

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI YENİ SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN
YAKINSAKLIKLARININ VE KARARLILIKLARININ İNCELENMESİ**

FAİK GÜRSOY

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YENİ SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN
YAKINSAKLIKLARININ VE KARARLILIKLARININ İNCELENMESİ

Faik GÜRSOY tarafından hazırlanan tez çalışması 14.01.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Billy E. RHOADES
Indiana Üniversitesi, Bloomington

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Metin BAŞARIR
Sakarya Üniversitesi

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu alışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün BAPK 2012-07-03-DOP02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Çalışmalarımnda her türlü desteği benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof.Dr. Vatan KARAKAYA'ya, eş danışman hocam Sayın Prof.Dr. Billy E. RHOADES' e, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof.Dr. Ekrem SAVAŞ ve Sayın Prof.Dr. Ömer GÖK hocalarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Prof.Dr. Ekrem SAVAŞ, Sayın Prof.Dr. Ömer GÖK, Sayın Prof.Dr. Metin BAŞARIR ve Sayın Doç.Dr. Bayram Ali ERSOY hocalarıma en samimi muhabbetlerimle teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca beni maddi açıdan destekleyen YTÜ Bilimsel Araştırmalar Proje Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim başta canım annem ve babam olmak üzere değerli aileme, çalışmalarım boyunca tüm anlayışı ve desteği ile yanımda olan sevgili eşim Gülden GÜRSOY'a, kızım Elif Bilge GÜRSOY'a ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Ocak, 2014

Faik GÜRSOY

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Analiz ve Fonksiyonel Analiz Kaynaklı Bazı Kavramlar	5
2.2 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Bazı Temel Kavramlar	8
2.3 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Çalışmalarda Kullanılan Bazı Önemli Teoremler, Dönüşümler ve Bu Dönüşümler Arasındaki İlişkiler	11
BÖLÜM 3	
BAZI SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSAKLIKLARI ve YAKINSAKLIKLARI ARASINDAKİ DENKLİK.....	31
BÖLÜM 4	
SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN KARARLILIĞI	67
BÖLÜM 5	

BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİNE KARŞILIK GELEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VERİ BAĞLILIĞI.....	77
BÖLÜM 6	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	90
KAYNAKLAR	92
ÖZGEÇMİŞ	102

SİMGE LİSTESİ

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$	X üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu
$\ \cdot\ : X \rightarrow \mathbb{F}$	X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
(X, d)	X Metrik uzayı
$(X, \ \cdot\)$	X Normlu uzayı
$B(x; r)$	x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x; r)$	x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$T : X \rightarrow Y$	X ten Y ye tanımlı T dönüşümü
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\text{card}F_T$	F_T nin eleman sayısı
$\mathbb{F}$	Cisim ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ yada $\mathbb{C}$)
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Sıfır dahil pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 İki sabit noktaya sahip bir T fonksiyonu	9
Şekil 2. 2 T bir contraction dönüşümdür	12

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5. 1 $u_0 = x_0 = 0$ başlangıç değeri ve $\alpha_n = \beta_n = 1/(n+1)$ seçimi için S dönüşümü ile elde edilen Ishikawa iterasyon yönteminin ilk 100 adımının hesaplanması.....	79

**BAZI YENİ SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN
YAKINSAKLIKLARININ VE KARARLILIKLARININ İNCELENMESİ**

Faik GÜRSOY

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Eş Danışmanı: Prof. Dr. Billy E. Rhoades

Bu çalışmada, Akewe [101] tarafından tanımlanan Jungck-multistep-SP iterasyon yöntemi $S = I$ (özdeşlik dönüşümü) için multistep-SP iterasyon yöntemine indirgendi. Kirk iterasyon yöntemini [91] kullanarak multistep [93], multistep-SP ve S-iterasyon [94] yöntemlerinin hibrid formları olarak Kirk-multistep, Kirk-multistep-SP ve Kirk-S iterasyon yöntemleri olarak adlandırılan bazı yeni iterasyon yöntemleri tanımlandı. Bu iterasyon yöntemlerinin contractive-like dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmada kullanılabileceği gösterildi. Multistep-SP iterasyon yöntemi, S- iterasyon yöntemi [94] ve bilinen diğer bazı iterasyon yöntemlerinin contractive-like operatörler için yakınsaklıklarının denkliği incelendi. Bunlara ek olarak, yukarıda bahsedilen yakınsaklık sonuçları kullanılarak Kirk-multistep, Kirk-multistep-SP, Kirk-SP [100] ve Kirk-S iterasyon yöntemleri için kararlılık sonuçları elde edildi. Son olarak multistep-SP ve S-iterasyon [94] yöntemleri için contractive-like operatörlerin sabit noktalarının veri bağıllığı araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Yeni iterasyon yöntemi, Yeni hibrid-tip iterasyon yöntemi, S-iterasyon yöntemi, Kirk iterasyon yöntemi, Yakınsaklık, Yakınsamaların denkliği, Kararlılık, Sabit noktaların veri bağıllığı, Contractive-like operatörler, Genelleştirilmiş contractive-like operatörler.

**INVESTIGATION OF CONVERGENCES AND STABILITIES OF SOME NEW
FIXED POINT ITERATION PROCEDURES**

Faik GÜRSOY

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Co-Advisor: Prof. Dr. Billy E. Rhoades

In this study, Jungck-multistep-SP iteration method, which is defined by Akewe [101], reduced to multistep-SP iteration method for $S = I$ (identity operator). By using Kirk iteration [91] method we define some new iteration methods, which are called Kirk-multistep, Kirk-multistep-SP and Kirk-S iteration methods, as hybrid forms of multistep [93], multistep-SP and S-iteration [94] methods. It is shown that these iteration methods can be used to approximate to fixed points of contractive-like operators. Moreover, equivalence among convergences of multistep-SP iteration method, S-iteration method [94] and some other well-known iteration methods for contractive-like operators were investigated. In addition, by utilizing the above-mentioned convergence results, some stability results for Kirk-multistep, Kirk-multistep-SP, Kirk-SP [100] and Kirk-S iteration methods were obtained. Finally, data dependence results of fixed points of contractive-like operators were investigated by employing multistep-SP and S-iteration [94] methods.

Key words: New iterative scheme, New hybrid-type iterative scheme, S-iterative scheme, Kirk iterative scheme, Convergence, Equivalence of convergences, Stability, Data dependence of fixed points, Contractive-like operators, Generalized contractive-like operators.

1.1 Literatür Özeti

Adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla kurulmuş olan sabit nokta teorisi; optimizasyon [1], hesaplama algoritmaları [2], [3], fizik [4], matematiksel model inşası [5], ekonomi [6], [7], varyasyonel eşitsizlikler [8], tamamlayıcı problemler [9], denge problemleri [10], sosyal bilimler [11-13], tıp [14-16], haberleşme [17], [18],..., vb. gibi bir çok bilim alanı ve dalından oluşan geniş bir sahada çeşitli amaçlar doğrultusunda kullanılan çok önemli bir matematiksel araç olagelmıştır.

Sabit nokta teori çalışmaları çok geniş bir yazar kitlesi tarafından, başta tam metrik ve tam normlu uzaylar olmak üzere kısmi sıralı metrik uzaylar, konik metrik uzaylar, konveks ve genelleştirilmiş konveks metrik uzaylar, hiperkonveks metrik uzaylar, fuzzy metrik uzaylar ve intuitionistic fuzzy metrik ve normlu uzaylar,..., vb. gibi çok çeşitli matematiksel yapılar üzerinde yürütülmektedir, bkz. [19-33].

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L.E.J. Brouwer ile başlamıştır. Klasik analiz derslerinden de iyi bilindiği üzere en basit sabit nokta teoremi, “Aradeğer Teoremi” nin doğrudan bir sonucu olarak: “ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır” şeklinde ifade edilir. Brouwer bu teoremi, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir: “ $B, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f: B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir”. Brouwer sabit nokta teoreminin

kullanışlılığı ilk olarak, John Von Neumann tarafından 1928 de oyunlar teorisinin temelleri kurulurken fark edildi ve [34]' te sunduğu çalışmasında bu sonucu kullandı. Bunun yanı sıra Brouwer Sabit Nokta Teoreminin, Kakutani [35] tarafından yapılan bir genelleştirmesi, ekonomi biliminde (iktisat) Nobel ödülü alan John Nash tarafından [36] ve [37] de sunulan çalışmalarda kullanılmıştır.

1930 yılında da J. Schauder, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ni geliştirerek " X bir Banach uzayı K , X in boş olmayan herhangi bir kompakt konveks alt kümesi ve $f : K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f en az bir sabit noktaya sahiptir" ifadesini ispatlamıştır.

Doğrusal olmayan analizde klasik bir araç haline getirilen ve "contraction dönüşüm teoremi" veya kısaca "Contraction prensibi" olarak ta bilinen Banach contraction prensibi [38] en ünlü ve önemli sabit nokta teoremlerinden biridir.

Stefan Banach'ın doktora tezinin bir kısmını teşkil eden bu teorem, bir integral denklemin çözümünün varlığını ispatlamak amacıyla kurulmuş olup matematiğin birçok dalındaki varlık problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir unsur olmuştur.

Contraction dönüşüm teoremi [38] bir tam metrik uzaydan kendisi üzerine olan dönüşümlerle ilgili çok genel bir teoremdir. Teoremde bahsi geçen sabit noktanın daima tek olması ve kesin bir hesaplamayla elde edilebilir olması çok büyük avantajlar sağlasa da kullanılan dönüşümün contraction olması şartı teoremin uygulama alanlarına ciddi kısıtlamalar getirmektedir. Bu sebeple birçok araştırmacı bu teoremden ele alınan uzayı genelleştirerek veya uzayın yapısını değiştirerek ve farklı türden dönüşüm sınıflarını kullanarak bu ünlü teoremin çok sayıda genelleştirmelerini elde etmişlerdir, bkz. [39-56].

Yukarıda bahsedildiği üzere, Contraction dönüşüm teoremi belirli operatörlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremi olmasının yanı sıra, sabit noktanın tam olarak hesaplanmasını sağlayan doğal bir yöntem geliştirmektedir. Söz konusu bu yöntem *iterasyon* denilir.

İterasyon yöntemleri (veya Ardışık Yaklaşımlar Yöntemleri) birçok bilim dalında karşılaşılan lineer ve, bilhassa, lineer olmayan problemlerin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan çok önemli matematiksel araçlardır.

M.S. 1. yüzyıldan günümüze kadar ulaşan dökümanlardan anlaşıldığı üzere; bu önemli hesaplama yöntemlerinden ilki, Alexandria' lı Heron' un bir sayının karekökünü hesaplama sürecinde elde ettiği algoritmadır, bkz. [57].

Ele alınan bir problemde, kullanılan iterasyon şeması tarafından üretilen dizinin limiti problemin çözümünü verir. İterasyon yöntemlerinin kullanımı, bir “sabit nokta metodu” olarak tarif edilir ve çözümleri f fonksiyonunun sabit noktaları olan $x = f(x)$ tipindeki birkaç denklemden aşamalı olarak geliştirilir. Bu yaklaşım astronomide 15. yüzyılın başlarında El-Kāshī tarafından, verilen $\sin 3^\circ$ değeri için $x = (\sin 3^\circ + 4x^3)/3$ bağıntısı yardımıyla $\sin 1^\circ$ değerinin hesaplanmasında kullanıldı. Yine astronomide, Kepler bu yöntemi kullanarak “Kepler denklemi” olarak bilinen transandantal bir denklemi çözdü, bkz. [57].

İterasyon yöntemleri bilimde geniş uygulama alanlarına sahip olduklarından, birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bunun sonucunda çok sayıda iterasyon yöntemi geliştirilmiştir. Aşağıda ele aldığımız iterasyon yöntemleri bunların en önemlileri arasındadır.

İterasyon yönteminin Liouville [58] tarafından tanıtıldığı ve Cauchy tarafından kullanıldığı bilinmektedir. Bu yöntem ilk olarak Picard [59] tarafından, adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin ispatında sistematik olarak geliştirildi. Krasnoselskij iterasyonu, bilhassa $\lambda = 1/2$ durumu, ilk olarak 1955 te Krasnoselkij [60] tarafından tanıtıldı ve 1957 de bu iterasyonunun genel formu Schaefer [61] tarafından verildi. Orijinal Mann iterasyonu 1953 te Mann [62] tarafından bir matris formülasyonunda tanıtıldı. Ishikawa itersyonu 1974 te yayınlanan Ishikawa [63] makalesinde tanıtıldı.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışma da, literatürde mevcut olan birçok iterasyon yöntemini birleştiren, genelleştiren ve geliştiren yeni iterasyon yöntemleri tanımlanacaktır. Bu iterasyon yöntemleri tarafından üretilen iteratif dizilerin, contractive-like dönüşümlerin (mevcut olması durumunda) sabit noktasına yakınsak oldukları gösterilerek yakınsaklıklarının literatürde mevcut olan diğer iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarına denk olduklarına ilişkin bazı sonuçlar elde edilcektir. Ayrıca, birçok bilim dalında önemli uygulamalara sahip olan kararlılık teorisi irdelenerek, contractive-like dönüşümler aracılığıyla elde edilen bu iterasyon yöntemleri için kararlılık sonuçları elde edilecektir. Son olarak, bu iterasyon yöntemleri kullanılarak contractive-like dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağılıklarına ilişkin bazı tahminler elde edilecektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, mevcut literatürdeki birçok iterasyon yöntemini özel hal olarak barındıran ve sırasıyla (3.19), (3.20), (3.22) ve (3.23) ile tanımlanan Kirk-Multistep, Multistep-SP, Kirk-Multistep-SP ve Kirk-S iterasyon yöntemleri tanımlandı. Bu iterasyon yöntemleri, (2.30) şartını sağlayan ve contractive-like dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin sabit noktalarına belirli şartlar altında yakınsaktırlar. Üstelik (3.20) ile verilen Multistep-SP ve (3.12) ile verilen S-iterasyon yöntemlerinin (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaklıkları, sırasıyla (3.2), (3.5), (3.6), (3.9), (3.10), (3.13), (3.14) ve (3.11) ile verilen Picard, Genelleştirilmiş Krasnosel'skii, Mann, Ishikawa, Noor, İki adımlı Mann, SP ve Multistep iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarına denktirler. Ayrıca, sırasıyla (3.18), (3.19), (3.22) ve (3.23) ile verilen Kirk-SP, Kirk-multistep, Kirk-multistep-SP ve Kirk-S iterasyon yöntemleri Tanım 4.1 anlamında, (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlere göre kararlıdırlar. Son olarak, sırasıyla (3.20) ve (3.12) ile verilen Multistep-SP ve S-iterasyon yöntemlerinin kullanılmasıyla, (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin ve bu dönüşümlerin Tanım 5.1 anlamındaki yaklaşım operatörlerinin sabit noktalarının birbirlerine yakınlıklarını içeren öngörüler, mevcut tezin hipotezlerini oluşturmuştur.

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin okunulabilirliğini ve anlaşılabilirliğini sağlamak amacıyla bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilmiştir.

2.1 Analiz ve Fonksiyonel Analiz Kaynaklı Bazı Kavramlar

Tanım 2.1 (Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

M₁. $d(x, y) \geq 0$ (Pozitif tanımlılık)

M₂. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M₃. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetriklik)

M₄. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denilir [64]. Gösterimlerde kolaylık olması açısından bir (X, d) metrik uzayını X ile göstereceğiz.

Tanım 2.2 (Yakınsak Dizi) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [64].

Tanım 2.3 (Cauchy Dizisi) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tamsayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [64].

Tanım 2.4 (Tam Metrik Uzay) $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X' te ki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [65].

Tanım 2.5 (Kompakt Metrik Uzay) $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X' te ki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir [66].

Tanım 2.6 (Süreklili Dönüşüm) $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$d(x, x_0) < \delta \text{ olduğunda } \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

veya denk bir ifade ile,

$$f(D(x_0; \delta)) \subseteq D(f(x_0); \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f' ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise, f' ye X' te süreklidir denir [66].

Tanım 2.7 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: F \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L' ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A. L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G₁. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G₂. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G₃. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır

G₄. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G₅. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ tir.

B. $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L₁. $\alpha \cdot x \in L$ dir,

L₂. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir,

L₃. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir,

L₄. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ dir,

L₅. $1 \cdot x = x$ tir (Burada 1, F 'nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L' ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L' ye kompleks lineer uzay adı verilir [67].

Tanım 2.8 (Konveks Küme): L bir reel lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvektir denir [66].

Tanım 2.9 (Normlu Uzay) X bir lineer uzay olsun ve F cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere,

$\|\cdot\| : X \rightarrow F$ fonksiyonunun x 'teki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon

N₁. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N₂. Her $\alpha \in F$ ve her $x \in X$ için $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

N₃. Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X te (veya X üzerinde) norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [68].

X üzerindeki bir norm, X üzerinde

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (x, y \in X) \tag{2.1}$$

ile verilen bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir. (2.1) metriği, vektör uzay yapısı ile uyumluluk gösteren (bağdaşan) ve sırasıyla öteleme ve homojenlik özelliği olarak adlandırılılan aşağıdaki ek özelliklere sahiptir:

$$d(x+z, y+z) = d(x, y), (z \in X), \quad (2.2)$$

$$d(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = |\alpha| \cdot d(x, y), (\alpha \in F). \quad (2.3)$$

Böylece, bir normlu uzayda hem bir vektör uzayının hem de bir metrik uzayın özellikleri vardır. Bu özellikler (2.2) ve (2.3) anlamında uyumludurlar. Bu durum bize şöyle bir avantaj sağlar: her $x \in X$ ve her $r > 0$ için

$$B(x; r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\} = x + r \cdot B(0; 1)$$

olduğundan, yerel (lokal) incelemelerin büyük çoğunluğu

$$B(0; 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\} \text{ veya } \bar{B}(0; 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

birim yuvarına kısıtlanabilir.

Üstelik bir vektör uzaydaki cebirsel işlemler süreklidir, yani

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, \alpha_n \rightarrow \alpha \text{ ise } x_n + y_n \rightarrow x + y, \alpha_n \cdot x_n \rightarrow \alpha \cdot x, \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

dir.

Tanım 2.10 (Banach Uzayı) X bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in X)$ ile verilen norm metriğine göre tam ise bu durumda bir Banach uzayı olarak adlandırılır.

X' in reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [69].

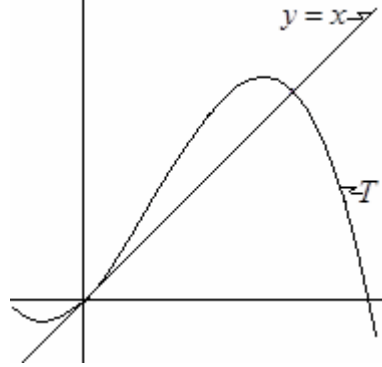
2.2 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.11 (Sabit Nokta) X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx = x \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T' nin sabit noktası denir ve T' nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T , $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [70].

(2.4) ile verilen denklem geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Eğer $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon ise bu durumda T' nin sabit noktaları, T' ye karşılık gelen grafik ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalardır.



Şekil 2. 1 İki sabit noktaya sahip bir T fonksiyonu

Örnek 2.12

1. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x - 125$ ise $F_T = \emptyset$;
2. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x \cdot \sin x$ ise $F_T = \left\{ \frac{(4k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}$;
3. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = |x|$ ise $F_T = \{x : x \geq 0\}$

olur.

X herhangi bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde $T^n(x)$ ' i tanımlayabiliriz. $T^n(x)$, x ' in T altındaki n . iterasyonu olarak adlandırılır.

$T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

i) Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_T \subset F_{T^n}$ dir, yani bir dönüşümün sabit noktaları aynı zamanda bu dönüşümün n . iterasyonunun da sabit noktalarıdır: Geçekten herhangi bir $x_0 \in F_T$ için $Tx_0 = x_0$ olup,

$$\begin{aligned} T^n(x_0) &= T^{n-1}(T(x_0)) = T^{n-1}(x_0) \\ &= T^{n-2}(T(T(x_0))) = T^{n-2}(x_0) = \dots = T^{n-(n-1)}(T(x_0)) = T(x_0) = x_0 \end{aligned}$$

dir. Böylece $x_0 \in F_{T^n}$ olduğu elde edilir.

Örnek 2.13 $T(x) = 2x \bmod 1 = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1 & , 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$ dönüşümünü ele alalım. $F_T = \{0\}$

olduğu açıktır. Ayrıca T dönüşümünün n . iterasyonu,

$$T^n(x) = \begin{cases} 2^n x & , 0 \leq x < 1/2^n \\ 2^n x - 1 & , 1/2^n \leq x < 2/2^n \\ 2^n x - 2 & , 2/2^n \leq x < 3/2^n \\ 2^n x - 3 & , 3/2^n \leq x < 4/2^n \\ \vdots & \\ 2^n x - (2^n - 1) & , (2^n - 1)/2^n \leq x < 1 \end{cases}$$

veya $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ için

$$T^n(x) = 2^n x - k, \quad k/2^n \leq x < (k+1)/2^n$$

olarak elde edilir. Bu da tam olarak

$$T^n(x) = 2^n x \bmod 1$$

demektir. $T^n(x) = 2^n x \bmod 1$ 'in sabit noktaları,

$$2^n x \bmod 1 = x$$

veya

$$2^n x - x = k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ve} \quad x \in [0, 1)$$

denkleminin çözümleridir.

