

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

3-BOYUTLU GALİLE UZAYINDA KİNEMATİK



MÜCAHİT AKBIYIK

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU GALİLE UZAYINDA KİNEMATİK

Mücahit AKBIYIK tarafından hazırlanan tez çalışması 06.09.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

İstanbul Gelişim Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Nurten GÜRSES

Yıldız Teknik Üniversitesi



ÖNSÖZ

Bu tezde, Galileo Galilei'nın Görecelilik Prensibinin geometrisi ve bu geometriye göre Galile Uzak Hareketleri ve Holditch Tipi Teoremler konusu çalışılmıştır.

Bu zorlu yolda bilgilerinden çokça yararlandığım kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE' ye çok teşekkür ederim. Ayrıca, Tez İzleme Komitemdeki saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e ve Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR'e verdikleri destek ve yönlendirmelerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü çalışmalarım boyunca fedakârlıklarıyla her zaman yanımda olan eşim Dr. Seda YAMAÇ AKBIYIK'a ve aileme sükranlarımı sunarım. Ayrıca çalışmalarımda fikirlerinden çokça yararlandığım saygıdeğer Geometri grubu arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Eylül, 2018

Mücahit AKBIYIK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	4
1.3 Hipotez.....	5
BÖLÜM 2	
GALİLE GEOMETRİSİ.....	6
2.1 3-Boyutlu Galile Uzaı.....	6
2.1.1 Düzlem- Paralel Hareket.....	6
2.1.2 Düzlem-Paralel Galile Hareket ve Galile Dönüşümleri	7
2.1.3 Projektif Geometri olarak Galile Uzaı	9
2.1.4 Galile Uzaında İç Çarpım	13
2.1.5 Galile Uzaında Özel İç Çarpım	13
2.1.6 Galile Uzaında Norm	14
2.1.7 Galile Uzaında Özel Norm	14
2.1.8 Galile Uzaında Diklik	14
2.1.9 Galile Uzaında İki Nokta Arasındaki Uzaklık.....	14
2.1.10 Galile Uzaında İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık	15
2.1.11 Galile Uzaında Vektörel Çarpım	15
2.1.12 Galile Uzaında İzotropik Vektörlerin Özel Vektörel Çarpımı	15
2.1.13 Galile Uzaında Küre.....	16
2.1.14 Galile Uzaında İki Birim Vektör Arasındaki Aç.....	16
2.1.15 Galile Uzaında Genel Kuadrık Denklemi	16
2.1.16 Galile Uzaında Eğriler Teorisi	16
2.1.17 Galile Uzaında Yüzeyler Teorisi.....	18

BÖLÜM 3

GALILE UZAYINA YENİ BAKIŞLAR.....	19
3.1 Galile Uzakında Analitik Geometri.....	19
3.1.1 İki Noktadan Geçen Doğru Denklemi	19
3.1.2 Galile Uzakında Düzlem	20
3.1.3 Bir Noktanın Uzakdaki Bir Galile Düzlemi Üzerine Dik İzdüşümü.....	25
3.1.4 Bir Noktanın Uzakdaki Bir Öklid Düzlemi Üzerine Dik İzdüşümü	25
3.2 Galile Uzakında Lineer Cebir.....	27
3.2.1 İç Çarpımın Geometrik Yorumu	27
3.2.2 Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu	27
3.2.3 Galile Uzakında Paralelkenarın Alanı.....	28
3.2.4 Galile Uzakında Üç Vektör Üzerine Kurulan Paralel yüzünün Hacmi	29
3.2.5 Karma Çarpım	30
3.2.6 Üç vektörün Vektörel Çarpımı	32
3.2.7 Jacobi Özdeşliği.....	33
3.2.8 Galile Uzakında Ortonormal Baz Vektörleri.....	33
3.2.9 Galile Uzakında Özel Matrisler	33
3.2.10 Galile Uzakında Bazdan Baza Geçiş Matrisi	34
3.3 Galile Uzakında Bir Yüzeyin Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü	37
3.3.1 Admissible Yüzeyin Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü	37
3.3.2 Öklid Yüzey Parçasının Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü	38
3.4 Admissible Yüzeyin Dik İzdüşüm Alanı.....	41
3.4.1 Admissible Yüzeyin Bir Galile Düzlemine İzdüşüm Alanı	41
3.4.2 Admissible Yüzeyin Bir Öklid Düzlemine İzdüşüm Alanı.....	42

BÖLÜM 4

GALILE UZAYINDA HAREKET	45
4.1 Galile Uzakında Hareket	45
4.2 Galile Hareketlerin Türev Denklemleri ve İntegrallenebilme Koşulları	46
4.3 Hızlar ve Hızların Terkibi	50
4.4 Hareketin Pol Noktaları	52
4.5 Galile Hareketler Altında Yörünge Yüzeylerinin Hacmi	54
4.5.1 Hacimler için Klasik Holditch Teoremi	55
4.5.2 Hacimler için Holditch Teoreminin Bir Genelleştirmesi	59
4.6 Yörünge Yüzeylerinin Dik İzdüşüm Alanları için Holditch Tipi Teoremler	63
4.6.1 Yörünge Yüzeyinin Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü	63
4.6.2 Yörünge Yüzeylerinin Galile Düzlemi Üzerine Dik İzdüşüm Alanları	64
4.6.3 Yörünge Yüzeylerinin Öklid Düzlemi Üzerine Dik İzdüşüm Alanları	65

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR.....	76
EK-A	
GALILE DÜZLEMİ	81

A.1 Doğrusal (Rectilinear) Hareket.....	81
A.2 Galile Düzlemde İç Çarpım	82
A.3 Galile Düzleminde Özel İç Çarpım	83
A.4 Galile Düzleminde Norm	83
A.5 Galile düzleminde Özel Norm	83
A.6 Galile Düzleminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık	83
A.7 Galile düzleminde İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık.....	84
A.8 Galile Düzleminde Diklik	84
A.9 Galile Düzleminde Merkezil Çember	84
A.10 Galile Düzleminde İki Doğru Arasındaki Açık.....	85
A.11 Galile Düzleminde İki Doğru Arasındaki Dik Açık.....	86
A.12 Galile Düzleminde Galile Trigonometri.....	86



SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Alterne (Dış) Çarpım
G^2	Galile Düzlemi
G^3	Galile Uzayı
$\langle, \rangle_G$	Galile İç Çarpımı
$\langle, \rangle_\delta$	Galile Özel İç Çarpımı
$\ \ _G$	Galile Normu
$\ \ _\delta$	Galile Özel Normu
$\times_G$	Galile Vektörel Çarpım
$\times_\delta$	Galile Özel Vektörel Çarpım
$H = R / R'$	Galile Uzay Hareketi
d_{AB}	Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Uzaklık
δ_{AB}	Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık
$D(X, Y)$	Galile Uzay Hareketi Altında İki Nokta Arasındaki Yarı Metrik
L^2	Lorentz Düzlemi
L^3	Lorentz Uzayı
E^2	Öklid Düzlemi
E^3	Öklid Uzayı
J_X	X Noktasının Yörüngesinin Hacmi
F_{Ψ_X}	X Noktası Tarafından Oluşturulan Ψ_X Yörünge Yüzeyinin Alanı
$d\mathbf{F}_{\Psi_X}$	X Noktasındaki Ψ_X Yörünge Yüzeyinin Vektörel Alan Elementi
$\mathbf{F}_{\Psi_X}$	X Noktasındaki Ψ_X Yörünge Yüzeyinin Alan Vektörü
X^n	X Noktasının İzdüşümü
F	Yüzey Alanı
Ψ_X^n	Ψ_X Yüzeyinin İzdüşüm Yüzeyi
H_2	2-Parametrelili Galile Hareketi
H_3	3-Parametrelili Galile Hareketi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1. 1 Holditch Teoremi	2
Şekil 2. 1 Düzlem paralel hareket	7
Şekil 2. 2 Eliptik involüsyon.....	12
Şekil 3. 1 İç çarpımın geometrik yorumu	27
Şekil 3. 2 $x = 0$ Öklid düzlemindeki baz vektörleri.....	35
Şekil 4. 1 Galile Uzayında Hareket	46
Şekil 4. 2 Hareketli uzayda sabit bir üçgen	60
Şekil 4. 3 Ψ_x (kırmızı), Ψ_y (yeşil) yüzeyleri ve $z = -9$ düzlemi üzerindeki Ψ_x^n (kırmızı) ve Ψ_y^n (yeşil) izdüşüm yüzeyleri	72
Şekil 4. 4 Ψ_x (kırmızı), Ψ_z (sarı) yüzeyleri ve $x = -7$ düzlemi üzerindeki Ψ_x^n (kırmızı) ve Ψ_z^n (sarı) izdüşüm yüzeyleri.....	73
Şekil A. 1 Şekil A. 1 Çember (circle)	85
Şekil A. 2 Açı.....	85
Şekil A. 3 Galile ve Öklid birim çemberler.....	86

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5. 1 Holditch Tipi Teoremler	74



3-BOYUTLU GALİLE UZAYINDA KİNEMATİK

Mücahit AKBIYIK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Literatürde, Holditch teoremi, periyodik dönme ile öteleme veya periyodik kayma (shear) ile öteleme hareketleri altında incelenmiştir.

Bu tezde, ilk olarak, G^3 Galile Uzayında Galile uzay hareketleri tanımlanmıştır. Sonra, G^3 Galile Uzayında Galile uzay hareketleri altında bir noktanın hız formülleri elde edilmiştir.

İkinci olarak, G^3 Galile Uzayında Galile uzay hareketleri altında (yani dönme, öteleme ve kayma hareketleri altında) hacimler için Holditch tipi-teoremler incelenmiştir.

Son olarak, G^3 Galile Uzayında Galile uzay hareketleri altında (yani dönme, öteleme ve kayma hareketleri altında) alanlar için Holditch tipi-teoremler çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Holditch Teoremi, Galile Uzayı, Uzay Hareketler, Yörünge Yüzeyinin Hacmi, Yörünge Yüzeyinin Alanı

KINEMATICS IN THE 3-DIMENSIONAL GALILEAN SPACE

Mücahit AKBIYIK

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

In the literature, Holditch theorem was obtained under periodic rotation with translation motions or periodic shear with translation motions.

In this thesis, firstly, spatial Galilean motions are introduced in the Galilean space G^3 . Then, velocity formulas of a point is obtained under the spatial Galilean motion in the Galilean Space G^3 .

Secondly, Holditch types-theorems for volumes under the spatial Galilean motions (i.e. under the rotation, the translation and the shear motions) are examined.

Finally, Holditch type-theorems for areas under spatial Galilean motions (i.e. under the rotation, the translation and the shear motions) are worked.

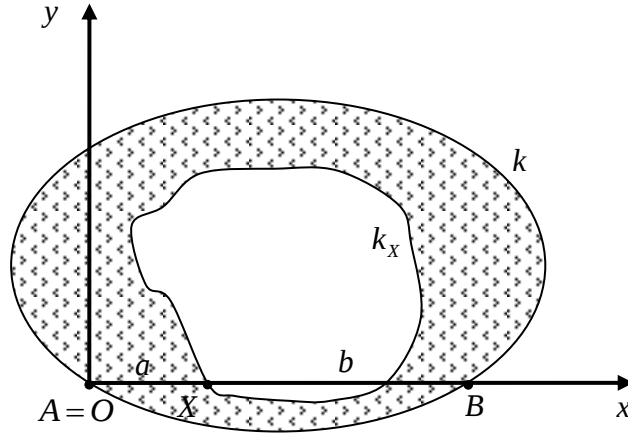
Keywords: Holditch Theorem, Galilean Space, Spatial Motions, Volume of the Trajectory Surface, Area of The trajectory Surface.

1.1 Literatür Özeti

Kinematik, mekaniğin bir alt dalı olup, noktanın veya nokta sisteminin zamana bağlı olarak meydana getirdiği yer değiştirmelerini inceleyen bir bilim dalıdır. Günümüze kadar kinematik üzerine pek çok çalışmalar yapılmış ve halen de yapılmaya devam edilmektedir, [1-55].

Holditch [1] tarafından elde edilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket altında “Klasik Holditch Teoremi” Kinematik ile ilgili bilinen en temel örneklerden biridir. Bu tez çalışması için temel olacak olan “Klasik Holditch Teoremi” şu şekilde ifade edilmiştir:

Düzlemde sabit $a+b$ uzunluklu bir AB doğru parçasının A ve B uç noktaları bir k ovali boyunca bir defa dolandırıldığında, AB doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktası $(\overline{AX} = a, \overline{XB} = b)$ da genellikle konveks olması gerekmeyen kapalı bir k_x eğrisi çizer. Bu k ovali ile k_x eğrisi arasında kalan “Holditch Halkası”nın F yüzey alanı, $F = \pi ab$ dir. Yani, F yüzey alanı, sadece X noktasının AB doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklıklarına bağlı olup, k ve k_x eğrilerinden bağımsızdır.



Şekil 1. 1 Holditch Teoremi

Ayrıca “Klasik Holditch Teoremi” düzlem, küre ve uzay kinematiğinde farklı bakış açıları ile çalışılarak genelleştirilmiştir. Holditch Teoremi’nin Öklid düzleminde yapılan bazı genelleştirmeleri aşağıda verilmiştir:

1956 yılında Blaschke, W., Müller H. R. [2]; 1-parametrel ν – dönme sayılı kapalı düzlemsel hareketler altında, doğrudan üç noktanın çizmiş olduğu farklı üç kapalı yörünge eğrisinin alanları arasındaki ilişkiyi hesaplamıştır.

1981 yılında Hering, L. [3]; 1–parametrel ν dönme sayılı kapalı düzlemsel hareketler altında, doğrudan olmayan üç noktanın çizmiş olduğu farklı üç kapalı yörünge eğrisinin alanları arasındaki ilişkiyi hesaplamıştır.

