

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Halkalar Cisimler Üzerine

Sadi Baydar

Doktora Tezi

İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ PROFESÖRLER KURULUNUN
13.2.1980 tarih -12- Sayılı kararı ile tevcih edilen doktora çalışmasıdır.

R 209

39

4000

DOKTORA TEZİ

HALKALAR CİSİMLER ÜZERİNE

DOKTORA HOCASI VE JÜRİ BAŞKANI	: PROF. DR. H. HİLMİ HACISALİHOĞLU ANKARA GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEB. FAK, DEKANI
DOKTORA YÖNETİCİSİ VE JÜRİ ÜYESİ	: DOÇENT BEHİÇ ÇAĞAL İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ, FEN-EDEB FAK, ÖĞR. ÜYESİ DEKAN YARDIMCISI
JÜRİ ÜYESİ	: DOÇENT EROL BALKANAY İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ, FEN-EDEB. FAK. ÖĞR. ÜYESİ

İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ PROFESÖRLER KURULUNUN
13.2.1980 tarih -12- sayılı kararı ile tevcih edilen doktora çalışmasıdır.



DOKTORA TEZİ

HALKALAR CİSİMLER ÜZERİNE

K

DOKTORA HOCASI
JÜRİ BAŞKANI

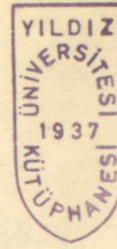
: PROF. DR. H. HİLMİ HACISALİHOĞLU
ANKARA GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEB. FAK. DEKANI

DOKTORA YÖNETİCİSİ
JÜRİ ÜYESİ

: DOÇENT BEHİÇ ÇAĞAL
İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ, FEN-EDEB. FAK. ÖĞR. ÜYESİ
DEKAN YARDIMCISI

JÜRİ ÜYESİ

: DOÇENT EROL BALKANAY
İSTANBUL YILDIZ ÜNİVERSİTESİ, FEN-EDEB. FAK. ÖĞR. ÜYESİ



K O N U :

TEZ PROSEDÜRÜ

TEZİN ÖZÜ VE YÖNÜ

1

2-3

BİRİNCİ KISIM :SIRALI (n) Lİ ELEMANLAR, MATEMATİK GEN HALLİ
GEN HALKA CİSİM, GEN ÇARPIM KURALLI CİSİM

4-7

İKİNCİ KISIM : $\mathbb{C}$, KOMPLEKS HALKA, KOMPLEKS SAYILAR CÜMLEŞİ

8

 $\mathbb{S}$, (s) FAKTÖRLÜ HALKA, (s) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLEŞİ

9

 $\mathbb{D}$, DUAL HALKA, DUAL SAYILAR CÜMLEŞİ

10

 $\mathbb{H}$, HELİSEL HALKA, HELİSEL SAYILAR CÜMLEŞİ

11

 $\mathbb{H}'$, HOMOTETİK HALKA, HOMOTETİK SAYILAR CÜMLEŞİ

12

 $\mathbb{G}$, GEN CÜMLELER SINIFI, GEN SAYI CÜMLEŞİ

13-15

ÜÇÜNCÜ KISIM :

KİNEMATİK VE HALKA CİSİM KİNEMATİSİ

16

 i, j, k KİNEMATİK FAKTÖRLER ETKİSİ

17

 h, h' KİNEMATİK FAKTÖRLER ETKİSİ

18-19

 q , KİNEMATİK FAKTÖR ETKİSİ

20

 Q^2 DE KİNEMATİK FAKTÖRLER TOPLAMI VE
KOMPOZE KİNEMATİK FAKTÖRLER

21

 $i^2 + j^2 = 0, i^2 + k^2 = -1, j^2 + k^2 = 1$ TEOREMLERİ

22

 (K^2, T, I) KİNEMATİK FAKTÖRLER CÜMLEŞİ (ÜÇLÜSÜ)

23-24

DÖRDÜNCÜ KISIM :

BERKİ SAYILARI

25-26

BERKİ VEKTÖR UZAYLARINDA İÇ ÇARPIM

27

BERKİ VEKTÖR UZAYLARI BERKİ MODÜLLERİ

28-34

BEŞİNCİ KISIM :

GEN ÇARPIM KURALLI MATRİS HALKALARI

35-41

QUATERNİONLAR SINIFI, DUAL CİSİMLER SINIFI

42-43

ALTINCI KISIM : Q^2 DE CİSİMLER VE HALKALAR SINIFI, KOMPLEKS CİSİMLER SINIFI

44

FORM QUATERNİON, MİNİMUM QUATERNİON

45-46

(s) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI, DEFORM QUATERNİON, AQUATERNİON

47-48

DUAL HALKALAR SINIFI, DUAL DEFORM QUATERNİON, DUAL QUATERNİON

49-51

HELİSEL CİSİMLER SINIFI VE SINIFDA FORM QUATERNİON, HELİSEL
QUATERNİON

52-54

HOMOTETİK HALKALAR SINIFI, SINIFDA DEFORM QUATERNİON HOMOTE-
TİK AQUATERNİON

55-56

YEDİNCİ KISIM :

SINIFLAMA YÖNTEMİ İLE BERKİ HALKA VE CİSİMLERİ

57-60

BİBLİYOGRAFYA

61

SADİ BAYDAR'IN ÖZGEÇMİŞ NOTU

62

TEZ PROSEDÜRÜ

TEZİN KONUSU : HALKA VE CİSİMLER

TEZ AKADEMİK OTORİTESİ : YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT
FAKÜLTESİ

KARAR : FAKÜLTE PROFESÖRLER KURULU
KARAR TARİHİ : 13.2.1980
KARAR NO : 12

TEZ PROFESÖRÜ : PROF.DR HİLMİ HACISALİHOĞLU
A.Ü - FEN FAKÜLTESİ
CEBİR GEOMETRİ KÜRSÜSÜ BAŞKANI

TEZİN YÖNETİCİSİ : DOÇENT BEHİÇ ÇAĞAL
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK ÖĞRETİM ÜYESİ

DOKTORA ADAYI : SADİ BAYDAR
H.Ü.Z.MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MAT.ÖĞRETİM GÖREVLİSİ

JÜRİ ÜYELERİ : - JÜRİ BAŞKANI
Prof.Dr. H.HİLMİ HACISALİHOĞLU
GAZİ ÜNİVERSİTESİ-FEN EDEBİYAT
FAKÜLTESİ DEKANI
- JÜRİ ÜYESİ
Doç. BEHİÇ ÇAĞAL
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT
FAKÜLTESİ DEKAN YARDIMCISI
- JÜRİ ÜYESİ
Doç. EROL BALKANAY
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ FEN-EDEBİYAT
FAKÜLTESİ ÖĞRETİM ÜYESİ

TEZİN ÖZÜ VE YÖNÜ

Bu çalışma, sıralı (n) liler için, halka ve cisim yapılarının genelleştirilmesi ve genişletilmesine ilişkin bir yöntem ile; bundan elde edilen verilerin, bilinen cebirsel yapılarda denenmesini ve uygulamasını içine almaktadır.

Çalışmada, sıralı çiftler için - kompleks sayılar, dual sayılar "s", faktörlü sayılar cümlelerini de içeren daha geniş bir GEN HALKA-CİSİM yapısı ; ve

Kompleks sayının, dual sayının, "s", faktörlü sayının oluşum veya tanım öğeleri : sıra ile i, φ, s arasında toplam ($i+\varphi, \varphi+s, s+i$), ve çarpım ($i.\varphi; \varphi.s; s.i$) ilişkilerine anlam ve olanak veren kinematik bir yorum yapmak sureti ile, bunlarla bazı cebirsel yapılar elde edilmesi;

Ayrıca bilinen bazı halka ve cisimlerin sınıf haline getirilmesi; bunlar içinde özellikler taşıyan alt sınıflar bulunması yeni sayılabilir.

Ve sıralı (n) liler için tesis edilen GEN HALKA - CİSİM çarpım kuralı verilerinin, matris elemanlara uygulanması halinde halka niteliğinin korunacağı ve bundan elde edilecek sonuçlar üzerinde durulmuştur.

30 ARALIK 1981

ZONGULDAK

DE
L'ESSENTIEL ET LA DIRECTION LA THESE

Ce travail contient une manière a propos de la generalisation et l'élargissement des constitutions du corp et de l'anneau pour les termes de rang (n); et qu'il contient, en même temps, l'application et l'expérience des données obtenu par cela, sur les constitutions l'algébriques connues.

Dans ce travail; les paires de rang (2), il ya une constitution plus large du GENE - ANNEAU - CORPS qui contient aussi les ensembles des nombres en facteur (s), les nombres complexes, et des nombres duals;

Les éléments de definition ou de naissance des nombres en facteur (s), des nombres complexes, et des nombres duals sont successivement: i, , s; addition entre eux: $(i+s; s+s; s+i)$ et multiplication $(i.s; s.s; s . i)$, on a obtenu les constitutions algébrique en commentant kinématiquement (cinétiquement)

D'autre part, on peut compter nouvellement une manière de la classification des certains corps et des anneaux, et la decouverte des sous classes qui porte des particularités différentes

Et, On a assuré la liaison avec le sujet : sur la conservation de la propriété d'anneau et ses résultats, en cas l'application des données de règle de multiplication appartenant a la GENE ANNEAU - CORPS constitués pour les termes de rang (n), aux éléments de matrice.

Le 30 decembre 1981

1.BİRİNCİ KISIM

1- R^n DE GEN HALKA-CİSİMLER

VE R^2 DE HALKA,CİSİMLER

TANIM: 1.1- SIRALI (n) Lİ ELEMANLAR

Boş olmayan $E_1, E_2, \dots, E_n$ cümlelerinin $X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_n \in E_n$ elemanlarından oluşturulan $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, n elemanlısına, bir sıralı (n) li; $E_1, E_2, \dots, E_n$ cümlelerinin bütün elemanları kullanılarak elde edilen tüm sıralı (n) lilerin cümlesine de $E_1, E_2, \dots, E_n$ cümlelerinin karteziyen çarpım cümlesi denir; ve

$(X_1, X_2, \dots, X_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ yazılır; cümlenin elemanları aynı bir E cümlesinden (n) kez alınıyor ise, bu defa

$(X_1, X_2, \dots, X_n) \in E \times E \times \dots \times E = E^n$ ifadesi kullanılır.

Çoğu yerde, belirli ve gerekli amaçlarla, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sıralı (n) liye, (n) boyutlu uzay elemanı ve $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'e, bu elemanın bileşenleri denir.

Cümle, iki E_1, E_2 cümlelerinin $X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, X_1, X_2$ bileşenlerinden $(X_1, X_2) \in E_1 \times E_2$ oluşuyorsa, (X_1, X_2) 'ye sıralı çift; veya ikili eleman, yada iki boyutlu eleman, X_1, X_2 terimlerinin de ayrı, ayrı iki boyutlu uzay elemanının bileşenleri denecektir.

X_1, X_2 aynı bir E cümlesinden alınıyor ise

$(X_1, X_2) \in E \times E = E^2$ olacaktır.

TANIM: 1.2- MATEMATİK GEN MODEL

Tanımındaki bazı değişken unsurlara (parametrelere) yada değişebilir bazı koşullara göre, kendisiyle aynı, yada benzer karakterli, matematik uyumlu, kapsamlı kurallar, yapılar üretilebilen cebirsel yapılara GEN MODEL denecektir.

TANIM: 1.3- GEN HALKA-CİSİM

İçerdiği parametrelerin değerlerine veya yapısındaki değişebilir bazı koşullarına göre, kendisinden bir dizi halka üretilebilen cebirsel yapılara GEN HALKA; cisim üretilebilen cebirsel yapılara GEN CİSİM hem halka, hem cisim üretilebilen GEN MODELLER'e GEN HALKA-CİSİM denecaktır.

TEOREM : 1.3.1

R, reel sayılar cümlesini göstermek üzere, $X_1, X_2, \dots, X_n \in R$ ve $(X_1, X_2, \dots, X_n), (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in R^n$ olan ve elemanlar arası $(\tau), (\perp)$ iç işlemleri, b, r+s'in (n) ile bölümünden elde edilen bölüm sayısını ve (k) kalan sayıyı göstermek üzere:

$$(\tau): (X_1, X_2, \dots, X_n) \tau (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_n + Y_n) \in R^n$$

$$(\perp): (X_1, X_2, \dots, X_n) \perp (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = Z_{k+1}$$

$$Z_{k+1} = \sum_{r=1}^n \left(\begin{matrix} +1 \\ r=s \end{matrix} \right) X_r \cdot Y_s \quad \left| \begin{array}{l} r+s=b.n+k \\ k=0,1,2,\dots,n-1 \end{array} \right.$$

bağıntıları ile tanımlanan

sıralı (n)'liler için $(R^n, \tau, \perp)$ üçlüsü DEĞİŞİMLİ, BİRİMLİ BİR GEN HALKA-CİSİM'dir. Verilen cebirsel yapı, (n) nin değişen değerlerine, r=s halindeki terimlerin değiştirilebilen +, - işaretlerinin durumuna göre bir dizi halka ve cisim de oluşturur.

Teorem için, n=3, n=2 değerleri halinde birer örnek verilmek istenir ise:

$$n=3: k=0, Z_1 = X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_3 Y_3, k=1, Z_2 = X_1 Y_3 + X_2 Y_2 + X_3 Y_1$$

$$k=2, Z_3 = X_1 Y_1 + X_2 Y_3 + X_3 Y_2 ;$$

$$n=2: k=0 \quad Z_1 = X_1 Y_1 + X_2 Y_2, \quad Z_2 = X_1 Y_2 + X_2 Y_1 \text{ olur. } (k=1)$$

İsbat:

R, reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+) toplama işleminin özellikleri nedeni ile (R^n, τ) ikilisinin bir Abel gurubu olduğu açıktır.

(T) işlemi (i) değişimlidir; (ii) birleşimlidir; (iii) etkisiz (birim) elemanı ($e=0,0,\dots,0$) vardır; (iv) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ elemanının $(-X_1, -X_2, \dots, -X_n)$ ters elemanı mevcuttur.

$(R^n, \perp)$ ikilisi, birleşimli, dağılımlı, birim elemanlı bir gruptur:

(1) işlemi birleşimlidir.

$$[(X_1, X_2, \dots, X_n) \perp (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] \perp (U_1, U_2, \dots, U_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n) \perp [(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \perp (U_1, U_2, \dots, U_n)] \text{ olduğu gerçektir.}$$

$(X_1, X_2, \dots, X_n) \perp (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ olsun. $(\bar{1}_{r=s})$ alternatif dikkate alınmayarak, $Z_{k+1} = \sum_{r=1}^n X_r \cdot Y_s \mid \begin{matrix} r+s=b.n+k \\ k=0,1,\dots,n-1 \end{matrix}$ tanımı yerine

$$\begin{pmatrix} Y_{n-1} & Y_{n-2} & \dots & Y_1 & Y_n \\ Y_n & Y_{n-1} & \dots & Y_2 & Y_1 \\ Y_1 & Y_n & \dots & Y_3 & Y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n-2} & Y_{n-3} & \dots & Y_n & Y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_1 & X_n \\ X_n & X_{n-1} & \dots & X_2 & X_1 \\ X_1 & X_n & \dots & X_3 & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-2} & X_{n-3} & \dots & X_n & X_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

ikame edilebildiği gözönüne alındığında

$$(1) (V_1, V_2, \dots, V_n) \perp (U_1, U_2, \dots, U_n) = \begin{pmatrix} U_{n-1} & U_{n-2} & \dots & U_1 & U_n \\ U_n & U_{n-1} & \dots & U_2 & U_1 \\ U_1 & U_n & \dots & U_3 & U_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n-2} & U_{n-3} & \dots & U_n & U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_1 & X_n \\ X_n & X_{n-1} & \dots & X_2 & X_1 \\ X_1 & X_n & \dots & X_3 & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-2} & X_{n-3} & \dots & X_n & X_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

ve $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \perp (U_1, U_2, \dots, U_n) = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ denir ise:

$$(2) (X_1, X_2, \dots, X_n) \perp (W_1, W_2, \dots, W_n) = \begin{pmatrix} X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_1 & X_n \\ X_n & X_{n-1} & \dots & X_2 & X_1 \\ X_1 & X_n & \dots & X_3 & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-2} & X_{n-3} & \dots & X_n & X_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & U_{n-2} & \dots & U_1 & U_n \\ U_n & U_{n-1} & \dots & U_2 & U_1 \\ U_1 & U_n & \dots & U_3 & U_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n-2} & U_{n-3} & \dots & U_n & U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

(1) ve (2) deki matris çarpımlarının yapıları itibarı ile değişimli oldukları dikkate alındığında (1) işleminin birleşimliliği isbatlanmış olur. (vi) (1) işleminin etkisiz (birim) elemanı $= (0, 0, \dots, 1, 0)$ dir.

(vii) (1) işleminde, uygun elemanların ters elemanları vardır.

$\begin{pmatrix} Y_{n-2} & Y_{n-3} & \dots & Y_n & Y_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan farklı olması halinde

7

2.İKİNCİ KISIM

.2- R^2 DE ÖZEL HALKA VE CİSİMLER

TANIM: 2.5-(Φ) KOMPLEKS HALKA

(Teorem 1.3.1) de $n=2$ için $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $T, \perp$ işlemleri:

$$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(1) (X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (Z_1, Z_2) = Z_{k+1} = \sum_{r=1}^2 \binom{-1}{r=s} X_r \cdot Y_s \quad \left| \begin{array}{l} r+s=2, b+k \\ k+0, 1 \text{ olarak} \end{array} \right.$$

ve daha açık bir şekilde

$Z_1 = X_1 Y_1 - X_2 Y_2$; $Z_2 = X_1 Y_2 + X_2 Y_1$ ile tanımlanan R^2 yada Φ ile gösterilen cümleye KOMPLEKS HALKA; $\xi = (1, 0)$ elemanına $(R^2, T, \perp)$ üçlüsünün (1) işlemine göre etkisiz (birim) elemanı $i = (0, 1)$; $(0, 1) \cdot (0, 1) = i \perp i = i^2 = -(1, 0) = -\xi$ olan (i) elemanına kompleks birim, yada ilerde açıklanacağı üzere halkanın kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

TEOREM: 2.5.2

Φ kompleks halkası bir cisimdir.

İsbat:

Tanım: 2.5'e göre (R^2, T) bir Abel gurubudur; ve etkisiz elemanı $e = (0, 0)$ dır. $(R^2, \perp)$ nin birleşimli, (1) işleminin (T) üzerine dağılımlı ve $\xi = (1, 0)$ birim elemanlı; o nedenle her elemanın tersinin bulunduğu, sıfır böleni elemanları ihtiva etmeyen bir gurup olacağı (Tanım 2.5) den kolayca anlaşılır.

$(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (1, 0)$ da (X_1, X_2) 'nin (Y_1, Y_2) ters elemanı

$$(Y_1, Y_2) = \left[X_1 / (X_1^2 + X_2^2), -X_2 / (X_1^2 + X_2^2) \right] \text{dir.}$$

TANIM: 2.6- C KOMPLEKS SAYILAR CÜMLESI

$X_1, X_2 \in R$, ve i ; $i \cdot i = i^2 = -1$ özge bir çarpan olarak R nin $(+), (.)$ işlemlerinin komunduğu, $(X_1 + X_2, i)$ yapısındaki sayılara kompleks sayı; ve bunların cümlesine de (C) kompleks sayılar cümlesi denir.

$X_1 + X_2 i, Y_1 + Y_2 i \in C$ ise bu elemanlar arası $(+), (.)$ işlemi:

$$(X_1+X_2)' + (Y_1+Y_2)' = (X_1+Y_1)' + (X_2+Y_2)'$$

$$(X_1+X_2) \cdot (Y_1+Y_2) = (X_1Y_1 - X_2Y_2) + (X_1Y_2 + X_2Y_1)' \text{ olur.}$$

TEOREM: 2.6.3

Φ kompleks cismi ile, C kompleks sayılar cümlesi $(T), (\perp)$; ve $(+), (\cdot)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat

$$(X_1, X_2) \in \Phi, X_1+X_2' \in C; (X_1, X_2) \rightarrow (X_1+X_2)'$$

$(Y_1, Y_2) \in \Phi, Y_1+Y_2' \in C; (Y_1, Y_2) \rightarrow (Y_1+Y_2)'$ olsun: $(T), (+)$ işlemleri için $(T): (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2)$

$$(+): (X_1+X_2)' + (Y_1+Y_2)' = (X_1+Y_1)' + (X_2+Y_2)' \in C$$

$$(X_1+Y_1, X_2+Y_2) \rightarrow (X_1+Y_1)' + (X_2+Y_2)' \text{ ve } (\perp), (\cdot) \text{ işlemleri için}$$

$$(\perp): (X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (X_1Y_1 - X_2Y_2, X_1Y_2 + X_2Y_1) \in \Phi$$

$$(\cdot): (X_1+X_2)' \cdot (Y_1+Y_2)' = (X_1Y_1 - X_2Y_2) + (X_1Y_2 + X_2Y_1)' \in C$$

$$(X_1Y_1 - X_2Y_2, X_1Y_2 + X_2Y_1) \rightarrow (X_1Y_1 - X_2Y_2)' + (X_1Y_2 + X_2Y_1)' \in C \text{ olur.}$$

TANIM: 2.7- (S) FAKTÖRLÜ HALKA

(Teorem: 1.3.1) de $n=2$ için $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $T, \perp$ iç işlemler

$$(T): (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$$

$$(\perp): (X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (Z_1, Z_2) = Z_{k+1} = \sum_{r=1}^2 \binom{-1}{r=s} X_r \cdot Y_s \quad \left| \begin{array}{l} r+s=2b+k \\ k=0,1 \text{ olarak} \end{array} \right.$$

ve daha açık bir şekilde

$Z_1 = X_1Y_1 + X_2Y_2, Z_2 = X_1Y_2 - X_2Y_1$ ile tanımlanan R^2 , yada Φ ile gösterilen cümleye (S) FAKTÖRLÜ HALKA; $\hat{e} = (1, 0)$ elemanına halkanın etkisiz (birim) elemanı; $s = (0, 1); (0, 1)\perp(0, 1) = s \cdot s = s^2 = (1, 0) = \hat{e}$ olan (s) elemanına faktör birim, yada ilerde açıklanacağı üzere halkanın kinematik (transformasyon) faktörü denecektir.