Buradan,

$$(2^n - 1)x = k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ve} \quad x \in [0, 1)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k}{2^n - 1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ve} \quad x \in [0, 1)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k}{2^n - 1}, \quad 0 \leq k < 2^n - 1$$

elde edilir. Böylece $T^n(x)$ in sabit noktalarının kümesi

$$F_{T^n} = \left\{ \frac{k}{2^n - 1} : 0 \leq k < 2^n - 1, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

dir. Buradan da $F_T \subset F_{T^n}$ olduğu görülür [71].

ii) Bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise $F_T = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.14 $T(x) = y$, $T(s) = s$ ve $T(y) = x$ ile tanımlı $T: \{s, x, y\} \rightarrow \{s, x, y\}$ dönüşümünü ele alalım. Bu durumda $F_{T^2} = \{s, x, y\}$ dir. Ancak $F_T = \{s\}$ dir.

Şimdi verilecek olan örnekler, bazı özel dönüşümlerin sabit noktalarının mevcut olup olmaması ile ilgilidir [72].

Örnek 2.15 $X = \{a, b\}$ olmak üzere, $T(a) = b$ ve $T(b) = a$ ile tanımlı $T: X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Ayrıca $X = [1, 5]$, $Y = [6, 9]$ olmak üzere herhangi bir $T: X \rightarrow Y$ (veya $T: Y \rightarrow X$) dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.16 $T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & , \quad 1/2 \leq x < 2/3 \end{cases}$ dönüşümünde 0 ve 2/3 noktaları dönüşümün tanım kümesine ait olmadığından, bu dönüşümün sabit noktaları mevcut değildir [71].

Örnek 2.17 $Tx = e^x$ dönüşümünün de hiçbir sabit noktası yoktur. Buna karşın $Tx = e^{x-1}$ ve $Tx = -e^{x+1}$ dönüşümlerinin sabit noktaları sırasıyla 1 ve -1 dir.

2.3 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Çalışmalarda Kullanılan Bazı Önemli Teoremler, Dönüşümler ve Bu Dönüşümler Arasındaki İlişkiler

Tanım 2.18 (Lipschitzian Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (2.5)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T' ye bir Lipschitzian (veya λ -Lipschitzian) dönüşüm denir [70].

Tanımdan da görüldüğü üzere her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.19 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $Tx = 3x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |3x - 3y| = 3|x - y| = 3d(x, y)$$

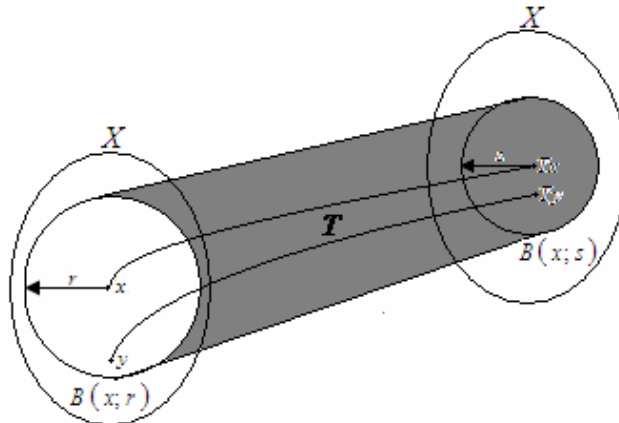
elde edilir. Böylece $\lambda \geq 3$ için T , Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.20 (Contraction Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad (2.6)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in (0, 1)$ sayısı bulunabiliyorsa T' ye contraction dönüşüm denir [70].

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Herhangi iki x ve y noktasının görüntüleri olan Tx ile Ty , x ile y 'ye nazaran birbirlerine daha yakındırlar. Özel olarak aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi; $r > s > 0$ olmak üzere, her $x \in X$ ve herhangi $r > 0$ için $B(x; r)$ yuvarındaki y noktalarının tümü bir $B(Tx; s)$ yuvarına resmedilir [73].



Şekil 2. 2 T bir contraction dönüşümdür

Örnek 2.21 (a) $X = [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ olsun ve $T(x) = 2 + \frac{1}{4} \arctan x$ ile tanımlı

$T : X \rightarrow X$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \left| 2 + \frac{1}{4} \arctan x - \left(2 + \frac{1}{4} \arctan y \right) \right| = \frac{1}{4} |\arctan x - \arctan y| \\ &= \frac{1}{4} \left| \arctan \frac{x-y}{1+xy} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \left| \frac{x-y}{1+xy} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} |x-y| = \frac{1}{4} d(x, y) \end{aligned}$$

Böylece $\lambda = 1/4$ olarak alınması veya herhangi bir $\lambda \in [1/4, 1)$ seçimi için T dönüşümünün contraction dönüşüm olduğu elde edilir.

(b) Ortalama Değer Teoremi (ODT), reel değerli düzgün (smooth) fonksiyonların contraction dönüşümleri olduklarını göstermede önemli bir role sahiptir. Örneğin:

$X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ olsun ve $T(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü

ele alalım. T dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, ODT ni uygulayabiliriz:

Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = |T'(c) \cdot (x - y)| = \frac{2}{5} |\cos 2c| |x - y| \leq \frac{2}{5} |x - y|$$

olacak şekilde x ve y arasında bir c sayısı vardır. Böylece $\lambda = 2/5$ olarak alınması veya herhangi bir $\lambda \in [2/5, 1)$ seçimi için T dönüşümünün contraction dönüşüm olduğu elde edilir.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan contraction dönüşümler de düzgün sürekli dir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir contraction dönüşüm olamaz. Buna karşın, T contraction dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir contraction dönüşüm olabilir.

Örnek 2.22 $T : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ dönüşümü $T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$ olarak tanımlansın. T

dönüşümü $x = 1$ ' de süreksizdir ve dolayısıyla contraction dönüşüm olamaz. Diğer taraftan, $T^2 : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup bir contraction dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T' nin tek sabit noktasıdır [72].

Klasik Banach contraction prensibi sabit nokta teorisindeki en kullanışlı sonuçlardan biridir. Doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde birçok uygulamaya sahip olan bu önemli sonuç şu şekilde ifade edilir:

Teorem 2.23 (Banach contraction prensibi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ (2.6) şartını sağlayan bir contraction dönüşümü olsun. Bu durumda

(i) T , X 'te bir tek p sabit noktasına sahiptir;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi p ye yakınsar [38].

İspat: İlk olarak şunu belirtmeliyiz ki; (2.6) şartını sağlayan bir T dönüşümünün en fazla bir tane sabit noktası vardır, yani $\text{card}F_T \leq 1$ dir. Bunun doğruluğunu göstermek için, T dönüşümünün $x_* \neq y_*$ olacak şekilde x_* ve $y_* \in F_T$ gibi iki sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. (2.6) dan

$$d(x_*, y_*) = d(Tx_*, Ty_*) \leq \lambda \cdot d(x_*, y_*) < d(x_*, y_*), \quad \lambda \in (0, 1)$$

olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Bu sabit noktanın varlığını göstermek için, verilen herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonunun bir Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz. (2.6) şartından

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq \lambda \cdot d(x_1, x_0)$$

olup, tümevarımdan

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \cdot d(x_1, x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

olduğu elde edilir.

Böylece, herhangi $n, p \in \mathbb{N}, p > 0$ için

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k d(x_1, x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_1, x_0) \quad (2.9)$$

olduğu elde edilir. $\lambda \in [0, 1)$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $\lambda^n \rightarrow 0$ olur. Böylece (2.9)' dan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ' in bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Üstelik, (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi X ' teki bir x_* elemanına yakınsaktır, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$ dır.

Diğer taraftan herhangi bir Lipschitzian dönüşüm sürekli olduğundan,

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = Tx_*$$

olduğu elde edilir. Bu da, herhangi bir $x_0 \in X$ için, Picard iterasyonunun X ' te yakınsak olduğunu ve limitinin T ' nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. T en fazla bir tane sabit noktaya sahip olduğundan Picard iterasyonunun, her bir $x_0 \in X$ seçimi için aynı x_* değerine, yani T ' nin teklikle belirli olan sabit noktasına yakınsadığı sonucuna ulaşırız. Böylece (i) ve (ii) ispatlanmış olur.

Bu teorem yalnızca bir sabit noktanın varlığını inşa etmekle kalmaz herhangi bir başlangıç değeri için bu sabit noktayı yaklaşık olarak hesaplamamıza da olanak sağlar. Bu süreç aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.24 (a) $\arctan x - 4x + 8 = 0$ denklemi $[0, \infty)$ ' da bir tek çözüme sahiptir.

$Tx = 2 + \frac{1}{4} \arctan x$ ile tanımlı dönüşümü ele alalım, Örnek 2.21 (a) da T ' nin $\lambda = 1/4$ ile

bir contraction dönüşüm olduğu gösterilmişti. Bu nedenle Teorem 2.23' ten dolayı ilgili denklem $[0, \infty)$ ' da bir tek çözüme sahiptir.

Bu çözümü bir $\varepsilon = 0.001$ hatasıyla bulmaya çalışalım. Bu durumda $x_1 = 0$ ' dan başlayacak şekilde bir $x_n = Tx_{n-1}$ dizisi seçebiliriz. Buradan $x_2 = T(0) = 2$ olarak elde edilir. Böylece $d(x_1, x_2) = |0 - 2| = 2$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{(1/4)^{n-1}}{1-(1/4)} \cdot 2 < 0.001 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} < \frac{0.003}{2} \\ \Leftrightarrow (n-2) \log \frac{1}{4} < \log(3 \cdot 2^{-1} \cdot 10^{-3}) \\ \Leftrightarrow n-1 > \frac{\log(3 \cdot 2^{-1} \cdot 10^{-3})}{\log(2^{-2})} &\Leftrightarrow n > 6.690 \end{aligned}$$

olacak şekilde yeterince büyük bir n sayısı seçilebilir.

(b) $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için

$$|T'x| \leq k < 1$$

ise, T' nin X' te bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için

$$|Tx - Ty| = |T'(c) \cdot (x - y)| \leq k \cdot |x - y|$$

olacak şekilde bir $c \in (x, y)$ vardır. Böylece Banach contraction prensibi gereği T' nin bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 2.25 (Kesin Contraction Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \tag{2.10}$$

ise, T' ye kesin contraction dönüşüm (strict contraction) denir [70].

" $T: X \rightarrow X$ bir contraction dönüşüm" dır ifadesinin (2.10) şartına denk olduğu düşünülebilir ancak bu düşünce yanlıştır. (2.10) şartı (2.6) ile verilen şarttan oldukça zayıf bir şarttır. Aşağıdaki örnekte (2.10) şartını sağlayan bir T dönüşümü tarafından üretilen $x, T(x), T(T(x)), \dots$ iterasyon dizisinin X' te her zaman bir Cauchy dizisi olamayacağı gösterilmiştir.

Örnek 2.26 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ olsun ve $Tx = \ln(e^x + 2)$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü göz önüne alalım. T dönüşümü (2.10) şartını sağlar: ODT den dolayı herhangi $x, y \in X$ çifti için $|T(x) - T(y)| = |T'(c)||x - y| = \left| \frac{e^x}{2 + e^x} \right| |x - y| < |x - y|$ olacak şekilde $c \in (x, y)$ sayısı mevcuttur. Ancak $x_1 = 0$ da başlayan

$$x_2 = \ln(e^0 + 2) = \ln 3, x_3 = \ln(e^{\ln 3} + 1) = \ln 4, \dots, x_n = \ln(n + 1)$$

iterasyon dizisini ele alalım. Bu dizi sınırsız olduğundan bir Cauchy dizisi olamaz. Buradan T nin bir contraction dönüşüm olmadığı görülür.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin contraction dönüşümlerin sabit noktalara sahip olmaları gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.27 $X = [1, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ olsun ve $Tx = x + \frac{1}{x}$ ile $T: X \rightarrow X$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |Tx - Ty| = \left| x + \frac{1}{x} - y + \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{x^2 y - x - xy^2 + y}{xy} \right| = \left| \frac{(x - y)(xy - 1)}{xy} \right| \\ &\leq \frac{|x - y||xy - 1|}{|xy|} \end{aligned}$$

olur. Burada her $x, y \in X = [1, \infty)$ için $\frac{|xy - 1|}{|xy|} \leq 1$ olacağından dolayı

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{|x-y||xy-1|}{|xy|} < |x-y| = d(x, y)$$

olur ki bu da $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ şartının sağlandığını gösterir. Böylece, T bir kesin contraction dönüşümdür. Ayrıca,

$$x + \frac{1}{x} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in [1, \infty)$ sayısı bulunamaz, yani T dönüşümü bir sabit noktaya sahip değildir [74].

Bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garantilemek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterli olacaktır.

Teorem 2.23' teki (i) ve (ii) şartını sağlayan bir dönüşüme bir Picard operatörü denilir [75].

Teorem 2.23' te dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, (2.6) ile verilen contraction şartının T' nin X üzerinde sürekli olmasını gerektirmesidir. 1968 yılında R. Kannan, [49] ile verilen çalışmasında T' nin X üzerinde sürekli olmasını gerektirmeyen bir contractive lik şartı tanımlayarak, Banach contraction prensibini aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir:

Teorem 2.28 (Kannan Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a \cdot [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (2.11)$$

olacak şekilde en az bir $a \in [0, 1/2)$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür.

İspat: İlk olarak şunu belirtmeliyiz ki; eğer T dönüşümü (2.11) şartını sağlıyorsa, bu durumda $\text{card} F_T \leq 1$ dir.

Şimdi $x_0 \in X$ ve $x_n = T^n x_0, n = 0, 1, 2, \dots$ Picard iterasyonu olsun. Bu durumda (2.11)' den

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq a [d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a}{1-a} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

olduğu elde edilir.

$a \in [0, 1/2)$ için $0 \leq \frac{a}{1-a} < 1$ olduğundan, Teorem 2.23' ün ispatındakine benzer şekilde

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla da yakınsak bir dizi olduğu

sonucuna ulaşılır. $x_* \in X$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti olsun. Bu durumda,

$$d(x_*, Tx_*) \leq d(x_*, x_n) + d(x_n, Tx_*) \leq d(x_*, x_n) + a [d(x_n, x_{n-1}) + d(x_*, Tx_*)]$$

olup, buradan da

$$d(x_*, Tx_*) \leq \frac{1}{1-a} \cdot d(x_*, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

olduğu elde edilir.

(2.12) ve (2.13)' den

$$d(x_*, Tx_*) \leq \frac{1}{1-a} \cdot d(x_*, x_n) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

olup, (2.14)' te $n \rightarrow \infty$ için limit durumuna geçilmesiyle

$$d(x_*, Tx_*) = 0 \Leftrightarrow x_* = Tx_*, \text{ yani } F_T = \{x_*\}$$

olduğu elde edilir. Böylece her bir $x_0 \in X$ için, $x_n \rightarrow x_*$ ($n \rightarrow \infty$) dir. #

Örnek 2.29 $X = \mathbb{R}$ olsun ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2] \\ -\frac{1}{2}, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Bu durumda (i) T sürekli değildir. (ii) T , (2.11) ile verilen şartı sağlar (bu durumda $a = \frac{1}{5}$ tir) ve böylece Kannan teoreminden dolayı T bir Picard dönüşümüdür [76].

Kannan Teoremin'den esinlenilerek, T' nin sürekliliğini gerektirmeyen çeşitli contractive tip dönüşüm sınıfları için çok sayıda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları [77-79] ile verilen çalışmalarda görülebilir.

Bu teoremlerden biri, Chatterjea [80] tarafından (2.11) şartına benzer bir şart kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 2.30 (Chatterjea Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq b \cdot [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad (2.15)$$

olacak şekilde en az bir $b \in [0, 1/2)$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür.

Burada (2.11) şartını sağlayan bir dönüşüm Kannan dönüşümü olarak adlandırılırken, (2.15) şartını sağlayan bir dönüşüm Chatterjea dönüşümü olarak adlandırılmaktadır.

Ayrıca Rhoades [81] tarafından verilen bir örnekte, (2.6) ile verilen contractive lik şartı ile (2.11) ve (2.15) ile verilen contractive lik şartlarının birbirlerinden bağımsız oldukları gösterilmiştir.

1972 yılında Zamfirescu, [56] ile verilen çalışmasında (2.6), (2.11) ve (2.15) şartlarını bir araya getirerek aşağıda verilen önemli sonucu elde etti:

Teorem 2.31 (Zamfirescu Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(z_1) \quad d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y),$$

$$(z_2) \quad d(Tx, Ty) \leq a \cdot [d(x, Tx) + d(y, Ty)],$$

$$(z_3) \quad d(Tx, Ty) \leq b \cdot [d(x, Ty) + d(y, Tx)],$$

şartlarından en az birisinin doğru olacağı şekilde, $\lambda \in [0,1)$, $0 < a, b < 1/2$ şartlarını sağlayan λ, a ve b reel sayıları varsa, bu durumda T bir Picard operatörüdür.

İspat: $x, y \in X$ alalım ve (z_1) , (z_2) veya (z_3) şartlarından en az biri doğru olsun.

Eğer (z_2) doğru ise, bu durumda

$$d(Tx, Ty) \leq a \cdot [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \leq a \cdot \{d(x, Tx) + [d(y, x) + d(x, Tx) + d(Tx, Ty)]\}$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$(1-a)d(Tx, Ty) \leq 2ad(x, Tx) + ad(x, y)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{2a}{1-a}d(x, Tx) + \frac{a}{1-a}d(x, y)$$

olduğu elde edilir.

Eğer (z_3) doğru ise, bu durumda benzer şekilde

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{2b}{1-b}d(x, Tx) + \frac{b}{1-b}d(x, y)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi δ' yı

$$\delta := \left\{ \lambda, \frac{a}{1-a}, \frac{b}{1-b} \right\}$$

ile tanımlarsak $\delta \in [0,1)$ olur ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq 2\delta d(x, Tx) + \delta d(x, y) \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq 2\delta d(x, Ty) + \delta d(x, y) \quad (2.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.16)' dan $card F_T \leq 1$ olduğu sağlanır. Şimdi T' nin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstereceğiz. $x_0 \in X$ keyfi bir başlangıç noktası olsun ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, T'$ ye karşılık gelen

$$x_n = T^n x_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Picard iterasyonu tarafından üretilen iteratif dizi olsun.

Eğer $x := x_n$ ve $y := x_{n-1}$ iki ardışık yaklaşım ise, bu durumda (2.17)' den

$$d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq 2\delta d(x_n, Tx_{n-1}) + \delta d(x_n, x_{n-1}),$$

yani,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \delta d(x_n, x_{n-1})$$

olduğu elde edilir.

Buradan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ' in bir Cauchy dizisi olduğu ve böylece yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır. $x_* \in X$, bu dizinin limiti olsun. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

olur.

(2.16) ile verilen ifadenin ve üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} d(x_*, Tx_*) &\leq d(x_*, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx_*) \\ &\leq d(x_*, x_{n+1}) + \delta d(x_*, x_n) + 2\delta d(x_n, Tx_n) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir, $n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ olduğundan

$$d(x_*, Tx_*) = 0 \Leftrightarrow x_* = Tx_*$$

olduğu elde edilir. Böylece her bir $x_0 \in X$ için

$$F_T = \{x_*\} \text{ ve } x_n \rightarrow x_* (n \rightarrow \infty)$$

dir.#

En genel contraction şartlarından biri Ciric [42] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

Tanım 2.32 (Quasi Contraction) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq h \cdot \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (2.18)$$

olacak şekilde bir $h \in (0, 1)$ sayısı varsa, T' ye bir quasi contraction denir ve T bir Picard operatörüdür.

(2.11), (2.15) ve (z_1) -(z_3) şartlarından herbirinin (2.18) şartını gerektirdiği açıktır.

Literatürde, bu tipten contraction şartlarından esinlenilerek elde edilmiş olan birçok sabit nokta teoremi mevcuttur, örneğin Rus [77], Taskovic [79], Rhoades [81], [82], Berinde [83].

2004 yılında Berinde [76], (z_1) -(z_3) ten daha genel olan ve karşılık gelen T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen aşağıdaki contraction şartını tanımlayarak bazı sabit nokta teoremleri elde etti:

Tanım 2.33 (Zayıf Contraction) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \quad (2.19)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty) \quad (2.20)$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ sabiti ve bir $L \geq 0$ mevcut ise, T ye bir zayıf contraction denir.

T dönüşümünün zayıf contractive liğini kontrol etmek için hem (2.19) hem de (2.20) ile verilen şartları kontrol etmek gerekir.

(2.19) veya (2.20) de $\delta = \lambda$ ve $L = 0$ alınırsa (2.6) ile verilen contraction şartı elde edilir. Buradan da (2.6) ile verilen contraction şartının aynı zamanda bir tek sabit noktaya sahip olan bir zayıf contraction olduğu sonucuna ulaşılır [81].

Herhangi bir Zamfirescu dönüşümü, yani Teorem 2.31' deki $(z_1)-(z_3)$ şartlarını sağlayan herhangi bir dönüşüm bir zayıf contraction dır [76]. Dolayısıyla, sırasıyla, (2.11) ve (2.15) ile verilen Kannan ve Chatterjea dönüşümleride birer zayıf contraction olurlar. Bununla birlikte quasi contraction larında da zayıf contraction oldukları aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.34 Herhangi bir quasi contraction, $0 < h < 1/2$ şartıyla bir zayıf contraction dır [76].

Önerme 2.34' ten, quasi contraction ların $h < 1/2$ şartıyla birlikte zayıf contractionlar olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere $h \geq 1/2$ şartıyla da zayıf contraction olan quasi contractionlar mevcuttur. Buradan da şu sonuca ulaşılır: $h < 1/2$ şartı, bir quasi contraction ın bir zayıf contraction olması için gerekli bir şart değildir [76].

Örnek 2.35 $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

- (i) T , $h \in [2/3, 1)$ ile (2.18) şartını sağlar,
- (ii) T , $\delta \geq 2/3$ ve $L \geq \delta$ ile (2.19) şartını sağlar [76].