1986 yılında Pottmann, H., [4]; 1–parametrel kapalı düzlemsel hareketler altında hareketli düzlemde alınan doğrudan olmayan, aynı yörünge eğrisini çizen üç sabit nokta ve bu noktalar tarafından tanımlanan düzlem üzerindeki bir diğer sabit nokta için kapalı yörünge eğrilerinin alanları arasındaki farkı hesaplamıştır.

Ayrıca, Pottmann, H. [5]; k ovalini, sınırlı konveks alanın sınırını sınırlayan bir eğri ile değiştirerek, Holditch Teoreminin geçerli olduğunu göstermiştir. Bu durumda, bu iki k ve k_x eğrileri ile sınırlı “Holditch Hilali” nin F yüzey alanını, δ ; k eğrisinin toplam dönme açısı

olmak üzere $F = \frac{\delta}{2} ab$ olarak hesaplamıştır.

Aşağıda, Holditch Teoreminin uzayda yapılan bazı genelleştirmelerini özetlenmiştir:

1948 yılında Blaschke, W. [6]; E^3 Öklid uzayında 3– parametrelili uzay hareketi altında, hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda belirlediği bölgenin hacim elementi ve hacim formüllerini vermiştir. Ayrıca, bu uzay hareketi altında, eşit hacime sahip bölgeler belirleyen hareketli uzayın bütün sabit noktalarının aynı bir kuadrik üzerinde bulunacağını göstermiştir.

1979 yılında ise Müller, H. R. [7]; E^3 Öklid uzayında 3-parametrelili uzay hareketi esnasında, hareketli uzaydaki doğrudan üç sabit noktanın sabit uzayda belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi kullanarak, 3-parametrelili uzay hareketine ve onunla birlikte oluşan 2-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak özel bir şekilde ölçülen (hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki) uzaklık sayesinde, Klasik Holditch Teoremine [1], uzayda eşdeğer olan bir Holditch-Tipi teorem elde etmiştir. Ayrıca 3-parametrelili uzay hareketi ve onunla birlikte oluşan 2-parametrelili kapalı uzay hareketine göre, hareketli uzaydaki doğrudan olmayan üç sabit nokta ve bu noktalar tarafından tanımlanan düzlem üzerindeki bir diğer sabit nokta için Holditch-Tipi teoremi genelleştirmiştir.

1987 yılında ise Müller, H.R. [8]; E^3 Öklid uzayında Kinematik vektörel alan elementi ve alan vektörü kavramları yardımıyla, öncelikle 2–parametrelili kapalı uzay hareketi altında hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formüllerini hesaplamıştır. Daha sonra ise bu kapalı uzay hareketi esnasında, hareketli uzaydaki doğrudan üç sabit noktanın sabit uzayda çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının bir düzlem üzerine dik izdüşümlerinin alanları arasındaki ilişkiyi kullanarak; izdüşüme ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak tanımladığı (hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki) uzaklık sayesinde, klasik Holditch Teoremine [1] uzayda eşdeğer olan başka bir Holditch-Tipi teorem elde etmiştir.

Aynı zamanda Holditch tipi-teoremler ve Kinematik üzerine çalışmalar L^2 Lorentz düzlemi ve L^3 Lorentz uzayında incelenmiştir, [40-49]. 1990 yılında, Ergin, A. A. [41]; L^2 Lorentz düzleminde düzlemsel Lorentz hareketleri tanımlamıştır. Yüce, S. [42]; Lorentz düzleminde düzlemsel Lorentz hareketler altında Holtich teoremini $F = \frac{\delta}{2} ab$ olarak elde etmiştir. Ayrıca 2009 ve 2010 yıllarında Yıldırım, H. [47,48]; E^3 Öklid uzayındaki 3– parametrelili uzay

hareketi ve 2 – parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında elde edilmiş olan Holditch-Tipi teoremlerin ve bazı sonuçların [6,7,8,29]; L^3 3 – boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıklarını elde etmiştir.

Gürses, N. [43,44]; Öklid, Lorentz, ve Galile düzlemlerini içeren Afin Cayley-Klein düzleminde ve içinde kompleks, hiperbolik ve dual düzlemi barındıran genelleştirilmiş kompleks veya p – kompleks düzlem diye adlandırılan düzlem üzerinde düzlemsel hareketleri tanımlamıştır. 2015 yılı başında Erişir, T. [50]; Holditch Teoremini p – kompleks düzlemde çalışmıştır. Erişir, T. [50]; özel durumlarda kompleks düzlemde Müller’ in [39], hiperbolik düzlemde Yüce’nin [51] elde etmiş olduğu ve ek olarak da dual düzlemde Holditch Teoremini vermiştir.

Son yıllarda araştırmacılar, G^2 Galile düzlemi ve G^3 Galile Uzayında (hatta Pseudo-Galile uzayında) çalışmalar yapmaya başlamıştır, [52-74]. G^2 Galile düzlemi ve G^3 Galile uzayı hakkında temel tanım, teorem ve sonuçlar Yaglom, I. M. [57] ve Röschel, O. [58] tarafından verilmiştir. Daha sonra araştırmacılar bu kaynaklardan yararlanarak bir çok çalışmalar yapmışlardır. 1984 yılında, Röschel, O. [52]; Klasik Holditch Teoremini Galile düzleminde (izotropik düzlemde) sağlandığını göstermiştir. Buna göre Röschel izotropik düzlemde bir periyodik hareketin $A=(x_1, x_2)$ ve $B=(y_1, y_2)$ noktalarının yörüngelerinin $F = M(x_1 - y_1)$ alanını belirleyen M “hareket sabiti” için bir yorum vermiştir. Burada Röschel aslında izotropik düzlemde kapalı alanlar için Holditch Teoreminin direk karşılığının sağlanmadığını göstermiştir. Daha sonra 1986 yılında, Pottmann, H. [53]; k eğrisini, sınırsız konveks bölgesi eğri ile değiştirerek Holditch hilalinin alanını $F = \frac{\delta}{2}ab$ olarak elde etmiştir. 2013 yılında, Yüce, S. [54]; Galile düzlemde kinematiğin temel konusu olan 1-parametrelili Galile hareketleri tanımlamıştır. Daha sonra yine Yüce, S. [55]; düzlemsel kinematiğin önemli teoremi olan Euler Savary formülünü elde etmiştir. Ayrıca Tütüncü, E. E. [56]; Galile düzleminde, Galile Uzayında ve n – boyutlu Galile Uzayında Galile Hareketler çalışmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, 3 – boyutlu Galile Uzayı hakkında ayrıntılı bilgiler verilecektir. Ayrıca 3 – boyutlu Galile Uzayında, 3 – parametrelili uzay hareketi ve 2 – parametrelili periyodik uzay hareketi esnasında, hacim ve alan için Holditch-Tipi teoremler ve bazı sonuçlar verilecektir.