Halkanın sıfır böleni olan elemanları vardır:

$$(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (1, 0) \text{ da } (X_1, X_2) \text{ nin } (Y_1, Y_2) \text{ ters elemanı}$$

$(Y_1, Y_2) = (X_1/(X_1^2 - X_2^2), X_2/(X_1^2 - X_2^2)); X_1 = X_2$ olan (X_1, X_2) elemanlarının ters elemanları mevcut olmayacaktır.

TANIM: 2.8-S,(s) FAKTÖRLÜ SAYILAR CÜMLESİ

$X_1, X_2 \in R$ ve $s, s.s=s^2=1$, bir çarpan olarak R nin $(+), (.)$ işlemlerinin korunduğu (X_1+X_2s) yapısındaki sayılara, (s) faktörlü sayılar ve bunların cümlesine s faktörlü sayılar cümlesi denecek S , ile gösterilecektir. $X_1+X_2.s \in S, Y_1+Y_2.s \in S$ ise $(+), (.)$ işlemleri

$(+): (X_1+X_2s)+(Y_1+Y_2s)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)s$ ve

$(.): (X_1+X_2s).(Y_1+Y_2s)=(X_1Y_1+X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)s$ olacaktır.

TEOREM: 2.8.4

$\$, (s)$ faktörlü halka ile $S, (s)$ faktörlü sayılar cümlesi $T, 1$ ve $(+), (.)$ işlemlerine göre izomorftur. $(\$ \rightarrow S)$

İsbat: (Bak: TEOREM 2.6.3)

TANIM: 2.9- DUAL SAYILAR HALKASI

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ olan ve $(T), (1)$ iç işlemleri

$(T): (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2)=(X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$

$(1) (X_1, X_2)1(Y_1, Y_2)=(X_1Y_1, X_1Y_2+X_2Y_1) \in R^2$ ile tanımlanan R^2 cümlesi birimli değişimli bir halkadır; buna dual halka denir.

(R^2, T) ikilisinin bir Abel gurubu ve $(R^2, 1)$ ikilisinin (1) işlemi göre bir gurub olduğu kolayca gösterilebilir. (T) nin etkisiz (birim-sıfır) elemanı $e=(0,0)$; (1) nin etkisiz (birim) elemanı $\xi=(1,0)$ dir.

$(X_1, X_2)1(Y_1, Y_2)=(X_1Y_1, X_1Y_2+X_2Y_1)=(1,0)$ da ters eleman $(Y_1, Y_2)=(1/X_1, -X_2/X_1^2)$ dir; $(0,1)=\xi, (0,1)(0,1)=\xi.\xi=\xi^2=(0,0)$ olan (ξ) elemanına dual birim veya dual halkanın ilerde açıklanacağı üzere halkanın kinematik (transformasyon) faktörü deneyecektir.

TANIM: 2.10-(D) DUAL SAYILAR CÜMLESİ

$X_1, X_2 \in R$ ve $\xi, \xi.\xi=\xi^2=0$ bir çarpan olarak $(+), (.)$ işlemlerinin korunduğu $(X_1+X_2\xi)$ yapısındaki sayılara, dual sayı ve bunların cümlesine de (D) dual sayılar cümlesi deneyecektir.

$X_1+X_2\xi, Y_1+Y_2\xi \in D$ ise, bu elemanlar arası $(+), (.)$ işlemleri

$$(+) : (X_1 + X_2)g + (Y_1 + Y_2)g = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)g \in D$$

$$(\cdot) : (X_1 + X_2)g \cdot (Y_1 + Y_2)g = X_1 Y_1 + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1)g \in D \text{ dir.}$$

TEOREM: 2.10.5

$\mathbb{D}$, dual sayılar halkası ile D dual sayılar cümlesi, T, $\perp$ ve (+), ($\cdot$) işlemlerine göre izomorftur. ($\mathbb{D} \rightarrow D$)

İsbat: (Bak teorem 2.6.3)

TANIM: 2.11- HELİSEL CÜMLE-HELİSEL CİSİM

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve (T), ($\perp$) iç işlemleri

$$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in \mathbb{R}^2$$

($\perp$) $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X_1 Y_1 - X_2 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2)$ ile tanımlanan $(\mathbb{R}^2, T, \perp)$ üçlüsüne $\mathbb{H}$, HELİSEL HALKA VEYA HELİSEL CİSİM deneyecektir.

TEOREM: 2.11.6

$\mathbb{H}$ 'yada (TANIM 2.11) deki $(\mathbb{R}^2, T, \perp)$ üçlüsü bir cisimdir.

İsbat:

Reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen (+), ($\cdot$) işlemlerin özelliği nedeni ile, $(\mathbb{R}^2, T)$ 'nin bir Abel gurubu, $(\mathbb{R}^2, \perp)$ ikilisininde değişimli birimli bir gurup olacağı açıktır. (T) işleminin etkisiz (sıfır) elemanı $e = (0, 0)$; ($\perp$) işleminin etkisiz (birim) elemanı $\xi = (1, 0)$ olup; $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X_1 Y_1 - X_2 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2) = (1, 0)$ da (X_1, X_2) nin (Y_1, Y_2) ters elemanı

$(Y_1, Y_2) = ((X_1 + X_2) / (X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2), -X_2 / (X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2))$ dir; $(\mathbb{R}^2, \perp)$ sıfır elemanını içermez; zira

$$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X_1 Y_1 - X_2 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2) = (0, 0) \text{ da}$$

$X_1 Y_1 - X_2 Y_2 = 0$, $X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2 = 0$ bağıntılarını sağlayan $(Y_1, Y_2) = (0, 0)$ veya $(X_1, X_2) = (0, 0)$ dan başka bir eleman bulunamaz.

$(0, 1) = h$; $(0, 1) \perp (0, 1) = h \cdot h = h^2 = (-1, 1) = hT(-\xi)$ olan h elemanına helisel cismin faktörü veya helisel cismin kinematik (transformasyon) faktörü diyeceğiz.

TANIM: 2.12- H, HELİSEL SAYILAR CÜMLESI

$X_1, X_2 \in R$ ve $h \notin R$, $h^2 = h - 1$ bir çarpan olarak R nin $(+), (.)$ işlemleri nin korunduğu $(X_1 + X_2 h)$ yapısındaki sayılara helisel sayılar ve bunla-
rın cümlesine de H , helisel sayılar cümlesi deneyecektir.

$X_1 + X_2 h, Y_1 + Y_2 h \in H$, ise elemanlar arası $(+), (.)$ işlemleri:

$$(+)(X_1 + X_2 h) + (Y_1 + Y_2 h) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)h \in H$$

$$(.)(X_1 + X_2 h) \cdot (Y_1 + Y_2 h) = (X_1 Y_1 - X_2 Y_2) + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1 + X_2 Y_2)h \in H \text{ olur.}$$

TEOREM: 2.12.7

$\mathbb{H}$, HELİSEL cismi ile, H , helisel sayılar cümlesi $(T), (1)$ ve $(+), (.)$ işlemlerine göre izomorftur. $(\mathbb{H} \rightarrow H)$

İsbat: (Bak: TEOREM: 2.6.3)

TANIM: 2.13- $\mathbb{H}'$, HOMOTETİK CÜMLE, HOMOTETİK HALKA

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ olan ve $(T), (1)$ işlemleri

$$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(1) (X_1, X_2)1(Y_1, Y_2) = (X_1 Y_1 + X_2 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1 - X_2 Y_2) \in R^2 \text{ ile tanımlanan}$$

$(R^2, T, 1)$ üçlüsüne $\mathbb{H}'$ HOMOTETİK HALKA deneyecektir.

TEOREM: 2.13.8

$\mathbb{H}'$ homotetik cümlesi bir halkadır.

İsbat:

Reel sayılar cümlesinde bilindiği kabul edilen $(+), (.)$ işlemleri-
nin özellikleri nedeni ile, (R^2, T) ikilisinin Abel gurubu; $(R^2, 1)$ iki-
lisininde değişimli birimli bir gurup olacağı kolayca doğrulanabilir.

(T) işleminin etkisiz (sıfır) elemanı $e = (0, 0)$, 1 işleminin etkisiz
(birim) elemanı $1 = (1, 0)$ olup

$(X_1, X_2)1(Y_1, Y_2) = (X_1 Y_1 + X_2 Y_2, X_1 Y_2 + X_2 Y_1 - X_2 Y_2) = (1, 0)$ da (X_1, X_2) nin,
 (Y_1, Y_2) ters elemanı $(Y_1, Y_2) = ((X_1 - X_2) / (X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_2), -X_2 / (X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_2))$ di
 $X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_2 = 0$ 'ı sağlayan (X_1, X_2) ikililerinin ters elemanı olmayacaktır.

TANIM: 2.14-H', HOMOTETİK SAYI CÜMLESI

$X_1, X_2 \in R$ ve $h', h'^2 = 1-h'$ bir çarpan olarak (R) nin $(+), (.)$ işlemlerinin korunduğu, (X_1+X_2h') yapısındaki sayılara, homotetik sayı ve bunların cümlesine H' homotetik cümlesi deneyecektir.

$X_1+X_2h', Y_1+Y_2h' \in H'$ ise bu elemanlar arası $(+), (.)$ işlemleri
 $(+)(X_1+X_2h')+(Y_1+Y_2h')=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)h' \in H'$
 $(.)(X_1+X_2h').(Y_1+Y_2h')=(X_1Y_1+X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)h' \in H'$ olur.

TEOREM: 2.14.9

H' homotetik halka ile H' homotetik sayılar cümlesi $(T), (I)$ ve $(+), (.)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat: (Bak: TEOREM: 2.6.3)

TANIM: 2.15- R^2 DE $\mathcal{G}_1(a,b)$ GEN HALKA-CİSİM SINIFI VE

(1) $\mathcal{G}_1(a,b)$ GEN SAYILAR CÜMLELERİ SINIFI

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $a^2+b^2 \neq 0$, $a, b \in R$ önceden seçilmiş parametreler olarak, $(T), (I)$ iç işlemleri

$(T): (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$

$(I): (X_1, X_2)I(Y_1, Y_2) = ((a+b)X_1Y_1 - bX_2Y_2, (a+b)(X_1Y_2+X_2Y_1)) \in R^2$ ile

tanımlanan (R^2, T, I) üçlüsüne yada $\mathcal{G}_1(a,b)$ ile gösterilecek halkalar sınıfına R^2 DE GEN HALKA-CİSİM SINIFI deneyecektir.

TEOREM: 2.15.10

$\mathcal{G}_1(a,b)$ GEN CÜMLELER sınıfı a, b ($a^2+b^2 \neq 0$) reel parametreleri ne olursa olsun bir halka; ve a, b nin koşullu değerlerine göre bir cisimdir.

İsbat:

(T) birinci işlem için halka aksiyomları, değişimlilik, birleşimlilik, nitelikleri, etkisiz (sıfır) eleman $e = (0,0)$; ve ters eleman varlığı; (I) ikinci işlem için halka aksiyomları, birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık özellikleri etkisiz (birim) elemanın

$\hat{z} = (1/(a\bar{b}), 0); (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (1/(a\bar{b}), 0)$ da, (X_1, X_2) nin $(Y_1, Y_2) = [X_1/(a\bar{b})^2 X_1^2 + b(a\bar{b})X_2^2, -X_2^2, -X_2/(a\bar{b})^2 X_1^2 + b(a\bar{b})X_2^2]$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$\mathcal{G} = (0, 1/(a\bar{b}))$, $\mathcal{G} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{G}^2 = (-b/(a\bar{b})^2, 0)$ olan $(\mathcal{G})$ elemanına R^2 DE HALKA-CİSİM SINIFININ GEN BİRİMİ adı verilecektir.

$b(a\bar{b}) > 0$ olması halinde sınıf, cisimler sınıfıdır.

(ii) $\mathcal{G}_1$ GEN SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2 \in R$ ve $a, b \in R$, $a^2 + b^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler ve $\mathcal{G}, \mathcal{G} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{G}^2 = -b/(a\bar{b})$ bir çarpan olarak R nin $(+), (.)$ işlemlerinin korun-
duğu, $\mathcal{G}_1 = (a\bar{b})(X_1 + X_2 \mathcal{G})$ yapısında sayılara GEN SAYI ve bunların cümle-
sine de $(\mathcal{G}_1)$ GEN SAYI CÜMLELERİ SINIFI denecektir.

$(a\bar{b})(X_1 + X_2 \mathcal{G}), (a\bar{b})(Y_1 + Y_2 \mathcal{G}) \in \mathcal{G}_1$ ise, $(+), (.)$ işlemleri

$(+)$ $(a\bar{b})(X_1 + X_2 \mathcal{G}) + (a\bar{b})(Y_1 + Y_2 \mathcal{G}) = (a\bar{b}) [(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) \mathcal{G}]$

$(.)$ $[(a\bar{b})(X_1 + X_2 \mathcal{G})] \cdot [(a\bar{b})(Y_1 + Y_2 \mathcal{G})] =$

$(a\bar{b}) [(a\bar{b})X_1Y_1 - bX_2Y_2 + (a\bar{b})(X_1Y_2 + X_2Y_1)\mathcal{G}]$ olacaktır.

TEOREM: 2.15.11

$\mathcal{G}(a, b)$ gen halka cisim sınıfı ile $\mathcal{G}_1(a, b)$ gen sayı cümleleri sınıfı $T, \perp$ ve $(+), (.)$ işlemlerine göre izomorftur. $\mathcal{G}(a, b) \rightarrow \mathcal{G}_1(a, b)$

İsbat: (Bak TEOREM: 2.6.3)

TANIM: 2.16- R^2 DE ÖZEL GEN-HALKA CİSİM VE ÖZEL GEN SAYI CÜMLELERİ

(i) KOMPLEKS CİSİM:

$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [(a\bar{b})X_1Y_1 - bX_2Y_2, (a\bar{b})(X_1Y_2 + X_2Y_1)]$ ikinci işlemin $a=0, b=1$ olarak tanımlanan $\mathcal{G}(0, 1)$ halkasına $(a(a\bar{b}) > 0)$ kompleks cisim;

(ii) KOMPLEKS SAYI CÜMLEİ:

$(X_1, X_2) \rightarrow (a\bar{b})(X_1 + X_2 \mathcal{G})$ nin $a=0, b=1$ için tanımladığı

$\mathcal{G}^2 = -b/(a\bar{b}); \mathcal{G}^2 = -1, \mathcal{G} = i$; $\mathcal{G}_1(0, 1)$ cümlesine kompleks sayı cümlesi

(iii) DUAL SAYILAR HALKASI

$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [(a\bar{b})X_1Y_1 - bX_2Y_2, (a\bar{b})(X_1Y_2 + X_2Y_1)]$ ikinci işleminin $a=1, b=0$ koşulu için belirlediği $\mathcal{G}(1, 0)$ halkasına dual sayılar;

(IV) DUAL SAYILAR CÜMLESTİ

$(X_1, X_2) \rightarrow (a+b)(X_1+X_2g)$ nin $a=1, b=0$ için tanımladığı

$g^2=-b/(a+b), g^2=0, g \neq 3; G(1,0)$ cümlesine dual sayılar cümlesi

(V) (S) FAKTÖRLÜ HALKA

R^2 de $G(a,b)$ GEN HALKA CİSİM SINIFI (1) ikinci işleminin $a=0, b=-1$ için tanımladığı $G(0,-1)$ halkasına (s) faktörlü halka;

(VI) (S) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLESTİ

$(X_1, X_2) \rightarrow (a-b)(X_1+X_2g)$ nin $a=0, b=-1$ için tanımladığı

$g^2=-b/(a-b), g^2=1, g=s; G(0,1)$ cümlesine (s) faktörlü sayı cümlesi

denir;

3. ÜÇÜNCÜ KISIM

.3-(i),(s),(g),(g) KİNEMATİK FAKTÖRLER ETKİNLİKLERİNİN TANIMI

TANIM: 3.17- KİNEMATİK VE HALKA CİSİM KİNEMATİĞİ

Nokta veya nokta sisteminin (zamana bağlı olarak) , bazı matematik tanım (ya da kural) veya etkenlerle yer değiştirmelerinin (hareketlerinin) inceleme yöntemlerine KİNEMATİK denir. Kütle ve kuvvet kavramlarına yer vermemesi nedeni ile mekanikten ayrılır. Kinematığı geometrinin mekaniği olarak da tanımlamak mümkündür.

Cebirsel (ya da matematiksel) yapılarla, geometrik kavramlar, tanım veya şekiller arasında bir karşılık (tekabül) kurulabildiğinde, bazı cebirsel işlemlerin, geometride yer değiştirmeler olarak yorumlanabildiği bilinmektedir.

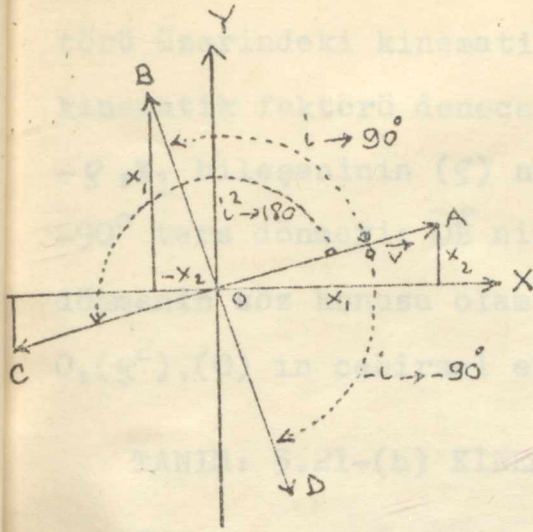
Biz burada yalnızca R^2 de halka, cisim veya matematik yapılar ve bunlar için geçerli iç işlemler ile yönlendirilmiş doğru, nokta, nokta sistemleri (eğriler) ve bunların bazı hareketleri arasında konumuzun amacına yeterli bir karşılık bulunabileceğini yorumlayacağız ve o nedenle buna R^2 de HALKA-CİSİM KİNEMATİĞİ diyeceğiz.

TANIM: 3.18- KİNEMATİK FAKTÖR

Bir halka, cisim elemanı karşılığı geometrik bir nesnenin, halka cisim işlemi sonucuna değişik bir durumu karşılık bulunabiliyorsa, işlem elemanlarından birine kinematik faktör (veya kinematik operatör) geometrik nesnenin hareketine de faktörün etkisi, denecektir.

TANIM: 3.19-(i) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ

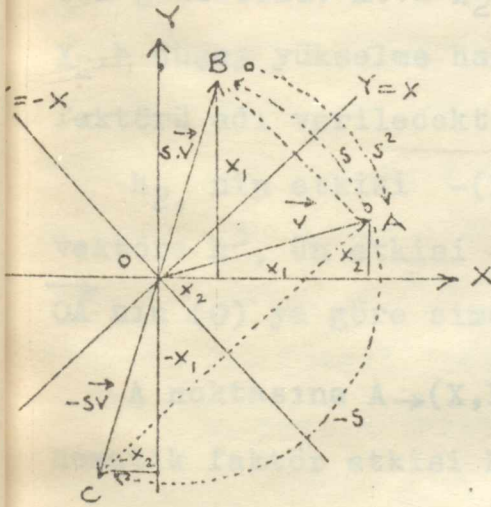
$\vec{v} = X_1 + X_2 i$, kompleks sayısının, ya da, geometrik gösterimi $\vec{OA} = \vec{v} = X_1 + X_2 i$ vektörünün, (i) nin $i \cdot \vec{v} = i(X_1 + X_2 i) = -X_2 + X_1 i$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik gösterimi $i \cdot \vec{v} = -X_2 + X_1 i = \vec{OB}$ vektörü nedeni ile (90°)lik dönme hareketine (i)nin $\vec{v}$ vektörü üzerindeki kinematik etkisi



(şekil:3.1)

ve (i) ye de kompleks sayılar cisminin kinematik faktörü denecektir. $i \rightarrow 90^\circ$ dönme, $(i)^2 \rightarrow 180^\circ$ dönme, $-i \rightarrow -90^\circ$ ters yönde dönmeye karşılık olacaktır. (şekil 3.1)

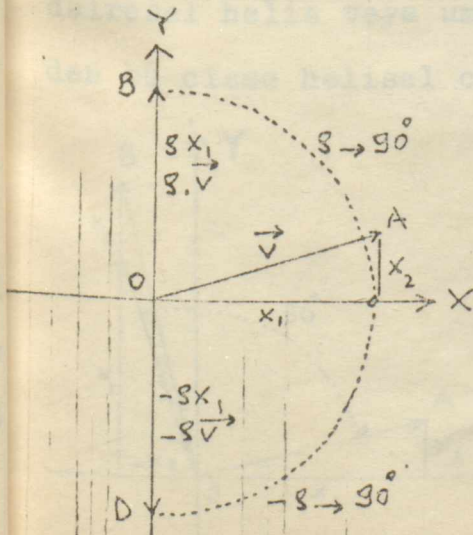
TANIM: 3.19-(s) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ



(şekil 3.2)

$\vec{v} = X_1 + X_2 s$, (s) faktörlü sayının, ya da geometrik gösterimi $\vec{OA} = \vec{v} = X_1 + X_2 s$ vektörünün (s)nin, $s \cdot \vec{v} = s(X_1 + X_2 s) = X_2 + X_1 s$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik gösterimi $s \cdot \vec{v} = X_2 + X_1 s = \vec{OB}$ vektörü nedeni ile $Y=X$ açılı ortayına göre simetri hareketine, (s) nin $\vec{v}$ vektörü üzerindeki kinematik etkisi ve (s) ye de s faktörlü sayılar halkasının kinematik faktörü denecektir. s , $Y=X$ açılı ortayına göre A dan B ye simetri hareketine; $-s$, $Y=-X$ açılı ortayına göre $\vec{OA}$ nı simetri hareketine karşılık olur. (şekil:3.2)

TANIM: 3.20- (g) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ



(şekil:3.3)

$\vec{v} = X_1 + X_2 g$ dual sayısının, ya da geometrik gösterimi $\vec{OA} = \vec{v} = X_1 + X_2 g$ vektörünün (g) nun $g \cdot \vec{v} = g(X_1 + X_2 g) = X_2 + X_1 g$ cebirsel işlem sonucu karşılık geometrik gösterimi $g \cdot \vec{v} = X_2 + X_1 g = \vec{OB}$ vektörü nedeni ile, X_1 bileşeninin 90° döndürülmek sureti ile $\vec{OA}$ vektörünün $\vec{OB}$ vektörüne dönüşmesi ne neden olan dönme hareketine (g) nun $\vec{v}$ vek-

törü üzerindeki kinematik etkisi ve (ζ) ya da dual sayılar halkasının kinematik faktörü deneyecektir.

