı olduğunu belirtelim. Denklemleri yazınak yerine sadece deformasyon barınmasını kısa bir şekilde tarif edelim. Bu da Şek. (3.9) da gösterildiği gibi 3 aşamalı bir deformasyon işlemidir.



Şekil (3.9)

Örnek (4) : $\mathbb{R}^2 - p - q$ uzayının bir diğer güçlü deformasyon barınağı,

$$\Theta = S^1 \cup (0 \times [-1, 1]) \quad (3.30)$$

teta uzayıdır.

Sonuç olarak ; (8) ve Θ uzayları izomorfik temel gruplara sahiptir. Yani,

$$\pi_1(8) \cong \pi_1(\Theta) \quad (3.31)$$

dır.

(8) uzayının temel grubu üzerinde daha sonra duracağız.

3.18 S^n İN TEMEL GRUBU

$n \geq 2$ için S^n in basit bağlantılı olduğunu göstermek suretiyle S^n in temel grubunu hesaplayacağız.

3.19 Özel Van Kampen Teoremi : U ve V , $X = U \cup V$ ve $U \cap V$ yol-bağlantılı olacak şekilde X de açık olsunlar. $U \cap V$ nin bir $x_0 \in U \cap V$ noktası için eğer

$$i : (U, x_0) \rightarrow (X, x_0) \quad \text{ve} \quad j : (V, x_0) \rightarrow (X, x_0) \quad (3.32)$$

kapsamalarının her ikisinde temel grupların **sıfır homomorfizma** sını üretiyorsa,

$$\pi_1(X, x_0) = 0 \quad (3.33)$$

dır.

3.20 Teorem : $n \geq 2$ için S^n basit bağlantılıdır.

İspat : $p = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, S^n in kuzey kutbu, $q = (0, 0, \dots, 0, -1)$ de güney kutbu olsun.

1.Adım : İlk olarak, $S^n - p$ nin $\mathbb{R}^n$ ile homeomorfik olduğunu gösterelim.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, S^n in p den farklı bir noktası olmak üzere $f(x)$, bu noktaların $\mathbb{R}^n$ ile arakesitini gösterebilir. Elde edilen

$$f : S^n - p \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.34)$$

tasviri **Stereografik izdüşüm** adını alır.

Daha özel olarak,

$$f(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.35)$$

denklemleriyle bir f tasviri tanımlayalım. f in sürekli olduğu açıktır. f in bir homeomorfizma olduğunu göstermek için f in bir tersi olarak

$$g(y_1, \dots, y_n) = (ty_1, ty_2, \dots, ty_n, 1 - t) \quad (3.36)$$

ile verilen

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - p \quad (3.37)$$

tasvirini inceleyelim.

Burada

$$t = \frac{2}{1 + (y_1)^2 + \dots + (y_n)^2} \quad (3.38)$$

dir.

$$\rho(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}) \quad (3.39)$$

yansıma tasviri altında $S^n - q$, $S^n - p$ ye homeomorfik olduğu için $S^n - q$ aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ e de homeomorfiktir.

2.Adım : $U = S^n - p$ ve $S^n - q = V$ olsun. S^n uzayı U ile V açık kümelerinin birleşimine eşittir. Ayrıca U ve V kümeleri basit bağlantılı olup, $\mathbb{R}^n$ ile homeomorfiktirler. Öncelikle $U \cap V$ nin yol-bağlantılı olduğunu gösterelim.

Teorem 3.19 den S^n in basit bağlantılı olduğunu biliyoruz. U ve V kümelerinin arakesiti $S^n - p - q$ kümesidir. Bu kümenin stereografik izdüşüm altında $\mathbb{R}^n - 0$ ile homeomorfik olduğunu ifade edelim. $\mathbb{R}^n - 0$ in yol-bağlantılı olduğunu göstermek zor değildir. $\mathbb{R}^n - 0$ ın herhangi bir x noktası $\mathbb{R}^n - 0$ daki doğrular vasıtasıyla $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$ noktasına birleştirilebilir.

Bunun $a < 0$ için $(a, 0, \dots, 0)$ biçimindeki x noktaları için geçerli olmadığını belirtelim. Bu durumda x den $x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ noktasına daha sonrada x_1 den x_0 noktasına giden doğru şeklinde yollar olabilir (Doğal olarak burada $n > 1$ olması halini gözönüne alıyoruz).