1.3 Hipotez

Bu tezin orijinal kısmında, E^3 3–boyutlu Öklid Uzayında (veya L^3 3–boyutlu Lorentz Uzayında) 3–parametrelili ve 2– parametrelili periyodik uzay hareketi altında elde edilen Holditch Tipi Teoremlerin ve sonuçların [6,7,8] karşılıkları (veya [49]), analog olarak G^3 3–boyutlu Galile Uzayında araştırılacaktır.



BÖLÜM 2

GALILE GEOMETRİSİ

F. Klein'e göre *Geometri*; dönüşümler altındaki değişmezlerin teorisine denir. Bu dönüşümler altında korunan yani değişmeyen özelliklere geometrik özellikler denir. *Galile Geometri*; Galile hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisine denir. Biz çalışmamızda 3-boyutlu Galile Geometrisi üzerinde çalışacağız.

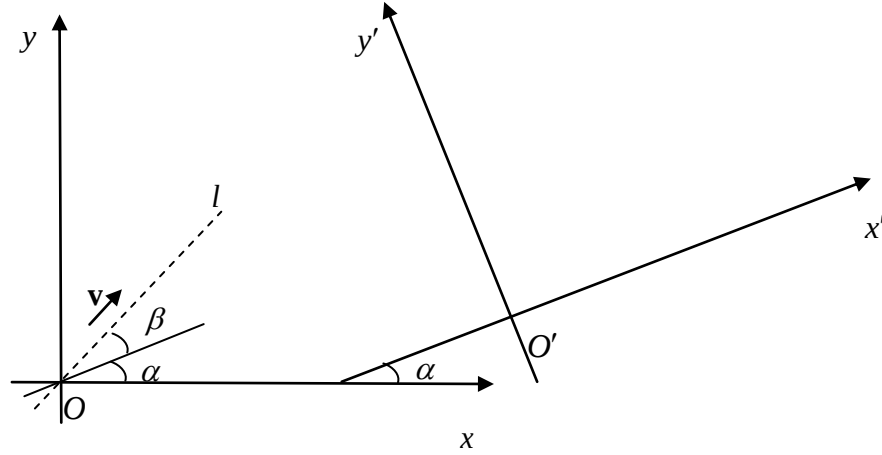
2.1 3-Boyutlu Galile Uzayı

Galile Geometri günümüze kadar iki farklı yaklaşımla çalışılmıştır. Birincisi, Yaglom tarafından verilen mekanik anlamda elde edilen geometri diğeri ise Otto Röschel tarafından projektif uzay olarak ele alınan geometridir. Biz bu tezde genel olarak her iki çalışmadan da bahsetmeye çalıştık fakat Yaglom tarafından verilen yaklaşımı esas alacağız. Tabi ki burada Otto Röschel'in yaklaşımının daha geniş bir geometri olduğunu itiraf etmeliyiz. Fakat çalışmalarımızı mekanik bir anlam vermek bizi daha manalı olduğunu düşündüğümüz için tercihimizi bu yönde kullandık.

2.1.1 Düzlem- Paralel Hareket

Bir Φ objesinin noktalarının düzleme paralel olacak şekilde hareket etmesine *düzlem-paralel hareket* denir, [57].

2.1.2 Düzlem-Paralel Galile Hareket ve Galile Dönüşümleri



Şekil 2. 1 Düzlem paralel hareket

$\{x, y\}$ ve $\{x', y'\}$ iki referans çatısı ve $xOx' = \alpha$ olsun, (Şekil 2.1). Bu durumda bu iki referans çatısı arasında, $\{x, y\}$ referans çatısının O orijin noktasının $\{x', y'\}$ referans çatısına göre koordinatları (a, b) olmak üzere

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

ilişkisi vardır. Eğer $\{x, y\}$ referans çatısının O orijin noktası l doğrusu boyunca v sabit hızı ile hareket ederse $x'Ol = \beta$ olmak üzere $\{x', y'\}$ referans çatısına göre $a(t)$ ve $b(t)$ koordinatları t zamanında

$$a(t) = a + v(\cos \beta)t$$

$$b(t) = b + v(\sin \beta)t$$

olur. Böylece bir A noktasının (x', y') ve (x, y) koordinatları arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + v(\cos \beta)t + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + v(\sin \beta)t + b \end{cases}$$

ve $t' = t + d$ olduğundan

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + v(\cos \beta)t + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + v(\sin \beta)t + b \\ t' = t + d \end{cases}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + v(\cos \beta)t + a \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + v(\sin \beta)t + b \\ t' = t + d \end{cases}$$

dönüşümüne *düzlem-paralel hareketler için Galile dönüşümleri* veya *üç boyutlu Galile dönüşümleri* denir. Düzlem-paralel hareketler için Galile dönüşümleri

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ t_1 = t \end{cases}$$

dönme dönüşümü ve xOy düzleminin her noktasını $\mathbf{v} = (v \cos \beta, v \sin \beta, 0)$ vektörü yönünde $\mathbf{v}t$ uzaklığa taşıyan

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + (v \cos \beta)t_1 \\ y_2 = y_1 + (v \sin \beta)t_1 \\ t_2 = t_1 \end{cases}$$

Shear (kayma) dönüşümü ve (a, b, d) vektörü ile belirli

$$\begin{cases} x' = x_2 + a \\ y' = y_2 + b \\ t' = t_2 + d \end{cases}$$

öteleme dönüşümünden oluşur, [57].

Eğer t , zaman parametresi yerine x ; x konum parametresi yerine y ; y konum parametresi yerine z alınırsa düzlem-paralel hareketler için Galile dönüşümleri

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= (v \cos \beta)x + \cos \varphi y + \sin \varphi z + b \\ z' &= (v \sin \beta)x - \sin \varphi y + \cos \varphi z + d \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir, [57].

Tanım 2.1

Düzlem paralel hareketler için Galile dönüşümleri altında değişmeyenlerin teorisine *Galileo'nun Görecelik Prensiplerinin Geometrisi* veya *üç boyutlu Galile uzayı* denir ve G^3 ile gösterilir, [57].

2.1.3 Projektif Geometri olarak Galile Uzayı

Tanım 2.2

3– boyutlu afin uzayında kendi üzerine en genel dönüşüm

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha x + b_1 y + c_1 z + a \\ y' &= cx + \beta y + \gamma z + b \\ z' &= ex + \delta y + \varepsilon z + d \end{aligned} \right\} a, b, c, d, e, b_1, c_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

12– parametrelili dönüşümdür. Eğer bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise bu durumda bu dönüşümlerin bileşke işlemine göre oluşturduğu gruba 3– boyutlu afin uzayında *dönüşümler grubu* denir ve F_{12} ile gösterilir. Eğer özel olarak,

$$b_1 = c_1 = 0 \text{ ve } \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ a_2 & \beta & \gamma \\ e & \delta & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$$

ise bu durumda

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha x + a \\ y' &= cx + \beta y + \gamma z + b \\ z' &= ex + \delta y + \varepsilon z + d \end{aligned} \right\} b, b_1, c, c_1, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

dönüşümleri bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup F_{12} grubunun bir alt grubudur ve bu grup F_{10} ile gösterilir. Eğer bu dönüşüm

$$I : (0, y, z) \rightarrow (0, z, -y)$$

şeklinde bir eliptik hareketle (involüsyonu hareketle) düşünülürse; bu durumda $\beta = \varepsilon$ ve $\gamma = -\delta$ elde edilir. Böylece katsayılar matrisinin determinanı $\alpha(\beta^2 + \gamma^2) \neq 0$ olur.