$-\zeta, X_1$ bileşeninin (ζ) nun tersi yönündeki $-X_1\zeta \rightarrow \vec{OD}$ vektörünü veren -90° ters dönmeyi; $\vec{OB}$ nin OX üzerindeki bileşeni sıfır olduğundan, dönmenin söz konusu olamayacağı nedeni ile $\zeta \cdot \vec{v} \rightarrow X_1\zeta = \vec{OB}, \zeta \cdot \vec{OB} = \zeta^2 \cdot \vec{OA} = 0, (\zeta^2), (0)$ in cebirsel etkinliğine karşılık olur. (şekil 3.3)

TANIM: 3.21-(h) KİNEMATİK FAKTÖRÜ VE ETKİSİ

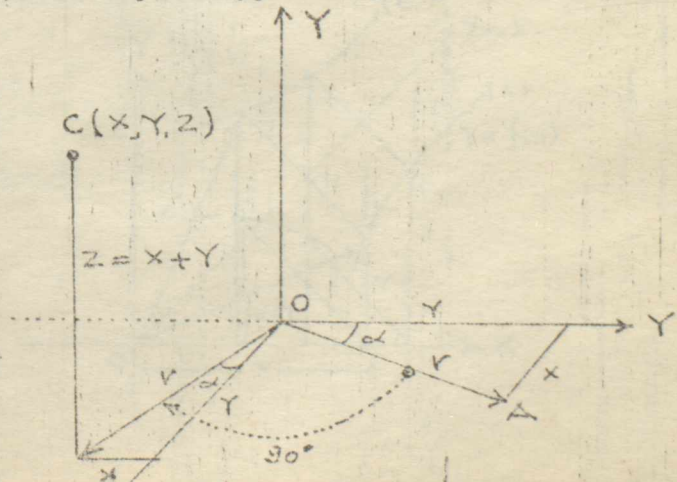
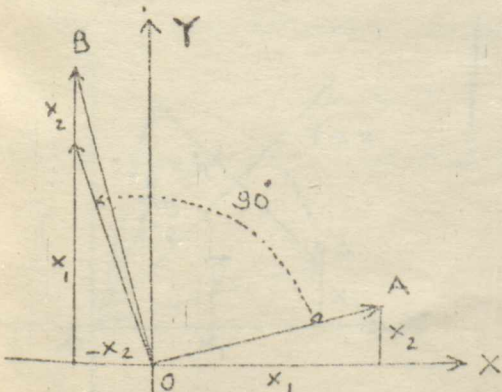
$\vec{v} = X_1 + X_2 \cdot h$ helisel sayısının, yada geometrik gösterimi $\vec{OA} = \vec{v} = X_1 + X_2 h$ vektörünün (veya A noktasının), (h) nin

$h \cdot \vec{v} = h(X_1 + X_2 h) = -X_2 + (X_1 + X_2)h$ cebirsel işlem sonucu, karşılık geometrik gösterimi: $h \cdot \vec{v} = -X_2 + (X_1 + X_2)h = \vec{OB}$ vektörü nedeni ile 90° lik dönme ve $X_2 \cdot h$ düşey yükselme hareketine (h) nin, $\vec{v}$ vektörü üzerindeki kinematik faktörü adı verilecektir. (şekil 3.4)

h_2 , nin etkisi $-(X_1 + X_2) + X \cdot h$ helisel sayısının geometrik gösterimi vektöre h^3 , ün etkisi $-(X_1 + X_2 h)$ helisel sayısının geometrik gösterimi $\vec{OA}$ nin (O) ya göre simetriği vektöre karşılık olacaktır.

A noktasına $A \rightarrow (X, Y)$ veya $\vec{OA} = X + Yh$ karşılık tutulduğunda, (h) kinematik faktör etkisi $h \cdot \vec{OA} \rightarrow h(X + Yh) = -Y + (X + Y)h$ sonucuna (C) noktası karşılık tutulursa $C(X, Y, Z)$ olarak

$X = -r \sin \alpha$, $Y = r \cos \alpha$, $Z = r(\sin \alpha + \cos \alpha) = r\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ bağıntıları nedeni ile, A nın (r) yarıçaplı bir daire, veya belirli bir eğri çizmesi halinde, (C) noktasının bir silindir, ya da bir yüzey üzerine dairesel helis veya umumi bir helis çizmesi söz konusu edilebileceğinden bu cisme helisel cümle adı verilmiştir. (şekil:3.5)



(şekil:3.4)

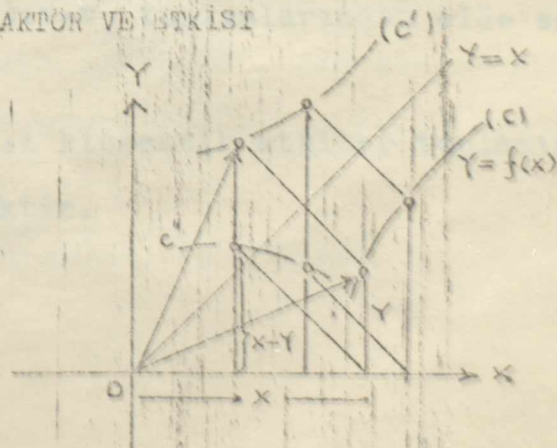
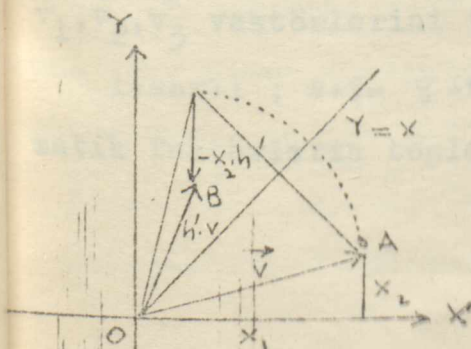
(şekil:3.5)

TANIM: 3.22- (h') HOMOTETİK FAKTÖR VE ETKİSİ

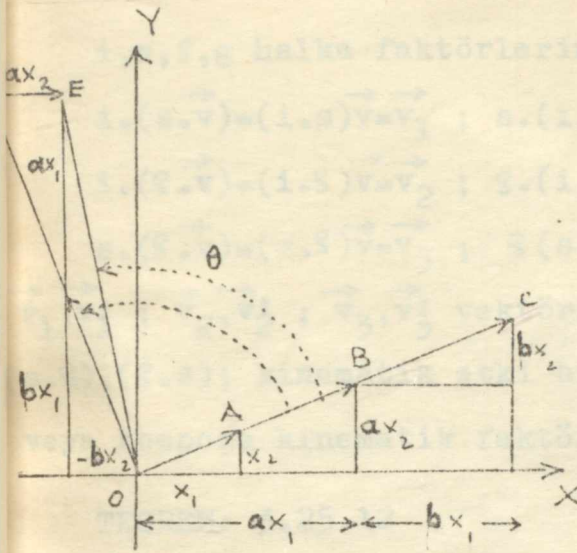
$\vec{v} = X_1 + X_2 h'$, homotetik sayısının, ya da geometrik gösterimi $\vec{OA} = \vec{v} = (X_1 + X_2 h')$ vektörünün, (h')'nün, $h' \cdot \vec{v} = h' \cdot (X_1 + X_2 h') = X_2 \oplus (X_1 - X_2) h'$ cebirsel etkimesi sonucu, karşılık gösterimi $h' \vec{v} = X_2 + (X_1 - X_2) h' = \vec{OB}$ vektörü nedeni ile, A noktasının $y=x$ açılı ortayına göre simetrik dönme ve $-X_2 \cdot h'$ kadar düşey, alçalma hareketine h' 'nün $\vec{v}$ üzerindeki kinematik etkisi ve (h') ne de homotetik halkanın, kinematik faktörü. denecektir. (şekil 3.6)

h' , kinematik faktör etkimesinin R^2 de geometrik yorumu yapılmak istenirse, (şekil 3.7) $y=f(x)$ fonksiyonunun temsil ettiği (C) eğrisinin önce $y=x$ açılı ortayı doğrusuna göre (C') simetrisi alınmakta, ve daha daha sonra, (C') eğrisine bazı karakteristikleri bozmayan $Y=x-y$ dönüşümü uygulanmış olmaktadır. Belirli koşullarla (C'') eğrisinin (C)'nin bir homotetisi olması olasıdır. (şekil:3.7)

TANIM : 3.20 - (h) HOMOTETİK FAKTÖR VE ETKİSİ



TANIM: 3.23-(g) KİNEMATİK FAKTÖR VE ETKİSİ



(şekil: 3.8)

$\vec{v} = (a+b)(X_1 + X_2 g)$ gen sayısının, geometrik gösterimi: $\vec{OA} = X_1 + X_2 g$, $\vec{OB} = a(X_1 + X_2 g)$
 $\vec{BC} = b(X_1 + X_2 g)$; $\vec{v} = \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$
 $\vec{v} = \vec{OC} = a(X_1 + X_2 g) + b(X_1 + X_2 g) = (a+b)(X_1 + X_2 g)$
 $\vec{v}$ vektörüne (g) nin
 $g \cdot \vec{v} = (a+b)(X_1 g + X_2 g^2)$
 $g \cdot \vec{v} = (a+b)X_1 g - bX_2 = b(-X_2 + gX_1) + aX_1 g =$
 $\vec{OP} + \vec{PE} = \vec{OD} + \vec{DE} = \vec{OE}$ vektörü nedeniyle $\vec{OC}$ 'nin 90° lik dönme ve aX_2 kadar yatay ilerleme veya $\vec{OB}$ 'nin 90° lik dönme ve aX_1 kadar düşey yükselme bileşik hareketine (g) nin

$\vec{v}$ üzerindeki kinematik etkisi ve (g) ye d

gen halka-cismin R^2 deki kinematik faktörü denecektir. Sonuçta (a) uygun seçilmek sureti ile, R^2 nin tüm vektörlerini belli bir θ açısı kadar döndürerek, $\vec{OE}$ vektörlerine dönüştürmek mümkün olur; yani (g) düzlemin belirli bir bölgesindeki vektörleri düzlemin belirli tek yönlü vektörlerine dönüştüren bir transformasyon olur.

TANIM: 3.24- R^2 DE KİNEMATİK FAKTÖRLERİN TOPLAMI

$i = g(0,1)$, $s = g(0,1)$, $\xi = g(1,0)$ halka faktörlerinin aynı bir $\vec{v}$ vektörüne $i \cdot \vec{v}$; $s \cdot \vec{v}$; $\xi \cdot \vec{v}$ kinematik etkileri sonucu vektörlerin

$$i \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v} = s \cdot \vec{v} + i \cdot \vec{v} = (i+s) \cdot \vec{v} = (s+i) \cdot \vec{v} = \vec{v}_1$$

$$s \cdot \vec{v} + \xi \cdot \vec{v} = \xi \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v} = (s+\xi) \cdot \vec{v} = (\xi+s) \cdot \vec{v} = \vec{v}_2$$

$$i \cdot \vec{v} + \xi \cdot \vec{v} = \xi \cdot \vec{v} + i \cdot \vec{v} = (i+\xi) \cdot \vec{v} = (\xi+i) \cdot \vec{v} = \vec{v}_3$$
 toplamlarından elde edilen

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vektörlerini veren

$i+s=s+i$; $s+\xi=\xi+s$; $i+\xi=\xi+i$ kinematik etkiler toplamına, kinematik faktörlerin toplamı denecektir.

TANIM: 3.25- KİNEMATİK FAKTÖRLER ÇARPIMI VEYA

KOMPOZE KİNEMATİK FAKTÖRLER

i, s, ξ, g halka faktörlerinin aynı bir $\vec{v}$ vektörüne ardarda

$$i.(s.\vec{v})=(i.s)\vec{v}=\vec{v}_1 ; s.(i.\vec{v})=(s.i).\vec{v}=\vec{v}_1$$

$$i.(\xi.\vec{v})=(i.\xi)\vec{v}=\vec{v}_2 ; \xi.(i.\vec{v})=(\xi.i).\vec{v}=\vec{v}_2$$

$$s.(\xi.\vec{v})=(s.\xi)\vec{v}=\vec{v}_3 ; \xi.(s.\vec{v})=(\xi.s).\vec{v}=\vec{v}_3 \text{ etkileri sonucu elde edilen}$$

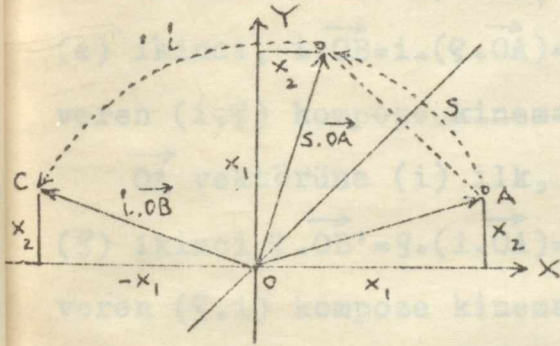
$\vec{v}_1, \vec{v}_1 ; \vec{v}_2, \vec{v}_2 ; \vec{v}_3, \vec{v}_3$ vektörlerini veren $(i.s), (s.i), (i.\xi), (\xi.i);$

$(s.\xi), (\xi.s);$ kinematik etki bileşimlerine kinematik faktörlerin çarpımı

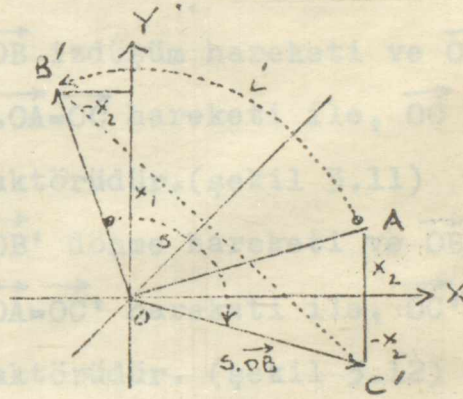
veya kompoze kinematik faktörler denecektir.

TEOREM: 3.25.12

$$(i.s)+(s.i)=0 \text{ dır.}$$



(şekil :3.9)



(şekil :3.10)

İsbat:

$\vec{OA}$ vektörüne (s) ilk, $s.\vec{OA}=\vec{OB}$, $y=x$ açılırtay doğrusuna göre simetri hareketi ve; $\vec{OB}$ vektörüne (i) ikinci, $i.\vec{OB}=i.(s.\vec{OA})=\vec{OC}$ hareketi ile $\vec{OC}$ vektörünü veren $(i.s)$ kompoze kinematik faktörüdür.

(şekil:3.9)

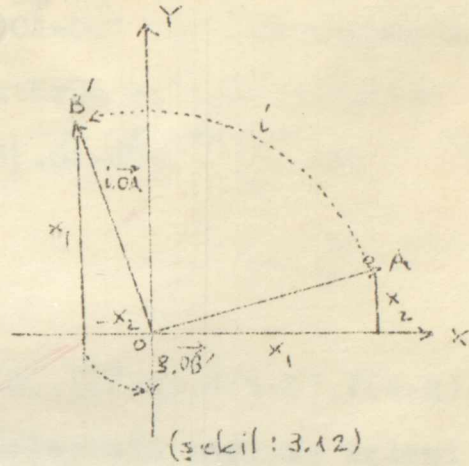
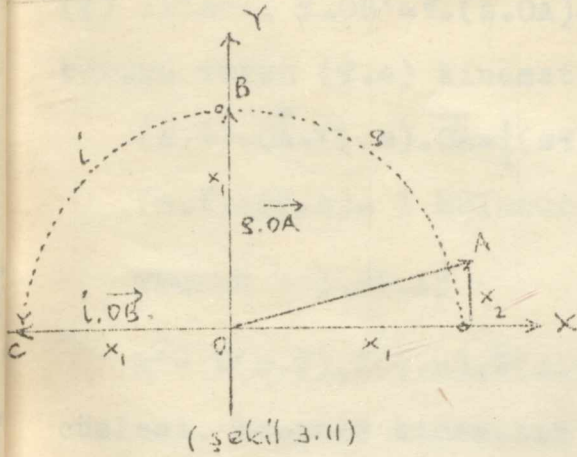
$\vec{OA}$ vektörüne ilk (i) , $i.\vec{OA}=\vec{OB'}$, 90° lik dönme hareketi ve $\vec{OB'}$ vektörüne (s) ikinci, $s.\vec{OB'}=s.(i.\vec{OA})=(s.i).\vec{OA}=\vec{OC'}$, $y=x$ açılırtay doğrusuna göre simetri hareketi ile $\vec{OC'}$ vektörünü veren $(s.i)$ kinematik faktörüdür. (şekil: 3.10)

$$(i.s).\vec{OA}+(s.i).\vec{OA}=[(is)+(si)].\vec{OA}=\vec{OC}+\vec{OC'}=0 \text{ buradan}$$

$$(i.s)+(s.i)=0 \text{ bulunur.}$$

TEOREM: 3.25.13

$(i.s) + (s.i) = -1$ dir.



İsbat:

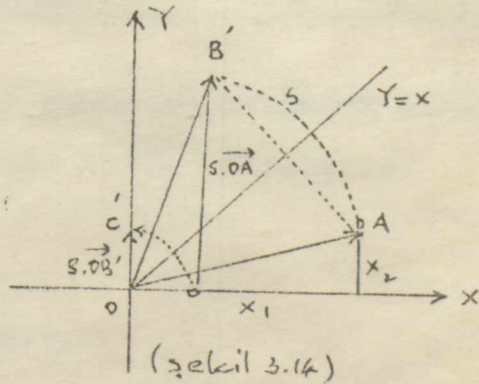
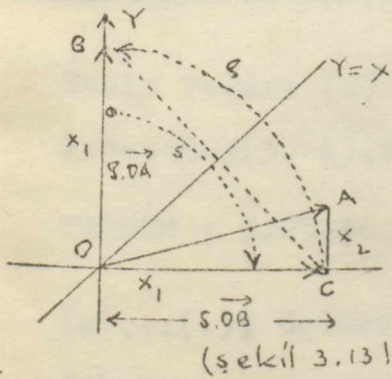
$\vec{OA}$ vektörüne (s) ilk, $s.\vec{OA} = \vec{OB}$ izdüşüm hareketi ve $\vec{OB}$ vektörüne (i) ikinci, $i.\vec{OB} = i.(s.\vec{OA}) = (i.s).\vec{OA} = \vec{OC}$ hareketi ile, $\vec{OC}$ vektörünü veren $(i.s)$ kompoze kinematik faktörüdür. (Şekil 3.11)

$\vec{OA}$ vektörüne (i) ilk, $i.\vec{OA} = \vec{OB'}$ dönme hareketi ve $\vec{OB'}$ vektörüne (s) ikinci $s.\vec{OB'} = s.(i.\vec{OA}) = (s.i).\vec{OA} = \vec{OC'}$ hareketi ile, $\vec{OC'}$ vektörünü veren $(s.i)$ kompoze kinematik faktörüdür. (Şekil 3.12)

$(i.s).OA + (s.i).OA = [(i.s) + (s.i)] . \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OC'} = -\vec{OA}$ nedeni ile $(i.s) + (s.i) = -1$ dir.

TEOREM: 3.25.14

$(s.s) + (s.s) = 1$ dir.



İsbat:

$\vec{OA}$ vektörüne (s) ilk, $s.\vec{OA} = \vec{OB}$ izdüşüm hareketi, ve $\vec{OB}$ vektörüne (s) ikinci, $s.\vec{OB} = s.(s.\vec{OA}) = (s.s).\vec{OA} = \vec{OC}$ simetri hareketi ile $\vec{OC}$ vek-

törünü veren (s, ξ) kompoze kinematik faktörüdür. (şekil 3.13)

$\vec{OA}$ vektörüne (s) ilk, $s \cdot \vec{OA} = \vec{OB'}$ simetri hareketi ve $\vec{OB'}$ vektörüne (ξ) ikinci, $\xi \cdot \vec{OB'} = \xi \cdot (s \cdot \vec{OA}) = (\xi \cdot s) \vec{OA} = \vec{OC'}$ izdüşüm hareketi ile $\vec{OC'}$ vektörünü veren $(\xi \cdot s)$ kinematik faktörüdür. (şekil: 3.14)

$$(s \cdot \xi) \cdot \vec{OA} + (\xi \cdot s) \cdot \vec{OA} = [(s \cdot \xi) + (\xi \cdot s)] \cdot \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OC'} = \vec{OA} \text{ dan}$$

$$(s \cdot \xi) + (\xi \cdot s) = 1 \text{ bulunur.}$$

TEOREM : 3.25.15

$$k^2 = \overline{+}(s, \xi), \overline{+}(\xi, s), \overline{+}(s, i), \overline{+}(i, s), \overline{+}(\xi, i), \overline{+}(i, \xi), \overline{+}(s, g), \overline{+}(i, g), 1, 0$$

cümlesi, kompoze kinematik faktörlerinin toplama işlemi açısından bir Abel gurubu oluşturur.

İsbat:

$(k^2, +)$ ikilisi bir Abel gurubudur; Kompoze kinematik faktörlerin toplama işlemi için aşağıda verilen tablo incelendiğinde, k^2 cümlesi $(+)$ toplama işlemi açısından: (i) değişimlidir; (ii) birleşimlidir; (iii) etkisiz (sıfır) eleman içerir; (iv) her elemanın ters elemanı vardır.