2004 yılında Berinde [76], (2.19) ve (2.20) ile verilen zayıf contraction şartlarını kullanarak; Teorem 2.23, Teorem 2.31 ve literatürdeki birçok sabit nokta teoreminin önemli bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi elde etti:

Teorem 2.36 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.19) şartını sağlayan bir zayıf contraction olsun. Bu durumda

(i) $F_T = \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için, (2.7) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu bazı $x_* \in F_T$ ye yakınsar.

İspat: İlk olarak, T' nin X' te en az bir sabit noktaya sahip olduğunu göstereceğiz. Bunun için keyfi bir $x_0 \in X$ alalım ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.7) ile tanımlanan Picard iterasyonu tarafından üretilen bir iteratif dizi olsun.

(2.19)' da $x := x_{n-1}$ ve $y := x_n$ yazıldığında

$$d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \delta \cdot d(x_{n-1}, x_n)$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta \cdot d(x_{n-1}, x_n) \quad (2.21)$$

olduğu elde edilir.

(2.21)' i kullanarak, tümevarımdan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta^n \cdot d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olduğunu elde ederiz.

Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \delta^n (1 + \delta + \dots + \delta^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\delta^n}{1 - \delta} (1 - \delta^p) d(x_0, x_1), \quad n, p \in \mathbb{N}, p \neq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

olduğu elde edilir.

$\delta \in (0, 1)$ olduğundan, (2.22)' den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve böylece yakınsak olduğu elde edilir.

Şimdi

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (2.23)$$

olarak alalım. Bu durumda

$$d(x_*, Tx_*) \leq d(x_*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_*) = d(x_{n+1}, x_*) + d(Tx_n, Tx_*) \quad (2.24)$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, (2.19)' dan

$$d(Tx_n, Tx_*) \leq \delta d(x_n, x_*) + Ld(x_*, Tx_n) \quad (2.25)$$

olduğu elde edilir.

Böylece (2.24) ve (2.25)' ten, her $n \geq 0$ için

$$d(x_*, Tx_*) \leq (1+L)d(x_*, x_{n+1}) + \delta d(x_n, x_*) \quad (2.26)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında, sıkıştırma kuralından

$$d(x_*, Tx_*) = 0$$

olduğu elde edilir, yani; x_* , T' nin bir sabit noktasıdır. #

Teorem 2.23 ve Teorem 2.31' de kullanılan operatörlerin sabit noktaları teklikle belirli olmasına rağmen, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere zayıf contraction lar bir tek sabit noktaya sahip olmak zorunda değildirler.

Örnek 2.37 $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü birim dönüşüm olsun, yani her $x \in [0,1]$ için $Tx = x$ olsun.

Bu durumda

(i) T dönüşümü, keyfi $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 1-\delta$ seçimleri ile (2.19) şartını sağlar. Gerçekten; (2.19) ve (2.20) şartlarından

$$|x-y| \leq \delta \cdot |x-y| + L \cdot |x-y|$$

olduğu elde edilir. Eğer keyfi bir $\delta \in (0,1)$ alır ve $L \geq 1-\delta$ olarak seçersek bu eşitsizlik her $x, y \in [0,1]$ için doğru olur.

(ii) T' nin sabit noktalarının kümesi $[0,1]$ aralığının tümüdür, yani $F_T = [0,1]$ dir [76].

Berinde [76] tarafından ortaya konulan aşağıdaki teorem, (2.19) ile verilen contractive şartına oldukça benzer ek bir contractive şartıyla bir zayıf contraction ın sabit noktasını teklikle belirlemeyi mümkün kılmaktadır.

Teorem 2.38 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlayan bir zayıf contraction olsun: Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d(x, y) + L_1 \cdot d(x, Tx) \quad (2.27)$$

olacak şekilde $\theta \in (0, 1)$ sabiti ve $L_1 \geq 0$ mevcuttur.

Bu durumda

(i) T bir tek sabit noktaya sahiptir, yani $F_T = \{x_*\}$ dır;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için, (2.7) ile verilen Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif dizisi $x_* \in F_T$ ye yakınsar.

İspat: T' nin X' te x_* ve y_* gibi farklı iki sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim.

Bu durumda (2.27)' de $x := x_*$ ve $y := y_*$ yazılırsa

$$d(Tx_*, Ty_*) = d(x_*, y_*) \leq \theta \cdot d(x_*, y_*) \Leftrightarrow (1 - \theta)d(x_*, y_*) \leq 0$$

olduğu elde edilir ve

$$d(x_*, y_*) > 0$$

oluşu ile çelişir.

İspatın kalan kısmı Teorem 2.36' nın ispatına benzer şekilde yapılabilir. #

Yukarıdaki teoreme bağlı olarak aşağıdaki incelemeler yapılabilir:

(i) Uzaklık fonksiyonunun simetrikliğinden dolayı, her $x, y \in X$ için (2.27)' nin sağlanması için gerek ve yeter koşul, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d(x, y) + L_1 \cdot d(y, Ty) \quad (2.28)$$

şartının sağlanmasıdır. Böylece, (2.19) ve (2.20) şartlarındaki duruma benzer şekilde, somut uygulamalarda hem (2.27) hem de (2.28) şartının sağlandığının kontrol edilmesi gerekir.

(ii) (2.27) şartı Osilike [84-86] tarafından belirli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarının ispatlanması için kullanıldı. Ayrıca Osilike [84] ve [85]' te görüldüğü üzere (2.27) şartı, T' nin bir sabit noktaya sahip olmasını gerektirmez. Ancak, eğer (2.27) şartını sağlayan bir T dönüşümü bir sabit noktaya sahip ise bu nokta kesinlikle tektir.

(iii) (2.6), (2.11), (2.15) şartlarını veya Teorem 2.31' deki (z_1) -(z_3) şartlarını sağlayan herhangi bir T dönüşümü (2.27) ve (2.28) teklik şartlarını da sağlar. Böylece Örnek 2.37 gözönüne alındığında Teorem 2.38 (ve ayrıca Teorem 2.36), Teorem 2.31' i genelleştirir. Üstelik, $0 < h < 1/2$ şartıyla, herhangi bir quasi contraction da (2.27) ve (2.28) şartlarını sağlar. Bu da Teorem 2.38' in Teorem 2.23, Teorem 2.28, Teorem 2.30 ve Teorem 2.31' i genelleştirdiğini gösterir.

2006 yılında, Olatinwo vd. [87] yukarıda bahsedilen contractive lik şartlarını daha da genelleştiren aşağıdaki contractive şartını tanımlayarak belirli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarını incelediler.

Tanım 2.39 (Contractive-Like Operatörler) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + \varphi(d(x, Tx)) \quad (2.29)$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0, 1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton artan fonksiyonu mevcut ise, T' ye bir contractive-like dönüşüm denir.

(2.29) ile verilen ifade, Tanım 2.39' da ele alınan X' in bir normlu lineer uzay veya Banach uzayı olması durumunda norm tarafından üretilen metrik yardımıyla, yani $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$ bağıntısı yardımıyla aşağıdaki şekilde yeniden formüle edilebilir:

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \cdot \|x - y\| + \varphi(\|x - Tx\|) \quad (2.30)$$

Aşağıdaki incelemeler (2.30) ile verilen contractive lik şartı yukarıda bahsedilen contractive şartlarından daha genel olduğunu göstermektedir. Gerçekten, eğer (2.30)' da,

(i) $\varphi(t) = L \cdot t$, $L \geq 0$ olarak alınırsa bu durumda Osilike [84]' te verilen contractive tanımı elde edilir.

(ii) $\varphi(t) = \frac{c}{1-c} \cdot t$, $c \in [0,1)$ olarak alınırsa bu durumda Rhoades [88]' de tanımlanan contractive lik şartı elde edilir.

(iii) $\lambda \in [0,1)$ ve $0 \leq a, b < 1/2$ şartlarını sağlayan λ , a ve b reel sayıları için $\delta = \max \left\{ \lambda, \frac{a}{1-a}, \frac{b}{1-b} \right\}$ olmak üzere, $\varphi(t) = 2 \cdot \delta \cdot t$ olarak alınırsa bu durumda Berinde [89] ve Harder ve Hicks [90]' daki Zamfirescu' nun contractive tanımı elde edilir.

(iv) $\varphi(t) = 0$ olarak alınırsa bu durumda da (2.6) ile verilen contraction şartı elde edilir.

Aşağıdaki örnekte, (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin genelde bir sabit noktaya sahip olmadıkları, ancak sahip olmaları durumunda ise bu sabit noktanın tek olduğu gösterilmiştir.

Örnek 2.40 $X = [0, \infty)$ olsun ve T' yi

$$Tx = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq x \leq 0.8 \\ 0.6, & 0.8 < x \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Genelliği bozmaksızın $x < y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \leq x < y \leq 0.8$ veya $0.8 < x < y$ için $\|Tx - Ty\| = 0$ dır ve böylece (2.30) şartı sağlanır. Eğer $0 \leq x \leq 0.8 < y$ ise bu durumda $\|Tx - Ty\| = 0.4$ tür. Şimdi herhangi bir $L \geq 2$ sayısı için φ' yi $\varphi(t) = Lt$ olarak tanımlayalım. Bu durumda φ fonksiyonu artandır, süreklidir ve $\varphi(0) = 0$ dır. Ayrıca, $\|x - Tx\| = 1 - x$ olup

$$\varphi(\|x - Tx\|) = L(1 - x) \geq 0.2L \geq 0.4$$

tür. Böylece herhangi bir $\delta \in [0,1)$ için

$$0.4 = \|Tx - Ty\| \leq L\|x - Tx\| \leq \delta\|x - y\| + L\|x - Tx\|$$

dir ve (2.30) şartı $0 \leq x \leq 0.8 < y$ için de sağlanır. Ancak T herhangi bir sabit noktaya sahip değildir. Bununla birlikte, eğer T bir sabit noktaya sahip ise (2.30) şartı kullanılarak bu sabit noktanın tekliği kolayca gösterilebilir: T' nin $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde x_1 ve $x_2 \in F_T$ gibi iki sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, (2.30)' dan

$$0 \neq \|x_1 - x_2\| = \|Tx_1 - Tx_2\| \leq \delta \cdot \|x_1 - x_2\| + \varphi(\|x_1 - Tx_1\|)$$

$$= \delta \cdot \|x_1 - x_2\| + \varphi(\|x_1 - x_1\|)$$

$$= \delta \cdot \|x_1 - x_2\|, \quad (\|x_1 - x_1\| = 0 \text{ ve } \varphi(0) = 0 \text{ olduğundan})$$

veya

$$(1 - \delta) \cdot \|x_1 - x_2\| \leq 0 \Leftrightarrow \|x_1 - x_2\| < 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlılığı ile çelişir. Bu çelişki $x_1 \neq x_2$ kabulünden kaynaklanmaktadır, dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir.

**BAZI SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSAKLIKLARI
ve YAKINSAKLIKLARI ARASINDAKİ DENKLİK**

Bu bölümde bir iterasyon yönteminin en genel formdaki tanımını vererek literatürde yaygın olarak kullanılan iterasyon yöntemlerini ve tanımlamış olduğumuz bazı yeni iterasyon yöntemlerini tanıtacak ve bu iterasyon yöntemleri ile tanımlamış olduğumuz yeni iterasyon yöntemlerinin belirli bir dönüşüm sınıfı için yakınsaklıklarını ve yakınsaklıkları arasındaki denklığı inceleyeceğiz.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. f bir fonksiyon olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yöntemi en genel formda

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n), n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır [70].

Tanım 3.1 (Picard İterasyon Yöntemi) (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi (veya ardışık yaklaşıklıklar dizisi) denir.

Picard iterasyon yönteminin Liouville [58] tarafından tanımlandığı ve Cauchy tarafından kullanıldığı görülmektedir. Bu yöntemin ilk olarak 1890 yılında Picard [59] tarafından onun klasik ve iyi bilinen adi diferansiyel denklemler için başlangıç değeri

problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin ispatında sistematik olarak geliştirildiği görülmektedir.

Teorem 2.23' te, (3.2) ile verilen Picard iterasyon yönteminin (2.6) ile verilen contraction dönüşümlerin teklikle belirli olan sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir. Bununla birlikte (2.6) contraction şartını sağlayan T dönüşümü üzerindeki $\lambda < 1$ şartı $\lambda = 1$ olarak zayıflatıldığında, yani ele alınan dönüşüm sınıfı

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in X \quad (3.3)$$

şartını sağlayan ve nonexpansive dönüşümler olarak adlandırılan dönüşüm sınıfı olduğunda, (3.2) ile verilen Picard iterasyon yönteminin (3.3) şartını sağlayan nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaması söz konusu değildir.

Örnek 3.2 $X = [0, 1]$ olsun ve her $x \in [0, 1]$ için $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümünü

$$Tx = 1 - x$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda T , (3.3) şartını sağlayan bir nonexpansive dönüşümdür ve $F_T = \{1/2\}$ olup T bir tek sabit noktaya sahiptir. Bununla birlikte, herhangi bir $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, (3.2) ile verilen Picard iterasyonu

$$x_0, 1 - x_0, x_0, 1 - x_0, \dots$$

şeklinde x_0 ve $1 - x_0$ değerleri arasında salınan bir dizi üretir ki, söz konusu bu dizi T' nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsamaz [70].

Yukarıdaki gerçekten hareketle araştırmacılar yeni iterasyon yöntemleri tanımlama veya mevcut iterasyon yöntemlerini geliştirme ihtiyacı duymuşlardır.

Picard iterasyonunun nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamasındaki yetersizliği göz önünde bulunduran Krasnosel'skii [60] aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımlayarak bu yetersizliği ortadan kaldırmıştır.

Tanım 3.3 (Krasnosel'skii İterasyon Yöntemi) (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n), \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Krasnosel'skii iterasyon yöntemi denir.

Örnek 3.4 Örnek 3.2' deki $X = [0,1]$ uzayını ve $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümünü ele alalım. Herhangi bir $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, (3.4) ile verilen Krasnosel'skii iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1/2\}$ sabit dizisi T' nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsar [70].

Schaefer [61], (3.4) ile verilen Krasnosel'skii iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde genelleştirerek nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşımda bulundu.

Tanım 3.5 (Genelleştirilmiş Krasnosel'skii İterasyon Yöntemi) $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi denir.

Nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımda bulunmak amacıyla tanımlanan en genel iterasyon yöntemi Mann iterasyon yöntemidir [62]. Mann iterasyon yöntemi kronolojik olarak Krasnosel'skii iterasyon yönteminden iki yıl önce bir matris formülasyonunda tanımlanmış olmasına rağmen, biçimsel olarak Krasnosel'skii iterasyonunun bir genelleştirmesidir ve Mann iterasyonunun normal formu Krasnosel'skii iterasyonundaki λ parametresinin bir $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ reel dizisi ile değiştirilmesi ile aşağıdaki formülasyon ile verilir.

Tanım 3.5 (Mann İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} u_0 \in X, \\ u_{n+1} = f(T, u_n) = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tu_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.6)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.6 (Kirk İterasyon Yöntemi) $i = \overline{0, k}$, $k \geq 1$ için $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ ve $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i T^i x_n, \quad n \geq 0, \quad (3.7)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Kirk iterasyon yöntemi denir [91].

Bu iterasyon yönteminde, $k = 0$ alınırsa Picard iterasyon yöntemi ve $k = 1$ alınırsa Genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Sabit nokta teorisinde yaygın olarak kullanılan bir diğer iterasyon yöntemi de Ishikawa iterasyon yöntemidir. İlk olarak 1974 yılında Shiro Ishikawa [63] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanan bu iterasyon yöntemi,

$$\|x - y\| \leq \|(1+t)(x - y) - t(Tx - Ty)\|, \quad \forall x, y \in X \text{ ve } t > 0 \quad (3.8)$$

eşitsizliğini sağlayan ve pseudo-contractive dönüşüm olarak adlandırılan T dönüşümlerinin sabit noktalarına yakınsamada kullanıldı.

Tanım 3.7 (Ishikawa İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \subset [0, 1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.9)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir.

2000 yılında M.A. Noor [92] tarafından, varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi amacıyla aşağıdaki üç adımlı iterasyon yöntemi tanımlandı.

Tanım 3.8 (Noor İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0, 1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.10)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Noor iterasyon yöntemi denir.

Tanım 3.9 (Multistep İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}, i = \overline{1, k-2}, k \geq 2$ dizileri

$[0,1]$ de belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i)x_n + \beta_n^i T y_n^{i+1}, i = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.11)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Multistep iterasyon yöntemi denir.

Rhoades ve Şoltuz [93] tarafından tanımlanan Multistep iterasyon yöntemi aşağıda gösterildiği şekilde, yukarıda bahsedilen iterasyon yöntemlerinin bir genelleştirmesidir:

(3.11) de $k = 3$ ve $k = 2$ alındığında, sırasıyla, iyi bilinen Noor (3.10) ve Ishikawa (3.9) iterasyon yöntemleri elde edilir. (3.11) ile verilen iterasyon yöntemi $k = 2, \beta_n^1 \equiv 0$ ve $k = 2, \beta_n^1 \equiv 0, \alpha_n \equiv \lambda$ (sabit) için, sırasıyla, Mann (3.6) ve Genelleştirilmiş Krasnosel'skii (3.5) iterasyon yöntemlerine indirgenir. Genelleştirilmiş Krasnosel'skii (3.5) iterasyon yönteminde $\lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ alındığında, sırasıyla, Krasnosel'skii (3.4) ve Picard (3.2) iterasyon yöntemleri elde edilir.

Tanım 3.10 (S-İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n) T x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.12)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine S-iterasyon yöntemi denir [94], [95].

Aşağıdaki iterasyon şeması S. Thianwan [96] tarafından tanımlandı.

Tanım 3.11 (İki Adımlı Mann İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.13)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine iki adımlı Mann iterasyon yöntemi denir.

Phuengrattana ve Suantai [97] Noor iterasyon yönteminden esinlenerek, iki adımlı Mann iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Tanım 3.12 (SP-İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n Tz_n, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.14)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine SP-iterasyon yöntemi denir.

2009 da Olatinwo [98] aşağıdaki hibrid iterasyon yöntemlerini tanımladı.

Tanım 3.13 (Kirk-Ishikawa ve Kirk-Mann İterasyon Yöntemleri) k ve s , $k \geq s$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,j}\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$(i) \begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j x_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.15)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi denir.

$$(ii) \begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i x_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.16)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Mann iterasyon yöntemi denir.

Chugh ve Kumar [99] Kirk-Mann ve Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemlerini genelleştiren aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımladılar.

Tanım 3.14 (Kirk-Noor İterasyon Yöntemi) k, s ve $t, k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,j}\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_{n,l}\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1], \alpha_{n,i} \geq 0, \alpha_{n,0} \neq 0, \beta_{n,j} \geq 0, \beta_{n,0} \neq 0, \gamma_{n,l} \geq 0, \gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Noor iterasyon yöntemi denir.

Hussain vd. [100] aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımladılar.

Tanım 3.15 (Kirk-SP İterasyon Yöntemi) k, s ve $t, k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,j}\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_{n,l}\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1], \alpha_{n,i} \geq 0, \alpha_{n,0} \neq 0, \beta_{n,j} \geq 0, \beta_{n,0} \neq 0, \gamma_{n,l} \geq 0, \gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}z_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-SP iterasyon yöntemi denir.

Bu bölümün devamında, yukarıda bahsedilen iterasyon yöntemlerinin birçoğunu özel hal olarak barındıran bazı yeni iterasyon yöntemleri tanımlanarak bu yeni iterasyonlar yardımıyla bu bölümde ele alınan konulara ilişkin elde edilen orijinal sonuçlara yer verilecektir.

Kirk-Multistep iteasyon yöntemi olarak adlandırılan ilk yeni iterasyonumuz aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.16 (Kirk-Multistep İterasyon Yöntemi) s_1 ve s_{p+1} , $p = \overline{1, k-1}$; $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$

şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i_1}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,i_{p+1}}^p\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$; $p = \overline{1, k-1}$ için $\alpha_{n,i_1} \geq 0$,

$\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler ve $p = \overline{1, k-1}$ için $\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$ ve

$\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1, \\ y_n^p = \beta_{n,0}^p x_n + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad p = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemi Kirk-Multistep iterasyon yöntemi olarak adlandırılır.

Bu yeni iterasyon yönteminin özel durumları aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

(3.19)' da $k = 3$ ve $k = 2$ alındığında, sırasıyla, Kirk-Noor (3.17) ve Kirk Ishikawa (3.15) iterasyon yöntemleri elde edilir. $k = 2$ ve $s_2 = 0$ için (3.19) ile verilen iterasyon yöntemi Kirk-Mann (3.16) iterasyon yöntemine indirgenir. Ayrıca, $k = 2$, $s_2 = 0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için (3.19) ile verilen iterasyon yöntemi Kirk (3.7) iterasyon yöntemine indirgenir. (3.19) da $s_1 = 1$ ve $s_{p+1} = 1$, $p = \overline{1, k-1}$ olarak alınırsa; $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve

$\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olarak elde edilir, bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \alpha_n$ ve $\beta_{n,i_1}^p = \beta_n^p$, $p = \overline{1, k-1}$

seçimleri ile birlikte (3.19) ile verilen Kirk-multistep iterasyon yöntemi, multistep (3.11) iterasyon yöntemine indirgenir. Böylece, yukarıda bahsedildiği üzere (3.11) ile verilen multistep iterasyon yönteminin özel durumları olan diğer iterasyon yöntemleri, Kirk-multistep (3.19) iterasyon yönteminin de birer özel durumu olurlar.