3.21 Sonuç : $n > 2$ değerleri için $\mathbb{R}^n - 0$ basit bağlantılıdır.

İspat : Teorem 3.15 den $\mathbb{R}^n - 0$ ile S^{n-1} in temel gruplarının izomorf olduğunu biliyoruz.

3.22 Sonuç : $n > 2$ için $\mathbb{R}^n$ ile $\mathbb{R}^2$ homeomorfik değildir.

İspat : $\mathbb{R}^n$ den bir nokta çıkarılarak basit bağlantılı bir uzay elde edilirken $\mathbb{R}^2$ den bir nokta çıkarıldığında geriye kalan uzay için aynı şeyi söyleyemeyiz.

Bu sonuç yüksek boyutlara genelleştirilebilir. Eğer $n \neq m$ ise, $\mathbb{R}^n$ ile $\mathbb{R}^m$ homeomorfik değildir.

3.23 YÜZEYLERİN TEMEL GRUPLARI

İlk olarak bir yüzeyin sayılabilir bir taban ile birlikte, her noktası $\mathbb{R}^2$ nin açık bir alt kümesine homeomorfik komşuluğa sahip olan bir Hausdorff uzayı olduğunu hatırlayalım. Yüzeyler Geometri, Topoloji ve Kompleks analiz dahil olmak üzere matematiğin çok çeşitli kısımlarıyla ilgilidir. Biz burada S^2 Küre, $\mathbb{P}^2$ Projektif düzlem, T Tor ve T_2 İki toru nu inceleyeceğiz.

Bu yüzeylerin temel grupları karşılaştırılmak suretiyle homeomorfik olup olmadıklarını göstermeye çalışacağız. Önce Toru gözönüne alalım. Temel grubunu hesaplayabilmek için bir çarpım uzayının temel grubu ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim:

3.24 Teorem : $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

(Buradaki çarpım direkt çarpım anlamındadır).

İspat : Eğer A ve B ”.” işlemleriyle birlikte birer grup iseler, o takdirde bu grupların kartezyen çarpımı olan $A \times B$ nin

$$(a \times b).(a' \times b') = (a.a') \times (b.b') \quad (3.40)$$

işlemleriyle bir grup yapısına sahip olduğunu belirtelim.

Yine $h : C \rightarrow A$ ve $k : C \rightarrow B$ birer grup homomorfizması olduklarında

$$\Phi(c) = h(c) \times k(c) \quad (3.41)$$

ile tanımlı bir

$$\Phi : C \rightarrow A \times B \quad (3.42)$$

tasvirinin bir grup homomorfizması olduğunu belirtelim.

$p : X \times Y \rightarrow X$ ve $q : X \times Y \rightarrow Y$ izdüşüm tasvirleri olsunlar. Eğer teoremin ifadesindeki (x_0, y_0) taban noktasını kullanıyorsak

$$p_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad (3.43)$$

$$q_* : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad (3.44)$$

üretilmiş homomorfizmalarını elde ederiz.

$$\Phi([f]) = p_*([f]) \times q_*([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] \quad (3.45)$$

denklemini bir

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \quad (3.46)$$

homomorfizması tanımlar. Φ nin bir izomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

Φ tasviri örtendir.

$g : I \rightarrow X$, x_0 noktasına tabanlanmış, $h : I \rightarrow Y$ de y_0 noktasına tabanlanmış kapalı yollar olsunlar. $[g] \times [h]$ elemanının Φ nin görüntü kümesinde olduğunu göstermek istiyoruz.

$$f(s) = g(s) \times h(s) \quad (3.47)$$

denkleminle bir

$$f : I \rightarrow X \times Y \quad (3.48)$$

tasviri tanımlayalım. O takdirde f , $X \times Y$ de $x_0 \times y_0$ noktasına tabanlanmış kapalı bir yol olup,

$$\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [g] \times [h] \quad (3.49)$$

elde edilir.

Φ nin çekirdeği değersizdir.