$\beta^2 + \gamma^2 = \rho^2$ olduğunda $\beta = \rho \cos \varphi, \gamma = \rho \sin \varphi$ olacak şekilde bir φ açısı vardır. Böylece

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha x + a \\ y' &= cx + \rho \cos \varphi y + \rho \sin \varphi z + b \\ z' &= ex - \rho \sin \varphi y + \rho \cos \varphi z + d \end{aligned} \right\} a, b, c, d, e, \alpha, \rho, \varphi \in \mathbb{R}$$

8-parametrelili dönüşümü elde edilir. Eğer $\alpha = \rho = 1$ alınırsa bu durumda katsayılar matrisinin determinanı $\alpha^2 \rho^2 = 1$ olduğundan elde edilen hareket dönüşümüne *Galile uzay hareket dönüşümü* denir.

Cayley-Klein'e göre "Bütün geometriler projektif geometridir" . Buna göre G^3 bir reel 3-boyutlu projektif uzaydır ve $P^3(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ daki $\sim$ denklik bağıntısının kümesidir.

Burada $\sim$ denklik bağıntısı

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $P^3(\mathbb{R})$ uzayını geometrik olarak $\mathbb{R}^4$ de orijinden geçen doğruların kümesi olarak düşünebiliriz. w düzlemi $x_0 = 0$ reel düzlemi ve bu düzlemdeki $x_0 = x_1 = 0$ olan f doğrusu Cayley Klein' in mutlak şekil ölçüsüne göre ayrılan $P^3(\mathbb{R})$ 3-boyutlu projektif reel uzayındaki

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 (\neq 0 : 0 : 0 : 0)$$

noktalarını; bilinen reel homojen koordinatlar olarak tanımlayalım. Böylece $P^3(\mathbb{R})$ uzayı ayrı ayrı sabit tutularak projeksiyon yapılan tüm f ve w ları $\alpha(\beta\varepsilon - \gamma\delta) \neq 0$ ($a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$) ile 10 elemanlı sürekli

$$x_0' = x_0$$

$$x_1' = ax_0 + \alpha x_1$$

$$x_2' = bx_0 + cx_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$$

$$x_3' = dx_0 + ex_1 + \delta x_2 + \varepsilon x_3$$

F_{10} dönüşüm grubunu oluşturur. Bu F_{10} grubunun bu regüler projeksiyonları mutlak f doğrusu üzerinde eliptik involüsyonu olan

$$I : (0 : 0 : x_2 : x_3) \rightarrow (0 : 0 : x_3 : -x_2)$$

ile değişir ve f üzerinde projektif determinantın kısıtlanışına sahip olmak üzere

$$x'_0 = x_0$$

$$x'_1 = ax_0 + \alpha x_1$$

$$x'_2 = bx_0 + cx_1 + \rho \cos \varphi x_2 + \rho \sin \varphi x_3$$

$$x'_3 = dx_0 + ex_1 - \rho \sin \varphi x_2 + \rho \cos \varphi x_3$$

$(a, b, c, d, e, \varphi, \rho \in \mathbb{R}, \alpha \rho^2 \neq 0)$ elde edilir. Eğer $\alpha = \rho = 1$ alınırsa G^3 Galile uzayı hareket grubu B_6

$$x'_0 = x_0$$

$$x'_1 = ax_0 + x_1$$

$$x'_2 = bx_0 + cx_1 + \cos \varphi x_2 + \sin \varphi x_3$$

$$x'_3 = dx_0 + ex_1 - \sin \varphi x_2 + \cos \varphi x_3$$

ile tanımlanır. Burada afin koordinatlarda $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$ ($x_0 \neq 0$) alınırsa

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= cx + \cos \varphi y + \sin \varphi z + b \\ z' &= ex - \sin \varphi y + \cos \varphi z + d \end{aligned} \right\} \dots B_6$$

elde edilir. Böylece G^3 Galile uzayın reel modeli olarak, I eliptik involüsyonu ile birlikte $f \subset w$ reel doğrusunu ve $w \subset G^3$ reel düzlemini içeren $\{w, f\}$ ideale sahip bir reel $P^3(\mathbb{R})$ projektif uzayını alabiliriz. Burada eliptik involüsyonu uygun koordinatlarda

$$w \dots x_0 = 0 \subset G^3 \text{ reel düzlem, } f \dots x_0 = x_1 = 0 \subset w \text{ reel doğru}$$

$$I : (0, 0, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, x_3, -x_2)$$

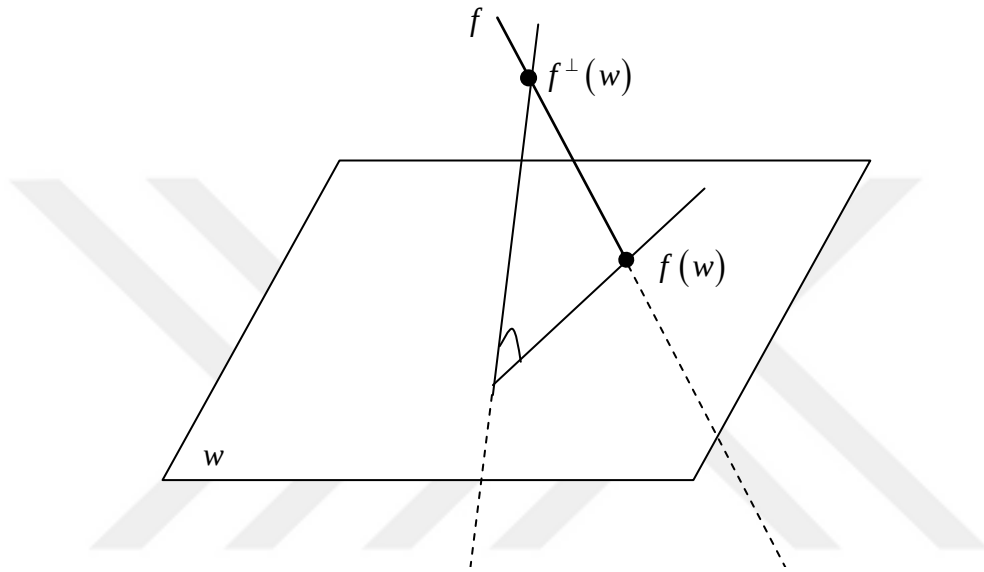
şeklindedir, [58].