[101]' de tanımlanan Jungck-Multistep-SP iterasyon yönteminde $S = I$ (Özdeşlik dönüşümü) alınarak elde edilen ve Multistep-SP iterasyon yöntemi olarak adlandırılan ikinci yeni iterasyon yöntemimiz aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.17 (Multistep-SP İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}$, $i = \overline{1, k-1}$, $k \geq 2$,

$[0,1]$ deki reel sayı dizileri olsun ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlasın,

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^1 = (1 - \beta_n^1) y_n^2 + \beta_n^1 T y_n^2, \\ y_n^2 = (1 - \beta_n^2) y_n^3 + \beta_n^2 T y_n^3, \\ \vdots \\ y_n^{k-2} = (1 - \beta_n^{k-2}) y_n^{k-1} + \beta_n^{k-2} T y_n^{k-1}, \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.20)$$

veya, kısaca

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i) y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1}, i = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.21)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Multistep-SP iterasyon yöntemi denir.

(3.21) de $k = 3$ ve $k = 2$ alındığında, sırasıyla SP (3.14) ve iki adımlı Mann (3.13) iterasyon yöntemleri elde edilir. (3.21) ile verilen iterasyon yöntemi $k = 2$, $\beta_n^1 \equiv 0$ ve $k = 2$, $\beta_n^1 \equiv 0$, $\alpha_n \equiv \lambda$ (sabit) için, sırasıyla, Mann (3.6) ve Genelleştirilmiş Krasnosel'skii (3.5) iterasyon yöntemlerine indirgenir. Genelleştirilmiş Krasnosel'skii (3.5) iterasyon yönteminde $\lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ alındığında, sırasıyla, Krasnosel'skii (3.4) ve Picard (3.2) iterasyon yöntemleri elde edilir.

Üçüncü yeni iterasyon yöntemimiz, Multistep-SP iterasyon yönteminin bir genelleştirilmesi olup Kirk-Multistep-SP iterasyon yöntemi olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.18 (Kirk-Multistep-SP iterasyon Yöntemi) s_1 ve s_{p+1} , $p = \overline{1, k-1}$;

$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i_1}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,i_{p+1}}^p\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$; $p = \overline{1, k-1}$

için $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler ve $p = \overline{1, k-1}$ için

$\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olmak üzere;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} y_n^1 + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1, \\ y_n^p = \beta_{n,0}^p y_n^{p+1} + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad p = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.22)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Multistep-SP iterasyon yöntemi denir.

(3.22) de $k=3$ ve $k=2$ alındığında, sırasıyla, Kirk-SP (3.18) ve Kirk-iki adımlı Mann iterasyon yöntemleri elde edilir. $k=2$ ve $s_2=0$ için (3.22) ile verilen iterasyon yöntemi Kirk-Mann (3.16) iterasyon yöntemine indirgenir. Ayrıca, $k=2$, $s_2=0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için (3.22) ile verilen iterasyon yöntemi Kirk (3.7) iterasyon yöntemine indirgenir.

(3.22) de $s_1=1$ ve $s_{p+1}=1$, $p = \overline{1, k-1}$ olarak alınırsa; $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve

$\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olarak elde edilir, bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \alpha_n$ ve $\beta_{n,1}^p = \beta_n^p$, $p = \overline{1, k-1}$

seçimleri ile birlikte (3.22) ile verilen Kirk-multistep-SP iterasyon yöntemi, multistep-SP (3.21) iterasyon yöntemine indirgenir. Böylece yukarıda bahsedildiği üzere (3.21) ile verilen multistep-SP iterasyon yönteminin özel durumları olan diğer iterasyon yöntemleri, Kirk-multistep-SP (3.22) iterasyon yönteminin de birer özel durumu olurlar.

Son olarak, (3.12) ile verilen S-iterasyon yöntemini genelleştiren ve Kirk-S iterasyon yöntemi olarak adlandırılan yeni iterasyon yöntemimiz aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.19 (Kirk-S İterasyon Yöntemi) s_1 ve s_2 , $s_1 \geq s_2$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i_1}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,i_2}\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$, $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_2} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}Tx_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1}T^{i_1}y_n, \quad \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}T^{i_2}x_n, \quad \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.23)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-S iterasyon yöntemi denir.

(3.23) te $s_1 = s_2 = 1$ olarak alınması durumunda $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_2=0}^1 \beta_{n,i_2} = 1$ olarak elde edilir, bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \alpha_n$ ve $\beta_{n,i_2} = \beta_n$ seçimleri ile birlikte (3.23) ile verilen Kirk- S iterasyon yöntemi, (3.12) ile verilen S-iterasyon yöntemine indirgenir.

Şimdi yukarıda verilen bazı iterasyon yöntemlerinin bazı dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamada kullanılabileceğine dair bazı teoremler vereceğiz.

Lemma 3.20 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \in [0,1)$ olacak şekildeki negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ ise, bu durumda $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n) = 0$ dır [102].

Lemma 3.20, aşağıda verilen teoremin ispatlanmasında önemli bir rol üstlenir.

Teorem 3.21 X bir reel Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme ve $T : B \rightarrow B$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşümü olsun. T' nin $p \in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x_0 \in B$ için, (3.9) ile verilen Ishikawa iterasyonu teklikle belirli olan $p \in F_T$ noktasına yakınsar [103].

Teorem 3.22 X bir reel Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme ve $T : B \rightarrow B$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşümü olsun. T' nin $p \in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x_0 \in B$ için, (3.10) ile verilen Noor iterasyonu teklikle belirli olan $p \in F_T$ noktasına yakınsar [104].

Yukarıdaki teoremlerin şartları altında, (3.20) ile tanımlamış olduğumuz Multistep-SP iterasyon yönteminin ve (3.12) ile verilen S-iterasyon yönteminin yakınsaklıklarına ilişkin iki teorem verilecektir.

Teorem 3.23 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme ve $T : B \rightarrow B$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşümü olsun. T' nin $p \in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x_0 \in B$ için, (3.20) ile verilen Multistep-SP iterasyonu teklikle belirli olan $p \in F_T$ noktasına yakınsar.

İspat ([101], Teorem 3.1) de; $Y = X$, $S = I$ (Özdeşlik dönüşümü) ve $L = 0$ alınmasıyla ispat kolayca elde edilir.

Teorem 3.24 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : B \rightarrow B$ dönüşümü, $F_T \neq \emptyset$ olmak üzere (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşümü olsun ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, S-iterasyonu (3.12) ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1)$ reel dizileriyle tanımlanan bir iteratif dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T' nin teklikle belirli olan sabit noktasına yakınsar.

İspat. ([105], Teorem 8) aynı hipotezler altında (2.27) şartını sağlayan dönüşümler için ispatlanmıştır. ([105], Teorem 8)' in ispatındaki benzer notasyonlar ve yöntem kullanılarak bu teoremin ispatı kolayca elde edilebilir.

Örnek 3.2' de, (3.2) ile verilen Picard iterasyon yönteminin (3.3) ile verilen nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığı ancak bununla birlikte aynı şartlar altında, Örnek 3.4' te, (3.4) ile verilen Krasnoselskij iterasyon yönteminin nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsadığı gösterildi.

Mutangadura ve Chidume [106] tarafından verilen diğer bir örnekte, (3.6) ile tanımlanan Mann iterasyon yönteminin (3.8) eşitsizliğini sağlayan pseudo-contractive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığı ancak bununla birlikte [63]' te, (3.9) ile tanımlanan Ishikawa iterasyon yönteminin bir Lipschitzian pseudo-contractive dönüşümün sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir.

Yukarıdaki gerçeklerden hareketle Rhoades ve Şoltuz [93], [107] tarafından aşağıdaki konjonktür ortaya konuldu:

Belirli bir dönüşüm sınıfı için, Mann iterasyon yöntemi (3.6) bu dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsak iken Ishikawa iterasyon yöntemi (3.9)' da yakınsak mıdır? Veya tersine, Ishikawa itersyon yöntemi yakınsak iken Mann iterasyon yöntemi de yakınsak mıdır?

Bu konjonktür son 11 yılda bir çok araştırmacı tarafından çeşitli dönüşüm sınıfları için olumlu bir şekilde ispatlandı ve sonuç olarak, sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denkliği olarak adlandırılan bu tema ile ilgili geniş bir literatür oluşturuldu, bkz., [93], [107-116].

Şimdi, [116] ile verilen çalışma baz alınarak, (3.12) ile verilen S-iterasyon yönteminin, (3.20) ile tanımlamış olduğumuz Multistep-SP iterasyon yönteminin ve yukarıda bahsettiğimiz diğer iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıkları arasında denklikler kurulacaktır. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 3.25 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$; her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in [0,1]$, her $n \geq n_0$ için $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \infty$ ve $\rho_n = o(\mu_n)$ olmak üzere

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n) a_n + \rho_n$$

şartını sağlayan negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir [117].

Teorem 3.26 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : B \rightarrow B$, (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (3.6) ile verilen Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

(2) (3.20) ile verilen Multistep-SP iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): Mann iterasyonunun $p \in F_T$ ye yakınsadığını kabul edelim. (3.6), (3.20) ve (2.30)' un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
 \|u_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n)(u_n - y_n^1) + \alpha_n(Tu_n - Ty_n^1)\| \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - y_n^1\| + \alpha_n\|Tu_n - Ty_n^1\| \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - y_n^1\| + \alpha_n\{\delta\|u_n - y_n^1\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)\} \\
 &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|u_n - y_n^1\| + \alpha_n\varphi(\|u_n - Tu_n\|), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|u_n - y_n^1\| &= \|u_n - (1 - \beta_n^1)y_n^2 - \beta_n^1Ty_n^2\| \\
 &= \|u_n - \beta_n^1u_n + \beta_n^1u_n - (1 - \beta_n^1)y_n^2 - \beta_n^1Ty_n^2\| \\
 &= \|(1 - \beta_n^1)(u_n - y_n^2) + \beta_n^1(u_n - Ty_n^2)\| \\
 &\leq (1 - \beta_n^1)\|u_n - y_n^2\| + \beta_n^1\|u_n - Ty_n^2\| \\
 &= (1 - \beta_n^1)\|u_n - y_n^2\| + \beta_n^1\|u_n - Tu_n + Tu_n - Ty_n^2\| \\
 &\leq (1 - \beta_n^1)\|u_n - y_n^2\| + \beta_n^1\|Tu_n - Ty_n^2\| + \beta_n^1\|u_n - Tu_n\| \\
 &\leq (1 - \beta_n^1)\|u_n - y_n^2\| + \beta_n^1\delta\|u_n - y_n^2\| + \beta_n^1\varphi(\|u_n - Tu_n\|) + \beta_n^1\|u_n - Tu_n\| \\
 &= [1 - \beta_n^1(1 - \delta)]\|u_n - y_n^2\| + \beta_n^1\{\|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)\}, \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n^2\| &= \|(1 - \beta_n^2)(u_n - y_n^3) + \beta_n^2(u_n - Ty_n^3)\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2)\|u_n - y_n^3\| + \beta_n^2\|u_n - Ty_n^3\| \\
&= (1 - \beta_n^2)\|u_n - y_n^3\| + \beta_n^2\|Tu_n - Ty_n^3\| + \beta_n^2\|u_n - Tu_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2)\|u_n - y_n^3\| + \beta_n^2\delta\|u_n - y_n^3\| + \beta_n^2\varphi(\|u_n - Tu_n\|) + \beta_n^2\|u_n - Tu_n\| \\
&= [1 - \beta_n^2(1 - \delta)]\|u_n - y_n^3\| + \beta_n^2\{\|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)\}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n^3\| &= \|(1 - \beta_n^3)(u_n - y_n^4) + \beta_n^3(u_n - Ty_n^4)\| \\
&\leq (1 - \beta_n^3)\|u_n - y_n^4\| + \beta_n^3\|u_n - Ty_n^4\| \\
&= (1 - \beta_n^3)\|u_n - y_n^4\| + \beta_n^3\|Tu_n - Ty_n^4\| + \beta_n^3\|u_n - Tu_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n^3)\|u_n - y_n^4\| + \beta_n^3\delta\|u_n - y_n^4\| + \beta_n^3\varphi(\|u_n - Tu_n\|) + \beta_n^3\|u_n - Tu_n\| \\
&= [1 - \beta_n^3(1 - \delta)]\|u_n - y_n^4\| + \beta_n^3\{\|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)\} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.24), (3.25), (3.26) ve (3.27)' nin birleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)][1 - \beta_n^1(1 - \delta)][1 - \beta_n^2(1 - \delta)][1 - \beta_n^3(1 - \delta)]\|u_n - y_n^4\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\{[1 - \beta_n^1(1 - \delta)][1 - \beta_n^2(1 - \delta)]\beta_n^3 \\
&\quad + [1 - \beta_n^1(1 - \delta)]\beta_n^2 + \beta_n^1\}\{\|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)\} \\
&\quad + \alpha_n\varphi(\|u_n - Tu_n\|) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerin sürdürülmesiyle

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)][1 - \beta_n^1(1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2}(1 - \delta)] \|u_n - y_n^{k-1}\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \{ [1 - \beta_n^1(1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-3}(1 - \delta)] \beta_n^{k-2} \\
&\quad + \cdots + [1 - \beta_n^1(1 - \delta)] \beta_n^2 + \beta_n^1 \} \{ \|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|) \} \\
&\quad + \alpha_n \varphi(\|u_n - Tu_n\|)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Yine (3.6), (3.20) ve (2.30)' un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n^{k-1}\| &= \|(1 - \beta_n^{k-1})(u_n - x_n) + \beta_n^{k-1}(u_n - Tx_n)\| \\
&\leq (1 - \beta_n^{k-1})\|u_n - x_n\| + \beta_n^{k-1}\|u_n - Tx_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n^{k-1})\|u_n - x_n\| + \beta_n^{k-1}\|Tu_n - Tx_n\| + \beta_n^{k-1}\|u_n - Tu_n\| \\
&\leq [1 - \beta_n^{k-1}(1 - \delta)]\|u_n - x_n\| + \beta_n^{k-1} \{ \|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|) \}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ifadesi elde edilir.

$\delta \in [0, 1)$ ve $i = \overline{1, k-1}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n^i\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1)$ olduğundan,

$$[1 - \alpha_n(1 - \delta)][1 - \beta_n^1(1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-1}(1 - \delta)] \leq 1 - \alpha_n(1 - \delta) \tag{3.31}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.30)' un (3.29)' da yerine yazılmasıyla elde edilen eşitsizlikte (3.31) eşitsizliğinin kullanılmasıyla,

$$\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|u_n - x_n\|$$

$$\begin{aligned}
& + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \{ [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2} (1 - \delta)] \beta_n^{k-1} \\
& + \cdots + [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \beta_n^2 + \beta_n^1 \} \{ \|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|) \} \\
& + \alpha_n \varphi(\|u_n - Tu_n\|)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi, aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir

$$a_n := \|u_n - x_n\|,$$

$$\mu_n := \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1),$$

$$\begin{aligned}
\rho_n := & [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \{ [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2} (1 - \delta)] \beta_n^{k-1} \\
& + \cdots + [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \beta_n^2 + \beta_n^1 \} \{ \|u_n - Tu_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|) \} + \alpha_n \varphi(\|u_n - Tu_n\|).
\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = 0$ ve $Tp = p \in F_T$ olduğundan, (2.30)' dan

$$\begin{aligned}
0 & \leq \|u_n - Tu_n\| \\
& \leq \|u_n - p\| + \|Tp - Tu_n\| \\
& \leq \|u_n - p\| + \delta \|p - u_n\| + \varphi(\|p - Tp\|) \\
& = (1 + \delta) \|u_n - p\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olduğu elde edilir, bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - Tu_n\| = 0$ olmasını, yani $\rho_n = o(\mu_n)$ olmasını gerektirir. Böylece, Lemma 3.25' in (3.32)' ye uygulanmasıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x_n\| = 0 \tag{3.34}$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|x_n - p\| \leq \|x_n - u_n\| + \|u_n - p\| \quad (3.35)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.35) eşitsizliğine (3.34)' ün ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = 0$ kabulünün uygulanmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olduğu elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1): $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) olduğunu kabul edelim. (3.6), (3.20) ve (2.30)' un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n)(y_n^1 - u_n) + \alpha_n(Ty_n^1 - Tu_n)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|y_n^1 - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n^1 - Tu_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|y_n^1 - u_n\| + \alpha_n\{\delta\|y_n^1 - u_n\| + \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|)\} \\ &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|y_n^1 - u_n\| + \alpha_n\varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \|y_n^1 - u_n\| &= \|(1 - \beta_n^1)y_n^2 + \beta_n^1Ty_n^2 - u_n\| \\ &= \|(1 - \beta_n^1)y_n^2 + \beta_n^1Ty_n^2 - (1 - \beta_n^1 + \beta_n^1)u_n\| \\ &= \|(1 - \beta_n^1)(y_n^2 - u_n) + \beta_n^1(Ty_n^2 - u_n)\| \\ &\leq (1 - \beta_n^1)\|y_n^2 - u_n\| + \beta_n^1\|Ty_n^2 - u_n\| \\ &= (1 - \beta_n^1)\|y_n^2 - u_n\| + \beta_n^1\|Ty_n^2 - y_n^2 + y_n^2 - u_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n^1)\|y_n^2 - u_n\| + \beta_n^1\|y_n^2 - u_n\| + \beta_n^1\|Ty_n^2 - y_n^2\| \\ &= \|y_n^2 - u_n\| + \beta_n^1\|Ty_n^2 - y_n^2\| \end{aligned} \quad (3.37)$$

ve

$$\|y_n^2 - u_n\| = \|(1 - \beta_n^2)y_n^3 + \beta_n^2Ty_n^3 - u_n\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| (1 - \beta_n^2)(y_n^3 - u_n) + \beta_n^2(Ty_n^3 - u_n) \right\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2) \|y_n^3 - u_n\| + \beta_n^2 \|Ty_n^3 - u_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2) \|y_n^3 - u_n\| + \beta_n^2 \|y_n^3 - u_n\| + \beta_n^2 \|Ty_n^3 - y_n^3\| \\
&= \|y_n^3 - u_n\| + \beta_n^2 \|Ty_n^3 - y_n^3\|
\end{aligned} \tag{3.38}$$

olarak elde edilir.

(3.36), (3.37) ve (3.38)' in birleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \|y_n^3 - u_n\| + [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \beta_n^2 \|Ty_n^3 - y_n^3\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \beta_n^1 \|Ty_n^2 - y_n^2\| + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerin sürdürülmesiyle

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \|y_n^{k-1} - u_n\| + [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \beta_n^{k-2} \|Ty_n^{k-1} - y_n^{k-1}\| \\
&\quad + \dots + [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \beta_n^1 \|Ty_n^2 - y_n^2\| + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan (3.20)' den,

$$\begin{aligned}
\|y_n^{k-1} - u_n\| &= \left\| (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1}Tx_n - u_n \right\| \\
&= (1 - \beta_n^{k-1}) \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \|Tx_n - u_n\| \\
&\leq (1 - \beta_n^{k-1}) \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \|Tx_n - x_n\| \\
&= \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \|Tx_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olduğu elde edilir.

(3.41)' in (3.40)' ta yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|x_n - u_n\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \left\{ \beta_n^{k-1} \|Tx_n - x_n\| + \beta_n^{k-2} \|Ty_n^{k-1} - y_n^{k-1}\| \right. \\
&\quad \left. + \dots + \beta_n^1 \|Ty_n^2 - y_n^2\| \right\} + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi, aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir

$$a_n := \|u_n - x_n\|,$$

$$\mu_n := \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1),$$

$$\begin{aligned}
\rho_n &:= [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \left\{ \beta_n^{k-1} \|Tx_n - x_n\| + \beta_n^{k-2} \|Ty_n^{k-1} - y_n^{k-1}\| + \dots + \beta_n^1 \|Ty_n^2 - y_n^2\| \right\} \\
&\quad + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|).
\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ ve $Tp = p \in F_T$ olduğundan, (2.30)' dan

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x_n - Tx_n\| \\
&\leq \|x_n - p\| + \|Tp - Tx_n\| \\
&\leq \|x_n - p\| + \delta \|p - x_n\| + \varphi(\|p - Tp\|) \\
&= (1 + \delta) \|x_n - p\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

olduğu elde edilir, bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ olmasını gerektirir.

Ayrıca (2.30), (3.20) ve $i = \overline{1, k-1}$ için $\{\beta_n^i\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1)$ şartının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|y_n^1 - Ty_n^1\| = \|y_n^1 - p + p - Ty_n^1\| \\
&\leq \|y_n^1 - p\| + \|Tp - Ty_n^1\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|y_n^1 - p\| + \delta \|p - y_n^1\| + \varphi(\|p - Tp\|) \\
&= (1 + \delta) \|y_n^1 - p\| \\
&= (1 + \delta) \|(1 - \beta_n^1) y_n^2 + \beta_n^1 T y_n^2 - (1 - \beta_n^1 + \beta_n^1) p\| \\
&\leq (1 + \delta) \{(1 - \beta_n^1) \|y_n^2 - p\| + \beta_n^1 \|T y_n^2 - Tp\|\} \\
&\leq (1 + \delta) \{(1 - \beta_n^1) \|y_n^2 - p\| + \beta_n^1 \delta \|y_n^2 - p\|\} \\
&= (1 + \delta) [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \|y_n^2 - p\| \\
&= (1 + \delta) [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \|(1 - \beta_n^2) y_n^3 + \beta_n^2 T y_n^3 - (1 - \beta_n^2 + \beta_n^2) p\| \\
&\leq (1 + \delta) [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \{(1 - \beta_n^2) \|y_n^3 - p\| + \beta_n^2 \|T y_n^3 - Tp\|\} \\
&\leq (1 + \delta) [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] [1 - \beta_n^2 (1 - \delta)] \|y_n^3 - p\| \\
&\vdots \\
&\leq (1 + \delta) [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2} (1 - \delta)] \|y_n^{k-1} - p\| \\
&\leq (1 + \delta) [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-1} (1 - \delta)] \|x_n - p\| \\
&\leq (1 + \delta) \|x_n - p\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

olduğu elde edilir, bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^1 - T y_n^1\| = 0$ olmasını gerektirir.