$f : I \rightarrow X \times Y$, $X \times Y$ de $x_0 \times y_0$ noktasına tabanlanmış kapalı bir yol ve

$\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$ ifadesi de birim eleman olsun. Bu ise, $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$ ve $q \circ f \simeq_p e_{y_0}$ olması demektir. G ve H sırasıyla bunların arasındaki yol-homotopiler olsun. O takdirde

$$F(s, t) = G(s, t) \times H(s, t) \quad (3.50)$$

ile tanımlı

$$F : I \times I \rightarrow X \times Y \quad (3.51)$$

tasviri f ve $x_0 \times y_0$ noktasına tabanlanmış sabit yol arasında bir yol-homotopisidir.

3.25 Sonuç : $T = S^1 \times S^1$ Torunun temel grubu $Z \times Z$ grubuna izomorftur.

Yani, $\pi_1(T) \cong Z \times Z = Z_2$ dir.

Bu kez de projektif düzlemi ve ve temel grubunu tanımlayalım.

3.26 Tanım : $\mathbb{P}^2$ Projektif düzlemi, S^2 nin her x noktasını bu noktanın çapucu (antipodal) noktası olan $-x$ ile özdeşlemek suretiyle S^2 den elde edilen uzaydır.

Formel olarak, $x \sim x$ ve $x \sim (-x)$ almak suretiyle S^2 üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım. O takdirde $\mathbb{P}^2$, denklik sınıflarının kümesidir.

Eğer $p : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, her x noktasını bu noktanın denklik sınıfına tasvir ediyorsa, ancak ve ancak $p^{-1}(V)$, S^2 de açık ise, V nin $\mathbb{P}^2$ de açık olduğunu tanımlayarak $\mathbb{P}^2$ yi topolojileştirebiliriz.

Nasıl ki adi Euclid Geometrisinde $\mathbb{R}^2$ Euclid düzlemi temel bir kavramdır, aynı şekilde Projektif düzlem de Projektif Geometri de incelenen başlıca temel kavramlardandır. Topolojistler, Projektif düzlemi bir yüzeye örnek olarak ele alıp incelerler.

3.27 Teorem : $\mathbb{P}^2$ Projektif düzlemi bir yüzeydir ve $p : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tasviri bir örtü tasviridir.

İspat : İlk olarak p nin açık bir tasvir olduğunu gösterelim. U , S^2 de açık olsun.

$$a(x) = -x \quad (3.52)$$

ile verilen

$$a : S^2 \rightarrow S^2 \quad (3.53)$$

çapucu tasviri S^2 nin bir homeomorfizmasıdır. Dolayısıyla, $a(U)$, S^2 de açıktır.

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U) \quad (3.54)$$

olduğu için bu küme aynı zamanda S^2 de açıktır. Dolayısıyla, tanıma göre $p(U)$, $\mathbb{R}^2$ de açıktır.

Bu kez de p nin bir örtü tasviri olduğunu gösterelim. $\mathbb{P}^2$ nin verilen bir y noktası için bir $x \in p^{-1}(y)$ seçelim. Daha sonra da $\mathbb{R}^3$ ün d Euclid metriği kullanılarak herhangi bir $\epsilon < 1$ için S^2 de x in bir U ϵ -komşuluğu seçelim. O takdirde U , S^2 nin çapucu noktalarının $\{z, a(z)\}$ çiftini içermez. Çünkü, $d(z, a(z)) = 2$ dir.

Sonuç olarak, $p : U \rightarrow p(U)$ tasviri 1 – 1 ve üzerinedir. Sürekli ve açık olduğundan bir homeomorfizmadır. Benzer şekilde $p : a(U) \rightarrow p(a(U)) = p(U)$ bir homeomorfizmadır.

Böylece $p^{-1}(p(U))$ kümesi, U ve $a(U)$ gibi iki tane ayrık ve açık kümenin birleşimidir. Öyle ki, bu kümelerin her biri p vasıtasıyla $p(U)$ üzerine homeomorfik olarak tasvir edilebilir. O takdirde $p(U)$, $p(x) = y$ nin p tarafından muntazam örtülmüş bir komşuluğudur. Dolayısıyla, p bir örtü tasviridir. Çünkü, S^2 bir $\{U_n\}$ sayılabilir tabanına, $\mathbb{P}^2$ uzayı da bir $\{p(U_n)\}$ sayılabilir tabanına sahiptir.