Tanım 2.3 (Eliptik İnvolisyon)

w bir düzlem ve $f(w)$ noktasıda f doğrusunun w ile kesiştiği nokta olmak üzere $f(w)$ noktasına w düzleminin mutlak noktası denir ve

$$f^\perp(w) = I(f(w))$$

şeklinde tanımlı $f^\perp(w)$ noktasına da ($f(w)$ noktasının eliptik involüsyonu altındaki görüntüsü) $f(w)$ noktasına ortogonal olan f üzerindeki bir nokta denir.



Şekil 2. 2 Eliptik involüsyon

Tanım 2.4

Galile Uzayında $u = (0, y, z)$ şeklindeki vektörlere izotropik vektörler (veya özel vektörler) denir. Diğer vektörlere yani $v = (x, y, z)$, $x \neq 0$ şeklindeki vektörlere izotropik olmayan (veya non-izotropik) vektörler denir, [72].

Teorem 2.5

Projektif Geometri olarak G^3 Uzayında 4 çeşit doğru vardır.

- a) reel izotropik olmayan doğrular; f ile kesişmezler
- b) reel izotropik doğrular; w düzlemine ait olmayıp f ile kesişmezler.
- c) reel ve izotropik olmayan doğrular; w düzleminin tüm doğruları (f dışında)

d) f ideal doğrusu, [67].

Tanım 2.6

Galile Uzayında $x = \text{sabit}$ olan düzlemler (w) ideal düzlemide dahil reel Öklidyen düzlemlerdir. Diğer düzlemler ise Galile düzlemler veya diğer bir adıyla izotropik düzlemlerdir, [72].

2.1.4 Galile Uzayında İç Çarpım

Tanım 2.7

Galile Uzayında $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2) \in G^3$ olmak üzere Galile iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ şeklinde gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = x_1 x_2$$

olarak tanımlanır, [57].

2.1.5 Galile Uzayında Özel İç Çarpım

Tanım 2.8

Galile Uzayında $\mathbf{x} = (0, y_1, z_1), \mathbf{y} = (0, y_2, z_2) \in G^3$ izotropik vektörlerinin Galile özel iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\delta = y_1 y_2 + z_1 z_2$$

olarak tanımlanır, [57].

Örnek 2.9

$\mathbf{x} = (1, 1, 1), \mathbf{y} = (-1, 0, 1)$ ve $\mathbf{z} = (0, 1, 1)$ olsun.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G = 1.0 = 0$ ve $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G = -1.0 = 0$. Ayrıca $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, 1, 2)$ dir.

$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G = \langle (0, 1, 2), (0, 1, 1) \rangle_G = 0.0 = 0$ fakat $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_\delta = \langle (0, 1, 2), (0, 1, 1) \rangle_\delta = 1.1 + 2.1 = 3$ bulunur.

2.1.6 Galile Uzayında Norm

Tanım 2.10

Galile Uzayında her $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) \in G^3$ vektörünün normu $\|\mathbf{a}\|_G$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G} = |x_1|$$

şeklinde tanımlanır. $\|\mathbf{a}\|_G = 1$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne birim vektör denir, [57].

2.1.7 Galile Uzayında Özel Norm

Tanım 2.11

Galile Uzayında $\mathbf{a} = (0, y_1, z_1) \in G^3$ izotropik vektörünün normu $\|\mathbf{a}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_\delta = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_\delta} = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$$

şeklinde tanımlanır, [57].

2.1.8 Galile Uzayında Diklik

Tanım 2.12

Galile Uzayında $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G^3$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_G = 0$$

olması $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G \neq 0$ için $\mathbf{b} = (0, y_2, z_2)$ olduğunda sağlanır. Bu durumda $\mathbf{b}$ vektörüne $\mathbf{a}$ vektörünün *diki* denir ve $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ile gösterilir, [57].

2.1.9 Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Tanım 2.13

$A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2) \in G^3$ noktaları arasındaki uzaklık d_{AB} ile gösterilir ve

$$d_{AB} = \|\mathbf{AB}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_G}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ olmak üzere

$$d_{AB} = |x_2 - x_1|$$

uzaklığına eşittir, [57].

2.1.10 Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık

Tanım 2.14

Eğer A ve B noktaları arasındaki uzaklık sıfır ise, yani $x_1 = x_2$ ise, böyle noktalar için özel uzaklık $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (0, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ olmak üzere

$$\delta_{AB} = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_\delta} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ile tanımlanır, [57].

2.1.11 Galile Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 2.15

Galile Uzayında $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2) \in G^3$ olmak üzere Galile vektörel çarpımı

$$\mathbf{x} \times_G \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (0, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

olarak tanımlanır, [72].

2.1.12 Galile Uzayında İzotropik Vektörlerin Özel Vektörel Çarpımı

Tanım 2.16

Galile Uzayında $\mathbf{x} = (0, y_1, z_1), \mathbf{y} = (0, y_2, z_2) \in G^3$ izotropik vektörlerin özel vektörel çarpımı

$$\mathbf{x} \times_\delta \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, 0, 0)$$

olarak tanımlanır, [59].

2.1.13 Galile Uzayında Küre

Sabit bir M noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $X = (x, y, z)$ noktalarının kümesine *küre* denir ve S^2 ile gösterilir. Burada $M = (x_0, y_0, z_0)$ noktasına kürenin *merkezi* ve negatif olmayan r sayısına kürenin *yarıçapı* denir. Bu durumda

$$S^2 = \{X = (x, y, z) \in G^3, \mid |x - x_0| = r\}$$

yazılabilir, [58].

2.1.14 Galile Uzayında İki Birim Vektör Arasındaki Aç

Galile Uzayında iki birim vektör $\mathbf{a} = (1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (1, b_2, b_3)$ olsun. Bu iki vektör arasındaki açının ölçüsü, fark vektörlerinin uzunluğu olarak tanımlanır ve

$$\alpha = m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

ile hesaplanır, [58].

2.1.15 Galile Uzayında Genel Kuadrik Denklemleri

Galile uzayında, x, y, z ye göre 2. dereceden

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

denklemini sağlayan noktaların kümesine bir *kuadrik* denir, [65].

2.1.16 Galile Uzayında Eğriler Teorisi

Galile Uzayında bir α uzay eğrisi $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow G^3$, şeklindedir.

Burada

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

dir. Ayrıca $x(t), y(t), z(t) \in C^3$ (3. dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar uzayı) dır, [58].

Tanım 2.17

Galile Uzayında bir $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eğrisi için, eğer $x'(t) \neq 0$ ise α eğrisine admissible (kabul edilebilir) eğri denir, [58].

i) α bir admissible eğri olsun. Bu durumda α eğrisi için yay uzunluğu parametresi

$$ds = |x'(t) dt| = |dx|$$

ile tanımlanır.