(3.44) ile verilen sonuç benzer şekilde $\|T y_n^2 - y_n^2\|, \dots, \|T y_n^{k-1} - y_n^{k-1}\|$ değerleri için de sağlanır ve φ sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|y_n^1 - T y_n^1\|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^2 - T y_n^2\| = \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^{k-1} - T y_n^{k-1}\| = 0 \tag{3.45}$$

olduğu elde edilir, yani $\rho_n = o(\mu_n)$ dir.

Böylece, Lemma 3.25' in (3.42)' ye uygulanmasıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0 \quad (3.46)$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|u_n - p\| \leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - p\| \quad (3.47)$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.47) eşitsizliğine (3.46)' nın ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ kabulünün uygulanmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = 0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.27 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : B \rightarrow B$, (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (3.6) ile verilen Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

(2) (3.12) ile verilen S- iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2): Mann iterasyonunun $p \in F_T$ ye yakınsadığını kabul edelim. (3.6), (3.12) ve (2.30)' un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n)(u_n - Tx_n) + \alpha_n(Tu_n - Ty_n)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - Tx_n\| + \alpha_n\|Tu_n - Ty_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - Tx_n\| + \alpha_n\delta\|u_n - y_n\| + \alpha_n\phi(\|u_n - Tu_n\|), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \|u_n - y_n\| &= \|u_n - (1 - \beta_n)x_n - \beta_nTx_n\| \\ &= \|u_n - \beta_nu_n + \beta_nu_n - (1 - \beta_n)x_n - \beta_nTx_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|u_n - x_n\| + \beta_n\|u_n - Tx_n\| \end{aligned} \quad (3.49)$$

ve

$$\begin{aligned}
\|u_n - Tx_n\| &= \|u_n - Tu_n + Tu_n - Tx_n\| \\
&\leq \|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tx_n\| \\
&\leq \|u_n - Tu_n\| + \delta \|u_n - x_n\| + \varphi(\|u_n - Tu_n\|)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.48), (3.49) ve (3.50)' nin birleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \left\{ (1 - \alpha_n) \delta + \alpha_n \delta [1 - \beta_n (1 - \delta)] \right\} \|u_n - x_n\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n + \alpha_n \beta_n \delta] \|u_n - Tu_n\| + [1 + \alpha_n \beta_n \delta] \varphi(\|u_n - Tu_n\|)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca $\delta \in [0, 1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1)$ olduğundan

$$(1 - \alpha_n) \delta < 1 - \alpha_n \text{ ve } 1 - \beta_n (1 - \delta) < 1 \tag{3.52}$$

olur.

(3.51)' de, (3.52) ile verilen eşitsizliklerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|u_n - x_n\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|u_n - Tu_n\| + [1 + \alpha_n \beta_n \delta] \varphi(\|u_n - Tu_n\|)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi, aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir

$$a_n := \|u_n - x_n\|, \mu_n := \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1),$$

$$\rho_n := [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|u_n - Tu_n\| + [1 + \alpha_n \beta_n \delta] \varphi(\|u_n - Tu_n\|).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - p\| = 0$ olduğundan, Teorem 3.26' nın ispatında olduğu gibi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - Tu_n\| = 0$ olarak bulunur. Böylece, Teorem 3.26' nın ispatındakine benzer hesaplamaların yapılmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olarak bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1): S-iterasyonunun $p \in F_T'$ ye yakınsadığını kabul edelim. (3.6), (3.12) ve (2.30)' un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n)(Tx_n - u_n) + \alpha_n(Ty_n - Tu_n)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tu_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - u_n\| + \alpha_n\delta\|y_n - u_n\| + \alpha_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \|y_n - u_n\| &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n - u_n\| \\ &= \|(1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n - u_n - \beta_nu_n + \beta_nu_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tx_n - u_n\| \end{aligned} \quad (3.55)$$

ve

$$\begin{aligned} \|Tx_n - u_n\| &= \|Tx_n - x_n + x_n - u_n\| \\ &\leq \|Tx_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| \end{aligned} \quad (3.56)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.54), (3.55) ve (3.56)' dan

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|x_n - u_n\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n + \alpha_n\beta_n\delta]\|Tx_n - x_n\| + \alpha_n\varphi(\|y_n - Ty_n\|) \end{aligned} \quad (3.57)$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca $\delta \in [0, 1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1)$ olduğundan

$$\alpha_n \beta_n \delta < \alpha_n \delta \quad (3.58)$$

olur.

(3.57)' de, (3.58) ile verilen eşitsizliğin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|x_n - u_n\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|Tx_n - x_n\| + \alpha_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \end{aligned} \quad (3.59)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi, aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir

$$a_n := \|x_n - u_n\|,$$

$$\mu_n := \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1),$$

$$\rho_n := [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|Tx_n - x_n\| + \alpha_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0 \text{ olduğundan, Teorem 3.26' nın ispatında olduğu gibi } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$$

olarak bulunur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y_n - Ty_n\| \\ &\leq \|y_n - p\| + \|Tp - Ty_n\| \\ &\leq \|y_n - p\| + \delta \|p - y_n\| + \varphi(\|p - Tp\|) \\ &= (1 + \delta) \|y_n - p\| \\ &\leq (1 + \delta)(1 - \beta_n) \|x_n - p\| + (1 + \delta) \beta_n \|Tx_n - Tp\| \\ &\leq (1 + \delta)[1 - \beta_n + \beta_n] \|x_n - p\| + (1 + \delta) \beta_n \varphi(\|p - Tp\|) \end{aligned}$$

$$= (1 + \delta) \|x_n - p\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.60)$$

olduğu elde edilir, bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - Ty_n\| = 0$ olmasını gerektirir. Böylece, Teorem 3.26'nın ispatındakine benzer hesaplamaların yapılmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğu gösterilebilir.

2007 yılında, Şoltuz ([118], Sonuç 2)' de, bir normlu uzayda Teorem 2.31' de verilen $(z_1)-(z_3)$ şartlarını sağlayan Zamfirescu operatörler sınıfı için Genelleştirilmiş Krasnosel'skii (3.5), Mann (3.6), Ishikawa (3.9), Noor (3.10) ve Multistep (3.11) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denk olduğu gösterildi.

2011 yılında, Chugh ve Kumar ([119], Sonuç 3.2)' de, bir Banach uzayında (2.16) şartını sağlayan quasi-contractive operatörler sınıfı için Picard (3.2), Mann (3.6), Ishikawa (3.9), Noor (3.10), iki adımlı Mann (3.13) ve SP (3.14) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denk olduğu gösterildi.

Yukarıdaki gerçekler ışığında; Teorem 3.21, ([118], Sonuç 2) ve ([119], Sonuç 3.2)' den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.28 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : B \rightarrow B$, (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) (3.2) ile verilen Picard iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (2) (3.5) ile verilen Genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (3) (3.6) ile verilen Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (4) (3.9) ile verilen Ishikawa iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (5) (3.10) ile verilen Noor iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (6) (3.13) ile verilen İki adımlı Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (7) (3.14) ile verilen SP-iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (8) (3.11) ile verilen Multistep iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

Böylece, Teorem 3.26, Teorem 3.27 ve Sonuç 3.28' den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.29 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq B \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : B \rightarrow B$, (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun ve T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, yani, $F_T \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) (3.2) ile verilen Picard iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (2) (3.5) ile verilen Genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (3) (3.6) ile verilen Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (4) (3.9) ile verilen Ishikawa iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (5) (3.10) ile verilen Noor iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (6) (3.13) ile verilen İki adımlı Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (7) (3.14) ile verilen SP-iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (8) (3.11) ile verilen Multistep iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (9) (3.20) ile verilen Multistep-SP iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,
- (10) (3.12) ile verilen S- iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar.

Bu bölüm, yeni tanımlamış olduğumuz Kirk-Multistep (3.19), Kirk-S (3.23) ve Kirk-Multistep-SP (3.22) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarına ilişkin bazı sonuçlar verilerek sonlandırılacaktır. Aşağıdaki lemmalar bu sonuçların elde edilmesinde önemli bir rol üstleneceklerdir.

Lemma 3.30 Eğer $\sigma \in [0,1)$ bir reel sayı ve $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olacak şekilde bir negatif olmayan sayı dizisi ise, bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$u_{n+1} \leq \sigma u_n + \varepsilon_n$$

şartını sağlayan herhangi bir $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dır [70].

Lemma 3.31 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(Lu) \leq L\varphi(u)$,

$L \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^+$ şartlarını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. Bu durumda, her $i \in \mathbb{N}$, $L \geq 0$, $a \in [0,1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$\|T^i x - T^i y\| \leq \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} a^{i-j} \varphi^j(\|x - Tx\|) + a^i \|x - y\| \quad (3.61)$$

eşitsizliği sağlanır [87].

Teorem 3.32 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, Kirk-multistep iterasyon yöntemi (3.19) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ iteratif dizisi q' ya yakınsar.

İspat q' nun tekliği (2.30)' dan sağlanır. Şimdi $x_n \rightarrow q$ ($n \rightarrow \infty$) olduğu gösterilecektir.

(3.19)' un ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &= \left\| \alpha_{n,0} x_n - \alpha_{n,0} q + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1 - \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} q \right\| \\ &\leq \alpha_{n,0} \|x_n - q\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \|T^{i_1} y_n^1 - T^{i_1} q\| \\ &\leq \alpha_{n,0} \|x_n - q\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_1} \binom{i_1}{j} a^{i_1-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_1} \|y_n^1 - q\| \right\} \\ &= \alpha_{n,0} \|x_n - q\| + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \|y_n^1 - q\|, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \|y_n^1 - q\| &= \left\| \beta_{n,0}^1 x_n + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 T^{i_2} y_n^2 - \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 q \right\| \\ &\leq \beta_{n,0}^1 \|x_n - q\| + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 \|T^{i_2} y_n^2 - T^{i_2} q\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta_{n,0}^1 \|x_n - q\| + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 \left\{ \sum_{j=1}^{i_2} \binom{i_2}{j} a^{i_2-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_2} \|y_n^2 - q\| \right\} \\
&= \beta_{n,0}^1 \|x_n - q\| + \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \|y_n^2 - q\|, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y_n^2 - q\| &= \left\| \beta_{n,0}^2 x_n + \sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 T^{i_3} y_n^3 - q \right\| \\
&\leq \beta_{n,0}^2 \|x_n - q\| + \sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 \|T^{i_3} y_n^3 - T^{i_3} q\| \\
&\leq \beta_{n,0}^2 \|x_n - q\| + \sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 \left\{ \sum_{j=1}^{i_3} \binom{i_3}{j} a^{i_3-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_3} \|y_n^3 - q\| \right\} \\
&= \beta_{n,0}^2 \|x_n - q\| + \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|y_n^3 - q\|, \tag{3.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y_n^3 - q\| &= \left\| \beta_{n,0}^3 x_n + \sum_{i_4=1}^{s_4} \beta_{n,i_4}^3 T^{i_4} y_n^4 - q \right\| \\
&\leq \beta_{n,0}^3 \|x_n - q\| + \sum_{i_4=1}^{s_4} \beta_{n,i_4}^3 \|T^{i_4} y_n^4 - T^{i_4} q\| \\
&\leq \beta_{n,0}^3 \|x_n - q\| + \sum_{i_4=1}^{s_4} \beta_{n,i_4}^3 \left\{ \sum_{j=1}^{i_4} \binom{i_4}{j} a^{i_4-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_4} \|y_n^4 - q\| \right\} \\
&= \beta_{n,0}^3 \|x_n - q\| + \left(\sum_{i_4=1}^{s_4} \beta_{n,i_4}^3 a^{i_4} \right) \|y_n^4 - q\| \tag{3.65}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.62), (3.63), (3.64) ve (3.65)' in birleştirilmesiyle

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \beta_{n,0}^3 \left\| x_n - q \right\| \\
& + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \left(\sum_{i_4=1}^{s_4} \beta_{n,i_4}^3 a^{i_4} \right) \left\| y_n^4 - q \right\|
\end{aligned} \tag{3.66}$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerin devam ettirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\left\| x_{n+1} - q \right\| & \leq \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right. \\
& + \dots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \dots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \left. \right\} \left\| x_n - q \right\| \\
& + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \dots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \left\| y_n^{k-1} - q \right\|
\end{aligned} \tag{3.67}$$

olduğu elde edilir.

Yine (3.19)' un ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\left\| y_n^{k-1} - q \right\| & = \left\| \beta_{n,0}^{k-1} (x_n - q) + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} (T^{i_k} x_n - T^{i_k} q) \right\| \\
& \leq \beta_{n,0}^{k-1} \left\| x_n - q \right\| + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \left\| T^{i_k} x_n - T^{i_k} q \right\| \\
& \leq \beta_{n,0}^{k-1} \left\| x_n - q \right\| + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_k} \binom{i_k}{j} a^{i_k-j} \varphi^j (\|q - Tq\|) + a^{i_k} \left\| x_n - q \right\| \right\} \\
& = \beta_{n,0}^{k-1} \left\| x_n - q \right\| + \left(\sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \left\| x_n - q \right\| \\
& = \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \left\| x_n - q \right\|
\end{aligned} \tag{3.68}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.68)' in (3.67)' de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\| \leq & \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right. \\
& + \cdots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \\
& \left. + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \right\} \|x_n - q\| \quad (3.69)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

σ' yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\begin{aligned}
\sigma := & \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \\
& + \cdots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \\
& + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right). \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Şimdi $\sigma \in [0,1)$ olduğu gösterilecektir. $\alpha_{n,0} > 0$, her bir $k \geq 2$ için $a^{i_k} \in [0,1)$,

$\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $p = \overline{1, k-1}$ için $\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sigma & < \alpha_{n,0} + (1 - \alpha_{n,0}) \beta_{n,0}^1 + (1 - \alpha_{n,0}) (1 - \beta_{n,0}^1) \beta_{n,0}^2 \\
& + \cdots + (1 - \alpha_{n,0}) (1 - \beta_{n,0}^1) \cdots (1 - \beta_{n,0}^{k-3}) \beta_{n,0}^{k-2} \\
& + (1 - \alpha_{n,0}) (1 - \beta_{n,0}^1) \cdots (1 - \beta_{n,0}^{k-3}) (1 - \beta_{n,0}^{k-2})
\end{aligned}$$

$$= 1 \quad (3.71)$$

olduğu elde edilir.

Böylece Lemma 3.30' un (3.69)' a uygulanmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ olarak elde edilir.

Teorem 3.33 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Kirk-S iterasyon yöntemi (3.23) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif dizisi q' ya yakınsar.

İspat q' nun tekliği (2.30)' dan sağlanır. Şimdi $x_n \rightarrow q$ ($n \rightarrow \infty$) olduğu gösterilecektir.

(3.23), (2.30) ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &= \left\| \alpha_{n,0} (Tx_n - Tq) + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} (T^{i_1} y_n - T^{i_1} q) \right\| \\ &\leq \alpha_{n,0} \|Tx_n - Tq\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \|T^{i_1} y_n - T^{i_1} q\| \\ &\leq \delta \alpha_{n,0} \|x_n - q\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_1} \binom{i_1}{j} a^{i_1-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_1} \|y_n - q\| \right\} \\ &= \delta \alpha_{n,0} \|x_n - q\| + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \|y_n - q\| \end{aligned} \quad (3.72)$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n - q\| &= \left\| \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} (T^{i_2} x_n - T^{i_2} q) \right\| \\ &\leq \beta_{n,0} \|x_n - q\| + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2} \|T^{i_2} x_n - T^{i_2} q\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta_{n,0} \|x_n - q\| + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2} \left\{ \sum_{j=1}^{i_2} \binom{i_2}{j} a^{i_2-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_2} \|x_n - q\| \right\} \\
&= \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} a^{i_2} \right) \|x_n - q\|
\end{aligned} \tag{3.73}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.73)' ün (3.72)' de yerine yazılmasıyla

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \left[\delta \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} a^{i_2} \right) \right] \|x_n - q\| \tag{3.74}$$

ifadesi elde edilir.

σ' yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\sigma := \delta \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} a^{i_2} \right). \tag{3.75}$$

Şimdi $\sigma \in [0,1)$ olduğu gösterilecektir.

$\delta, a^{i_1}, a^{i_2} \in [0,1), \alpha_{n,0} > 0$ ve $\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sigma &:= \delta \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} a^{i_2} \right) \\
&< \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} \right) \\
&= \alpha_{n,0} + (1 - \alpha_{n,0}) = 1
\end{aligned} \tag{3.76}$$

olduğu elde edilir.

Böylece Lemma 3.30' un (3.74)' e uygulanmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ olarak elde edilir.

Teorem 3.34 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, Kirk-multistep-SP iterasyon yöntemi (3.22) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ iteratif dizisi q' ya yakınsar.

İspat q' nun tekliği (2.30)' dan sağlanır. Şimdi $x_n \rightarrow q$ ($n \rightarrow \infty$) olduğu gösterilecektir.

(3.22)' nin ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\| &= \left\| \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1 - \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} q \right\| \\
&= \left\| \alpha_{n,0} (y_n^1 - q) + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} (T^{i_1} y_n^1 - q) \right\| \\
&\leq \alpha_{n,0} \|y_n^1 - q\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \|T^{i_1} y_n^1 - T^{i_1} q\| \\
&\leq \alpha_{n,0} \|y_n^1 - q\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_1} \binom{i_1}{j} a^{i_1-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_1} \|y_n^1 - q\| \right\} \\
&= \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \|y_n^1 - q\|, \tag{3.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y_n^1 - q\| &= \left\| \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 (T^{i_2} y_n^2 - T^{i_2} q) \right\| \\
&\leq \beta_{n,0}^1 \|y_n^2 - q\| + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 \|T^{i_2} y_n^2 - T^{i_2} q\| \\
&\leq \beta_{n,0}^1 \|y_n^2 - q\| + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 \left\{ \sum_{j=1}^{i_2} \binom{i_2}{j} a^{i_2-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_2} \|y_n^2 - q\| \right\}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \|y_n^2 - q\|, \quad (3.78)$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n^2 - q\| &= \left\| \sum_{i_3=0}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 (T^{i_3} y_n^3 - T^{i_3} q) \right\| \\ &\leq \beta_{n,0}^2 \|y_n^3 - q\| + \sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 \|T^{i_3} y_n^3 - T^{i_3} q\| \\ &\leq \beta_{n,0}^2 \|y_n^3 - q\| + \sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 \left\{ \sum_{j=1}^{i_3} \binom{i_3}{j} a^{i_3-j} \varphi^j (\|q - Tq\|) + a^{i_3} \|y_n^3 - q\| \right\} \\ &= \left(\sum_{i_3=0}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|y_n^3 - q\| \end{aligned} \quad (3.79)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.77), (3.78) ve (3.79)' un birleştirilmesiyle

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \left(\sum_{i_3=0}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|y_n^3 - q\| \quad (3.80)$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerin devam ettirilmesiyle

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=0}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \|y_n^{k-1} - q\| \quad (3.81)$$

olduğu elde edilir.

Yine (3.19)' un ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla

$$\|y_n^{k-1} - q\| = \left\| \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} (T^{i_k} x_n - T^{i_k} q) \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta_{n,0}^{k-1} \|x_n - q\| + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \|T^{i_k} x_n - T^{i_k} q\| \\
&\leq \beta_{n,0}^{k-1} \|x_n - q\| + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_k} \binom{i_k}{j} a^{i_k-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_k} \|x_n - q\| \right\} \\
&= \beta_{n,0}^{k-1} \|x_n - q\| + \left(\sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \|x_n - q\| \\
&= \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \|x_n - q\|
\end{aligned} \tag{3.82}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.82)'nin (3.81)'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|x_{n+1} - q\| \leq \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \|x_n - q\|. \tag{3.83}$$

σ' yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\sigma := \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \tag{3.84}$$

Şimdi $\sigma \in [0,1)$ olduğu gösterilecektir. $\alpha_{n,0} > 0$, her bir $k \geq 2$ için $a^{i_k} \in [0,1)$,

$\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $p = \overline{1, k-1}$ için $\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sigma &:= \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \\
&< \left(\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 \right) \cdots \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \right) = 1
\end{aligned} \tag{3.85}$$

olduğu elde edilir.

Böylece Lemma 3.30' un (3.83)'e uygulanmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ olarak elde edilir.

SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Kararlılık teorisi, hem teorik hemde nümerik açıdan oldukça büyük bir önem arz etmekte olup birçok bilim dalında önemli uygulama alanlarına sahip olan bir teoridir. Bu teori, büyük bir araştırmacı kitlesi tarafından çeşitli perspektiflerle yoğun olarak çalışılmakta ve bunun doğal bir sonucu olarak kararlılık ile ilgili çeşitli tanımlamalar yapılmıştır.

Bu bölümde sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığına ilişkin temel kavramlar verilerek, bu alana yapılmış olan katkılar sunulacaktır.

Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığı fikri sezgisel olarak şu şekilde açıklanabilir; eğer başlangıç verisindeki veya hesaplama sürecinde oluşan verilerdeki “küçük” modifikasyonlar hesaplanan sabit nokta değeri üzerinde “küçük” bir etki meydana getiriyorsa ele alınan sabit nokta iterasyonuna kararlıdır denilir.

$T : X \rightarrow X$ bir operatör, $F_T = \{x \in X : x = Tx\} \neq \emptyset$ ve $x_0 \in X$ keyfi bir başlangıç noktası olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yönteminin en genel formda (3.1) ile tanımlandığını hatırlayalım. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (3.1)’ den elde edilen belirli bir sabit nokta iterasyon yöntemi tarafından üretilen bir dizi olsun.