$(+)$	$\overline{+}(\xi, i)$	$\overline{+}(i, \xi)$	$\overline{+}(i, s)$	$\overline{+}(s, i)$	$\overline{+}(s, \xi)$	$\overline{+}(\xi, s)$
$\overline{+}(\xi, i)$	$2\xi \cdot i$	-1	$-(s \cdot \xi)$	$g(3, -1) \cdot i$	$i \cdot s$	0
$\overline{+}(i, \xi)$	-1	$2 i \cdot \xi$	$i \cdot g(3, -1)$	$\xi \cdot i$	0	$i \cdot s$
$\overline{+}(i, s)$	$s \cdot \xi$	$i \cdot g(3, -1)$	$\xi \cdot i$	0	$\xi \cdot s$	$g(1, 1) \cdot s$
$\overline{+}(s, i)$	$g(3, -1) \cdot i$	$\xi \cdot i$	0	$2 s \cdot i$	$s \cdot g(1, 1)$	$s \cdot \xi$
$\overline{+}(s, \xi)$	$i \cdot s$	0	$\xi \cdot s$	$s \cdot g(1, 1)$	$2 s \cdot \xi$	1
$\overline{+}(\xi, s)$	0	$i \cdot s$	$g(1, 1) \cdot s$	$s \cdot \xi$	1	$2(\xi \cdot s)$

Tablo yalnız $(+)$ işaretliler gözönüne alınarak düzenlenmiştir.

$\xi + s = s + \xi = g(3, -1)$, $\xi + i = i + \xi = g(1, 1)$ ikame edilmiştir.

TEOREM : 3.25.16

$(k^2, +, (..))$ üçlüsü bir halkadır.

İsbat:

$(k^2, +)$ ikilisinin bir Abel gurubu olduğu ortaya konmuştur.

$(k^2, (..))$ ikilisinin birleşimli ve $(+)$ üzerine dağılımlı olduğu doğrulanmalıdır. $(+)$ üzerine dağılımlı olduğu aşağıdaki tabloda saptanabilir.

← B →						
A.B	$\bar{f}(g.i)$	$\bar{f}(i.g)$	$\bar{f}(i.s)$	$\bar{f}(s.i)$	$\bar{f}(g.s)$	$\bar{f}(s.g)$
$\bar{f}(g.i)$	$-(g.i)$	0	$-(g.s)$	$(g.s)$	$-(g.s)$	0
$\bar{f}(i.g)$	0	$(-i.g)$	$(s.g)$	$(-s.g)$	0	$(i.g)$
$\bar{f}(s.i)$	$(g.s)$	$(-s.g)$	-1	1	$(g.i)$	$(-i.g)$
$\bar{f}(i.s)$	$(-g.s)$	$(s.g)$	1	-1	$(g.s)$	$(i.g)$
$\bar{f}(g.s)$	$(g.i)$	0	$(-g.i)$	$(g.i)$	$(g.s)$	0
$\bar{f}(s.g)$	0	$(-s.g)$	$(g.i)$	$(s.g)$	0	$(s.g)$

Kinematik faktörlerin birleşimli olduğu, daha önce gösterilmiştir. Halka değişimli değildir; birim elemanı vardır. Tablo yalnız (+) işaretliler gözönüne alınarak düzenlenmiştir.

i, g, s halka-cisim faktörlerinin bir arada (.) işlemine göre değişimliliği ve birleşimliliği için aşağıdaki tablo geçerlidir.

$s.i).g = -g$	$(i.s).g = g$	$(g.i).s = -g$	$(i.g).s = i-g$	$(s.g).i = i-g$	$(g.s).i = g$
---------------	---------------	----------------	-----------------	-----------------	---------------

Tanımlanan i, g, s ve kompoze $(i.g), (g.s), (s.i)$ tasvir yada kinematik faktörler ile, bazı yeni sayı cümleleri, vektör uzayları ve modül yapıları oluşturacağız; ve bu çalışmaya Türk Üniversitesinin değerli bir öğretim üyesi Prof.Dr. Sayın BERKİ YURTSEVER'in adını vereceğiz.

Prof.Dr. Sayın BERKİ YURTSEVER, Türk Üniversitesine, matematiğin gelişmesine, matematikçilerin yetişmesine yarım asıra yakın katkıda bulunmuş bir bilim adamı olup; 1914 de İstanbul'da doğmuş, yüksek öğrenimini ve "PARSİEL DİFFERENSİYEL DENKLEMLERİN SONSUZ SERİLERE AÇILIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ" konulu tezini MÜNİH ÜNİVERSİTESİNDE yapmıştır. 1983 de emekli olmuştur.

4.DÖRDÜNCÜ KISIM

4- BERKİ SAYILARI, BERKİ VEKTÖR UZAYLARI, BERKİ MODÜLLERİ

TANIM: 4.26- BERKİ SAYILARI

$X_1, X_2 \in R$; $(i.s) \in CxD$; $(s.i) \in SxC$; $(s.s) \in Dxs$ olarak:

$X_1+X_2(i.s)$; $X_1+X_2(s.i)$; $X_1+X_2(s.s)$; $X_1+X_2(s.s)$; $X_1+X_2(s.i)$; $X_1+X_2(i.s)$

yapısındaki elemanlara BERKİ sayıları denecek ve $B(is)$, $B(si)$, $B(ss)$ $B(ss)$; $B(si)$, $B(is)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 4.26.17

$X_1+X_2(i.s)$, $Y_1+Y_2(i.s) \in B(is)$ Berki elemanları için $(+)$, $(.)$ iç işlemleri

$$(+)[X_1+X_2(i.s)] + [Y_1+Y_2(i.s)] = (X_1+Y_1) + (X_2+Y_2)i.s \in B(is)$$

$(.)[X_1+X_2(i.s)] \cdot [Y_1+Y_2(i.s)] = X_1Y_1 + (X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2).i.s$, ile tanımlanıyor ise $B(is)$ Berki sayıları değişimli birimli bir halkadır.

Toplam ve çarpımın tanımlanmasında $X_1+X_2 i.s$, $Y_1+Y_2 i.s$ elemanlarının R , reel sayılar cümlesinin cebir kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörler için bilinen skalerle değişimlilik

$$i.X_1 = X_1.i ; s.X_1 = X_1.s ; i.X_1.s = X_1.i.s = i.s.X_1 \text{ ve}$$

$i.s + s.i = -1$ veya $i.s = -1 - s.i$, $(i.s).(i.s) = -(i.s)$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat:

$(CxD, +)$ ikilisi bir Abel gurubudur. $0+0.i.s$ sıfır elemandır.

$(X_1+X_2 i.s)$ nun ters elemanı $(-X_1-X_2 i.s)$ dur; değişimli ve birleşimlidir.

$(CxD, (.))$ ikilisi birleşimli ve dağılımlıdır; birim eleman $1+0.i.s$ dur. $X_1 \neq 0$, ve $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları vardır.

TEOREM: 4.26.18

$X_1+X_2 i.s \in B(i.s)$, Berki sayılar cümlesi R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat:

$R \times B(i\mathfrak{s}) \rightarrow B(i\mathfrak{s})$ bağıntısında, $B(i\mathfrak{s})$ nun Abel gurubu olduğu bilinmektedir. Ve R için $B_1, B_2 \in B(i\mathfrak{s})$ ve $b_1, b_2 \in R$ ise, aşağıdaki dış işlemlerin doğrulandığını göstermek zor değildir.

$$(i) \quad b_1(B_1+B_2) = b_1B_1 + b_1B_2 \in B(i\mathfrak{s})$$

$$(ii) \quad (b_1+b_2) B_1 = b_1B_1 + b_2B_1 \in B(i\mathfrak{s})$$

$$(iii) \quad (b_1 \cdot b_2) B_1 = b_1(b_2B_1) \in B(i\mathfrak{s})$$

$$(iv) \quad \varepsilon \cdot B_1 = B_1 \rightarrow B(i\mathfrak{s})$$

TEOREM: 4.26.19

$X_1+X_2(\mathfrak{s}s), Y_1+Y_2(\mathfrak{s}s) \in B(\mathfrak{s}s)$ Berki elemanları için, $(+), (.)$ işlemleri
 $(+)[X_1+X_2(\mathfrak{s}s)] + [Y_1+Y_2(\mathfrak{s}s)] = (X_1+Y_1) + (Y_1+Y_2)\mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$
 $(.)[X_1+X_2(\mathfrak{s}s)] \cdot [Y_1+Y_2(\mathfrak{s}s)] = X_1Y_1 + (X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2)\mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ ile tanımlanıyor ise $B(\mathfrak{s}s)$ Berki sayılar cümlesi halka teşkil eder.

Reel sayılar cümlesinin cebir kurallarının korunduğu ve kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ile

$s\mathfrak{s} + \mathfrak{s}s = 1$ veya $s\mathfrak{s} = 1 - \mathfrak{s}s, (s\mathfrak{s}) \cdot (s\mathfrak{s}) = (s\mathfrak{s})$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat: (Bak: TEOREM.4.26.17)

TEOREM: 4.26.20

$X_1+X_2\mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ Berki sayılar cümlesi R reel sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat: (Bak: TEOREM.4.26.18)

TEOREM: 4.26.21

$X_1+X_2(si), Y_1+Y_2(si) \in B(si)$ Berki elemanları için $(+), (.)$ işlemleri
 $(+)[X_1+X_2(si)] + [Y_1+Y_2(si)] = (X_1+Y_1) + (X_2+Y_2)si \in B(si)$
 $(.)[X_1+X_2(si)] \cdot [Y_1+Y_2(si)] = (X_1Y_1 + X_2Y_2) + (X_1Y_2 + X_2Y_1)si \in B(si)$ ile tanımlanıyor ise $B(si)$ Berki sayılar cümlesi halka teşkil eder.

Reel sayılar cümlesinin cebir kurallarının korunduğu düşünülmüş kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ile

$si + is = 0$ veya $si = -is, (si) \cdot (si) = 1$ bağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat: (Bak: TEOREM 4.26.17)

TEOREM : 4.26.22

$X_1 + X_2 si \in B(si)$ Berki sayılar cümlesi R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı teşkil eder.

İsbat : (Bak: TEOREM 4.26.18)

TANIM: 4.27- BERKİ VEKTÖR UZAYLARINDA İÇ ÇARPIM

a) $B^n(i\mathfrak{s})$ UZAYINDA İÇ ÇARPIM

(i) $X = X_1 + X_2 i\mathfrak{s} \in B(i\mathfrak{s})$ olarak $\bar{X} = X_1 + X_2 \mathfrak{s}i = (X_1 - X_2) - X_2 i\mathfrak{s} \in B(i\mathfrak{s})$ ve

$XX = X_1^2 - X_1 X_2$, $\bar{X} = X$ özelliklerini veren $\bar{X}$ elemanına X BERKİ SAYISININ

EŞLENİĞİ

(ii) $X = X_1 + X_2 i\mathfrak{s} \in B(i\mathfrak{s})$ olarak $\mathfrak{X} = X_2 - X_1 i\mathfrak{s} \in B(i\mathfrak{s})$ olan $\mathfrak{X}$ elemanına X BERKİ SAYISININ AKS'I adı ile ortaya konan elemanlarla

(iii) $X = X_1 + X_2 i$, $Y = Y_1 + Y_2 i \in B(i\mathfrak{s})$ elemanları arasında

$$\langle X, Y \rangle = XY + \mathfrak{X} \cdot \overline{\mathfrak{Y}} = (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + (X_2 Y_1 - X_1 Y_2) + 2(X_2 Y_1 - X_1 Y_2) i\mathfrak{s} \in B(i\mathfrak{s})$$

bağıntısına iç çarpım denecek ve bu tanım iç çarpım koşullarını gerçekleyecektir.

(IV), (iii) den yararlanarak $B^n(i\mathfrak{s})$ da iç çarpım

$$X = (X_i), X_i = X_{i1} + X_{i2} i\mathfrak{s} \in B(i\mathfrak{s}), X \in B^n(i\mathfrak{s})$$

$$Y = (Y_i), Y_i = Y_{i1} + Y_{i2} i \in B(i), Y \in B^n(i\mathfrak{s}) \text{ olarak}$$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X_i \bar{Y}_i + \mathfrak{X}_i \cdot \overline{\mathfrak{Y}_i} \text{ ile tanımlanabilecektir. Böylece}$$

$$B^n(i\mathfrak{s}) \times B^n(i\mathfrak{s}) \rightarrow B(i\mathfrak{s}) \text{ eşlemesi yapılmış olmaktadır.}$$

b) $B^n(\mathfrak{s}s)$ UZAYINDA İÇ ÇARPIM

(i) $X = X_1 + X_2 \mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ olarak $\bar{X} = X_1 + X_2 \mathfrak{s}\mathfrak{s} = (X_1 + X_2) - X_2 \mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ ve

$$X\bar{X} = X_1^2 + X_1 X_2; \bar{X} = X \text{ özelliklerini veren } \bar{X} \text{ elemanına } X, \text{ BERKİ SAYI-}$$

SININ EŞLENİĞİ;

(ii) $X = X_1 + X_2 \mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ olmak üzere, $\mathfrak{X} = X_2 - X_1 \mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ olan $\mathfrak{X}$ elemanına X , BERKİ SAYISININ AKS'I adı ile ortaya konan elemanlarla

(iii) $X = X_1 + X_2 \mathfrak{s}s$, $Y = Y_1 + Y_2 \mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s)$ sayıları arasında

$$\langle X, Y \rangle = X \cdot \bar{Y} + \mathfrak{X} \cdot \overline{\mathfrak{Y}} = (X_1 Y_1 + X_2 Y_2) + 2(X_2 Y_1 - X_1 Y_2) \mathfrak{s}s \in B(\mathfrak{s}s) \text{ bağıntısına}$$

iç çarpım denecek ve bu tanım iç çarpım koşullarını doğrulayacaktır.

(IV), (iii) den yararlanarak $B^n(\mathfrak{s}s)$ da iç çarpım

$$X=(X_i), X_i=X_{i1}+X_{i2}g_s \in B(g_s), X \in B^n(g_s)$$

$$Y=(Y_i), Y_i=Y_{i1}+Y_{i2}g_s \in B(g_s), Y \in B^n(g_s) \text{ olarak}$$

$X, Y = \sum_{i=1}^n X_i \bar{Y}_i + X_i \cdot \bar{Y}_i$ ile tanımlanabilecektir. Böylece $B^n(g_s) \times B^n(g_s) \rightarrow B(g_s)$ eşlemesi yapılmış olmaktadır.

TANIM: 4.28- BERKİ VEKTÖR UZAYLARI, BERKİ MODÜLLERİ

$X_1, X_2, \dots \in R$ reel sayılarla ve $i, g, s, (ig), (gs), (si)$ kinematik faktörlerin lineer kombinezonları olarak, kinematik faktörler arası $(+), (.)$ iç işlemleri altında, halka, yada cisim niteliğinde olabilen

- | | | |
|--|---|--------------------------|
| 1°) $X_1(g_s) + X_2(ig) \in B(s, i)$ | → | (X_1, X_2) |
| 2°) $X_1 + X_2g + X_3(g_s) \in B(1, g, g_s)$ | → | (X_1, X_2, X_3) |
| 3°) $X_1 + X_2(g_s) + X_3(ig) \in B(1, g_s, ig)$ | → | (X_1, X_2, X_3) |
| 4°) $X_1 + X_2g + X_3si \in B(1, g, si)$ | → | (X_1, X_2, X_3) |
| 5°) $X_1g + X_2gs + X_3ig \in B(g, g_s, ig)$ | → | (X_1, X_2, X_3) |
| 6°) $X_1 + X_2g + X_3i + X_4ig \in B(1, g, i, ig)$ | → | (X_1, X_2, X_3, X_4) |
| 7°) $X_1 + X_2s + X_3i + X_4si \in B(1, s, i, si)$ | → | (X_1, X_2, X_3, X_4) |
| 8°) $X_1 + X_2g + X_3s + X_4gs \in B(1, g, s, gs)$ | → | (X_1, X_2, X_3, X_4) |
| 9°) $X_1 + X_2ig + X_3gs + X_4si \in B(1, ig, gs, si)$ | → | (X_1, X_2, X_3, X_4) |
| 10°) $X_1 + X_2g + X_3ig + X_4si + X_5gs \in B(1, g, \dots)$ | → | $(X_1, X_2, \dots, X_5)$ |
| 11°) $X_1 + X_2g + X_3i + X_4gi + X_5sg \in B(1, g, i, \dots)$ | → | $(X_1, X_2, \dots, X_5)$ |
| 12°) $X_1 + X_2g + X_3s + X_4i + X_5si + X_6ig + X_7gs \in B(1, , s \dots) \rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_7)$ | | |

..... cebirsel yapıları

ile ifade edilen cümlelere değişik boyuttan, DEĞİŞİK HALKA VE CİSİM ÜRİNDEN BERKİ VEKTÖR UZAYLARI VE BERKİ MODÜLLERİ deneyecektir.

TEOREM: 4.28.23

$X_1gs + X_2ig \in B(g_s, ig)$ cümlesi R üzerinden bir vektör uzayı, $B(g_s)$ sayı cümlesi üzerinden bir modül oluşturur.

- R üzerinden vektör uzayı oluşturduğuna dair isbat için

(Bak TEOREM : 4.26.18)

- $B(g_s)$ halkası üzerinden bir modül oluşturduğuna gelince:

$$a_1+a_2\zeta s, b_1+b_2\zeta s \in B(\zeta s); 1+0.\zeta s=\zeta, \in B(\zeta s)$$

$$X_1\zeta s+X_2i\zeta, Y_1\zeta s+Y_2i\zeta \in B(\zeta s, i\zeta) \text{ olsun.}$$

$$(i) (a_1+a_2\zeta s)(X_1\zeta s+X_2i\zeta)=(a_1+a_2)X_1\zeta s+a_1X_2i\zeta \in B(\zeta s, i\zeta)$$

$$(ii) (a_1+a_2\zeta s) [(X_1\zeta s+X_2i\zeta)+(Y_1\zeta s+Y_2i\zeta)] = \\ [(a_1+a_2)X_1\zeta s+a_1X_2i\zeta] + [(a_1+a_2)Y_1\zeta s+a_1Y_2i\zeta] = \\ (a_1+a_2)(X_1+Y_1)\zeta s+a_1(X_2+Y_2)i\zeta \in B(\zeta s, i\zeta)$$

$$(iii) [(a_1+a_2\zeta s)(b_1+b_1\zeta s)](X_1\zeta s+X_2i\zeta)=(a_1+a_2\zeta s)[(b_1+b_2\zeta s)(X_1\zeta s+X_2i\zeta)];$$

$$\text{sol yan: } [a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2)\zeta s](X_1\zeta s+X_2i\zeta)=$$

$$(a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2)X_1\zeta s+a_1b_1X_2i\zeta \in B(\zeta s, i\zeta); \text{ sağ yan}$$

$$(a_1+a_2\zeta s)[(b_1+b_2)X_1\zeta s+b_1X_2i\zeta]=$$

$$[(a_1+a_2)(b_1+b_2)] \cdot X_1\zeta s+a_1b_1X_2i\zeta \in B(\zeta s, i\zeta)$$

$$(iv) (1+0.\zeta s)(X_1\zeta s+X_2i\zeta)=X_1\zeta s+X_2i\zeta \text{ bulunur.}$$

TEOREM: 4.28.24

$(X_1-X_2i)\zeta s-(X_1+X_2i)i\zeta, (Y_1-Y_2i)\zeta s-(Y_1+Y_2i)i\zeta \in B(i\zeta, \zeta s)$ ile ifade edilen elemanlar için, $(+), (.)$ iç işlemleri

$$(+)[(X_1-X_2i)\zeta s-(X_1+X_2i)i\zeta] + [(Y_1-Y_2i)\zeta s-(Y_1+Y_2i)i\zeta] =$$

$$((X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)i)\zeta s-((X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i)i\zeta$$

$$(.)((X_1-X_2i)\zeta s-(X_1+X_2i)i\zeta) \cdot ((Y_1-Y_2i)\zeta s-(Y_1+Y_2i)i\zeta) =$$

$$[(X_1Y_1-X_2Y_2)-(X_1Y_2+X_2Y_1)i]\zeta s-[(X_1Y_1-X_2Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i]i\zeta \text{ ile tanımlanıyorsa } B(i\zeta, \zeta s) \text{ cümlesi değişimli bir cisimdir.}$$

İsbat:

$(B(\zeta s, i\zeta), +)$ ikilisi bir Abel gurubudur; $X_1=0, X_2=0$ sıfır elemanı oluşturur; değişimli, birleşimli, ters elemanlıdır.

$(B(\zeta s, i\zeta), (..))$ ikilisi, birleşimli, $(+)$ üzerine dağılımlıdır.

$X_1=1, X_2=1; (1-i)\zeta s-(1+i)i\zeta$ birim elemanı oluşturur.

$(X_1-X_2i)\zeta s-(X_1+X_2i)i\zeta$, nun ters elemanı

$$(1/X_1^2+X_2^2)[(X_1+X_2)-(X_1-X_2)i]\zeta s-(1/X_1^2+X_2^2)[(X_1+X_2)+(X_1-X_2)i]i\zeta \text{ dur.}$$

Halkanın sıfır böleni elemanı bulunmadığı ve her elemanın da ters mevcut olduğundan bu üçlü bir cisimdir.

TEOREM: 4.28.25

Teorem: 3.28.24 de verilen $B(\xi, \eta)$, Berki cismi a) R , reel sayılar cismi üzerinden b) C kompleks sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı oluşturur.

İsbat: (Bak Teorem 4.26.18)

TEOREM: 4.28.26

$X_1 + X_2\xi + X_3\eta$, $Y_1 + Y_2\xi + Y_3\eta \in B(1, \xi, \eta)$ ile ifade edilen elemanlar için (+) toplam, (.) çarpım denilecek iç işlemler:

$$(+)(X_1 + X_2\xi + X_3\eta) + (Y_1 + Y_2\xi + Y_3\eta) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)\xi + (X_3 + Y_3)\eta$$

$$(.) (X_1 + X_2\xi + X_3\eta) \cdot (Y_1 + Y_2\xi + Y_3\eta) =$$

$(X_1Y_1 + X_3Y_3) + (X_1Y_2 + X_2Y_3 + X_3Y_1 - X_3Y_2)\xi + (X_1Y_3 + X_3Y_1)\eta$ ile tanımlanıyor ise $B(1, \xi, \eta)$ cümlesi bir halkadır.

Toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanmasında $B(1, \xi, \eta)$ elemanlarının R , reel sayılar cümlesinin toplama ve çarpma kurallarını koruyuşu, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$\xi^2 = 0$, $(\eta) \cdot (\eta) = 1$, $\xi\eta = \eta$, $\eta\xi = -\eta$ bağıntıları gözönüne alınmıştır.

İsbat:

$(B(1, \xi, \eta), +)$ ikilisi bir Abel grubudur; değişimli, birleşimli olup, sıfır eleman $(0 + 0\xi + 0\eta)$ dir. Her elemanın tersi vardır.

$(B(1, \xi, \eta), (.))$ ikilisi, birleşimli ve (+) üzerine dağılımlıdır. $(1 + 0\xi + 0\eta)$ birim elemandır.

$$\begin{array}{ccc|l} X_1 & 0 & X_3 & \\ X_2 & X_1 - X_3 & X_2 & \\ X_3 & 0 & X_1 & \end{array} \begin{array}{l} = (X_1^2 + X_3^2) \cdot (X_1 - X_3) \neq 0 \text{ için } (X_1 \neq X_3) \text{ olan tüm elemanların} \\ \text{ters elemanı vardır, ve} \\ (X_1 + X_2\xi + X_3\eta) \text{ nin ters elemanı} \\ (1/(X_1^2 + X_3^2)) \cdot (X_1 - X_2\xi + X_3\eta) \text{ dir.} \end{array}$$

Halka (.) işlemi açısından değişimli değildir.

TEOREM: 4.28.27

$B(1, \xi, \eta)$ halkası a) R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) D dual sayılar halkası üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat:

a) Bak: TEOREM: 4.26.18

b) $a_1 + a_2\xi$, $b_1 + b_2\xi \in D$, $1 + 0\xi \in D$

$X_1+X_2\vartheta+X_3si$, $Y_1+Y_2\vartheta+Y_3si \in B(1,\vartheta,si)$ olsun;

$$(i)(a_1+a_2\vartheta).(X_1+X_2\vartheta+X_3si)=a_1X_1+(a_1X_2+a_2X_1+a_2X_3)\vartheta+a_1X_3si$$

$$(ii)[(a_1+a_2\vartheta)+(b_1+b_2\vartheta)](X_1+X_2\vartheta+X_3si)=$$

$$[(a_1+b_1)+(a_2+b_2)\vartheta](X_1+X_2\vartheta+X_3si) =$$

$$(a_1+b_1)X_1+[(a_1+b_1)X_2+(a_2+b_2)X_1+(a_2+b_2)X_3]\vartheta+(a_1+b_1)X_3si$$

diğer taraftan

$$(a_1+a_2\vartheta).(X_1+X_2\vartheta+X_3si)+(b_1+b_2\vartheta)(X_1+X_2\vartheta+X_3si)=$$

$$a_1X_1+(a_1X_2+a_2X_1+a_2X_3)\vartheta+a_1X_3si+b_1X_1+(b_1X_2+b_2X_1+b_2X_3)\vartheta+b_1X_3si \text{ den}$$

$$(a_1+b_1)X_1+[(a_1+b_1)X_2+(a_2+b_2)X_1+(a_2+b_2)X_3]\vartheta+(a_1+b_1)X_3si \text{ bulunur.}$$

$$(iii)[(a_1+a_2\vartheta)(b_1+b_2\vartheta)](X_1+X_2\vartheta+X_3si)=$$

$$(a_1+a_2)[(b_1+b_2\vartheta)(X_1+X_2\vartheta+X_3si)] \text{ dir. Zira eşitliğin sol yanı}$$

$$[a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)\vartheta](X_1+X_2\vartheta+X_3si)=$$

$$a_1b_1X_1+[a_1b_1X_2+(a_2b_1+a_1b_2)(X_1+X_3)]\vartheta+a_1b_1X_3si; \text{ eşitliğin}$$

$$\text{sag yanı: } (a_1+a_2\vartheta)[b_1X_1+(b_1X_2+b_2X_1+b_2X_3)\vartheta+b_1X_3si]=$$

$$a_1b_1X_1+[a_1b_1X_2+(a_2b_1+a_1b_2)(X_1+X_3)]\vartheta+a_1b_1si \text{ bulunur.}$$

$$(iv)(1+0.\vartheta).(X_1+X_2\vartheta+X_3si)=X_1+X_2\vartheta+X_3si \text{ olur.}$$

TEOREM: 4.28.28

$X_1+X_2\vartheta+X_3i\vartheta$, $Y_1+Y_2\vartheta+Y_3i\vartheta \in B(1,\vartheta,i\vartheta)$ ile ifade edilecek elemanlar

için (+) toplam, (.) çarpım denilecek iç işlemler:

$$(+)(X_1+X_2\vartheta+X_3i\vartheta)+(Y_1+Y_2\vartheta+Y_3i\vartheta)=(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)\vartheta+(X_3+Y_3)i\vartheta$$

$$(.) (X_1+X_2\vartheta+X_3i\vartheta).(Y_1+Y_2\vartheta+Y_3i\vartheta)=$$

$$X_1Y_1+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_3)\vartheta+(X_1Y_3+X_3Y_1-X_3Y_3)i\vartheta, \text{ ile tanımlanıyor ise}$$

$B(1,\vartheta,i\vartheta)$ cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

Toplam ve çarpımın tanımlanmasında, $B(1,\vartheta,i\vartheta)$ nun elemanları için, R reel sayılar cümlesinin cebir kurallarının korunduğu düşünülmüş, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$$\vartheta^2=0, \vartheta.(i\vartheta)=0, i\vartheta+i\vartheta=-1, (i\vartheta).(i\vartheta)=-(i\vartheta)$$

ağıntıları gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat:

$(B(1,\vartheta,i\vartheta),+)$ ikilisi bir Abel gurubudur; değişimli, birleşimli

lup, sıfır eleman $(0+0.\vartheta+0.i\vartheta)$ dur; Ters elemanı vardır.

$$\begin{vmatrix} X_1 & -X_3 & -X_3 & 0 \\ X_2 & X_1-X_4 & -X_4 & X_3 \\ X_3 & 0 & X_1 & -X_3 \\ X_4 & -X_3 & X_2 & X_1-X_4 \end{vmatrix} = (X_1^2+X_3^2)+(X_2X_3-X_1X_4)^2 = P^2 \text{ yi göstermekte}$$

olup, $X_1 \neq X_4$, $X_3 \neq -X_2$ olan tüm elemanların ters elemanları bulunacaktır.

TEOREM: 4.28.31

$B(1, \zeta, i, \zeta i)$ halkası a) R , reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) C kompleks sayılar cismi üzerinden sağdan ve soldan bir vektör uzayı c) D , dual sayılar halkası üzerinden sağdan ve soldan bir modül d) $B(\zeta i)$ veya $B(i\zeta)$ Berki saya cümlesi üzerinden sağdan ve soldan bir modül teşkil eder.

a) Bak: TEOREM: 4.26.18

b) a_1+a_2i , $b_1+b_2i \in C$; c) $a_1+a_2\zeta$, $b_1+b_2\zeta \in D$;

d) $a_1+a_2\zeta i$, $b_1+b_2\zeta i$ alarak bak TEOREM: 4.28.27

TEOREM: 4.28.32

$$X_1+X_2i\zeta +X_3\zeta s+X_4si, Y_1+Y_2i\zeta +Y_3\zeta s+Y_4si \in B(1, i\zeta, \zeta s, si)$$

yapısındaki elemanlar için (+) toplam, (.) çarpım denecek iç işlemler:

$$(+)(X_1+X_2i\zeta +X_3\zeta s+X_4si)+(Y_1+Y_2i\zeta +Y_3\zeta s+Y_4si)=$$

$$(X_1+Y_1)+(X_2+Y_2)i\zeta +(X_3+Y_3)\zeta s+(X_4+Y_4)si \text{ ve}$$

$$(.)(X_1+X_2i\zeta +X_3\zeta s+X_4si).(Y_1+Y_2i\zeta +Y_3\zeta s+Y_4si)=$$

$$(X_1Y_1-X_3Y_4-X_4Y_2+X_4Y_4)+(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2-X_3Y_4+X_4Y_3)i\zeta +$$

$(X_1Y_3-X_2Y_4+X_3Y_1+X_4Y_2)\zeta s+(X_1Y_4-X_2Y_4+X_4Y_1+X_4Y_3)si$ ile tanımlanıyor
ise $B(1, i\zeta, \zeta s, si)$ cümlesi değişimli olmayan bir halkadır.

Toplam ve çarpım işlemlerinin tanımlanmasında $B(1, i\zeta, \zeta s, si)$

cümlesi elemanlarının reel sayılar cümlesinin toplama ve çarpma kurallarını koruduğu düşünülmüş, kinematik faktörlerin skalerlerle değişimliliği ve

$$\zeta^2=0, i^2=-1, s^2=1, \zeta i+i\zeta=-1, \zeta s+s\zeta=1, si+si=0$$

bağıntıları ve kompoze kinematik faktörler çarpım tablosu gözönünde bulundurulmuştur.

İsbat:

$(B(1, i\mathfrak{f}, \mathfrak{s}, si), +)$ ikilisinin Abel gurubu olduğu açıktır.

$(B(1, i\mathfrak{f}, \mathfrak{s}, si), (..))$ ikilisi birleşimli, $(+)$ üzerine dağılımlıdır.

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_4 & 0 & x_4-x_3 \\ x_2 & x_1-x_2 & x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1+x_3 & -x_2 \\ x_4 & 0 & x_4 & (x_1-x_2) \end{vmatrix} = (x_1-x_2+x_4)^2 \cdot (x_1+x_3-x_4) \cdot (x_1-x_4) \neq 0$$

olan elemanların ters elemanı vardır.

$1+0.i +0.s+0.si$ birim elemandır.

TEOREM: 4.28.33

$B(1, i\mathfrak{f}, \mathfrak{s}, si)$ cümlesi a) R reel sayılar cismi üzerinden bir vektör uzayı b) D , dual sayılar cümlesi üzerinden bir modül c) $B(i\mathfrak{f}), B(\mathfrak{s}), B(si)$ Berki sayıları cümlesi üzerinden bir modül oluşturur.

İsbat: TEOREM 4.28.31

5. BEŞİNCİ KISIM

GEN ÇARPIM KURALLI KARE MATRİS HALKALARI

TEOREM: 5.29.34

$(X_{uv}), (Y_{uv}) (u=1, 2, \dots, n); (v=1, 2, \dots, n)$ matris elemanları olarak
 (+) toplama, (gk) çarpma (gen çarpım kuralları dizisi) iç işlemleri:
 (+) $(X_{uv}) + (Y_{uv}) = (X_{uv} + Y_{uv}), (u=1, 2, \dots, n), (v=1, 2, \dots, n)$
 (.) $(X_{uv}) gk (Y_{uv}) = (Z_{uv}^k) = \sum_{r=1}^n X_{ur} \cdot Y_{rv} \mid r+s=np+k, k=0, 1, \dots, n-1$
 ile tanımlanıyorsa (X_{uv}) matrisleri $k=0, 1, \dots, n-1$ değerleri için ayrı ayrı halka oluşturur.

İsbat:

$k=1$ için, $(n \times n)$ matrislerinde yapacağız. $(r+s)$ indisler toplamının (n) 'e bölünmesinden (1) kalanı elde edilecek, başka bir deyimle $(r+s)$ toplamı, toplamı oluşturan her terimde $(n+1)$ edecektir. (g_1) işlemini kolaylık olsun diye (o) ile gösterelim. (o) işleminin yalnızca birleşimli olduğunu göstermekle yetinecek, (g_1) 'e veya (o) çarpımına çapraz kural ve bu işlemle oluşan $(n \times n)$ matris halkalarına da, çapraz kurallı matris halkaları denecektir.

Örneğin, (2×2) matrisleri için halka oluşturan

$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22} \end{pmatrix}$ klasik çarpım
 (g_0) lı çarpım kuralı yanında, (o) çapraz çarpım kuralı da

$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{21} + X_{12}Y_{11} & X_{11}Y_{22} + X_{12}Y_{12} \\ X_{21}Y_{21} + X_{22}Y_{11} & X_{21}Y_{22} + X_{22}Y_{12} \end{pmatrix}$ işlemi ile bir halka oluşturacaktır.

$[(X_{uv}) o (Y_{uv})] o (W_{uv}) = (X_{uv}) o [(Y_{uv}) o (W_{uv})]$ isbatlanacaktır.

$(X_{uv}) o (Y_{uv}) = \sum_{r=1}^n X_{ur} Y_{(n+1-r)v} \mid (u=1, 2, \dots, n), (v=1, 2, \dots, n)$ ile tanımlandığını gözönünde tutarak

$(X_{uv}) o (Y_{uv}) = (A_{uv}), (Y_{uv}) o (W_{uv}) = (B_{uv})$ olsun.

$(Z_{uv}) = (A_{uv}) \circ (W_{uv}) = (X_{uv}) \circ (B_{uv})$ olduğunu göstereceğiz.

(Z_{uv}) matrisinin u.cu satır, t.ci sütun elemanı

$$Z_{ut} = \sum_{r=1}^n A_{ur} W_{(n+1-r)t} \quad \text{veya}$$

$$A_{u1} = \sum_{r=1}^n X_{ur} \cdot Y_{(n+1-r)1}, \quad A_{u2} = \sum_{r=1}^n X_{ur} \cdot Y_{(n+1-r)2}, \dots$$

$$A_{un} = \sum_{r=1}^n X_{ur} \cdot Y_{(n+1-r)n}$$

$$Z_{nt} = \sum_{r=1}^n X_{ur} \cdot Y_{(n+1-r)1} W_{nt} + Y_{(n+1-r)2} W_{(n-1)t} + \dots +$$

$$Y_{(n+1-r)n} W_{1t} \quad \text{veya}$$

$$Z_{ut} = \sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^n X_{ur} \cdot Y_{(n+1-r)p} \cdot W_{(n+1-p)t} \quad \text{olur; bu sonuçla}$$

(B_{uv}) 'nin (t).ci sütun elemanları

$$B_{uv} = \sum_{p=1}^n Y_{up} \cdot W_{(n+1-p)t}$$

$$B_{1t} = \sum_{p=1}^n Y_{1p} \cdot W_{(n+1-p)t}, B_{2t} = \sum_{p=1}^n Y_{2p} \cdot W_{(n+1-p)t}, \dots$$

$$B_{nt} = \sum_{p=1}^n Y_{np} \cdot W_{(n+1-p)t}$$

$$Z_{uv} = \sum_{p=1}^n W_{(n+1-p)t} \cdot [X_{un} Y_{1p} + X_{u(n-1)} Y_{2p} + \dots + X_{u1} Y_{np}]$$

$Z_{uv} = \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n X_{ur} \cdot Y_{(n+1-r)p} \cdot W_{(n+1-p)t}$ sonucu karşılaştırıldığında (o) işleminin birleşimliliği gösterilmiş olur. $k=1$, g_k veya (o) çapraz çarpım kuralı ile oluşan kare matris halkalarını M_1^n ile göstereceğiz. Halkanın (o) işlemine göre ξ_1^n etkisiz (birim) elemanı

$$\xi_1^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dır. Teorem daha somut, daha aritmetik bir} \\ \text{biçimde anlatılmak istenirse, örneğin} \\ k=2, n=3 \text{ için} \end{array}$$

$$(X_{uv}) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}, \quad (Y_{uv}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \quad \text{olsun.}$$

$$(X_{uv}) g_2(Y_{uv}) = (Z_{uv}^2) = \sum_{r=1}^3 X_{ur} \cdot Y_{sv} \quad \left| \quad r+s=3p+2; (u=1,2,3), (v=1,2,3) \right|$$

İfade açık şekilde

$$(X_{uv})g_2(Y_{uv})=(Z_{uv}^2)=\begin{pmatrix} X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{31}+X_{13}Y_{21} & X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{32}+X_{13}Y_{22} & \dots \\ X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{31}+X_{23}Y_{21} & X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{32}+X_{23}Y_{22} & \dots \\ X_{31}Y_{11}+X_{32}Y_{31}+X_{33}Y_{21} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

dur. (g_2) işleminin birleşimli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$[(X_{uv})g_2(Y_{uv})]g_2(W_{uv})=(X_{uv})g_2[(Y_{uv})g_2(W_{uv})] \text{ doğrulanmalıdır.}$$

$$(X_{uv})g_2(Y_{uv})=A_{uv}; A_{11}=X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{31}+X_{13}Y_{21}; A_{12}=X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{32}+X_{13}Y_{22};$$

$$A_{13}=\dots$$

$$(A_{uv})g_2(W_{uv})=Z_{uv}; Z_{11}=(X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{31}+X_{13}Y_{21})W_{11}+(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{32}+X_{13}Y_{22})W_{31}+A_{13} \cdot W_{21}$$

$$\dots$$

$$(Y_{uv})g_2(W_{uv})=B_{uv}; B_{11}=Y_{11}W_{11}+Y_{12}W_{31}+Y_{13}W_{21}; B_{21}=Y_{21}W_{11}+Y_{22}W_{31}+Y_{23}W_{21};$$

$$B_{31}=\dots$$

$$(X_{uv})g_2(B_{uv})=Z_{uv}; Z_{11}=X_{11}(Y_{11}W_{11}+Y_{12}W_{31}+Y_{13}W_{21})+X_{12}$$

$$(Y_{31}W_{11}+Y_{32}W_{31}+Y_{33}W_{21})+X_{13} \cdot B_{31}$$

$$\dots; \dots$$

Her iki halde de Z_{11} elemanlarının eşitliği görülecektir; aynı işlemler diğer elemanlar için de tekrarlanabilir. Bu halkayı M_2^3 ile göstereceğiz. Halkanın birim elemanı $\xi_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dir. Örneğin $n=4$ $k=2$ için M_2^4 halkanın birim elemanı $\xi_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ olur.

M_k^n matris halkalar sınıfı $2+3+4+\dots+n=(n-1)(n+2)/2$ sayıda halka ihtiva eder. Klasik çarpım kurallı matris halkaları ($n=2$ hariç) bu sınıfın elemanı değildir.

TEOREM: 5.29.35

$X_{uv} \in R, m_k \in R; g_k (k=0,1,2,\dots,n-1)$ gen çarpım kuralları dizisi $(X)=(X_{uv}); Y=(Y_{uv}) (u=1,2,\dots,n), (v=1,2,\dots,n); (n \times n)$ matrisleri olarak

$T, (\perp)$ iç işlemleri :

$$T: (X)T(Y)=(X_{uv})T(Y_{uv})=(X_{uv}+Y_{uv})$$

$$\perp: (X)(Y)=(X_{uv})(Y_{uv})=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(X_{uv})g_k(Y_{uv})=Z_{uv}, \text{ ya da değişimlilik}$$

öz konusu olmaksızın daha pratik bir yazım şekli ile

$(X) \perp (Y) = (X_{uv}) \perp (Y_{uv}) = (X_{uv}) \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot g_k \right) (Y_{uv})$ ile tanımlanan (X) matrisleri (m_k) değişen değerlerine (parametresine) göre halkalar dizisi oluşturur. Halka değişimli olmayan birimli bir halkadır.

İsbat:

Kolay ve somut bir yol olarak, teoremin $n=2$, $n=3$ için doğrulandığını göstereceğiz. $n=2$ halinde:

$(\perp)$ işleminin birleşimli olduğunu göstermek yeterlidir. $(\perp)$ işleminin ayrıntılı açık ifadesi

$$Z = Z_{uv} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^1 m_k (X_{uv}) g_k (Y_{uv}) =$$

$$Z_{uv} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = m_0 \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} g_1 \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 (X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21}) + m_1 (X_{11}Y_{21} + X_{12}Y_{11}) & m_0 (X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22}) + m_1 (X_{11}Y_{22} + X_{12}Y_{12}) \\ m_0 (X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21}) + m_1 (X_{21}Y_{21} + X_{22}Y_{11}) & m_0 (X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22}) + m_1 (X_{21}Y_{22} + X_{22}Y_{12}) \end{pmatrix}$$

lunur. Daha özet cebirsel yapısı

$$(Z_{uv}) = \sum_{k=1}^2 m_k (X_{uk}Y_{rv}) + m_1 (X_{uk}Y_{sv}) \quad \left| \quad k+r=2p, \quad k+s=3 \text{ olur}; \right.$$

$k+r$, $n=2$ ile bölünmesinden (0) kalanını, $k+s$, $n=2$ ile bölünmesinden (1) kalanını verecektir.

Burada g_0 'ın, (2×2) de bilinen klasik matris çarpımını $(\circ)$;

(g_1) 'ın (2×2) de çapraz çarpımı (o) ifade ettiği açıktır.

$(\perp)$ işleminin birleşimli olduğunu göstermek için öncelikle $(\circ), (o)$ işlemlerinin aralarında birleşimli olduğunu isbatlamamız gerekmektedir yani

$$\left[\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \right] o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \right]$$

doğrulanması demektir. Eşitliğin sol yanı:

$$\left[\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \right] o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22} \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11}+X_{12}Y_{21} & (X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22}) \\ Y_{11}+X_{22}Y_{21} & (X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} & u_{11} \\ u_{22} & u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21} & (X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22}) \\ X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21} & (X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{22} & u_{12} \\ u_{21} & u_{11} \end{pmatrix}$$

Eşitliğin sağ yanı:

$$\begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (Y_{11}Y_{12}) \circ (u_{11}u_{12}) \\ (Y_{21}Y_{22}) \circ (u_{21}u_{22}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}X_{12} \\ X_{21}X_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (Y_{11}u_{21}+Y_{12}u_{11})(Y_{11}u_{22}+Y_{12}u_{12}) \\ (Y_{21}u_{21}+Y_{22}u_{11})(Y_{21}u_{22}+Y_{22}u_{12}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (Y_{11}u_{21}+Y_{12}u_{11})+X_{12}(Y_{21}u_{21}+Y_{22}u_{11}) & X_{11}(Y_{11}u_{22}+Y_{12}u_{12})+X_{12}(Y_{21}u_{22}+Y_{22}u_{12}) \\ (Y_{11}u_{21}+Y_{12}u_{11})+X_{22}(Y_{21}u_{21}+Y_{22}u_{11}) & X_{21}(Y_{11}u_{22}+Y_{12}u_{12})+X_{22}(Y_{21}u_{22}+Y_{22}u_{12}) \end{pmatrix}$$

sonuçları ile iki yanın eşitliği gösterilmiş olur; buna göre

$$X = \begin{pmatrix} X_{11}X_{12} \\ X_{21}X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11}Y_{12} \\ Y_{21}Y_{22} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_{11}u_{12} \\ u_{21}u_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

$(X \perp Y) \perp u = X \perp (Y \perp u)$ olduğunu kanıtlayacağız..