$\alpha: I \rightarrow G^3$, $(y''(t))^2 + (z''(t))^2 \neq 0$ olmak üzere $\alpha(t) = (t, y(t), z(t))$ ve t yay parametresi

ile parametrelendirilmiş bir admissible eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin eğriliği

$$\kappa(t) = \sqrt{(y''(t))^2 + (z''(t))^2} \text{ olmak üzere Frenet üç ayaklısı}$$

$$\begin{cases} T(t) = (1, y'(t), z'(t)) \\ N(t) = \frac{1}{\kappa(t)} (0, y''(t), z''(t)) \\ B(t) = \frac{1}{\kappa(t)} (0, -z''(t), y''(t)) \end{cases}$$

elde edilir. $B(t)$ vektörü eliptik involüsyon altında $N(t)$ vektörünün görüntüsüdür. Ayrıca

α eğrisinin Frenet-Serret elemanları T, N, B, κ, τ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & b \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindeir. Burada τ burulma fonksiyonu

$$\tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\kappa^2(t)}$$

olarak hesaplanır, [58].

Tanım 2.18

Galile Uzayında $D(t) = \tau(t)T(t) + \kappa(t)B(t)$ vektör alanına Darboux vektör alanı denir.

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır, [58]:

$$T' = D \times_G T$$

$$N' = D \times_G N$$

$$B' = D \times_G B.$$

ii) $\alpha: I \rightarrow G^3$, $\alpha(t) = (c, y(t), z(t))$, $c = \text{sabit}$ olacak şekilde admissible olmayan bir eğri olsun. Yani G^3 Galile Uzayındaki $x=c$ Öklid düzleminde bir düzlemsel eğri olsun. Bu durumda Öklid geometriden de bildiğimiz gibi

$$T(t) = (0, y'(t), z'(t))$$

$$N(t) = (0, -z'(t), y'(t))$$

ve

$$\kappa = \langle T', N \rangle = z''(t)y'(t) - y''(t)z'(t)$$

elde edilir, [58].

2.1.17 Galile Uzayında Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.18

3– boyutlu Galile Uzayında C^3 sınıfından bir $\varphi(u, v)$ yüzeyi

$$\varphi = \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

parametrik denklemi ile verilsin. Galile Uzayında $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}$, $\varphi_2 = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$ olmak üzere

$\varphi(u, v)$ yüzeyinin regüler olması için $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$, $\varphi_1 \times_G \varphi_2 \neq 0$ olmalıdır. Ayrıca

$\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \neq 0$ veya $\frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \neq 0$ ise yüzeye admissible (kabul edilebilir) yüzey denir. Galile

Uzayında bir admissible yüzeyin $\mathbf{n}$ izotropik birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\varphi_1 \times_G \varphi_2}{\|\varphi_1 \times_G \varphi_2\|_G}$$

olarak bulunur, [58].

BÖLÜM 3

GALILE UZAYINA YENİ BAKIŞLAR

Tezimizin bu bölümünde literatürde var olan bazı kavramların eksik kalan özellikleri ve Galile uzayındaki bir yüzeyin vektörel alan elementi, alan vektörü çalışılmıştır. Ayrıca, bir admissible yüzeyin Galile Uzayındaki Galile ve Öklid düzlemlerine izdüşüm yüzeylerinin vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri araştırılmıştır.

3.1 Galile Uzayında Analitik Geometri

3.1.1 İki Noktadan Geçen Doğru Denklemi

Uzayda $A=(x_1, y_1, z_1)$ ve $B=(x_2, y_2, z_2) \in G^3$ noktalarından geçen doğru d olsun. d doğrusu üzerinde temsili bir nokta $X=(x, y, z)$ olmak üzere d doğrusunun *parametrik denklemi*

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

ve *kartezyen denklemi*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

ifadesi ile verilir. Ayrıca $A=(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü

$\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$ olan doğrunun kartezyen denklemi

$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} = \lambda$$

olarak yazılır.

Tanım 3.1

Bir d doğrusunun doğrultman vektörü $\mathbf{u}$ izotropik vektör ise d doğrusuna *izotropik doğru* denir. Eğer d doğrusunun doğrultman vektörü $\mathbf{u}$ izotropik vektör değil ise d doğrusuna *izotropik olmayan doğru* denir, [67].

3.1.2 Galile Uzayında Düzlem

G^3 Galile Uzayında paralel olmayan $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri ve $A=(x_0, y_0, z_0)$ noktası verilsin. $\forall s, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbf{AX} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ vektörlerinin cümesine $A=(x_0, y_0, z_0)$ noktasının ve $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin belirlediği düzlem denir ve (H) ile gösterilir. Bu durumda G^3 Galile Uzayında düzlemler $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerine göre sınıflandırılır.

I. $\mathbf{v}_1=(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v}_2=(a_2, b_2, c_2)$ izotropik olmayan vektörler ve $X=(x, y, z)$ olsun. Bu durumda,

$$(H) \dots \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z = z_0 + sc_1 + tc_2 \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

yazılabilir.

$\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ paralel olmayan vektörler olduğu için genellikle bir şey kaybetmeksizin kabul edelim ki $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ olsun. Eğer s ve t parametrelerini

$$\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_0 + sb_1 + tb_2 \end{cases}$$

denklem sistemine göre çözersek,

$$s = \frac{b_2(x - x_0) - a_2(y - y_0)}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

ve

$$t = \frac{a_1(y - y_0) - b_1(x - x_0)}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

elde edilir. Böylece

$$z = z_0 + \frac{b_2(x - x_0) - a_2(y - y_0)}{a_1b_2 - b_1a_2}c_1 + \frac{a_1(y - y_0) - b_1(x - x_0)}{a_1b_2 - b_1a_2}c_2$$

veya

$$A = b_2c_1 - b_1c_2, B = a_1c_2 - a_2c_1, C = b_1a_2 - a_1b_2, D = -(b_2c_1 - b_1c_2)x_0 - (a_1c_2 - a_2c_1)y_0 + (b_1a_2 - a_1b_2)z_0$$

olmak üzere $Ax + By + Cz + D = 0$ genel düzlem denklemi elde edilir. Bu durumda düzlemin normali

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times_G \mathbf{v}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= (0, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= (0, B, C) \end{aligned}$$

elde edilir.

II. $\mathbf{v}_1 = (0, b_1, c_1)$ ve $\mathbf{v}_2 = (0, b_2, c_2)$ olsun. Genel düzlem denklemi

$$(b_2c_1 - b_1c_2)x - (b_2c_1 - b_1c_2)x_0 = 0$$

veya

$Ax + D = 0$ düzlemi elde edilir. Bu durumda düzlemin normali

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times_\delta \mathbf{v}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2, 0, 0) \\ &= (A, 0, 0) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $Ax + D = 0$ düzleminin normali $\mathbf{n} = (A, 0, 0)$ elde edilir.