Uygulamalarda, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ hesaplanırken genellikle aşağıdaki adımlar izlenir:

1. $x_0 \in X$ başlangıç değeri (yaklaşımı) seçilir.

2. $x_1 = f(T, x_0)$ değeri hesaplanır. Ancak hesaplama esnasında meydana gelen çeşitli hatalardan (yuvarlama hataları, fonksiyonların nümerik yaklaşımları, türevler, integraller, vb.) dolayı x_1 değeri tam olarak elde edilemez. x_1 değeri yerine buna yeterince yakın olan başka bir y_1 değeri elde edilir, yani $y_1 \approx x_1$ dir.

3. Sonuç olarak $x_2 = f(T, x_1)$ hesaplanırken aslında x_2 , $x_2 = f(T, y_1)$ olarak hesaplanır ve böylece gerçek x_2 değeri yerine, yine bu değere yeterince yakın olan başka bir y_2 elde edilir, yani $y_2 \approx x_2$ olur ve bu işleme böylece devam edilir.

Bu yolla, verilen iterasyon yöntemi tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi yerine, pratik olarak bunun bir yaklaşım dizisi olan $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini elde edilir. Verilen sabit nokta iterasyon yönteminin kararlı olarak ele alınabilmesi için gerek ve yeter koşul her bir adımda x_n' e yeterince yakın olan y_n için, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ yaklaşım dizisinin hala T' nin sabit noktasına yakınsak olmasıdır [70].

Bu temel fikir baz alınarak yapılan ilk çalışma M.Urabe tarafından [120]' de sunulmuştur. Bununla birlikte, ilk olarak metrik uzaylarda Picard iterasyon yöntemi için kararlılık sonucu Ostrowski [121] tarafından verilmiş olmasına rağmen genel iterasyon yöntemleri için kararlılık kavramı formal olarak Harder ve Hicks [90], [122], [123] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

Tanım 4.1 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. (3.1) ile verilen iterasyon yöntemi tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin T' nin bir p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, X' te keyfi bir dizi olsun ve $n = 0, 1, 2, \dots$, için

$$\varepsilon_n = d(y_{n+1}, f(T, y_n)) \quad (4.1)$$

olarak alalım. (3.1) ile verilen sabit nokta iterasyon yönteminin T -kararlı (veya T' ye göre kararlı) olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$$

olmasıdır.

Tanım 4.1' de ele alınan X' in bir normlu lineer uzay veya Banach uzayı olması durumunda norm tarafından üretilen metrik yardımıyla, yani $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ bağıntısı yardımıyla, (4.1) ile verilen ifadenin yerine

$$\mathcal{E}_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\| \quad (4.2)$$

ifadesi kullanılır.

Son yıllarda, bilgisayar programlama ile hesaplamalı matematikte meydana gelen gelişmelerden dolayı sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığı konusu önemli ölçüde ilgi görmüş ve bunun sonucunda çok sayıda araştırmacı bu alana önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Harder ve Hicks [90], [122], [123] çeşitli contractive tipten dönüşüm sınıflarını kullanarak Picard (3.2), Mann (3.6) ve Kirk (3.7) iterasyon yöntemleri için bazı kararlılık teoremleri ispatladılar.

Harder ve Hicks [90]' nın sonuçları Rhoades [88], [124] tarafından aşağıdaki iki farklı Ciric tipli contractive dönüşüm sınıfı kullanılarak genişletildi: $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max \{d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (4.3)$$

ve

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, d(x, Ty), d(y, Tx) \right\}. \quad (4.4)$$

1995 yılında Osilike [84], Harder ve Hicks [90] ve Rhoades [88], [124] tarafından kullanılan dönüşüm sınıflarından çok daha genel olan ve

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, Tx) + \lambda d(x, y), \lambda \in [0, 1), L \geq 0 \quad (4.5)$$

şartını sağlayan dönüşüm sınıflarını kullanarak Rhoades [124]' ün sonuçlarını daha da genelleştirdi.

Osilike ve Udomene [86]' da; Harder ve Hicks [90], [122], [123], Rhoades [88], [124] ve Osilike [84] tarafından kullanılan ispat metodlarından daha kısa olan bir ispat metodu

kullanılarak (4.5) şartını sağlayan dönüşümler tarafından üretilen Picard (3.2), Kirk (3.7) ve Ishikawa (3.9) iterasyon yöntemleri için kararlılık teoremleri ispatladılar.

Berinde [89], Osilike ve Udomene [86]'daki aynı ispat metodunu kullanarak Harder ve Hicks [90]'daki kararlılık sonuçlarını yeniden ispatladı.

Imoru ve Olatinwo [125], (2.30) şartını sağlayan dönüşüm sınıflarını kullanarak Harder ve Hicks [90], Rhoades [88], [124], Osilike ve Udomene [86], Osilike [84], Berinde [89]'daki bazı kararlılık sonuçlarını genelleştirdiler.

Olatinwo [98] bu eğilimi devam ettirerek (2.30) şartını sağlayan dönüşümler tarafından üretilen Kirk-Mann (3.16) ve Kirk-Ishikawa (3.15) iterasyon yöntemleri için [84], [86-90], [124], [126] ve [127]'deki bazı sonuçları genelleştiren kararlılık teoremleri ispatladı.

2012 yılında Chugh ve Kumar [99] Kirk-Noor (3.17) iterasyon yöntemini tanımlayarak (2.30) şartını sağlayan dönüşümler tarafından üretilen bu iterasyon yöntemi için Olatinwo [98]'de ve burada atıf yapılan çok sayıdaki çalışmada elde edilen sonuçları genelleştiren bir kararlılık teoremi ispatladılar.

Bu bölümün devamında, bir önceki bölümde tanımlamış olduğumuz iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarına ilişkin bazı yeni sonuçlar incelenecektir.

Teorem 4.2 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Kirk-multistep iterasyon yöntemi (3.19) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda Kirk-multistep iterasyon yöntemi (3.19) kararlıdır.

İspat $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $p = \overline{1, k-1}$ için $\{u_n^p\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri X' te keyfi diziler olsunlar.

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \varepsilon_n = \left\| y_{n+1} - \alpha_{n,0} y_n - \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} u_n^1 \right\|, \quad p = \overline{1, k-1} \text{ için}$$

$$u_n^p = \beta_{n,0}^p y_n + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} u_n^{p+1}, \quad k \geq 2 \text{ için } u_n^{k-1} = \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} y_n \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \text{ olsun.}$$

Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$ olduğu gösterilecektir.

(2.30) ve Lemma 3.31' den

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - q\| &= \left\| y_{n+1} - \alpha_{n,0} y_n - \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} u_n^1 + \alpha_{n,0} y_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} u_n^1 - q \right\| \\
&\leq \varepsilon_n + \left\| \alpha_{n,0} (y_n - q) + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} (T^{i_1} u_n^1 - T^{i_1} q) \right\| \\
&\leq \alpha_{n,0} \|y_n - q\| + \varepsilon_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \|T^{i_1} u_n^1 - T^{i_1} q\| \\
&\leq \alpha_{n,0} \|y_n - q\| + \varepsilon_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_1} \binom{i_1}{j} a^{i_1-j} \varphi^j(\|q - Tq\|) + a^{i_1} \|u_n^1 - q\| \right\} \\
&= \alpha_{n,0} \|y_n - q\| + \varepsilon_n + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \|u_n^1 - q\|, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

ve (3.63) ve (3.64)' ün elde edilmesinde yapılan benzer hesaplamalarla

$$\|u_n^1 - q\| \leq \beta_{n,0}^1 \|y_n - q\| + \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \|u_n^2 - q\|, \tag{4.7}$$

$$\|u_n^2 - q\| \leq \beta_{n,0}^2 \|y_n - q\| + \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|u_n^3 - q\| \tag{4.8}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.6), (4.7) ve (4.8)' in birleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - q\| &\leq \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|u_n^3 - q\| \\
&\quad + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \|y_n - q\| \\
&\quad + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 \|y_n - q\| + \alpha_{n,0} \|y_n - q\| + \varepsilon_n \tag{4.9}
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerin devam ettirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - q\| &\leq \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \|u_n^{k-1} - q\| \\
&\quad + \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \right\} \|y_n - q\| + \varepsilon_n \quad (4.10)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Yine (2.30) ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|u_n^{k-1} - q\| &= \left\| \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} y_n - \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} q \right\| \\
&\leq \beta_{n,0}^{k-1} \|y_n - q\| + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \|T^{i_k} y_n - T^{i_k} q\| \\
&\leq \beta_{n,0}^{k-1} \|y_n - q\| + \sum_{i_k=1}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_k} \binom{i_k}{j} a^{i_k-j} \varphi^j (\|q - Tq\|) + a^{i_k} \|y_n - q\| \right\} \\
&= \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \|y_n - q\| \quad (4.11)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(4.11)' in (4.10)' da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - q\| &\leq \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \left\| y_n - q \right\| + \varepsilon_n \quad (4.12)$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan σ' 'nın (3.70) ile verilen ifade ile aynı olduğu görülür. Böylece Lemma 3.30' un (4.12)' ye uygulanmasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$ olarak elde edilir.

Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.31' den

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \left\| y_{n+1} - \alpha_{n,0} y_n - \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} u_n^1 \right\| \\ &\leq \left\| y_{n+1} - q \right\| + \left\| q - \alpha_{n,0} y_n - \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} u_n^1 \right\| \\ &= \left\| y_{n+1} - q \right\| + \left\| \alpha_{n,0} (q - y_n) + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} (T^{i_1} q - T^{i_1} u_n^1) \right\| \\ &\leq \left\| y_{n+1} - q \right\| + \alpha_{n,0} \left\| y_n - q \right\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \left\| T^{i_1} q - T^{i_1} u_n^1 \right\| \\ &\leq \left\| y_{n+1} - q \right\| + \alpha_{n,0} \left\| y_n - q \right\| + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} \left\{ \sum_{j=1}^{i_1} \binom{i_1}{j} a^{i_1-j} \varphi^j (\left\| q - Tq \right\|) + a^{i_1} \left\| q - u_n^1 \right\| \right\} \\ &= \left\| y_{n+1} - q \right\| + \alpha_{n,0} \left\| y_n - q \right\| + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left\| q - u_n^1 \right\|, \end{aligned} \quad (4.13)$$

olduğu ve (4.7) ve (4.8)' in hesaplanmasında yapılan benzer işlemlerden

$$\left\| q - u_n^1 \right\| \leq \beta_{n,0}^1 \left\| y_n - q \right\| + \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \left\| q - u_n^2 \right\|, \quad (4.14)$$

$$\|u_n^2 - q\| \leq \beta_{n,0}^2 \|y_n - q\| + \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|u_n^3 - q\| \quad (4.15)$$

oldukları elde edilir.

(4.13), (4.14) ve (4.15)' in birleştirilmesiyle

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \leq & \|y_{n+1} - q\| + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \left(\sum_{i_3=1}^{s_3} \beta_{n,i_3}^2 a^{i_3} \right) \|q - u_n^3\| \\ & + \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right\} \|y_n - q\| \end{aligned} \quad (4.16)$$

olduğu elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerin devam ettirilmesiyle

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \leq & \|y_{n+1} - q\| \\ & + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \|q - u_n^{k-1}\| \\ & + \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right. \\ & \left. + \cdots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \right\} \|y_n - q\| \end{aligned} \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir.

Yine (2.30) ve Lemma 3.31' in kullanılmasıyla (4.11)' in hesaplanmasında yapılan benzer işlemlerden

$$\|q - u_n^{k-1}\| \leq \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \|y_n - q\| \quad (4.18)$$

olduğu elde edilir.

(4.18)' in (4.17)' de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &\leq \|y_{n+1} - q\| \\
&+ \left\{ \alpha_{n,0} + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \beta_{n,0}^1 + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \beta_{n,0}^2 \right. \\
&+ \cdots + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{s_{k-2}} \beta_{n,i_{k-2}}^{k-3} a^{i_{k-2}} \right) \beta_{n,0}^{k-2} \\
&\left. + \left(\sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} a^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}^1 a^{i_2} \right) \cdots \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{s_{k-1}} \beta_{n,i_{k-1}}^{k-2} a^{i_{k-1}} \right) \left(\sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} a^{i_k} \right) \right\} \|y_n - q\|
\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan σ , (3.70) ile verilen ifade ile aynı olup benzer hesaplamalarla $\sigma \in (0,1)$ olarak elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$ kabulünden dolayı (4.19)' dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu elde edilir.

Aşağıdaki teoremler bir önceki teoremin ispatında kullanılan yöntem ile kolayca ispatlanabileceğinden ispatsız olarak ifade edileceklerdir.

Teorem 4.3 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Kirk-multistep-SP iterasyon yöntemi (3.22) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda Kirk-multistep iterasyon yöntemi (3.22) kararlıdır.

Teorem 4.4 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Kirk-SP iterasyon yöntemi (3.18) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda Kirk-SP iterasyon yöntemi (3.18) kararlıdır.

Teorem 4.5 X bir normlu lineer uzay, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, Kirk-S iterasyon yöntemi (3.23) tarafından üretilen bir dizi olsun. T' nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda Kirk-S iterasyon yöntemi (3.23) kararlıdır.

BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİNE KARŞILIK GELEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VERİ BAĞLILIĞI

Daha önceki bölümlerde işlendiği üzere sabit nokta teori; sabit noktaların varlığı, tekliği, inşası, iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıkları ve yakınsaklıklarının denkliği, itersyon yöntemlerinin kararlılığı vb. gibi çok çeşitli konuları araştırmakla ilgilenir. Bu temalardan biri de önemli bir araştırma konusu olan sabit noktaların veri bağılılığıdır.

Sabit nokta teorisinin literatüründe, sabit noktaların veri bağılılığı konusu ile ilgili çok sayıda çalışma mevcut olmakla birlikte yoğun olarak metrik uzaylarda Picard iterasyonu için, Berinde [128], Chifu ve Petruşel [129], Espínola ve Petruşel [130], Markin [131], Rus ve Muresan [132], Rus vd. [133] ve bu çalışmalardaki diğer bazı referanslar tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda normlu lineer uzaylarda ve Banach uzaylarında diğer iterasyon yöntemleri için çalışılmaya başlanan bu konuya katkıda bulunan bazı yazarlar, Chugh ve Kumar [104], Chugh vd. [134], Karakaya vd. [135], Olantiwo [136], [137], Şoltuz ve Grosan [103] ve Şoltuz [102], [138] dir.

Sabit noktaların veri bağılılığı konusunda ilgilenilen problem şu şekilde açıklanabilir:

Aşağıda verilen tanım ve teoremlerin sadeliği açısından aksi belirtilmedikçe, X bir Banach uzayı, $B \subset X$ boş olmayan kapalı ve konveks bir küme, $T : B \rightarrow B$ tanımlı bir dönüşüm ve $F_T := \{p \in X : p = Tp\}$ kümesi T' nin sabit noktalarının kümesi olarak ele alınacaktır.

Tanım 5.1 $T, \tilde{T} : B \rightarrow B$ iki operatör olsun. Her $x \in B$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|Tx - \tilde{T}x\| \leq \varepsilon \quad (5.1)$$

ise $\tilde{T}'$ ya T' nin bir yaklaşım operatörü denilir [70].

Bir T dönüşümünün p ile gösterilen sabit noktası hesaplanırken, çeşitli sebeplerden dolayı T' nin Tanım 5.1' deki şartları sağlayan $\tilde{T}$ gibi belirli bir yaklaşım operatörü kullanılır. $\tilde{T}'$ nin belirli bir metodla hesaplanabilen q gibi bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda doğal olarak aşağıdaki problemler ortaya çıkmaktadır:

(i) p yaklaşık olarak q mudur?

Eğer cevap evet ise

(ii) $\|p - q\|$ değeri nasıl hesaplanabilir?

Yukarıda verilen referanslarda, farklı dönüşüm sınıfları ve iterasyon metodları için (i) ve (ii) ile verilen problemlere olumlu cevaplar bulunmuştur. Bu cevaplardan biri Şoltuz ve Grosan [103] tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 5.2 X bir reel Banach uzayı, $B \subset X$ boş olmayan konveks ve kapalı bir küme ve $\varepsilon > 0$ sabit bir sayı olsun. $T : B \rightarrow B$ (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm ve $S : B \rightarrow B$ bir dönüşüm olsun. T' nin x^* gibi ve S nin de $(x^*$ a yeterince yakın) u^* gibi sabit noktalara sahip olduklarını kabul edelim. Eğer

$$\|Tz - Sz\| \leq \varepsilon, \quad \forall z \in B$$

bağıntısı sağlanıyor ise, bu durumda

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-q}$$

olur.

Örnek 5.3 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 2] \\ -0.5 & , x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda $\varphi = I$ (özdeşlik dönüşümü) olmak üzere, T dönüşümü $\delta = 0.2$ ile (2.30) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşümdür ve sabit noktası 0 dır.

Şimdi, sabit noktası 1 olan ve

$$Sx = \begin{cases} 1 & , x \in (-\infty, 2] \\ -1.5 & , x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

ile tanımlanan $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım.

Bu iki dönüşüm arasındaki uzaklığı $\varepsilon = 1$ olarak alalım, yani $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\|Sx - Tx\| \leq 1$$

olsun.

$u_0 = x_0 = 0$ ve $\alpha_n = \beta_n = 1/(n+1)$ olarak seçelim. Teorem 5.2' den bağımsız olarak, Ishikawa iterasyonunun S dönüşümüne uygulanmasıyla

Çizelge 5. 1 $u_0 = x_0 = 0$ başlangıç değeri ve $\alpha_n = \beta_n = 1/(n+1)$ seçimi için S dönüşümü ile elde edilen Ishikawa iterasyon yönteminin ilk 100 adımının hesaplanması

İterasyon Adım Sayısı	Ishikawa İterasyonu
1	0.5
10	0.9
100	0.99

olduğu elde edilir. Şunu belirtmeliyiz ki, $n = 1$ için

$$y_1 = \frac{n}{n+1} \cdot 0 + \frac{1}{n+1} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$0.5 = \frac{n}{n+1} \cdot 0 + \frac{1}{n+1} \cdot S\left(\frac{1}{2}\right)$$

olarak elde edilir. (Yukarıdaki hesaplamalar bir Matlab programı kullanılarak elde edilebilir.) Buda bize, “ S dönüşümüne uygulanan Ishikawa iterasyonunun $x^* = 1$ sabit noktasına yakınsayacağı” çıkarımında bulunmamızı sağlar. Nihai olarak iki sabit nokta arasındaki uzaklığın 1 olacağı görülebilir. Aslında, S' nin sabit noktasını bilmeksizin (ve onu hesaplamaksızın) Teorem 5.2' yi kullanarak, bu sabit noktayı aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-0.2} = 1.2.$$

Sonuç olarak; S' nin sabit noktasını hesaplamak yerine, T' yi S' ye çok yakın seçeriz ve böylece sabit noktalar arasındaki uzaklık çok küçülür [103].

Bu bölüm, yeni tanımlamış olduğumuz Multistep-SP (3.20) iterasyon yöntemi ve (3.12) ile verilen S-iterasyon yöntemi yardımıyla (2.30) şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağılıklarına ilişkin bazı sonuçların sunulmasıyla sonlandırılacaktır. Aşağıdaki lemma bu sonuçların elde edilmesinde önemli bir rol üstlenecektir.

Lemma 5.4 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve

$\eta_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n) a_n + \mu_n \eta_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n$$

eşitsizliği sağlanır [103].

Bu bölümde aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

Herhangi bir iterasyon yöntemi için, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile söz konusu iterasyon yöntemi tarafından üretilen ve sırasıyla T ve $\tilde{T}'$ ya karşılık gelen iteratif diziler belirtilecektir.

Teorem 5.5 $F_T \neq \emptyset$ olmak üzere $T : B \rightarrow B$, (2.30) şartını sağlayan bir dönüşüm ve $\tilde{T}$,

Tanım 5.1' de olduğu gibi T' nin bir yaklaşım operatörü olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, (3.21) ve

$$(i) \ 0 \leq \beta_n^i < \alpha_n \leq 1, \ i = \overline{1, k-1} \qquad (ii) \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1)$ reel dizileriyle tanımlı iki iteratif dizi olsun.

Eğer $p = Tp$ ve $q = \tilde{T}q$ ise bu durumda

$$\|p - q\| \leq \frac{k\varepsilon}{1 - \delta} \quad (5.2)$$

dır.