$(X \perp Y) = m_0(X) \circ (Y) + m_1(X) \circ (Y)$ olduğuna göre eşitliğin sol yanı:

$$(X \perp Y) \perp u = m_0(X) \circ (Y \perp u) + m_1(X) \circ (Y \perp u)$$

$$(X \perp Y) \perp u = [m_0(X) \circ (.) + m_1(X) \circ (.)] [m_0(Y) \circ (u) + m_1(Y) \circ (u)]$$

$$(X \perp Y) \perp u = m_0^2(X) \circ (Y) \circ (u) + m_0 m_1(X) \circ (Y \circ u) +$$

$$m_0 m_1(X) \circ (Y \circ u) + m_1^2(X) \circ (Y \circ u), \text{ diğer taraf}$$

$$X \perp (Y \perp u) = (X) \perp [m_0(Y \circ u) + m_1(Y \circ u)]$$

$$X \perp (Y \perp u) = m_0(X) [m_0(Y \circ u) + m_1(Y \circ u)] + m_1(X) \circ [m_0(Y \circ u) + m_1(Y \circ u)]$$

$$= m_0^2(X) \circ (Y \circ u) + m_0 m_1(X) \circ (Y \circ u) +$$

$$m_0 m_1(X) \circ (Y \circ u) + m_1^2(X) \circ (Y \circ u) \text{ sonuçlarıyla } (.) \text{ ve } (o) \text{ işlemlerinin birleşimliliği gözönünde tutulduğunda } (\perp) \text{ işleminin birleşimliliği kanıtlanmış olur.}$$

m_0, m_1 'in değişen değerlerine göre (T), ($\perp$) işlemleri değişik halkalar tanımlar ve halkalar bir sınıf teşkil eder; $m_0, m_1 \in R$ olarak R içinde m_0, m_1 ikili permütasyon adedi sonsuz olacağından (2x2) gen çarpım kurallı matris kombinezonları diyeceğimiz halka sınıfında sonsuz sayıda halka bulunur. Halkaların birim elemanı ($\bar{+}$) işaretleri de gözönüne alındığında

$$\xi = 1/(m_0^2 + m_1^2) \begin{pmatrix} m_0 \bar{+} m_1 \\ m_1 \bar{+} m_0 \end{pmatrix} \text{dır. } \begin{pmatrix} X_{11}X_{12} \\ X_{21}X_{22} \end{pmatrix} \text{ nin ters elemanı}$$

$P=(m_0^2+m_1^2)(X_{11}Y_{22}-X_{12}X_{21})$ göstermek üzere:

$$Y_{11}=[m_0(m_0X_{22}+m_1X_{21})-m_1(m_0X_{12}+m_1X_{11})]/P$$

$$Y_{12}=[-m_0(m_0X_{12}+m_1X_{11})-m_1(m_0X_{22}+m_1X_{21})]/P$$

$$Y_{21}=[-m_0(m_0X_{21}-m_1X_{22})+m_1(m_0X_{11}-m_1X_{12})]/P$$

$$Y_{22}=[m_0(m_0X_{11}-m_1X_{12})+m_1(m_0X_{21}-m_1X_{22})]/P \text{ olur.}$$

$n=3$ halinde, gen çarpım kurallı matris kombinezonları halka sınıfını ve bir elemanını aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz.

$$(Z_{uv})=\sum_{k=1}^3 m_0(X_{uk}Y_{rv})+m_1(X_{uk}Y_{sv})+m_2(X_{uk}Y_{tv})$$

$(k+r)$ nin (n) ile bölümü (0) kalanını, $(k+s)$ 'in (n) ile bölümü

(1) kalanını, $(k+t)$ 'nin (n) ile bölümü (2) kalanını verecektir.

Halkanın (L) işlemine göre (ξ) etkisiz birim elemanı

$$L_0=m_1m_2-m_0^2; \quad L_1=m_0m_2-m_1^2; \quad L_2=m_0m_1-m_2^2.$$

$N=m_0L_0+m_1L_1+m_2L_2$ ile gösterildiğinde

$$=(1/N) \begin{pmatrix} L_2L_0L_1 \\ L_0L_1L_2 \\ L_1L_2L_0 \end{pmatrix} \text{ olur. Örneğin:}$$

$$m_0=1 \quad m_1=0 \quad m_2=0 \quad \text{için birim eleman: } \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_0=0 \quad m_1=1 \quad m_2=0 \quad \text{için birim eleman: } \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ve } \begin{matrix} m_0=0 \\ m_1=0 \\ m_2=1 \end{matrix} \text{ için}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

TEOREM: 5.29.35 ile ortayan konan gen çarpım kurallı, matris kombinezonları cümlesi değişimli olmayan birimli halkalar olmakta (2×2) kombinezonları hariç, klasik çarpım kurallı matris halkaları bu sınıfa ait bulunmamaktadır.

Bu sınıfta $m_0, m_1, \dots, m_{n-1} \in R$ değer takımı için $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$ sayıda halka bulunmaktadır. $\binom{n}{k}$ burada n sayıda $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ elemanlarının (k) lı kombinezonlarını ifade etmektedir. Örneğin (2×2) matrisleri ve m_0, m_1 takımı için kombinezon sayısı (3)dür. R içinde (n) elemanlı $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ değer takım kombinezonları sonsuz sayıda

olduğundan (nxn) matrisleri kombinezonları halka sınıfında sonsuz sayıda halka var demektir.

TANIM: 5.30- GEN ÇARPIMLI (2x2) MATRİS KOMBİNEZONLARI
CİSİMLER ALT SINIFI VE QUATERNİONLAR CİSİMİ

a) CİSİMLER ALT SINIFI

TEOREM : 5.29.35'in n=2 için (2x2) matrisleri konusunda isbat edilen gen çarpım kurallı

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m_0(X_{11}Y_{11}+X_{12}Y_{21})+m_1(X_{11}Y_{21}-X_{12}Y_{11}) & m_0(X_{11}Y_{12}+X_{12}Y_{22})+m_1(X_{11}Y_{22}-X_{12}Y_{12}) \\ m_0(X_{21}Y_{11}+X_{22}Y_{21})+m_1(X_{21}Y_{21}-X_{22}Y_{11}) & m_0(X_{21}Y_{12}+X_{22}Y_{22})+m_1(X_{21}Y_{22}-X_{22}Y_{12}) \end{pmatrix}$$

matris kombinezonları sınıfının

$m_0^2+m_1^2 \neq 0$ ve $m_0^2-m_1^2 \neq 0$, $X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21} \neq 0$ koşullarının belirlediği sınıfa gen çarpım kurallı (2x2) matris kombinezonları sınıfının cisimler alt cümlesi diyeceğiz.

Z_{12} , Z_{22} elemanlarını belirleyen ifadede (-) halin alınması takdirinde cisimler sınıfının (ζ) birim elemanı

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1/m_0^2+m_1^2 & 0 \\ 0 & 1/m_0^2+m_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 & -m_1 \\ m_1 & m_0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \text{ nin ters elemanının}$$

$P=(m_0^2-m_1^2)(X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}) \neq 0$ olarak n=2 isbatında gösterilen

$$Y_{11} = [m_0(m_0X_{22}+m_1X_{21})+m_1(m_0X_{12}+m_1X_{11})] / P$$

$$Y_{12} = [-m_0(m_0X_{12}+m_1X_{11})-m_1(m_0X_{22}+m_1X_{21})] / P$$

..... olacağı bilinmektedir.

b) QUATERNİONLAR

Gen çarpım kurallı (2x2) matris kombinezonları cisimler alt sınıfının (-) koşulunda $m_0=1$, $m_1=0$ değerleri ve $X_{11}=A+C\hat{i}$, $X_{12}=B+D\hat{i}$, $X_{21}=-B+D\hat{i}$, $X_{22}=A-C\hat{i}$ elemanlarının belirlediği cisime QUATERNİON denir. W.R.HAMILTON tarafından (İrlandalı matematikçi) 1844 de tebliğ edilmiştir.

Cismin birim elemanı $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ 'nin $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ ters elemanı

$$P = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \text{ olarak } Y_{11} = (A - C\mathbf{i})/P; Y_{12} = -(B + D\mathbf{i})/P$$

$$Y_{21} = -(-B + D\mathbf{i})/P; Y_{22} = (A + C\mathbf{i})/P \text{ dir.}$$

c) QUATERNION SINIFI

Gen çarpım kurallı (2x2) matris kombinasyonları cisimler sınıfının (-) koşulunda $X_{11} = m_0 A + m_1 \mathbf{i}$, $X_{12} = m_1 \mathbf{i} + m_0 D$, $X_{21} = m_1 \mathbf{i} - m_0 D$, $X_{22} = m_0 A - m_1 \mathbf{i}$ elemanlarının oluşturduğu matrisler cismine quaternionlar sınıfı denecektir.

Quaternion sınıfının birim elemanı $\xi = \begin{pmatrix} m_0 & -m_1 \\ m_1 & m_0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$

ters elemanı $P = (m_0^2 + m_1^2) [m_0^2(A^2 + D^2) + 2m_1^2]$ olarak

$$Y_{11} = \{ m_0 [(m_0^2 - m_1^2) A - 2m_0 m_1 D] - m_1 (m_0^2 + m_1^2) \mathbf{i} \} / P$$

$$Y_{12} = \{ -m_0 [(m_0^2 - m_1^2) D + 2m_0 m_1 A] + m_1 (m_0^2 + m_1^2) \mathbf{i} \} / P$$

$$Y_{21} = \{ m_0 [(m_0^2 - m_1^2) D + 2m_0 m_1 A] + m_1 (m_0^2 + m_1^2) \mathbf{i} \} / P$$

$$Y_{22} = \{ m_0 [(m_0^2 - m_1^2) A - 2m_0 m_1 D] + m_1 (m_0^2 + m_1^2) \mathbf{i} \} / P \text{ bulunur.}$$

TEOREM: 5.29.36

$X_{uv}, Y_{uv}, m_0, m_1 \in \mathbb{R}$ ve $(X_{uv}), (Y_{uv}), (2 \times 2)$ matrisleri olarak (T), (Δ) iç işlemleri:

$$(T) \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} + Y_{11} & X_{12} + Y_{12} \\ X_{21} + Y_{21} & X_{22} + Y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 X_{11} Y_{11} + m_1 (X_{11} Y_{21} + X_{12} Y_{11}) & m_0 X_{11} Y_{12} + m_1 (X_{11} Y_{22} + X_{12} Y_{12}) \\ m_0 X_{21} Y_{11} + m_1 (X_{21} Y_{21} + X_{22} Y_{11}) & m_0 X_{21} Y_{12} + m_1 (X_{21} Y_{22} + X_{22} Y_{12}) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \Delta' \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 X_{12} Y_{21} + m_1 (X_{11} Y_{21} + X_{12} Y_{11}) & m_0 X_{12} Y_{12} + m_1 (X_{12} Y_{22} + X_{22} Y_{12}) \\ m_0 X_{22} Y_{21} + m_1 (X_{21} Y_{21} + X_{22} Y_{11}) & m_0 X_{22} Y_{22} + m_1 (X_{21} Y_{22} + X_{22} Y_{12}) \end{pmatrix}$$

ile tanımlanmış ise (X) matris cümlesi değişimli olmayan birimli halka dizisi oluşturur.

İsbat:

Yalnız (Δ) tanımı için birleşimlilik kanıtlanacak, istenirse (Δ') benzer yolla doğrulanabilecektir.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \Delta \left[\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliğin her iki yanında bir elemanın örneğin (z_{11}) 'in eşitliğini ayrıntılı olarak gösterecek, diğerlerinin eşitliğini isteyen okuyucuya bırakacağız. Eşitliğin sol yanında (z_{11}) elemanı

$$z_{11} = m_0 [m_0 X_{11} Y_{11} + m_1 (X_{11} Y_{21} + X_{12} Y_{11})] u_{11} + m_1 \{ [m_0 X_{11} Y_{11} + m_1 (X_{11} Y_{21} + X_{12} Y_{11})] u_{21} + [m_0 X_{11} Y_{12} + m_1 (X_{11} Y_{22} + X_{12} Y_{12})] u_{11} \},$$

$$z_{11} = m_0 X_{11} [m_0 Y_{11} u_{11} + m_1 (Y_{11} u_{21} + Y_{12} u_{11})] + m_1 \{ X_{11} [m_0 Y_{21} u_{11} + m_1 (Y_{21} u_{21} + Y_{22} u_{11})] + X_{12} [m_0 Y_{11} u_{11} + m_1 (Y_{11} u_{21} + Y_{12} u_{11})] \}$$

eşit ifadeler ile belirlenmiştir. işleminin $(\frac{1}{m_1})$ birim elemanı $\begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ m_1 & -m_0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$

ters eleman $P = m_1^2 (X_{12} X_{21} - X_{11} X_{22})$ yi göstermek üzere

$$Y_{11} = -X_{11}/P; Y_{12} = (m_0 X_{11} + m_1 X_{21})/m_1 P, Y_{21} = (m_0 X_{11} + m_1 X_{12})/m_1 P$$

$$Y_{22} = -[m_0 (m_0 X_{11} + m_1 X_{12}) + m_1 (m_0 X_{21} + m_1 X_{22})] / m_1^2 P \text{ olur.}$$

TEOREM: 5.29.36 ile verilen m_0, m_1 parametrelerine bağlı olarak ortaya konan (2×2) matris halkalar sınıfına DUAL ÇARPIMLI (2×2) MATRİS KOMBİNEZONLARI HALKA SINIFI denecektir.

TANIM: 5.30-- (2×2) MATRİSLERİNDE DUAL CİSİMLER SINIFI

TEOREM: 5.29.36 daki dual çarpımlı (2×2) matris kombinezonları halka sınıfında $m_0 \neq 0, m_1 \neq 0$ ve

$X_{11} = A + Bi, X_{12} = C + Di, X_{21} = C - Di, X_{22} = -A + Bi$ koşullarının belirlediği sınıfa (2×2) matrislerinde dual cisimler sınıfı denecektir.

R^2 DE CİSİMLERİ VE HALKALARI SINIFLAMA YÖNTEMİ VE
 R^2 DE QUATERNİON, FORM QUATERNİON, DEFORM QUATERNİON
 MINIMUM QUATERNİON

TANIM: 6.31- R^2 DE CİSİMLER VE HALKALAR SINIFI

R^2 de, elemanları bir dizi cisim veya halka olan cümleye cisimler sınıfı veya halkalar sınıfı denecektir.

TEOREM: 6.31.37

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $m, n \in R, (m^2 + n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(T), (\perp)$ iç işlemleri:

$$(T): (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(\perp): (X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = [m(X_1Y_1 - X_2Y_2) - n(X_1Y_2 + X_2Y_1), n(X_1Y_1 - X_2Y_2) + m(X_1Y_2 + X_2Y_1)]$$

ile tanımlanan $R^2 (m, n)$ cümleleri birimli, değişimli cisimlerdir.

İsbat:

(T) iç işleminin gerekli koşulları sağladığı açıktır. $(\perp)$ iç işleminin birleşimlilik ve (T) üzerine dağılımlılık değişimlilik nitelikleri teoremin hipotezinden kolayca gösterilebilir.

$$(\perp) \text{ işleminin birim elemanı } \xi = (m/(m^2 + n^2), -n/(m^2 + n^2))$$

$(R^2(m, n), \perp)$ gurubu (T) nin $e = (0, 0)$ elemanını içermez; zira:

$\forall (X_1, X_2) \in R^2 (m, n)$ için $(R^2(m, n), T, \perp)$ üçlüsü

$(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = \xi = (m/(m^2 + n^2), -n/(m^2 + n^2))$ olan bir (Y_1, Y_2) nin varlığını gerektirir ki bu,

$$Y_1 = ((m^2 - n^2)X_1 - 2mnX_2)/(m^2 + n^2)^2 \cdot (X_1^2 + X_2^2)$$

$$Y_2 = -((m^2 - n^2)X_2 + 2mnX_1)/(m^2 + n^2)^2 \cdot (X_1^2 + X_2^2) \text{ dur.}$$

$(X_1, X_2) = (0, 0)$ elemanı için (Y_1, Y_2) mevcut olmadığından $(\perp)$ işlemine göre $(0, 0) \notin (R^2(m, n), \perp)$ dır.

Bu teorem ile cisimler cümlesi olduğu saptanan $R^2 (m, n)$ cümlesine KOMPLEKS CİSİMLER SINIFI denecek ve $\Phi(m, n)$ notasyonu ile gösterilecektir.

TANIM: 6.32-KOMPLEKS SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in \mathbb{R}$ ($m^2 + n^2 \neq 0$) önceden seçilmiş parametreler olarak:
 $(mX_1 - nX_2) + (nX_1 + mX_2)i$, yapıları sayılara kompleks sayı cümleleri sınıfı
adı verilecek ve $C(m, n)$ ile ifade edilecektir.

TEOREM: 6.32.38

$\Phi(m, n)$ cisim sınıfı ile $C(m, n)$ kompleks sayı cümleleri sınıfı
 $(T), (\perp)$ ve $(+), (\cdot)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$$(X_1, X_2) \in \Phi(m, n) \rightarrow (mX_1 - nX_2) + (nX_1 + mX_2)i \in C(m, n)$$

$$(Y_1, Y_2) \in \Phi(m, n) \rightarrow (mY_1 - nY_2) + (nY_1 + mY_2)i \in C(m, n) \text{ olsun}$$

$(T), (+)$ işlemleri açısından:

$$(T)(X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in \Phi(m, n)$$

$$(+)[(mX_1 - nX_2) + (nX_1 + mX_2)i] + [(mY_1 - nY_2) + (nY_1 + mY_2)i] =$$

$$m(X_1 + Y_1) - n(X_2 + Y_2) + [n(X_1 + Y_1) + m(X_2 + Y_2)]i$$

$$(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \rightarrow m(X_1 + Y_1) - n(X_2 + Y_2) + [n(X_1 + Y_1) + m(X_2 + Y_2)]i$$

$(\perp), (\cdot)$ işlemleri açısından:

$$(\perp)(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = [m(X_1Y_1 - X_2Y_2) + n(X_1Y_2 + X_2Y_1), n(X_1Y_1 - X_2Y_2) + m(X_1Y_2 + X_2Y_1)]$$

$$(\cdot)[(mX_1 - nX_2) + (nX_1 + mX_2)i] \cdot [(mY_1 - nY_2) + (nY_1 + mY_2)i] =$$

$$m[m(X_1Y_1 - X_2Y_2) - n(X_1Y_2 + X_2Y_1)] - n[n(X_1Y_1 - X_2Y_2) + m(X_1Y_2 + X_2Y_1)] +$$

$$\{n[m(X_1Y_2 - X_2Y_2) - n(X_1Y_2 + X_2Y_1)] + m[n(X_1Y_1 - X_2Y_2) + m(X_1Y_2 + X_2Y_1)]\}i \text{ olur.}$$

Bu sonuçla $(\perp), (\cdot)$ işlemlerinin izomorf olduğu anlaşılır.

TANIM: 6.33-FORM QUATERNION

$\mathbb{R}^2$ de, cisim teşkil eden ve tanımlanan $i^2 = -1$ işlemleri karşısında
elemanları belirli bir yapı özelliğini koruyan cümlelere form quater-
nionlar denecektir.

TEOREM: 6.33.39

$X_1, X_2, m, n \in \mathbb{R}$; m, n önceden seçilmiş ($m^2 + n^2 \neq 0$) parametreler olarak,

$(mX_1 + nX_2, mX_2 - nX_1) \in \Phi(m, n)$ cisimler sınıfına dahil elemanların
oluşturduğu $\Phi(m, n)$ nin alt sınıfı form quaternion sınıfı oluşturur.

İsbat:

$\Phi(m, n)$ cisimler sınıfına dahil olarak tanımlanan

(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) elemanlar cümlesinin $\Phi(m, n)$ nin iç işlemleri muvacehesinde yapısal özelliğini koruduğunu saptamak gereklidir.

(T) iç işlem karşısında

$$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)T(mY_1+nY_2, mY_2-nY_1)=$$

$$[m(X_1+Y_1)+n(X_2+Y_2), m(X_2+Y_2)+n(X_1+Y_1)] \text{ ve } (\downarrow) \text{ iç işlemi}$$

$$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)\downarrow(mX_1-nY_2, mY_2-nY_1)=$$

$$(m^2+n^2)[m(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1), m(X_1Y_2+X_2Y_1)+n(X_1Y_1-X_2Y_2)] \text{ veya}$$

$$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \Phi(m, n)$$

$$(X_1, X_2)\downarrow(Y_1, Y_2)=(X, Y) \text{ olduğu takdirde}$$

$$[(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)\downarrow(mY_1+nY_2, mY_2-nY_1)] =$$

$$[(m^2+n^2)X+2mnY, (m^2+n^2)Y-2mnX] \text{ olduğunu görürüz.}$$

TANIM: 6.34- MINIMUM QUATERNION

$\Phi^2(m, n)$ kompleks cisimler sınıfı içinde tanımlanabilir form quaternionlara MINIMUM QUATERNIONLAR denecektir.

$C \times C$ den daha küçük boyutta bir form quaternion tanımı mümkün olmadığından minimum deyimi kullanılmıştır.

TEOREM: 6.34.40

Teorem 6.33.39 da $(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) \in \Phi(m, n)$ form quaternionlar sınıfının

$m^2+n^2=1$, $m>1$ veya $m<-1$ koşullarının belirlediği alt sınıflar minimum quaternionlardır.