$\mathbb{P}^2$ nin Hausdorff olduğunu gösterelim. y_1 ve y_2 , $\mathbb{P}^2$ nin farklı iki noktası olsun. $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$ kümesi 4 noktayıda içerir. Bunlar arasındaki minimum uzaklık 2ϵ olsun. U_1 , $p^{-1}(y_1)$ noktalarından birini, U_2 de $p^{-1}(y_2)$ noktalarından birinin ϵ -komşuluğu olsun. O takdirde, $U_1 \cup a(U_1)$ ve $U_2 \cup a(U_2)$ ayrıktır. $p(U_1)$ ve $p(U_2)$ sırasıyla y_1 ve y_2 noktalarının $\mathbb{P}^2$ deki ayrık komşuluklarıdır.

S^2 bir yüzey ve $\mathbb{P}^2$ nin her noktası, S^2 nin açık bir alt kümesine homeomorfik komşuluğa sahip olduğundan $\mathbb{P}^2$ uzayı da aynı zamanda bir yüzeydir.

3.28 Sonuç : $\pi_1(\mathbb{P}^2, y)$, 2. mertebeden bir gruptur.

İspat : $p : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ izdüşümü bir örtü tasviridir. S^2 basit bağlantılı olduğunu biliyoruz. Bu da bize $\pi_1(\mathbb{P}^2, y)$ ve $p^{-1}(y)$ kümesi arasında 1 – 1 ve üzerine bir eşleme olduğunu ifade eder. Bu küme 2 elemanlı bir küme olduğu için $\pi_1(\mathbb{P}^2, y)$, 2. mertebeden bir gruptur. Doğal olarak, 2. mertebeden herhangi bir grup Z_2 ye izomorfiktir.

her çember p vasıtasıyla homeomorfik olarak B üzerine tasvir edilir. Aynı şekilde y -ekseni üzerindeki bir tamsayı noktasında teğet olan her çember homeomorfik olarak A üzerine tasvir edilir.

Her durumda teğet noktası x_0 noktası üzerine tasvir edilir. $\tilde{f} : I \rightarrow E$, x -ekseni boyunca orijinden 1×0 noktasına kadar olan

$$\tilde{f}(s) = s \times 0 \quad (3.55)$$

yolu olsun. Benzer şekilde, $\tilde{g} : I \rightarrow E$ de y -ekseni boyunca orijinde 0×1 noktasına kadar olan

$$\tilde{g}(s) = 0 \times s \quad (3.56)$$

yolu olsun. Ayrıca

$$f = p \circ \tilde{f} \quad \text{ve} \quad g = p \circ \tilde{g} \quad (3.57)$$

olsun. O takdirde, f ve g sırasıyla, 8 şeklinde A ve B çemberleri etrafında dolanan x_0 noktasına tabanlanmış olan kapalı yollardır. $f * g$ ile $g * f$ nin yol-homotopik olmadıkları gösterilebilirse 8 şeklinin temel grubunun değişmeli olmadığı görülmüş olacaktır. Bunu göstermek için bunların herbirinin E de orijinde başlayan bir yola liftini bulalım.

$f * g$ yolu, x -ekseni boyunca orijinden 1×0 a kadar olan bir yola lift edilir ve 1×0 noktasında x -eksenine teğet olan çemberin etrafını bir kez dolaşır. Diğer yandan, $g * f$ yolu da E de y -ekseni boyunca orijinden 0×1 noktasına kadar olan bir yola lift edilir ve ardından 0×1 noktasında y -eksenine teğet olan çemberin çevresini bir kez dolaşır.

Lift edilmiş olan yollar aynı noktada son bulmadıkları için $f * g$ ve $g * f$ yol-homotopik olamazlar.

8 şeklinin temel grubu, cebircilerin " İki Üreteçli Serbest Grup " diye ifade ettikleri bir gruptur.

3.30 Teorem : T_2 İki torunun temel grubu değişmeli değildir.

İspat : T_2 İki toru şöyle elde edilir : Torun iki kopyası alınır ve bunların herbiri üzerinde küçük bir delik açılmak suretiyle birleştirilir ve buradan her iki torun kenar yüzeyleri boyunca birinden diğerine geçiş sağlanır.