İspat. Sırasıyla T ve $\tilde{T}'$ ya karşılık gelen aşağıdaki multistep iterasyon yöntemlerini ele alacağız:

$$\begin{cases} x_0 \in B, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i) y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1}, \ i = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \ k \geq 2, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (5.3)$$

ve

$$\begin{cases} u_0 \in B, \\ u_{n+1} = (1 - \alpha_n) v_n^1 + \alpha_n \tilde{T} v_n^1, \\ v_n^i = (1 - \beta_n^i) v_n^{i+1} + \beta_n^i \tilde{T} v_n^{i+1}, \ i = \overline{1, k-2}, \\ v_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) u_n + \beta_n^{k-1} \tilde{T} u_n, \ k \geq 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Bu durumda (2.30), (5.3) ve (5.4)' den aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n)(y_n^1 - v_n^1) + \alpha_n(Ty_n^1 - \tilde{T}v_n^1)\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|y_n^1 - v_n^1\| + \alpha_n\|Ty_n^1 - \tilde{T}v_n^1\| \\
&= (1 - \alpha_n)\|y_n^1 - v_n^1\| + \alpha_n\|Ty_n^1 - Tv_n^1 + Tv_n^1 - \tilde{T}v_n^1\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|y_n^1 - v_n^1\| + \alpha_n\|Ty_n^1 - Tv_n^1\| + \alpha_n\|Tv_n^1 - \tilde{T}v_n^1\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|y_n^1 - v_n^1\| + \alpha_n\delta\|y_n^1 - v_n^1\| + \alpha_n\varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) + \alpha_n\varepsilon \\
&= [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|y_n^1 - v_n^1\| + \alpha_n\varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) + \alpha_n\varepsilon,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\|y_n^1 - v_n^1\| &= \|(1 - \beta_n^1)(y_n^2 - v_n^2) + \beta_n^1(Ty_n^2 - \tilde{T}v_n^2)\| \\
&\leq (1 - \beta_n^1)\|y_n^2 - v_n^2\| + \beta_n^1\|Ty_n^2 - \tilde{T}v_n^2\| \\
&\leq (1 - \beta_n^1)\|y_n^2 - v_n^2\| + \beta_n^1\|Ty_n^2 - Tv_n^2\| + \beta_n^1\|Tv_n^2 - \tilde{T}v_n^2\| \\
&\leq (1 - \beta_n^1)\|y_n^2 - v_n^2\| + \beta_n^1\delta\|y_n^2 - v_n^2\| + \beta_n^1\varphi(\|y_n^2 - Ty_n^2\|) + \beta_n^1\varepsilon \\
&= [1 - \beta_n^1(1 - \delta)]\|y_n^2 - v_n^2\| + \beta_n^1\varphi(\|y_n^2 - Ty_n^2\|) + \beta_n^1\varepsilon,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\|y_n^2 - v_n^2\| &= \|(1 - \beta_n^2)(y_n^3 - v_n^3) + \beta_n^2(Ty_n^3 - \tilde{T}v_n^3)\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2)\|y_n^3 - v_n^3\| + \beta_n^2\|Ty_n^3 - \tilde{T}v_n^3\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2)\|y_n^3 - v_n^3\| + \beta_n^2\|Ty_n^3 - Tv_n^3\| + \beta_n^2\|Tv_n^3 - \tilde{T}v_n^3\| \\
&\leq (1 - \beta_n^2)\|y_n^3 - v_n^3\| + \beta_n^2\delta\|y_n^3 - v_n^3\| + \beta_n^2\varphi(\|y_n^3 - Ty_n^3\|) + \beta_n^2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$= [1 - \beta_n^2 (1 - \delta)] \|y_n^3 - v_n^3\| + \beta_n^2 \varphi(\|y_n^3 - Ty_n^3\|) + \beta_n^2 \varepsilon. \quad (5.7)$$

(5.5), (5.6) ve (5.7)' nin birleştirilmesiyle aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] [1 - \beta_n^2 (1 - \delta)] \|y_n^3 - v_n^3\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \beta_n^2 \varphi(\|y_n^3 - Ty_n^3\|) \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \beta_n^2 \varepsilon \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \beta_n^1 \varphi(\|y_n^2 - Ty_n^2\|) \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \beta_n^1 \varepsilon + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) + \alpha_n \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Böylece yukarıda yapılan hesaplamaların sürdürülmesiyle

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2} (1 - \delta)] \|y_n^{k-1} - v_n^{k-1}\| \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-3} (1 - \delta)] \beta_n^{k-2} \varphi(\|y_n^{k-1} - Ty_n^{k-1}\|) \\ &\quad + \cdots + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \beta_n^1 \varphi(\|y_n^2 - Ty_n^2\|) + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) \\ &\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-3} (1 - \delta)] \beta_n^{k-2} \varepsilon \\ &\quad + \cdots + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \beta_n^1 \varepsilon + \alpha_n \varepsilon \end{aligned} \quad (5.9)$$

olduğu elde edilir.

Yine (2.30), (5.3) ve (5.4)' den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\begin{aligned} \|y_n^{k-1} - v_n^{k-1}\| &= \|(1 - \beta_n^{k-1})(x_n - u_n) + \beta_n^{k-1}(Tx_n - \tilde{T}u_n)\| \\ &\leq (1 - \beta_n^{k-1}) \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \|Tx_n - \tilde{T}u_n\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \beta_n^{k-1}) \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \|Tx_n - \tilde{T}u_n\| + \beta_n^{k-1} \|Tu_n - \tilde{T}u_n\| \\
&\leq [1 - \beta_n^{k-1} (1 - \delta)] \|x_n - u_n\| + \beta_n^{k-1} \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n^{k-1} \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.10)' un (5.9)' da yerine yazılmasıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-1} (1 - \delta)] \|x_n - u_n\| \\
&\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2} (1 - \delta)] \beta_n^{k-1} \varphi(\|x_n - Tx_n\|) \\
&\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-3} (1 - \delta)] \beta_n^{k-2} \varphi(\|y_n^{k-1} - Ty_n^{k-1}\|) \\
&\quad + \cdots + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \beta_n^1 \varphi(\|y_n^2 - Ty_n^2\|) + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) \\
&\quad + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^{k-2} (1 - \delta)] \beta_n^{k-1} \varepsilon \\
&\quad + \cdots + [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \beta_n^1 \varepsilon + \alpha_n \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$\delta \in [0, 1)$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1)$ ve $i = \overline{1, k-1}$ için $\{\beta_n^i\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1)$ olduğundan

$$[1 - \alpha_n (1 - \delta)] [1 - \beta_n^1 (1 - \delta)] \cdots [1 - \beta_n^i (1 - \delta)] \leq 1 - \alpha_n (1 - \delta) \tag{5.12}$$

dır.

(5.12) eşitsizliğinin ve (i) hipotezinin (5.11)' de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|x_n - u_n\| \\
&\quad + \alpha_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \alpha_n \varphi(\|y_n^{k-1} - Ty_n^{k-1}\|) \\
&\quad + \cdots + \alpha_n \varphi(\|y_n^2 - Ty_n^2\|) + \alpha_n \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) \\
&\quad + \alpha_n \varepsilon + \alpha_n \varepsilon + \cdots + \alpha_n \varepsilon + \alpha_n \varepsilon \\
&= [1 - \alpha_n (1 - \delta)] \|x_n - u_n\|
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$+ \alpha_n (1 - \delta) \left\{ \frac{\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \varphi(\|y_n^{k-1} - Ty_n^{k-1}\|) + \dots + \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) + k\varepsilon}{1 - \delta} \right\}$$

olduğu elde edilir.

a_n , μ_n ve η_n 'i aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$a_n := \|x_n - u_n\|,$$

$$\mu_n := \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1),$$

$$\eta_n := \frac{\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \varphi(\|y_n^{k-1} - Ty_n^{k-1}\|) + \dots + \varphi(\|y_n^1 - Ty_n^1\|) + k\varepsilon}{1 - \delta}.$$

Teorem 3.23' den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olduğu sağlanır. T , (2.30) şartını sağladığından ve

$TP = p \in F_T$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x_n - Tx_n\| \\ &\leq \|x_n - p\| + \|Tp - Tx_n\| \\ &\leq \|x_n - p\| + \delta \|p - x_n\| + \varphi(\|p - Tp\|) \\ &= (1 + \delta) \|x_n - p\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{5.14}$$

olduğu elde edilir.

Her $n \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, k-1}$ için $\{\beta_n^i\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1)$ olduğu gözönüne alınarak (2.30) ve (3.21)' in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y_n^1 - Ty_n^1\| = \|y_n^1 - p + p - Ty_n^1\| \\ &\leq \|y_n^1 - p\| + \delta \|p - y_n^1\| + \varphi(\|p - Tp\|) \\ &= (1 + \delta) \|y_n^1 - p\| = (1 + \delta) \|(1 - \beta_n^1) y_n^2 + \beta_n^1 Ty_n^2 - p(1 - \beta_n^1 + \beta_n^1)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+\delta) \left\{ (1-\beta_n^1) \|y_n^2 - p\| + \beta_n^1 \delta \|y_n^2 - p\| \right\} \\
&= (1+\delta) [1-\beta_n^1(1-\delta)] \|y_n^2 - p\| \\
&\leq \dots \leq (1+\delta) [1-\beta_n^1(1-\delta)] \dots [1-\beta_n^{k-2}(1-\delta)] \|y_n^{k-1} - p\| \\
&\leq (1+\delta) [1-\beta_n^1(1-\delta)] \dots [1-\beta_n^{k-1}(1-\delta)] \|x_n - p\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.15)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(5.15)' de elde edilen sonucun $\|Ty_n^2 - y_n^2\|, \|Ty_n^3 - y_n^3\|, \dots, \|Ty_n^{k-1} - y_n^{k-1}\|$ içinde geçerli olduğunu görmek kolaydır. φ sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|x_n - Tx_n\|) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|Ty_n^1 - y_n^1\|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|Ty_n^2 - y_n^2\|) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|Ty_n^3 - y_n^3\|) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|Ty_n^{k-1} - y_n^{k-1}\|) = 0 \quad (5.16)
\end{aligned}$$

dır.

Böylece Lemma 5.4' ün (5.13)' e uygulanmasıyla

$$\|p - q\| \leq \frac{k\varepsilon}{1-\delta}$$

olduğu elde edilir.

Teorem 5.6 T ve $\tilde{T}$, Teorem 5.5' deki gibi iki dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, (3.12) ve

$$(i) \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } 1/2 \leq \alpha_n, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1)$ reel dizileriyle tanımlı iki iteratif dizi olsun.

Eğer $p = Tp$ ve $q = \tilde{T}q$ ise bu durumda

$$\|p - q\| \leq \frac{3\varepsilon}{1-\delta} \quad (5.17)$$

dır.

İspat. Sırasıyla T ve $\tilde{T}'$ ya karşılık gelen aşağıdaki S-iterasyon yöntemlerini ele alalım:

$$\begin{cases} x_0 \in B, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (5.18)$$

ve

$$\begin{cases} u_0 \in B, \\ u_{n+1} = (1 - \alpha_n)\tilde{T}u_n + \alpha_n\tilde{T}v_n, \\ v_n = (1 - \beta_n)u_n + \beta_nTu_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (5.19)$$

(2.30), (5.18) ve (5.19)' u kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \|(1 - \alpha_n)(Tx_n - \tilde{T}u_n) + \alpha_n(Ty_n - \tilde{T}v_n)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - \tilde{T}u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - \tilde{T}v_n\| \\ &= (1 - \alpha_n)\|Tx_n - Tu_n + Tu_n - \tilde{T}u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tv_n + Tv_n - \tilde{T}v_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\{\|Tx_n - Tu_n\| + \|Tu_n - \tilde{T}u_n\|\} + \alpha_n\{\|Ty_n - Tv_n\| + \|Tv_n - \tilde{T}v_n\|\} \\ &\leq (1 - \alpha_n)\{\mathcal{D}\|x_n - u_n\| + \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \varepsilon\} \\ &\quad + \alpha_n\{\mathcal{D}\|y_n - v_n\| + \varphi(\|y_n - Ty_n\|) + \varepsilon\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &= \|(1 - \beta_n)(x_n - u_n) + \beta_n(Tx_n - \tilde{T}u_n)\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tx_n - \tilde{T}u_n\| \\ &= (1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tx_n - Tu_n + Tu_n - \tilde{T}u_n\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \beta_n) \|x_n - u_n\| + \beta_n \left\{ \|Tx_n - Tu_n\| + \|Tu_n - \tilde{T}u_n\| \right\} \\
&\leq (1 - \beta_n) \|x_n - u_n\| + \beta_n \left\{ \delta \|x_n - u_n\| + \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \varepsilon \right\} \\
&= [1 - \beta_n(1 - \delta)] \|x_n - u_n\| + \beta_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \beta_n \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

(5.20) ve (5.21)' in birleştirilmesiyle

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \left\{ (1 - \alpha_n) \delta + \alpha_n \delta [1 - \beta_n(1 - \delta)] \right\} \|x_n - u_n\| \\
&\quad + \{1 - \alpha_n + \alpha_n \delta \beta_n\} \varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \alpha_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) \\
&\quad + \alpha_n \delta \beta_n \varepsilon + (1 - \alpha_n) \varepsilon + \alpha_n \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1) \text{ ve } \delta \in [0, 1) \text{ olduğundan her } n \in \mathbb{N} \text{ için} \\
&(1 - \alpha_n) \delta < 1 - \alpha_n, \quad 1 - \beta_n(1 - \delta) < 1, \quad \alpha_n \delta \beta_n < \alpha_n
\end{aligned} \tag{5.23}$$

ve ayrıca (i) hipotezinden

$$1 - \alpha_n \leq \alpha_n \tag{5.24}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Böylece (5.23) ve (5.24)' ün (5.22)' de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \|x_n - u_n\| + 2\alpha_n \varphi(\|x_n - Tx_n\|) \\
&\quad + \alpha_n \varphi(\|y_n - Ty_n\|) + \alpha_n \varepsilon + \alpha_n \varepsilon + \alpha_n \varepsilon,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

veya buna denk olarak

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \leq [1 - \alpha_n(1 - \delta)] \|x_n - u_n\|$$

$$+ \alpha_n (1 - \delta) \frac{\{2\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \varphi(\|y_n - Ty_n\|) + 3\varepsilon\}}{1 - \delta} \quad (5.26)$$

olduğu elde edilir.

a_n , μ_n ve η_n ' i aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$a_n := \|x_n - u_n\|,$$

$$\mu_n := \alpha_n (1 - \delta) \in (0, 1),$$

$$\eta_n := \frac{2\varphi(\|x_n - Tx_n\|) + \varphi(\|y_n - Ty_n\|) + 3\varepsilon}{1 - \delta}.$$

Teorem 3.24' den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ olduğu sağlanır. T , (2.30) şartını sağladığından ve

$Tp = p \in F_T$ olduğundan Teorem 5.5' in ispatındakine benzer şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - Ty_n\| = 0$$

olur ve φ sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|x_n - Tx_n\|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\|y_n - Ty_n\|) = 0$$

olduğu elde edilir. Böylece Lemma 5.4' ün (5.26)' ya uygulanmasıyla

$$\|p - q\| \leq \frac{3\varepsilon}{1 - \delta}$$

olarak elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, literatürde mevcut olan birçok iterasyon yöntemini genelleştiren Kirk-multistep (3.19), multistep-SP (3.20), Kirk-multistep-SP (3.22) ve Kirk-S (3.23) iterasyon yöntemleri tanımlandı. Teorem 3.23, Teorem 3.24, Teorem 3.32, Teorem 3.33 ve Teorem 3.34 de sırasıyla multistep-SP (3.20), S (3.12), Kirk-multistep (3.19), Kirk-S (3.23) ve Kirk-multistep-SP (3.22) iterasyon yöntemleri tarafından üretilen iteratif dizilerle, (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin (mevcut olması durumunda) teklikle belirli olan sabit noktalarına yaklaşımda bulunabileceği gösterildi. Bu sonuçlara ek olarak, Teorem 3.26 ve Teorem 3.27 de sırasıyla, Mann (3.6) iterasyon yönteminin (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaklığının multistep-SP (3.20) ve S (3.12) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarına denk olduğu gösterildi ve Sonuç 3.29 elde edildi. Bu çalışmanın 4. Bölümünde sabit nokta iterasyon yöntemlerinin T -kararlılığı incelenerek, Teorem 4.2' de Kirk-multistep (3.19) iterasyon yönteminin T -kararlı (T dönüşümüne göre kararlı) olduğu gösterildi. İspatlarının aynı paralellikte oluşundan dolayı Teorem 4.3, Teorem 4.4 ve Teorem 4.5' te ispatsız olarak sırasıyla Kirk-multistep-SP (3.22), Kirk-SP (3.18) ve Kirk-S (3.23) iterasyon yöntemlerinin T -kararlı oldukları ifade edildi. Son olarak, 5. Bölümde sabit noktaların veri bağıllığı teması işlenerek, Teorem 5.5 ve Teorem 5.6' da sırasıyla multistep-SP (3.21) ve S (3.12) iterasyon yöntemlerine karşılık gelen ve (2.30) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağıllıkları ile ilgili tahminler elde edildi.

Teorem 3.32, Berinde [139]' deki Teorem 1 ve Teorem 2' yi, Kannan [49]' daki Teorem 2 ve Teorem 3' ü, Kannan [140]' daki Teorem 3' ü, Rhoades [141]' taki Teorem 4' ü, Rhoades [142]' deki Teorem 8' i, Olatinwo [143]' deki Teorem 2.1' i, Hussain vd. [100]' deki Teorem 2.6' yı ve Şoltuz ve Grosan [103]' teki Teorem 3.1' i genelleştirir.

Teorem 3.33, Hussain vd. [105]' teki Teorem 8' i genelleştirir.

Teorem 3.34, Yıldırım vd. [144]' deki Teorem 2.1' i, Chugh ve Kumar [119]' deki Teorem 2.1' i, Hussain vd. [100]' deki Teorem 2.4' ü genelleştirir.

Teorem 4.2, Osilike [84]' teki Teorem 2, Osilike ve Udomene [86]' daki Teorem 2 ve Teorem 5' i, Olatinwo vd. [126]' teki Teorem 3' ü, Olatinwo [98]' deki Teorem 3.1 ve Teorem 3.2' yi ve Chugh ve Kumar [99]' daki Teorem 3.1' i genelleştirir.

Teorem 4.3, Yıldırım vd. [144]' deki Teorem 3.6' yı genelleştirir.

Teorem 5.5, Chugh ve Kumar [104]' teki Teorem 3.2' yi genelleştirir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C., (2011). "Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74: 5286-5302.
 - [2] Argyros, I.K. ve Hilout, S., (2013). *Computational Methods in Nonlinear Analysis: Efficient Algorithms, Fixed Point Theory and Applications*: World Scientific Publishing Company Incorporated.
 - [3] Argyros, I., (2007). *Computational Theory of Iterative Methods*: Elsevier Science.
 - [4] Borwein, J. ve Sims, B., (2011). The Douglas–Rachford Algorithm in the Absence of Convexity, H.H. Bauschke Burachik, R.S. Combettes, P.L. Elser, V. Luke, D.R. ve Wolkowicz, H., ed. *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*. Springer New York, 93-109.
 - [5] Somarakis, C. ve Baras, J.S., (2013). "Fixed point theory approach to exponential convergence in LTV continuous time consensus dynamics with delays", *SIAM CT*.
 - [6] Border, K.C., (1989). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge university press, Cambridge UK.
 - [7] Ok, E.A., (2007). *Real analysis with economic applications*, Princeton University Press, Princeton.
 - [8] Siddiqi, A. ve Ansari, Q., (1989). "An iterative method for generalized variational inequalities", *Mathematica Japonica*, 34: 475-481.
 - [9] Isac, G., (1992). *Complementarity problems*, Springer-Verlag.
 - [10] Shehu, Y., (2011). "Iterative Methods for Family of Strictly Pseudocontractive Mappings and System of Generalized Mixed Equilibrium Problems and Variational Inequality Problems", *Fixed Point Theory and Applications*, 2011: 852789.
 - [11] Giocoli, N., (2003). "Fixing the point: the contribution of early game theory to the tool-box of modern economics", *Journal of Economic Methodology*, 10: 1-39.

- [12] Echenique, F. ve Oviedo, J., (2004). "Core many-to-one matchings by fixed-point methods", *Journal of Economic Theory*, 115: 358-376.
- [13] Fleiner, T., (2003). "A fixed-point approach to stable matchings and some applications", *Mathematics of Operations Research*, 28: 103-126.
- [14] Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J. ve Olivera, G.H., (2008). "A simple fixed-point approach to invert a deformation field", *Medical physics*, 35: 81.
- [15] Radde, N., (2010). "Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology", *Bioinformatics*, 26: 2874-2880.
- [16] Wang, G.-Q. ve Cheng, S.S., (2009). "Fixed point theorems arising from seeking steady states of neural networks", *Applied Mathematical Modelling*, 33: 499-506.
- [17] Broy, M., (1982). "Fixed point theory for communication and concurrency", *Formal Description of Programming Concepts*, II: 125-148.
- [18] Hui, L., Jun, Z. ve Cheng, L., (2010). "Application examples of the network fixed point theory for space-air-ground integrated communication network", *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 18-20 Oct. 2010, Moscow.
- [19] Altun, I., Abbas, M. ve Simsek, H., (2011). "A fixed point theorem on cone metric spaces with new type contractivity", *Banach J. Math. Anal*, 5: 15-24.
- [20] Alaca, C., Turkoglu, D. ve Yildiz, C., (2006). "Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces", *Chaos, Solitons & Fractals*, 29: 1073-1078.
- [21] Ertürk, M. ve Karakaya, V., (2013). "n-tuplet fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces", *Journal of Inequalities and Applications*, 2013: 196.
- [22] Karapınar, E., (2009). "Fixed point theorems in cone Banach spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, 2009: 609281.
- [23] Khamsi, M., Lin, M. ve Sine, R., (1992). "On the fixed points of commuting nonexpansive maps in hyperconvex spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168: 372-380.
- [24] Park, S., (2006). "A survey on fixed point theorems in generalized convex spaces", *RIMS Kôkyûroku*, 1484: 124-133.
- [25] Sahin, I. ve Telci, M., (2008). "Fixed points of contractive mappings on complete cone metric spaces", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 345: 719-724.
- [26] Simsek, N. ve Karakaya, V., (2009). "On Some Geometrical Properties of Generalized Modular Spaces of Cesaro Type Defined by Weighted Means", *Journal of Inequalities and Applications*, 2009: 932734.
- [27] Simsek, N., Savaş, E. ve Karakaya, V., (2010). "Some geometric and topological properties of a new sequence space defined by de la Vallée-Poussin mean", *Journal of Computational Analysis and Applications*, 12: 768-779.