İsbat:

Teoremin hipotezini oluşturan koşullarda örneğin

$$m=\sqrt{2}, n=i, (m^2+n^2=1) \text{ değerleri için}$$

$$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) \text{ aynı form quaternion}$$

$$(\sqrt{2}X_1+X_2i, \sqrt{2}X_2-X_1i) \text{ olarak ve yine örneğin } m=\sqrt{3}, n=\sqrt{2}i$$

$$\text{ için } (\sqrt{3}X_1+\sqrt{2}X_2i, \sqrt{3}X_2-\sqrt{2}X_1i) \text{ olarak } C^2 \text{ de tanımlanmış olur. Ve bunlar}$$

$\Phi(m, n)$ cisimler sınıfının birer elemanı olan cisim cümleleridir.

Bu sınıfı $Q_2(m,n)$ veya $Q_2(m^2+n^2=1)$ ile göstereceğiz.

TANIM: 6.35-(S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $m, n \in R, (m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak $T, \perp$ iç işlemleri

$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$ ve

$(\perp) (X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = [m(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1), n(X_1Y_1+X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)]$ ile tanımlanan $R^2 (m,n)$ cümleleri (S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI Teşkil eder.

İsbat:

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan $R^2 (m,n)$ cümlelerinin bir halka olduğu, daha sonra, m, n 'nin belirli değerleri için, m, n nin değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde, (s) faktörlü halkanın bulunduğunu göstermek gerekmektedir.

(T) iç işleminin, Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır. Sıfır eleman $e = (0,0)$ dir.

$(\perp)$ iç işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık nitelikleri hipotezden ayrıca görülebilmektedir. $(\perp)$ nin etkisiz (birim) elemanı $\epsilon = (m/(m^2-n^2), -n/(m^2-n^2))$ dir. $(\perp)$ işlemine göre

$\forall (X_1, X_2) \in R^2(m,n)$ nin, (Y_1, Y_2) ters elemanı :

$(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (m/(m^2-n^2), -n/(m^2-n^2))$ den

$Y_1 = [(m^2+n^2)X_1 + 2mnX_2] / (m^2-n^2)^2 (X_1^2 - X_2^2)$

$Y_2 = -[(m^2+n^2)X_2 + 2mnX_1] / (m^2-n^2)^2 (X_1^2 - X_2^2)$ olur. $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcut olur.

(S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI denen bu matematik yapılar $m=1, n=0$ için $\$(1,0), (s)$ faktörlü halkayı tanımlar.

TANIM: 6.35-(S) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in R; (m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak: $(mX_1+nX_2)+(nX_1+mX_2)s, (s^2=1)$ yapısındaki sayılara (s) faktörlü sayı cümleleri sınıfı denecek ve $s(m,n)$ ile ifade edilecektir.

İsbat:

$\Phi(m, n)$ cisimler sınıfına dahil olarak tanımlanan

(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) elemanlar cümlesinin $\Phi(m, n)$ nin iç işlemleri muvacehesinde yapısal özelliğini koruduğunu saptamak gereklidir.

(T) iç işlem karşısında

$$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)T(mY_1+nY_2, mY_2-nY_1)=$$

$$[m(X_1+Y_1)+n(X_2+Y_2), m(X_2+Y_2)+n(X_1+Y_1)] \text{ ve } (\downarrow) \text{ iç işlemi}$$

$$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)\downarrow(mX_1-nY_2, mY_2-nY_1)=$$

$$(m^2+n^2)[m(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1), m(X_1Y_2+X_2Y_1)+n(X_1Y_1-X_2Y_2)] \text{ veya}$$

$$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \Phi(m, n)$$

$$(X_1, X_2)\downarrow(Y_1, Y_2)=(X, Y) \text{ olduğu takdirde}$$

$$[(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1)\downarrow(mY_1+nY_2, mY_2-nY_1)] =$$

$$[(m^2+n^2)X+2mnY, (m^2-n^2)Y-2mnX] \text{ olduğunu görürüz.}$$

TANIM: 6.34- MINIMUM QUATERNION

$\Phi^2(m, n)$ kompleks cisimler sınıfı içinde tanımlanabilir form quaternionlara MINIMUM QUATERNIONLAR deneyecektir.

$C \times C$ den daha küçük boyutta bir form quaternion tanımı mümkün olmadığından minimum deyimi kullanılmıştır.

TEOREM: 6.34.40

Teorem 6.33.39 da $(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) \in \Phi(m, n)$ form quaternionlar sınıfının

$m^2+n^2=1, m>1$ veya $m<-1$ koşullarının belirlediği alt sınıflar minimum quaternionlardır.

İsbat:

Teoremin hipotezini oluşturan koşullarda örneğin

$$m=\sqrt{2}, n=i, (m^2+n^2=1) \text{ değerleri için}$$

$$(mX_1+nX_2, mX_2-nX_1) \text{ minum form quaternion}$$

$$(\sqrt{2}X_1+X_2i, \sqrt{2}X_2-X_1i) \text{ olarak ve yine örneğin } m=\sqrt{3}, n=\sqrt{2} i$$

$$\text{ için } (\sqrt{3}X_1+\sqrt{2}X_2i, \sqrt{3}X_2-\sqrt{2}X_1i) \text{ olarak } C^2 \text{ de tanımlanmış olur. Ve bunlar}$$

$\Phi(m, n)$ cisimler sınıfının birer elemanı olan cisim cümleleridir.

Bu sınıfı $Q_2(m,n)$ veya $Q_2(m^2+n^2=1)$ ile göstereceğiz.

TANIM: 6.35-(S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $m, n \in R, (m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak $T, \perp$ iç işlemleri

(T) $(X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in R^2$ ve

($\perp$) $(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = [m(X_1Y_1+X_2Y_2)+n(X_1Y_2+X_2Y_1), n(X_1Y_1+X_2Y_2)+m(X_1Y_2+X_2Y_1)]$ ile tanımlanan $R^2(m,n)$ cümleleri (S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI Teşkil eder.

İsbat:

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan $R^2(m,n)$ cümlelerinin bir halka olduğu, daha sonra, m, n 'nin belirli değerleri için, m, n nin değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde, (s) faktörlü halkanın bulunduğunu göstermek gerekmektedir.

(T) iç işleminin, Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır. Sıfır eleman $e = (0,0)$ dır.

($\perp$) iç işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık nitelikleri hipotezden ayrıca görülebilmektedir. ($\perp$) nin etkisiz (birim) elemanı $\epsilon = (m/(m^2-n^2), -n/(m^2-n^2))$ dir. ($\perp$) işlemine göre

$\forall (X_1, X_2) \in R^2(m,n)$ nin, (Y_1, Y_2) ters elemanı :

$(X_1, X_2)\perp(Y_1, Y_2) = (m/(m^2-n^2), -n/(m^2-n^2))$ den

$$Y_1 = [(m^2+n^2)X_1 + 2mnX_2] / (m^2-n^2)^2 (X_1^2 - X_2^2)$$

$Y_2 = -[(m^2+n^2)X_2 + 2mnX_1] / (m^2-n^2)^2 (X_1^2 - X_2^2)$ olur. $X_1 \neq X_2$ olan bütün elemanların ters elemanları mevcut olur.

(S) FAKTÖRLÜ HALKALAR SINIFI denen bu matematik yapılar $m=1, n=0$ için $\$(1,0)$, (s) faktörlü halkayı tanımlar.

TANIM: 6.35-(S) FAKTÖRLÜ SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in R; (m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak: $(mX_1+nX_2)+(nX_1+mX_2)s, (s^2=1)$ yapısındaki sayılara (s) faktörlü sayı cümleleri sınıfı denecek ve $s(m,n)$ ile ifade edilecektir.

ve $-1 < n < 1$ için, m, n değerlerinin tayin edeceği $\mathbb{H}(m, n)$ halkaları
 AQUATERNIONLAR SINIFI oluşturur.

İsbat:

Teoremin hipotezini oluşturan koşullarda örneğin

$n=1/2$, $m=(\sqrt{3}/2)i$, $(m^2-n^2=-1)$ değerleri için

$[(\sqrt{3}/2)iX_1-(1/2)X_2, (\sqrt{3}/2)iX_2-(1/2)X_1]$ olarak ve yine örneğin

$n=1/3$, $m=(\sqrt{2}/3)i$ $(m^2-n^2=-1)$ değerleri için

$[(\sqrt{2}/3)iX_1-(1/3)X_2, (\sqrt{2}/3)iX_2-(1/3)X_1]$ olarak $\mathbb{C}^2$ de tanımlanmış

olur ve bunlar deform quaternionlar sınıfının bir alt sınıfını oluştururlar.

Aquaternion sınıflarını da $Q_2^*(m, n)$, $Q_2^*(m^2-n^2=-1)$ ile ifade edeceğiz.

TANIM: 6.38- DUAL HALKALAR SINIFI

Çarpmada, içerdigi parametrelerin değerlerine göre $\mathbb{R}^2$ de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda Dual sayılar halkasını tanımlayan halka dizisine dual halkalar sınıfı denilecek ve $\mathbb{H}(m, n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.38.44-

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ ($m^2+n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak, $T, \perp$ iç işlemleri :

(T) $(X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in \mathbb{R}^2$

($\perp$) $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [mX_1Y_1, nX_1Y_1+m(X_1Y_2+X_2Y_1)] \in \mathbb{R}^2$ ile, tanımlanan $\mathbb{R}^2(m, n)$ cümleleri Dual halkalar sınıfını teşkil eder.

İsbat:

İç işlemleri teoremin hipotezi ile tanımlanan $\mathbb{R}^2(m, n)$ cümlelerinin önce bir halka olduğu, daha sonra m, n nin belirli değerleri için, m, n nin değişik değerlerine göre teşkil olunan halka sınıfı içinde dual sayılar halkasının bulunduğunu göstermek gerekmektedir.

($\perp$) iç işleminin, birleşimlilik ve (T) üzerine dağılımlılık niteliği hipotezden görülebilir; (T) iç işleminin ise Abel gurubunun gerektirdiği koşulları sağladığı açıktır.

(1) nin etkisiz birim elemanı $\xi = (1/m, -n/m^2)$ ve dual birim $\S = (0, 1/m)$ dir; () işlemine göre, (X_1, X_2) nin (Y_1, Y_2) ters elemanı $Y_1 = 1/m^2 X_1$, $Y_2 = -(2nX_1 + mX_2)/m^3 X_1$ olur; $X_1 \neq 0$ olan elemanların ters elemanları mevcuttur.

Dual sayı halkaları sınıfı denen bu matematik yapılar $m=1$, $n=0$; $(1,0)$ dual sayılar halkasını tanımlar.

TANIM: 6.39- DUAL SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in \mathbb{R}$ ($m^2 + n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak), $mX_1 + (mX_2 + nX_1)\S$ yapılı sayılara, dual sayı cümleleri sınıfı denecek ve $D(m, n)$ ile ifade edilecektir.

TEOREM: 6.39.45

$\mathbb{D}(m, n)$ dual halkalar sınıfı ile $D(m, n)$ dual sayı cümleleri sınıfı, $(T), (1)$ ve $(+), (.)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$$(X_1, X_2) \in \mathbb{D}(m, n) \rightarrow mX_1 + (mX_2 + nX_1)\S \in D(m, n)$$

$(Y_1, Y_2) \in \mathbb{D}(m, n) \rightarrow mY_1 + (mY_2 + nY_1)\S \in D(m, n)$ olarak $(T), (+)$ işlemleri açısından

$$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in \mathbb{D}(m, n)$$

$$(+) [mX_1 + (mX_2 + nX_1)\S] + [mY_1 + (mY_2 + nY_1)\S] =$$

$$m(X_1 + Y_1) + [m(X_2 + Y_2) + n(X_1 + Y_1)]\S \text{ ve } (1), (.) \text{ işlemleri açısından}$$

$$(1) (X_1, X_2)1(Y_1, Y_2) = [mX_1Y_1, nX_1Y_1 + m(X_1Y_2 + X_2Y_1)]\S$$

$$[mX_1 + (mX_2 + nX_1)\S] \cdot [mY_1 + (mY_2 + nY_1)\S] =$$

$$m(mX_1Y_1) + [m(nX_1Y_1 + m(X_1Y_2 + X_2Y_1)) + n(X_1Y_1)]\S \text{ sonuçları izomorfizmi}$$

$$(a, 0) \rightarrow a(m + n\S); \text{ ve } (0, b) \rightarrow mb\S \text{ dur.}$$

TANIM: 6.39- DUAL DEFORM QUATERNION

Eleman yapıları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğini koruyan ve parametrelerin özel bir durumunda dual sayılar halkasını veren cisim olmayan halka nitelikli cümlelere DUAL DEFORM QUATERNION denecektir.

TEOREM: 6.39.45

$X_1 \cdot X_2$, $m, n \in \mathbb{R}$ ($m^2 + n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(mX_1, mX_2 - nX_1) \in \mathbb{D}(m, n)$ dual halka sınıfları deform quaternionlardır. İsbat:

Sadece $\mathbb{D}(m, n)$ halka sınıfının iç işlemleri karşısında, eleman niteliğinin korunduğu ve m, n nin değerleri için dual sayılar halkasını belirlediği saptanacaktır. (T) ve (L) iç işlemleri :

$$(T) (mX_1, mX_2 - nX_1) T (mY_1, mY_2 - nY_1) =$$

$$[m(X_1 + Y_1), m(X_2 + Y_2) - n(X_1 - Y_1)]$$

$$(L) (mX_1, mX_2 - nX_1) L (mY_1, mY_2 - nY_1) =$$

$$m^2 [mX_1 Y_1, m(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) - nX_1 Y_1] \text{ .dur ve bu sonuçla (T), (L) iç iş-}$$

lemleri ile elemanların yapı özelliğinin korunduğu görülmektedir.

TANIM: 6.40- DUAL AQUATERNION

$\mathbb{C}^2$ de, tanımlanabilir dual deform quaternionlara dual aquaternion denecektir.

TEOREM: 6.40.46

Teorem 6.39.46 da a) $m^2 = -1$, $n \in \mathbb{R}$; b) $n^2 = -1$, $m \in \mathbb{R}$ değerlerinin tanımladığı dual deform quaternionları aquaterniondur.

İsbat:

a) $m^2 = -1$ veya $m = \pm i$, $n = 1 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$ için

$$(mX_1, mX_2 - nX_1) \rightarrow (\pm iX_1, \pm iX_2 - X_1) \text{ ve}$$

b) $n^2 = -1$, veya $n = \pm i$, $m \in \mathbb{R}$ (örneğin $m = 1$) için

$$(mX_1, mX_2 - nX_1) \rightarrow (X_1, X_2 - X_1, i) \text{ } \mathbb{C}^2 \text{ de tanımlanmış olacaktır.}$$

TANIM: 6.41- HELİSEL CİSİMLER SINIFI

Çarpımda içerdiği parametrelerin değerlerine göre $\mathbb{R}^2$ de bir dizi cisim oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda, helisel cismi tanımlayan cisimler dizisine HELİSEL CİSİMLER SINIFI denecek ve $\mathbb{H}(m, n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.41.47

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ ($m^2 + n^2 \neq 0$ önceden seçilmiş parametreler olarak) (T), (L) iç işlemleri:

$$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$$

$$(L) (X_1, X_2)L(Y_1, Y_2) = \begin{bmatrix} (m-n/2)(X_1Y_1 - X_2Y_2) - n(X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2), \\ n(X_1Y_1 - X_2Y_2) + (m+n/2)(X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2) \end{bmatrix} \text{ ile}$$

tanımlanan R^2 (m, n) cümleleri değişimli HELİSEL CİSİMLER SINIFI dır.

İsbat:

$(T), (L)$ işlemleri ile bu cümlelerin cisim olduğu ve, m, n parametrelerin belirli durumunda helisel sayılar cismini içerdiği gösterilecektir. Önce cisim aksiyomlarının gerçeğlendiğini gösterelim: (T) işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır. (L) işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık niteliği hipotezden kolayca görülebilir.

(L) nin birim elemanı:

$$\xi = (m+n/2)(m^2+3n^2/4), -n/(m^2+3n^2/4)$$

$(R^2(m, n), L)$ ikilisi, (T) nin sıfır elemanını içermez; zira

$\forall (X_1, X_2) \in R^2(m, n)$ için, $(R^2(m, n), T, L)$ üçlüsü

$$(X_1, X_2)L(Y_1, Y_2) = [(m+n/2)(m^2+3n^2/4), -n/(m^2+3n^2/4)] \text{ den}$$

$$Y_1 = [(m^2-3n^2/4+mn)X_1 + (m^2-3n^2/4-mn)X_2] / (m^2+3n^2/4)(X_1^2+X_2^2+X_1X_2)$$

$$Y_2 = [-2mnX_1 - (m^2-3n^2/4+mn)X_2] / (m^2+3n^2/4)(X_1^2+X_2^2+X_1X_2) \text{ olan bir}$$

$(Y_1, Y_2) \in R^2(m, n)$ nin varlığını gerektirir. Burada yalnız $(X_1, X_2) = (0, 0)$ olduğu takdirde (Y_1, Y_2) mevcut değildir. Sıfır elemanı içermeyen ve her elemanın tersinin bulunduğu bu halka bir cisimdir ve $\mathbb{H}(m, n)$ ile gösterilecektir.

$(m=1, n=0)$ için $\mathbb{H}(m, n)$ HELİSEL CİSİMLER SINIFI, helisel cisim tanımlar $\mathbb{H}(1, 0) \rightarrow \mathbb{H}$ dir.

TANIM: 6.42- HELİSEL SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in R, (m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak)

$(m-n/2)X_1 - nX_2 + [(m+n/2)X_2 + nX_1] \cdot h, (h^2=h-1)$ yapısında ve R reel sayılar cümlesinin $(+), (.)$ işlemlerini koruduğu sayılara helisel sayı cümleleri sınıfı denecek ve $H(m, n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.42.48

$\mathbb{H}(m,n)$ helisel cisimler sınıfı ile $H(m,n)$ helisel sayı cümleleri sınıfı, $(T), (\perp)$ ve $(+), (\cdot)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$$(X_1, X_2) \in \mathbb{H}(m,n) \rightarrow (m-n/2)X_1 - nX_2 + [(m+n/2)X_2 + nX_1]h \in H(m,n)$$

$$(Y_1, Y_2) \in \mathbb{H}(m,n) \rightarrow (m-n/2)Y_1 - nY_2 + [(m+n/2)Y_2 + nY_1]h \in H(m,n) \text{ olsun.}$$

$(T), (+)$ işlemleri yönünden karşılığı kurmak kolaydır.

$(\perp), (\cdot)$ işlemleri için

$$(\perp) (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = \left[\begin{array}{l} (m-n/2)(X_1Y_1 - X_2Y_2) - n(X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2), \\ n(X_1Y_1 - X_2Y_2) + (m+n/2)(X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2) \end{array} \right] = (X, Y)$$

$$(\cdot) \left\{ (m-n/2)(X_1 - nX_2 + [(m+n/2)X_2 - nX_1]h) \right\} \cdot \left\{ (m-n/2)Y_1 - nY_2 + [(m+n/2)Y_2 - nY_1]h \right\} = \\ (m-n/2)X - nY + [(m+n/2)X + nY]h \text{ olur ve işlemlerin izomorf olduğu}$$

anlaşılır.

TANIM: 6.43- $\mathbb{H}(m,n)$ DE FORM QUATERNİONLAR

Elemanları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanlarının yapı özelliğinin korunduğu ve parametrelerin özel durumunda, helisel cismi veren cisimlere HELİSEL FORM QUATERNİON denecektir.

TEOREM: 6.43.48

$X_1, X_2, m, n \in \mathbb{R}$, $(m^2 + n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak $[(m+n/2)X_1 + nX_2, (m-n/2)X_2 - nX_1] \in \mathbb{H}(m,n)$ helisel cisimler sınıfına dahil alt cümle, bir form quaternionudur.

İsbat:

$(T), (\perp)$ işlemleri karşısında özel yapıdaki elemanın özelliğinin korunduğu ve m, n nin belirli bir hali için H helisel cismi tanımladığı saptanacaktır.

(T) işlemi ile, elemanın yapı özelliğinin korunduğunu görmek kolaydır. $(\perp)$ işlemi karşısında:

$$[(m+n/2)X_1 + nX_2, (m-n/2)X_2 - nX_1] \perp [(m+n/2)Y_1 + nY_2, (m-n/2)Y_2 - nY_1] = \\ (m^2 + 3n^2/4) \left[\begin{array}{l} (m+n/2)(X_1Y_1 - X_2Y_2) + n(X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2), \\ (m-n/2)(X_1Y_2 + X_2Y_1 + X_2Y_2) - n(X_1Y_1 - X_2Y_2) \end{array} \right] \text{ olup,}$$

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbb{H}(m, n)$ ve $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = (X, Y)$ ise
 $[(m+n/2)X_1 + nX_2, (m-n/2)X_2 - nX_1] \perp [(m+n/2)Y_1 + nY_2, (m-n/2)Y_2 - nY_1] =$
 $[(m^2 + mn - 3n^2/4)X - 2mnY, (m^2 - mn - 3n^2/4)Y - 2mnX]$ olacağını ve elemanın
yapı özelliğinin korunduğunu söyleyeceğiz.

Ve $m=1, n=0$ için, bu sınıf doğrudan helisel cisim tanımlar $\mathbb{H}(1, 0)$

TANIM: 6.44- HELİSEL QUATERNION

C^2 de tanımlanabilir, helisel form quaterniona helisel quaternion denecektir.

TEOREM: 6.44.49

Teorem: 6.43.48 de, $(m^2 + 3n^2/4) = 1, m > 1, m < -1$ koşulları ile m, n değerlerinin belirlediği $\mathbb{H}(m, n)$ form quaternionları C^2 de helisel quaternionlardır.

İsbat:

$m^2 + 3n^2/4 = 1$ de örneğin $m=2, n=\pm 2i$ değerleri ile

$[(m+n/2)X_1 + nX_2, (m-n/2)X_2 - nX_1]$ form quaternionun belirleyeceği

$[2X_1 + (X_1 + 2X_2)i, 2X_2 + (X_2 + 2X_1)i]$ ve yine örneğin:

$m=5, n=\pm 4/\sqrt{3}$ değerlerinin tanımlayacağı,

$[(5+2\sqrt{3}i)X_1 + (4/\sqrt{3})iX_2, (5-2\sqrt{3}i)X_2 + (4/\sqrt{3})iX_1], C^2$ de helisel form quaternionlardır.