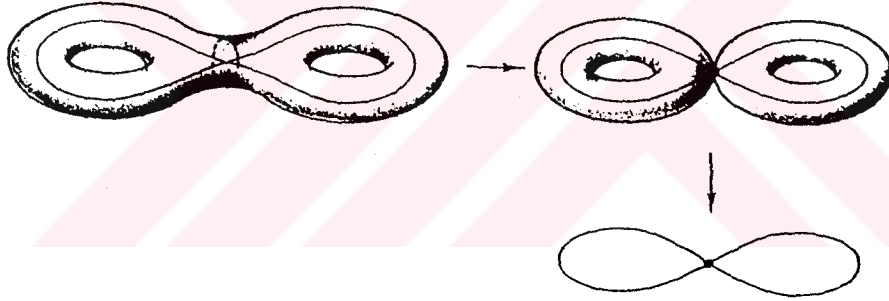
$$j : (8, x_0) \rightarrow (T_2, x_0) \quad (3.58)$$

kapsaması, 1 – 1 bir

$$j_* : \pi_1(8, x_0) \rightarrow \pi_1(T_2, x_0) \quad (3.59)$$

homomorfizması ürettiğinden, $\pi_1(T_2, x_0)$ grubu değişmeli değildir.

$r : T_2 \rightarrow 8$ barınması için denklemler yazılabilir. Ancak biz burada daha basit olması bakımından bunu aşağıdaki şekilde göstereceğiz (Şek.(3.11)).



Şekil (3.11)

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Cebirsel topoloji içinde önemli bir yer tutan temel grup, kompaktlık, bağlantılılık ve metriklenebilirlik gibi bazı topolojik özelliklerin yanısıra homeomorfizma problemlerinde kullanılan başlıca konulardan biridir.

Konuyu sağlam bir temele oturtmak amacıyla I. Bölümü tamamiyle temel bazı tanım ve kavramları içerecek şekilde düşündük. II. Bölümde temel grubun tanımı ve ardından özelliklerini ele aldık. Bir X topolojik uzayı için $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\pi_n(X, x)$ şeklinde gruplar vardır. Fakat, bu gruplar daha çok Homotopi Teorinin genel konuları içine girdiğinden, bu çalışmada sadece $n = 1$ olması durumunu yani $\pi_1(X, x)$ şeklinde temel grup (Fundamental grup) ya da bazı yazarların birinci homotopi grubu olarak ifade ettikleri grubu ve uygulamalarda çok önemli olan bazı özelliklerini inceledik.

III. Bölümde ise, temel grubu bildiğimiz bazı uzaylara uygulamak suretiyle "temel grupları izomorfik olan uzaylar homeomorfiktir" teoreminden hareketle homeomorfik olan uzaylar kısmen tespit edildi.

Öneri olarak, Homoloji grupları ve temel grubun homoloji grubu ile olan ilgisi ve özel olarak da manifoldlar üzerinde temel grubun hesabı verilmek suretiyle konu daha da genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- 1- Gray, Brayton., 1975, Homotopy Theory: An Introduction to Algebraic Topology, Academic Press**
- 2- Greenberg, Marvin J., and Harper, John R., 1981, Algebraic Topology: A First Course, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.**
- 3- Kinsey, L. Christine., 1993, Topology of Surfaces, Springer-Verlag, New York,**
- 4- Massey, S. William., 1984, Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag, New York**
- 5- Munkres, R. James., 1975, Topology: A First Course, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey**
- 6- Wallace, H. Andrew., 1961, An Introduction to Algebraic Topology, Pergamon Press**
- 7- Willard, S., 1970, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.**
- 8- Zimmermann, B. Lecture Notes on Introduction to Algebraic Topology, ICTP (Trieste-ITALY), Academic Year 1992-93**

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eyüp Kızıl

Doğum Yeri : İstanbul

Doğum Tarihi : 20 Mart 1972

İlk Öğrenimi : 1984 Yılında Fethiye İlkokulundan mezun oldu

Orta Öğrenimi : 1989 Yılında İstanbul Pertevniyal Lisesinden mezun oldu

Yüksek Öğrenimi : 1990 Yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 1994 yılında tamamladı

Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi

Katıldığı Bilimsel Aktiviteler

[1] IV. International Gökova Geometry-Topology Conference, Akyaka/Muğla, May 29-June 02, 1995

[2] VII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Yumurtalık-Adana, 19-23 Eylül 1995