- [28] Takahashi, W., (1970). "A convexity in metric space and nonexpansive mappings. I", Kodai Mathematical Journal, 22: 142-149.
- [29] Turkoglu, D., Alaca, C., Cho, Y. ve Yildiz, C., (2006). "Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces", Journal of Applied Mathematics and Computing, 22: 411-424.
- [30] Turkoglu, D. ve Rhoades, B., (2005). "A fixed fuzzy point for fuzzy mapping in complete metric spaces", Mathematical Communications, 10: 115-121.
- [31] Başarır, M. ve Şahin, A., (2013). "On the strong and Δ -convergence of new multi-step and S-iteration processes in a CAT (0) space", Journal of Inequalities and Applications, 2013: 482.
- [32] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2012). "On some common fixed point theorems with rational expressions on cone metric spaces over a Banach algebra", Hacet. J. Math. Stat, 41: 211-222.
- [33] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2011). "On Some Common Fixed Point Theorems With φ -Maps On G-Cone Metric Spaces", Bull. Math. Anal. Appl, 3: 121-133.
- [34] Neumann, J.V., (1928). "Zur theorie der gesellschaftsspiele", Mathematische Annalen, 100: 295-320.
- [35] Kakutani, S., (1941). "A generalization of Brouwer's fixed point theorem", Duke mathematical journal, 8: 457-459.
- [36] Nash, J.F., (1950). "Equilibrium points in n-person games", Proceedings of the national academy of sciences, 36: 48-49.
- [37] Nash, J., (1951). "Non-cooperative games", The Annals of Mathematics, 54: 286-295.
- [38] Banach, S., (1922). "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales", Fund. Math, 3: 133-181.
- [39] Arshad, M., Azam, A., Vetro, P. ve Górniewicz, L., (2009). "Some common fixed point results in cone metric spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2009: 8.
- [40] Caristi, J. ve Kirk, W.A., (1975). Geometric fixed point theory and inwardness conditions, ed. The Geometry of Metric and Linear Spaces. Springer, 74-83.
- [41] Caristi, J., (1976). "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions", Transactions of the American Mathematical Society, 215: 241-251.
- [42] Ćirić, L.B., (1974). "A generalization of Banach's contraction principle", Proceedings of the American Mathematical Society, 45: 267-273.
- [43] Ćirić, L., (2009). "Some new results for Banach contractions and Edelstein contractive mappings on fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 42: 146-154.
- [44] Ekeland, I., (1974). "On the variational principle", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47: 324-353.

- [45] Ekeland, I., (1979). "Nonconvex minimization problems", Bull. Amer. Math. Soc., 1:443–474.
- [46] Kirk, W., Contraction mappings and extensions in Handbook of metric fixed point theory (W.A. Kirk and B. Sims Eds.), 2001, eds.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. MR1904272 (2003 f: 54096).
- [47] Kirk, W.A., (2003). "Fixed points of asymptotic contractions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277: 645-650.
- [48] Hardy, G.E. ve Rogers, T., (1973). "A generalization of a fixed point theorem of Reich", Canad. Math. Bull, 16: 201-206.
- [49] Kannan, R., (1968). "Some results on fixed points", Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 60: 71-76.
- [50] Meir, A. ve Keeler, E., (1969). "A theorem on contraction mappings", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 28: 326-329.
- [51] Nadler Jr, S.B., (1969). "Multi-valued contraction mappings", Pacific J. Math, 30: 475-488.
- [52] Reich, S., (1971). "Kannan's fixed point theorem", Boll. Un. Mat. Ital, 4: 1-11.
- [53] Subrahmanyam, P., (1974). "Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle", J. Math. Phys. Sci., 8: 445-457.
- [54] Suzuki, T., (2001). "Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 253: 440-458.
- [55] Suzuki, T., (2004). "Several fixed point theorems concerning τ -distance", Fixed Point Theory and Applications, 3: 195-209.
- [56] Zamfirescu, T., (1972). "Fix point theorems in metric spaces", Archiv der Mathematik, 23: 292-298.
- [57] Chabert, J.L. ve Barbin, E., (1999). A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [58] Liouville, J., (1837). "Second mémoire: Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielles du second membre contenant un paramètre variable", Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2: 16-35.
- [59] Picard, E., (1890). "Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives", Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6:145-210.
- [60] Krasnosel'skii, M.A., (1955). "Two remarks on the method of successive approximations", Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10: 123-127.
- [61] Schaefer, H., (1957). "Über die Methode sukzessiver Approximationen", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 59: 131-140.
- [62] Mann, W.R., (1953). "Mean value methods in iteration", Proceedings of the American Mathematical Society, 4: 506-510.

- [63] Ishikawa, S., (1974). "Fixed points by a new iteration method", Proceedings of the American Mathematical Society, 44: 147-150.
- [64] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, USA.
- [65] Maddox, I.J., (1988). Elements of Functional Analysis, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [66] Brown, A.L. ve Page, A., (1970). Elements of functional analysis, Van Nostrand-Reinhold, London.
- [67] Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., (1999). Lectures on Functional Analysis and Applications, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- [68] Moore, R.E. ve Cloud, M.J., (2007). Computational Functional Analysis, Horwood Pub., Chichester.
- [69] Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., (1977). Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London.
- [70] Berinde, V., (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin.
- [71] Devaney, R.L., (1992). A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment, Westview Press, Colorado.
- [72] Kızıltunç, H., (2007). Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının iterasyon metotlarıyla elde edilmesi, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- [73] Hunter, J.K. ve Nachtergaele, B., (2001). Applied Analysis, World Scientific, Singapore.
- [74] Greenlees, J., (2011). "MAS331: Metric spaces", <http://www.greenlees.staff.shef.ac.uk/mas331/Solutions7.pdf>, 2 Ekim 2013.
- [75] Rus, I.A., (1996). Picard Operators and Applications, Babes-Bolyai University, Faculty of Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca.
- [76] Berinde, V., (2004). "Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration", Nonlinear Analysis Forum, 9:43–53.
- [77] Rus, I.A., (1979). Principles and Applications of the Fixed Point Theory, Editura Dacia, Cluj-Napoca.
- [78] Rus, I.A., (2001). Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca.
- [79] Taskovic, M., (1986). Osnove teorije fiksne tacke (Fundamental Elements of Fixed Point Theory), Matematicka biblioteka 50, Beograd.
- [80] Chatterjea, S., (1972). "Fixed-point theorems", CR Acad. Bulgare Sci, 25: 727-730.
- [81] Rhoades, B.E., (1977). "A comparison of various definitions of contractive mappings", Transactions of the American Mathematical Society, 226: 257-290.

- [82] Rhoades, B., (1983). "Contractive definitions revisited", *Contemporary Math*, 21: 189-205.
- [83] Berinde, V., (1997). *Generalized Contractions and Applications (Contracții generalizate și aplicații)* (in Romanian), Editura Cub Pres 22, Baia Mare.
- [84] Osilike, M., (1995). "Stability results for fixed point iteration procedures", *J. Nigerian Math. Soc*, 14: 17-29.
- [85] Osilike, M., (1997). "Stability of the Ishikawa iteration method for quasi-contractive maps", *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 28: 1251-1266.
- [86] Osilike, M. ve Udomene, A., (1999). "Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive-type mappings", *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30: 1229-1234.
- [87] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "Some stability results for fixed point iteration processes", *Aus. J. Math. Anal. Appl*, 3: 1-7.
- [88] Rhoades, B., (1993). "Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures II", *Indian J. Pure Appl. Math*, 24: 691-703.
- [89] Berinde, V., (2002). "On the stability of some fixed point procedures", *Bul. Stiint. Univ. Baia Mare, Ser. B, Matematica-Informatica*, 18: 7-14.
- [90] Harder, A.M. ve Hicks, T.L., (1988). "Stability results for fixed point iteration procedures", *Math. Japon*, 33: 693-706.
- [91] Kirk, W., (1971). "On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces", *Glasgow Math. J*, 12:6-9.
- [92] Noor, M.A., (2000). "New approximation schemes for general variational inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251: 217-229.
- [93] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2004). "The equivalence between Mann–Ishikawa iterations and multistep iteration", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58: 219-228.
- [94] Agarwal, R., O'Regan, D. ve Sahu, D., (2007). "Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8: 61-79.
- [95] Agarwal, R.P., Sahu, D.R. ve O'Regan, D., (2009). *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer, New York.
- [96] Thianwan, S., (2009). "Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224: 688-695.
- [97] Phuengrattana, W. ve Suantai, S., (2011). "On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235: 3006-3014.

- [98] Olatinwo, M., (2009). "Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space", *Matematique Vesnik*, 61: 247-256.
- [99] Chugh, R. ve Kumar, V., (2012). "Stability of hybrid fixed point iterative algorithms of Kirk-Noor type in normed linear space for self and nonself operators", *International Journal of Contemporary Mathematical sciences*, 7: 1165-1184.
- [100] Hussain, N., Chugh, R., Kumar, V. ve Rafiq, A., (2012). "On the rate of convergence of Kirk-type iterative schemes", *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- [101] Akewe, H., (2012). "Strong convergence and stability of Jungck-multistep-SP iteration for generalized contractive-like inequality operators", *Advances in Natural Science*, 5: 21-27.
- [102] Soltuz, S.M., (2004). "Data dependence for Ishikawa iteration", *Lecturas Matemáticas*, 25: 149-155.
- [103] Şoltuz, S.M. ve Teodor, G., (2008). "Data Dependence for Ishikawa Iteration When Dealing with Contractive-Like Operators", *Fixed Point Theory and Applications*, 2008:242916.
- [104] Chugh, R. ve Kumar, V., (2012). "Data dependence of Noor and SP iterative schemes when dealing with quasi-contractive operators", *International Journal of Computer Applications*, 40: 41-46.
- [105] Hussain, N. Rafiq, A. Damjanović, B. ve Lazović, R., (2011). "On rate of convergence of various iterative schemes", *Fixed Point Theory and Applications*, 2011: 45-1-45-6.
- [106] Chidume, C. ve Mutangadura, S., (2001). "An example on the Mann iteration method for Lipschitz pseudocontractions", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129: 2359-2363.
- [107] Rhoades, B. ve Şoltuz, Ş.M., (2004). "The equivalence between the convergences of Ishikawa and Mann iterations for an asymptotically nonexpansive in the intermediate sense and strongly successively pseudocontractive maps", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 289: 266-278.
- [108] Rhoades, B., (2004). "The equivalence of Mann iteration and Ishikawa iteration for a Lipschitzian ψ – uniformly pseudocontractive and ψ – uniformly accretive maps", *Tamkang Journal of Mathematics*, 35: 235-246.
- [109] Rhoades, B. ve Soltuz, S., (2004). "The equivalence of Mann and Ishikawa iteration dealing with strongly pseudocontractive or strongly accretive maps", *Panamer. Math. J*, 14: 51-59.
- [110] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003: 451-459.

- [111] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "The equivalence of Mann iteration and Ishikawa iteration for non-Lipschitzian operators", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003: 2645-2651.
- [112] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2004). "The equivalence of Mann iteration and Ishikawa iteration for ψ -uniformly pseudocontractive or ψ -uniformly accretive maps", Int. J. Math. Sci, 46: 2443-2451.
- [113] Rhoades, B. ve Şoltuz, Ş.M., (2003). "The equivalence between the convergences of Ishikawa and Mann iterations for an asymptotically pseudocontractive map", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 283: 681-688.
- [114] Özdemir, M. ve Akbulut, S., (2006). "On the equivalence of some fixed point iterations", Kyungpook Math Journal, 46: 211-217.
- [115] Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three Step Iteration Algorithm Under Contractive Like Operators Over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2013: 1-9.
- [116] Zhiquan, X., (2007). "Remarks of Equivalence among Picard, Mann and Ishikawa Iterations in Normed Spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2007: 1-5.
- [117] Weng, X., (1991). "Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping", Proceedings of the American Mathematical Society, 113: 727-731.
- [118] Şoltuz, Ş.M., (2007). "The equivalence between Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, Noor and multistep iterations", Mathematical Communications, 12: 53-61.
- [119] Chugh, R. ve Kumar, V., (2011). "Strong convergence of SP iterative scheme for quasi-contractive operators", International Journal of Computer Applications, 31: 21-27.
- [120] Urabe, M., (1956). "Convergence of numerical iteration in solution of equations", J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 19: 479-489.
- [121] Ostrowski, A., (1967). "The Round off Stability of Iterations", ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 47: 77-81.
- [122] Harder, A.M., (1987). Fixed Point Theory and Stability Results for Fixed Point Iteration Procedures, Doktora Tezi, University of Missouri, Rolla.
- [123] Harder, A.M. ve Hicks, T.L., (1988). "A stable iteration procedure for nonexpansive mappings", Math. Japon, 33: 687-692.
- [124] Rhoades, B., (1990). "Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures", Indian J. Pure Appl. Math, 21: 1-9.
- [125] Imoru, C.O. ve Olatinwo, M.O., (2003). "On the stability of Picard and Mann iteration processes", Carpathian J. Math, 19: 155-160.
- [126] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "On some stability results for fixed point iteration procedure", Journal of Mathematics and Statistics, 2: 339-342.

- [127] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "Some stability results on Krasnolsleskij and Ishikawa fixed point iteration procedures", Journal of Mathematics and Statistics, 2: 360-362.
- [128] Berinde, V., (2003). "On the approximation of fixed points of weak contractive mappings", Carpathian J. Math, 19: 7-22.
- [129] Chifu, C. ve Petruşel, G., (2007). "Existence and data dependence of fixed points and strict fixed points for contractive-type multivalued operators", Fixed Point Theory and Applications, 2007.
- [130] Espínola, R. ve Petruşel, A., (2005). "Existence and data dependence of fixed points for multivalued operators on gauge spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 309: 420-432.
- [131] Markin, J., (1973). "Continuous dependence of fixed point sets", Proceedings of the American Mathematical Society, 38: 545-547.
- [132] Rus, I.A. ve Muresan, S., (1998). "Data dependence of the fixed points set of weakly Picard operators", Studia Univ. Babes-Bolyai Mathematica, 43: 79-83.
- [133] Rus, I.A. Petruşel, A. ve Sîntămărian, A., (2003). "Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 52: 1947-1959.
- [134] Chugh, R. Kumar, S. ve Jagjeet, J., (2013). "Data Dependence of Some New Iterative Schemes for Quasi-Contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 73: 12-18.
- [135] Karakaya, V. Gürsoy, F. Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). "Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators", Abstract and Applied Analysis, 2013: 381980.
- [136] Olatinwo, M., (2009). "Some results on the continuous dependence of the fixed points in normed linear space", Fixed Point Theory, 10: 151-157.
- [137] Olatinwo, M.O., (2010). "On The Continuous Dependence of The Fixed Points for (φ, ψ) - Contractive-Type Operators", Kragujevac Journal of Mathematics, 34: 91-102.
- [138] Soltuz, S.M., (2001). "Data dependence for Mann iteration", Octogon Mathematical Magazine, 9: 825-828.
- [139] Berinde, V., (2004). "On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of quasi contractive operators", Acta Math. Univ. Comenianae, 73: 119-126.
- [140] Kannan, R., (1973). "Construction of fixed points of a class of nonlinear mappings", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 41: 430-438.
- [141] Rhoades, B., (1974). "Fixed point iterations using infinite matrices", Transactions of the American Mathematical Society, 196: 161-176.
- [142] Rhoades, B., (1976). "Comments on two fixed point iteration methods", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56: 741-750.

- [143] Olatinwo, M.O., (2011). "Convergence and stability results for some iterative schemes", *Acta Universitatis Apulensis*, 26: 225-236.
- [144] Yildirim, I. Ozdemir, M. ve Kızıltunc, H., (2009). "On the convergence of a new two-step iteration in the class of quasi-contractive operators", *Int. J. Math. Anal*, 38: 1881-1892.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Faik GÜRSOY
Doğum Tarihi ve Yeri : 01/04/1980-SAMSAT
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : fgursoy@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Harran Üniversitesi	2008
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2004
Lise	Fen	Adıyaman Atatürk Lisesi	1998

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2006-2008	Harran Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2008-2009	Sağlık Bakanlığı	Bilgisayar İşletmeni
2009-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Gürsoy, F. ve Karakaya, V., (2013). "Some Convergence and Stability Results for Two New Kirk Type Hybrid Fixed Point Iterative Algorithms", Journal of Function Spaces and Applications (Baskıda). (S.C.I) **(Tez kapsamında yapılan makale)**
2. Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E., (2013). "Some Convergence and Stability Results for the Kirk Multistep and Kirk-Sp Fixed Point Iterative Algorithms", Abstract and Applied Analysis (Baskıda). (S.C.I) **(Tez kapsamında yapılan makale)**
3. Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B.E., (2013). "Data Dependence Results of New Multi-step and S-Iterative Schemes for Contractive - Like Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2013:76-1-76-12. (S.C.I) **(Tez kapsamında yapılan makale)**
4. Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2014). "On Ideal Convergence of Sequences of Functions in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces", Appl. Math. Inf. Sci., 8:1-7. (S.C.I)
5. Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three-Step Iteration Algorithm under Contractive-like Operators over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2013:1-10. (S.C.I)
6. Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). "Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators", Abstract and Applied Analysis, 2013:1-7. (S.C.I)
7. Karakaya V., Şimşek N., Gürsoy F. ve Ertürk M., (2013). "Lacunary statistical convergence of sequences of functions in intuitionistic

fuzzy normed space”, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, DOI 10.3233/IFS-130815. (S.C.I)

8. Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2012). “Statistical Convergence of Sequences of Functions in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces”, Abstract and Applied Analysis, 2012:157467-1-157467-19. (S.C.I)
9. Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2012). “Lambda-statistical convergence of sequence of functions in Intuitionistic fuzzy normed spaces”, Journal of Function Spaces and Applications, 2012:1-14. (S.C.I)
10. Mursaleen, M., Karakaya, V., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2012). “Weighted statistical convergence and its application to Korovkin type approximation theorem”, Applied Mathematics and Computation, 218:9132-9137. (S.C.I)

Bildiri

1. Gürsoy, F. ve Karakaya, V., (2013). “Convergence and Stability Results for Some New Kirk Type Hybrid Fixed Point Iterative Algorithms”, IECMSA 2013, 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 26-29 August 2013, Sarajevo-Bosnia and Herzegovina. **(Tez kapsamında sunulan bildiri)**
2. Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E., (2013). “The equivalence between new multistep iteration, S-iteration and some other iterative schemes”, ICAAMM2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, Istanbul-Turkey. **(Tez kapsamında sunulan bildiri)**
3. Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E., (2013). “Some

convergence and stability results for Kirk Multistep and Kirk-SP fixed point algorithms when dealing with contractive-like operators in normed linear space”, ICMSS 2013, International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013, 5-7 February 2013, Kuala Lumpur-Malaysia. **(Tez kapsamında sunulan bildiri)**

4. Gürsoy, F., Karakaya, V., Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). “Some Convergence Results For Jungck-Noor and Jungck-Thianwan Hybrid-Type Iterative Procedures”, ICAAMM2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, Istanbul-Turkey.
5. Doğan, K., Karakaya, V., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). “Convergence results for Jungck-SP and Jungck-Noor type iteration algorithms in convex metric spaces”, ICAAMM2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, Istanbul-Turkey.
6. Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). “Data Dependence Of Multistep And CR Iterative Schemes In The Class Of Contractive-Like Operators”, ICMSS 2013, International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013, 5-7 February 2013, Kuala Lumpur-Malaysia.
7. Doğan, K., Karakaya, V., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2013). “On the convergence of a new iterative scheme for the class of contractive-like operators”, ICMSS 2013, International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013, 5-7 February 2013, Kuala Lumpur-Malaysia.
8. Ertürk, M., Karakaya, V. ve Gürsoy, F., (2012). “Approximation Theory in Intuitionistic Fuzzy 2-Banach Spaces”, International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA 2012), 20-24

June 2012, Istanbul-Turkey.

9. Gürsoy, F., Karakaya, V., Şimşek, N. ve Ertürk, M., (2011). "Lacunary Statistical Convergence of Function Sequences In Intuitionistic Fuzzy Normed Space", International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2011) , 19-21 November 2011, Aligarh-India.
10. Ertürk, M., Karakaya, V., Şimşek, N. ve Gürsoy, F., (2011). "Lambda Statistically Convergence of Function Sequences In Intuitionistic Fuzzy Normed Space, International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2011), 19-21 November 2011, Aligarh-India.
11. Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. ve Gürsoy, F., (2011). "Ideal Convergence of Function Sequences In Intuitionistic Fuzzy Normed Space, International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2011) , 19-21 November 2011, Aligarh-India.

Proje

1. Proje Adı: Bazı Dönüşümleri İçeren Sabit Nokta İterasyon Yöntemlerinin Yakınsaklıkları.

Proje Yürütücüsü: Prof.Dr. Vatan KARAKAYA

Araştırmacı: Faik GÜRSOY

Destekleyen Kurum/ Birim: Yıldız Teknik Üniversitesi/ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü

Proje No: 2012-07-03-DOP02
2. Proje Adı: Banach Cebirlerinde Wedderburn ayrışımı ve Banach Cebirlerinin bazı geometrik özellikleri.

Proje Yürütücüsü: Doç.Dr. Necip ŞİMŞEK

Araştırmacı: Faik GÜRSOY

Destekleyen Kurum/ Birim: Harran Üniversitesi/ Bilimsel
Araştırmalar Proje Koordinatörlüğü

Proje No: 805

ÖDÜLLERİ

1. YTÜ-UBYT (Yıldız Teknik Üniversitesi Uluslararası Bilimsel Yayınları Teşvik Desteği), 2013.
2. TÜBİTAK-UBYT (TÜBİTAK Uluslararası Bilimsel Yayınları Teşvik Desteği), 2013.
3. TÜBİTAK-UBYT (TÜBİTAK Uluslararası Bilimsel Yayınları Teşvik Desteği), 2012.