TANIM: 6.45- (m, n) HOMOTETİK HALKALAR SINIFI

Çarpmada içerdiği parametrelerin değerlerine göre, R^2 de bir dizi halka oluşturup, parametrelerin belirli bir durumunda, homotetik halkayı tanımlayan halkalar dizisine, HOMOTETİK HALKALAR SINIFI denecek ve $\mathbb{H}(m, n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.45.50

$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R^2$ ve $m, n \in R$ önceden seçilmiş parametreler olarak $(m^2 + n^2 \neq 0)$ iç işlemleri

(T) $(X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in R^2$

() $(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = \begin{bmatrix} (m+n/2)(X_1Y_1 + X_2Y_2) + n(X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2), \\ n(X_1Y_1 + X_2Y_2) + (m-n/2)(X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2) \end{bmatrix}$ ile

tanımlanan $R^2(m, n)$ cümleleri değişimli halkalardır.

İsbat:

(T) iç işleminin gerekli koşulları saptadığı açıktır; etkisiz birim elemanı $e = (0,0)$ dır; (I) işleminin birleşimlilik, (T) üzerine dağılımlılık ve değişimlilik niteliği teoremin hipotezinden kolayca çıkarılabilir. (I) nin birim elemanı :

$$\begin{aligned} z &= [(m-n/2)(m^2-5n^2/4), -n/(m^2-5n^2/4)] ; (X_1, X_2) \text{nin } (Y_1, Y_2) \text{ ters elemanı} \\ Y_1 &= [(m^2-mn+3n^2/4)X_1 - (m^2-n^2/4)X_2] / (m^2-5n^2/4)^2 (X_1^2 - X_2^2 - X_1X_2) \\ Y_2 &= -[(m^2-mn+3n^2/4)X_2 + mnX_1] / (m^2-5n^2/4) (X_1^2 - X_2^2 - X_1X_2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$m=1, n=0$ için $H'(1,0)$ bilinen homotetik halka tanımlanır.

TANIM: 6.46- HOMOTETİK SAYI CÜMLELERİ SINIFI

$X_1, X_2, m, n \in R, (m^2+n^2 \neq 0)$ önceden seçilmiş parametreler olarak)
 $(m+n/2)X_1+nX_2 + [(m-n/2)X_2+nX_1] \cdot h'$, $(h'^2=1-h')$ yapısında ve R reel sayılar cümlesinin $(+), (.)$ işlemlerinin konduğu sayılara homotetik sayı cümleleri sınıfı denecek ve $H'(m,n)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 6.46.51

$H'(m,n)$ homotetik halkalar sınıfı ile $H'(m,n)$ homotetik sayı cümleleri sınıfı $(T), (I)$ ve $(+), (.)$ işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$$(X_1, X_2) \in H'(m,n) \rightarrow (m+n/2)X_1+nX_2 + [(m-n/2)X_2+nX_1] \cdot h'$$

$$(Y_1, Y_2) \in H'(m,n) \rightarrow (m+n/2)Y_1+nY_2 + [(m-n/2)Y_2+nY_1] \cdot h' \text{ olsun}$$

$(T), (+)$ işlemleri için

$$(T) (X_1, X_2)T(Y_1, Y_2) = (X_1+Y_1, X_2+Y_2) \in H'(m,n)$$

$$\begin{aligned} (+) [(m+n/2)X_1+nX_2 + ((m-n/2)X_2+nX_1)h'] + [(m+n/2)Y_1+nY_2 + ((m-n/2)Y_2+nY_1)h'] \\ = (m+n/2)(X_1+Y_1) + n(X_2+Y_2) + [(m-n/2)(X_2+Y_2) + n(X_1+Y_1)] \cdot h' \text{ ve} \end{aligned}$$

$(I), (.)$ işlemleri için

$$(I) (X_1, X_2)I(Y_1, Y_2) = \left[\begin{aligned} &(m+n/2)(X_1Y_1+X_2Y_2) + n(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2) \\ &n(X_1Y_1+X_2Y_2) + (m-n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2) \end{aligned} \right] = (X, Y)$$

$$(.) [(m+n/2)X_1+nX_2 + ((m-n/2)X_2+nX_1)h'] \cdot [(m+n/2)Y_1+nY_2 + ((m-n/2)Y_2+nY_1)h'] =$$

$$(m+n/2)X+nY + [(m-n/2)Y+nX] h' \text{ olur. Bu sonuçlar her iki sınıfın}$$

iç işlemlerine göre izomorf olduğunu gösterir.

$m=1, n=0$ $\mathbb{H}^*(1,0)=\mathbb{H}^*$ bilinen homotetik halkayı tanımlar.

TANIM: 6.47- $\mathbb{H}^*(m,n)$ DE DEFORM QUATERNION

Elemanları parametrik özel bir yapıda olup, iç işlemler karşısında elemanlarının yapı özelliğini koruyan, ve parametrelerin özel bir durumda homotetik halkayı veren-cisim olmayan halka nitelikli cümlelere $\mathbb{H}^*(m,n)$ de DEFORM QUATERNIONLAR denecektir.

TEOREM: 6.47.52

$X_1, X_2, m, n \in \mathbb{R}$ ($m^2+n^2 \neq 0$) önceden seçilmiş parametreler olarak

$[(m-n/2)X_1-nX_2, (m+n/2)X_2-nX_1]$ yapısında olup $\mathbb{H}^*(m,n)$ helisel halkalar sınıfına dahil elemanların oluşturduğu halka bir deform quaternionondur.

İsbat:

$\mathbb{H}^*(m,n)$ nin iç işlemleri karşısında elemanların yapı özelliğinin korunduğu ve m, n nin belirli değeri için $\mathbb{H}^*$ homotetik halkayı belirlediği saptanacaktır. (1) çarpım işlemi karşısında:

$$[(m-n/2)X_1-nX_2, (m+n/2)X_2-nX_1] \cdot [(m-n/2)Y_1-nY_2, (m+n/2)Y_2-nY_1] =$$
$$(m-5n^2/4) \left[\begin{array}{l} (m-n/2)(X_1Y_1+X_2Y_2)-n(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2), \\ (m+n/2)(X_1Y_2+X_2Y_1-X_2Y_2)-n(X_1Y_1+X_2Y_2) \end{array} \right] \text{ olarak eleman}$$

yapı özelliğinin korunduğu ve $m=1, n=0$ için bu sınıfın $\mathbb{H}^*$ homotetik halkayı oluşturduğu görülmektedir.

TANIM: 6.48- HOMOTETİK AQUATERNION

$\mathbb{C}^2$ de tanımlanabilir $\mathbb{H}^*(m,n)$ deform quaterniona homotetik aquaternion denecektir.

TEOREM: 6.48.53

Teorem 6.47.52 de $(m^2-5n^2/4)=1$ de $-1 < m < 1$ koşulları ile m, n nin belirlediği $\mathbb{H}^*(m,n)$ deform quaternionları $\mathbb{C}^2$ de homotetik aquaternionlardır.

İsbat:

$(m^2-5n^2/4)=1$ de örneğin $m=2/3, n=(2/3)i$ değerleri ile

$$[(m-n/2)X_1-nX_2, (m+n/2)X_2-nX_1] \text{ deform quaternionun belirlediği}$$
$$[(2/3-1/3i)X_1-(2/3)X_2i, (2/3+1/3i)X_2-(2/3)X_1i] \text{ , } \mathbb{C}^2 \text{ de homotetik}$$

aquaternionondur.

7.YEDİNCİ KISIM

SINIFLAMA YÖNTEMİ İLE BERKİ HALKA VE CİSİMLERİ

TANIM: 7.49- BERKİ HALKA VE CİSİMLERİ

$S \times C$, $C \times D$, $D \times S$ cümlelerinde, halka ve cisim oluşturabilir, iç işlemlerin tanımlanabilmesi halinde bileşenleri S, C, D den alınan iki bileşenli elemanlar cümlesine BERKİ HALKA veya CİSİMLERİ denmektedir.

TEOREM: 7.49.54

$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R$; $z_1 = X_1 s \in S$, $z_2 = X_2 i \in C$, $(X_1 s, X_2 i) \in S \times C$ ve

$w_1 = Y_1 s \in S$, $w_2 = Y_2 i \in C$; $(Y_1 s, Y_2 i) \in S \times C$ olarak iç işlemleri

(T) $(z_1, z_2)T(w_1, w_2) = (X_1 s, X_2 i)T(Y_1 s, Y_2 i) = [(X_1 + Y_1)s, (X_2 + Y_2)i] \in S \times C$

(I) $(z_1, z_2)I(w_1, w_2) = \left[(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)s + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)i, \right.$
 $\left. (X_1 Y_1 + X_2 Y_2)i - (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)s \right]$ ile tanımlanan

$(S \times C)$ çarpım cümlesi değişimli bir cisimdir. Bu cisim $\mathcal{B}(s, i)$ ile gösterilecektir.

İsbat:

$(S \times C, T)$ ikilisi bir abel gurubudur, değişimli, birleşimlidir.

Sıfır eleman $e = (0, 0)$ ve $(X_1 s, X_2 i)$ nin ters elemanı $(-X_1 s, -X_2 i)$ dir.

(I) $(z_1, z_2)I(w_1, w_2) = (X_1 s, X_2 i)I(Y_1 s, Y_2 i) =$

$$\left[(X_1 Y_1 - X_2 Y_2)s + (X_1 Y_2 si - X_2 Y_1 is)i, \right.$$

$$\left. (X_1 Y_1 - X_2 Y_2)i - (X_1 Y_2 si - X_2 Y_1 is)s \right] \text{ den}$$

$si = -is$, $i^2 = -1$, $s^2 = 1$ eşitlikleri gözönüne alındığında

$$(X_1 s, X_2 i)I(Y_1 s, Y_2 i) = [(X_1 - X_2)Y_1 - (X_1 + X_2)Y_2)s, ((X_1 + X_2)Y_1 + (X_1 - X_2)Y_2)i]$$

sonuç işlemine göre $(S \times C, I)$ ikilisinin birleşimli, (T) üzerine dağılımlı

olduğu; $z = (s/2, -i/2)$ birim elemanına malik olduğu ve (X_1, X_2) nin

(Y_1, Y_2) ters elemanının

$$(Y_1, Y_2) = [-X s/2(X_1^2 + Y_2^2), -X_1 i/2(X_1^2 + Y_1^2)] \text{ mevcut bulunduğu ve } e = (0, 0)$$

sıfır elemanını içermediği kolayca görülebilir.

Aynı yol ve yöntemle $(X_1 i, X_2 s) \in C \times S$ 'ninde bir cisim olduğu tekrarlanabilir.

TEOREM: 7.49.55

$\mathbb{B}(s,i)$ cismi $\mathbb{C}(m,n)$ kompleks cisimler sınıfının $m=1, n=1$ $(1,1)$ cismine $T, \perp$ toplama çarpma iç işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

$$(X_1, X_2) \in \mathbb{C}(1,1), (X_1s, X_2i) \in \mathbb{B}(s,i); (X_1, X_2) \longrightarrow (X_1s, X_2i)$$

$$(Y_1, Y_2) \in \mathbb{C}(1,1), (Y_1s, Y_2i) \in \mathbb{B}(s,i); (Y_1, Y_2) \longrightarrow (Y_1s, Y_2i) \text{ olsun}$$

$\mathbb{C}(1,1)$ de (T) toplama işlemi ve $\mathbb{B}(s,i)$ de (T) toplama işlemi

$$(T) (X_1, X_2) T (Y_1, Y_2) = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \in \mathbb{C}(1,1)$$

$$(T) (X_1s, X_2i) T (Y_1s, Y_2i) = [(X_1 + Y_1)s, (X_2 + Y_2)i] \in \mathbb{B}(s,i)$$

$\mathbb{C}(1,1)$ ve $\mathbb{B}(s,i)$ de $(\perp)$ çarpma işlemleri

$$(\perp) (X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) = [(X_1Y_1 - X_2Y_2) - (X_1Y_2 + X_2Y_1), (X_1Y_1 - X_2Y_2) + (X_1Y_2 + X_2Y_1)]$$

$$(\perp) (X_1s, X_2i) (Y_1s, Y_2i) =$$

$$[(X_1Y_1 - X_2Y_2) - (X_1Y_2 + X_2Y_1))s, ((X_1Y_1 - X_2Y_2) + (X_1Y_2 + X_2Y_1))i] \text{ bu sonuçla}$$

$$(X_1, X_2) \perp (Y_1, Y_2) \longrightarrow (X_1s, X_2i) \perp (Y_1s, Y_2i) \text{ olur.}$$

$$\mathbb{C}(1,1) \text{ de birim eleman } \underline{1} = (1/2, -1/2)$$

$$\mathbb{B}(s,i) \text{ de birim eleman } \underline{1} = (s/2, -i/2) \text{ ve } \mathbb{C}(1,1) \text{ de ters eleman}$$

$$(Y_1, Y_2) = [-X_2/2(X_1^2 + X_2^2), -X_1/2(X_1^2 + X_2^2)] \text{ ve } \mathbb{B}(s,i) \text{ de ters eleman}$$

$$(Y_1s, Y_2i) = [-X_2s/2(X_1^2 + X_2^2), -X_1i/2(X_1^2 + X_2^2)] \text{ dir.}$$

TEOREM: 7.49.56

$\mathbb{B}(s,i)$ cismi ile $B(i, \zeta s, i\zeta) = (X_1 - X_2i)\zeta s - (X_1 + X_2i)i\zeta$ vektör uzayı kendi $(T), (\perp)$ toplama ve çarpma iç işlemlerine göre izomorftur.

İsbat:

Karşılıkların ortaya konarak her iki cümlede $(T), (\perp)$ iç işlemlerinin uygulanması yeterlidir.

TANIM: 7.50- $\mathbb{B}(s,i)$ DE FORM QUATERNION

Elemanları, m, n parametrelerine göre özel bir yapıda olup iç işlemler karşısında elemanların yapı özelliğinin korunduğu ve parametrelerin özel durumunda $\mathbb{B}(s,i)$ cismini veren cisimler sınıfına $\mathbb{B}(s,i)$ DE FORM QUATERNIONLAR denecektir ve bu sınıf $\mathbb{B}(m, n, s, i)$ ile gösterilecektir.

TEOREM: 7.50.57

$X_1, X_2, m, n \in \mathbb{R}; (m^2 + n^2 \neq 0, m+n(1+\sqrt{2}), m=n(-1+\sqrt{2})$ önceden seçilmiş parametreler olarak) elemanları .

$[(mX_1 - nX_2)s, (nX_1 + mX_2)i]$ yapısında olup, $T, \perp$ iç işlemleri $\mathbb{B}(s, i)$ nin işlemleri olarak tanımlanan cümle $\mathbb{B}(s, i)$ DE FORM QUATERNION dur.

İsbat:

$[(mX_1 - nX_2)s, (nX_1 + mX_2)i]$ elemanlarının $\mathbb{B}(s, i)$ işlemleri muvacehesinde cisim olduğunu, yapı özelliğinin korunduğunu ve m, n nin özel değerleri için $\mathbb{B}(s, i)$ yi tanımladığını kanıtlayacağız.

Söz konusu elemanlar için $\mathbb{B}(s, i)$ nin $(T), (\perp)$ iç işlemleri

$$(T) [(mX_1 - nX_2)s, (nX_1 + mX_2)i] T [(mY_1 - nY_2)s, (nY_1 + mY_2)i] =$$

$$\{ [m(X_1 + Y_1) - n(X_2 + Y_2)] s, [n(X_1 + Y_1) + m(X_2 + Y_2) i] \}$$

$$(\perp) m^2 - n^2 - 2mn = P, m^2 - n^2 + 2mn = k \text{ olarak}$$

$$[(mX_1 - nX_2)s, (nX_1 + mX_2)i] \perp [(mY_1 - nY_2)s, (nY_1 + mY_2)i] =$$

$\{ [(PX_1 - kX_2)Y_1 - (PX_1 + kX_2)Y_2] s, [(PX_1 + kX_2)Y_1 + (PX_1 - kX_2)Y_2] i \}$ olduğuna göre, toplama ve çarpmada elemanın m, n parametrelerine göre yapısal özelliğini koruduğu ve

$[\mathbb{B}(m, n, s, i), T]$ ikilisinin Abel gurubu niteliği taşıdığı,

$[\mathbb{B}(m, n, s, i), \perp]$ ikilisinin ise birleşimli ve (T) üzerine dağılımlı olduğu açıktır.

$\mathbb{B}(m, n, s, i)$, n nin $(\mathbb{Z})$ birim elemanı

$$\mathbb{Z} = [(m+n)s/2P, -(m-n)i/2k] \text{ ve } [(mX_1 - nX_2)s, (nX_1 + mX_2)i] \text{ nin}$$

(Y_1, Y_2) ters elemanının

$$Y_1 = (mPX_1 - nkX_2)s/2(P^2X_1^2 + k^2X_2^2)$$

$$Y_2 = (m^2 + n^2)(nkX_1 + mPX_2)i/2(P^2X_1^2 + k^2X_2^2) \text{ olduğu ve}$$

$$P \neq 0 \rightarrow m \neq n(1+\sqrt{2}); k \neq 0 \rightarrow m = n(-1+\sqrt{2}) \text{ olan bütün sınıfların}$$

birer cisim olacağı açıktır.

TEOREM: 7.50.58

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}, z_1 = X_1i - X_2s, z_2 = X_2i + X_1s \quad (CxS)$$

$$W_1 = Y_1i - Y_2s, W_2 = Y_2i + Y_1s; \in (CxS), (X_1i - X_2s, X_2i + X_1s) \in (CxS)^2 \text{ olan}$$

ve iç işlemleri:

$$T) (X_1i - X_2s, X_2i + X_1s)T(Y_1i - Y_2s, Y_2i + Y_1s) =$$

$$[(X_1 + Y_1)i - (X_2 + Y_2)s, (X_2 + Y_2)i + (X_1 + Y_1)s] \in (CxS)^2$$

$$1) (z_1, z_2) \perp (w_1, w_2) = [(X_1Y_1 - X_2Y_2)i - (X_1Y_2 + X_2Y_1)s, (X_1Y_1 - X_2Y_2)s + (X_1Y_2 + X_2Y_1)i]$$

ile tanımlanan $(CxS)^2, T, \perp$ üçlüsü bir BERKİ CİSMİDİR.

İsbat:

$((CxS)^2, T)$ ikilisi tanım nedeniyle bir Abel gurubudur, birleşimli değişimlidir, $e = (0, 0)$ sıfır elemandır; $(\perp)$ işleminin

$$(z_1, z_2) \perp (w_1, w_2) = (X_1i - X_2s, X_2i + X_1s) \perp (Y_1i - Y_2s, Y_2i + Y_1s) =$$

$[(X_1Y_1 - X_2Y_2)i - (X_1Y_2 + X_2Y_1)s, (X_1Y_2 + X_2Y_1)i + (X_1Y_1 - X_2Y_2)s]$ olduğu gözönüne alındığında, $[(CxS)^2, \perp]$ ikilisinin birleşimli ve (T) üzerine dağılımlı olduğu ve (ξ) birim elemanının $\xi = (-i/2, -s/2)$ ve

$X_1i - X_2s, X_2i + X_1s$ elemanının tersi elemanın

$$[-(X_1i + X_2s)/4(X_1^2 + X_2^2), (X_2i - X_1s)/4(X_1^2 + X_2^2)]$$
 olduğu kolayca görülür.

TEOREM: 7.50.59

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in R, z_1 = X_1\xi - X_2i, z_2 = X_2\xi + X_1i \in (DxC)$$

$$w_1 = Y_1\xi - Y_2i, w_2 = Y_2\xi + Y_1i \in (DxC), (X_1\xi - X_2i, X_2\xi + X_1i) \in (DxC)^2 \text{ olarak}$$

$(\perp)$ iç işlemleri:

$$1) (X_1\xi - X_2i, X_2\xi - X_1i)T(Y_1\xi - Y_2i, Y_2\xi + Y_1i) =$$

$$[(X_1 + Y_1)\xi - (X_2 + Y_2)i, (X_2 + Y_2)\xi + (X_1 + Y_1)i] \text{ ve}$$

$$2) (z_1, z_2) (w_1, w_2) =$$

$$[(X_1Y_1 - X_2Y_2)\xi - (X_1Y_2 + X_2Y_1)i, (X_1Y_1 - X_2Y_2)i + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\xi] \text{ ile tanımla-}$$

$[(DxC)^2, T, \perp]$ üçlüsü bir BERKİ CİSMİ, yapısı itibarı ile de bir formaterniondur.

İsbat: (Bak TEOREM.7.50.58)

(BİB.) BIBLIOGRAFYA

NO	KİTABIN ADI	YAYIN YERİ - YILI	YAZARI
(I)	LİNEER CEBİR	DIYARBAKIR ÜNİV.YAY. Matematiki - 1977	H.HİLMİ HACI SALİHOĞLU A.Ü Fen Fak.Ceb.Geo.KÜRS Başkanı
(II)	INTRODUCTION A L'AL EGBRE-ET L'ANALYSE MODERN	DUNOT - Paris 1963	MARC ZAMANSKY Prof.et Doyen da la fac. des sciences de l'üni. Paris
(III)	KİNEMATİK DERSLERİ	A.ÜNİV.FEN FAK.YAY. um 96,mat 27 . 1963	H.R.MÜLLER A.Ü.Fen Fak Mat. Prof.
(IV)	ANALİZ DERSLERİ	MİL. EĞİT.BAK.YAY. 1945	C.J.DE LA VALLEE POUSSİNE Louvain Univ. Prof. Çev : Ratip Berker
(V)	LİNEER TRANSFORMAS yonlar	Öğr.Der.Not.1947	H.L.HAMBURGER A.Ü Fen Fak. Prof Çev : Berki Yurtsever
(VI)	LİNEAR ALGEBRA	Güven Kitabevi	SEY mour Lipschutz
(VII)	YÜKSEK DIFFERENSIYEL FIRAT ÜNİVERSİTESİ GEOMETRİ		Prof. Dr. H.HİLMİ HACISALİHOĞLU