III. $\mathbf{v}_1 = (0, b_1, c_1)$ ve $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ olsun. Bu durumda genel düzlem denklemi

$$A = b_2 c_1 - b_1 c_2, B = -(a_2 c_1), C = b_1 a_2, D = -(b_2 c_1 - b_1 c_2) x_0 + (a_2 c_1) y_0 + (b_1 a_2) z_0 \quad \text{olmak üzere}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla düzlemin normali

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times_G \mathbf{v}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= (0, a_2 c_1, -b_1 a_2) \\ &= (0, B, C) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2

1. $Ax + By + Cz + D = 0$ ise düzlemin normali $\mathbf{n} = (0, B, C)$
2. $Ax + D = 0$ ise düzlemin normali $\mathbf{n} = (A, 0, 0)$ elde edilir.

Tanım 3.3

Eğer $\mathbf{n}$ izotropik vektör ise G^3 Galile Uzayında düzleme *Galile düzlem (veya izotropik düzlem)* denir. Eğer $\mathbf{n}$ izotropik olmayan vektör ise düzleme *Öklid düzlemi (veya izotropik olmayan düzlem)* denir.

Özellikler

1) $Ax + D = 0, D \neq 0$ düzlemlerde konum vektörleri izotropik olmayan noktalar vardır.

İspat

$$Ax + D = 0 \text{ düzleminde } P = \left(-\frac{D}{A}, y, z \right) \text{ tipinde noktalar bulunur.}$$

2) Öklid düzlemlerde yatan vektörler izotropiktir.

İspat

$Ax + D = 0$ düzleminde $P = \left(-\frac{D}{A}, y, z\right)$ tipinde noktalar bulunur. Buradan

$P_1 = \left(-\frac{D}{A}, y_1, z_1\right), P_2 = \left(-\frac{D}{A}, y_2, z_2\right)$ keyfi iki noktası için $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (0, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ düzlem

üzerinde yatan tüm izotropik vektörlerdir.

3) Galile düzlemlerinde konum vektörleri izotropik olan ve izotropik olmayan noktalar mevcuttur.

İspat

$Ax + By + Cz + D = 0$ Galile düzleminde $P = (x, y, -D - Ax - By)$ olacak şekilde bir P noktası vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} P &= (x, y, -D - Ax - By) \\ &= (0, 0, -D) + x(1, 0, -A) + y(0, 1, -B) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\{(1, 0, -A), (0, 1, -B)\}$ düzlem üzerinde yatan izotropik ve izotropik olmayan vektörlerdir. Dolayısıyla izotropik olan ve izotropik olmayan noktalar mevcuttur.

4) Galile düzlemlerde izotropik olmayan ve izotropik olan vektörler yatar.

İspat

$Ax + By + Cz + D = 0$ Galile düzleminde

$$P_1 = (x_1, y_1, -D - Ax_1 - By_1), P_2 = (x_2, y_2, -D - Ax_2 - By_2) \in Ax + By + Cz = -D, x_1 \neq x_2$$

olacak şekilde izotropik olmayan noktalar mevcuttur. Bu durumda $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ izotropik olmayan bir vektördür.

5) Galile düzleminde yatan izotropik vektörler lineer bağımlıdır.

İspat

$\{(1, 0, -A), (0, 1, -B)\}$ düzlem üzerinde yatan izotropik ve izotropik olmayan vektörler

$Ax + By + Cz + D = 0$ Galile düzlemini gerer. Dolayısıyla izotropik vektörler lineer bağımlıdır.

Örnek 3.4

$A=(1,-1,2), B=(2,0,1), C=(3,1,1)$ noktaları verilsin ve A, B, C noktalarından geçen düzlem üzerinde temsili bir nokta $X=(x,y,z)$ olsun. $Ax+By+Cz+D=0$ genel düzlem denkleminde A, B, C noktaları yerine yazılırsa

$$A-B+2C+D=0$$

$$2A+C+D=0$$

$$3A+B+C+D=0$$

denklemleri elde edilir. Buradan $x-y-2=0$ elde ederiz.

Bir diğer yolla,

$$\mathbf{AB}=(1,1,-1),$$

$$\mathbf{AC}=(2,2,-1)$$

olmak üzere

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$$

bulunur. Buradan normali $\mathbf{n}=(0,-1,0)$ düzlem denklemimiz $Ax-y+D=0$ ve $A=(1,-1,2)$ ve $B=(2,0,1)$ noktası düzlem denklemini sağlayacağından $A-(-1)+D=0, 2A+D=0$ ve $A=1, D=-2$ bulunur. Böylece $x-y-2=0$ elde edilir.

Örnek 3.5

$P=(1,2,3)$ noktasından geçen ve normali $\mathbf{n}=(0,1,2)$ olan Galile düzlemi için

$\mathbf{n}=(0,1,2)$ olan olduğundan

$$Ax+y+2z+D=0...(H)$$

olur. $P \in (H)$ için $A.1+1.2+2.3+D=0...(H)$ olduğundan $A+D=-8$ bulunur.

Sonuç 3.6

A noktasından geçen ve normali $\mathbf{n} = (0, B, C)$ olan düzlem G^3 Galile Uzayında tek değildir.

3.1.3 Bir Noktanın Uzaydaki Bir Galile Düzlemi Üzerine Dik İzdüşümü

Uzayda $P = (p_1, p_2, p_3)$ noktasının $Ax + By + Cz + D = 0 \dots (H)$ ile verilen düzlemin üzerine dik izdüşümü $S = (s_1, s_2, s_3)$ olsun. $\mathbf{PS} = \lambda \mathbf{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ veya $\mathbf{s} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}$ yazılabilir. $X = (x, y, z)$ temsili bir nokta olmak üzere $Ax + By + Cz + D = 0 \dots (H)$ yazılabilir. P noktasının dik izdüşümü olan S noktası düzlem üzerinde olduğundan S noktası bu düzlem denklemini sağlar. O halde $As_1 + Bs_2 + Cs_3 + D = 0$ veya $A(p_1 + \lambda A) + B(p_2 + \lambda B) + C(p_3 + \lambda C) + D = 0$ bulunur. Buradan

$$\lambda = -\frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{B^2 + C^2}$$

Sonuç olarak,

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} - \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_\delta} \mathbf{n}$$

elde edilir.

3.1.4 Bir Noktanın Uzaydaki Bir Öklid Düzlemi Üzerine Dik İzdüşümü

Uzayda $P = (p_1, p_2, p_3)$ noktasının $Ax + D = 0 \dots (H)$ ile verilen düzlemin üzerine izdüşümü S olsun. $\mathbf{PS} = \lambda \mathbf{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ veya $\mathbf{s} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}$ yazılabilir. P noktasının izdüşümü olan S noktası düzlem üzerinde olduğundan S noktası bu düzlem denklemini sağlar. O halde, $\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle_G + D = 0$ veya $\langle \mathbf{n}, (\mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}) \rangle_G + D = 0$ bulunur. Buradan

$$\lambda = -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle_G + D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_G} = -\frac{Ap_1 + D}{A^2}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mathbf{p} - \frac{Ap_1 + D}{A^2} (A, 0, 0) \\
&= \mathbf{p} - \left(p_1 + \frac{D}{A}, 0, 0 \right) \\
&= \left(-\frac{D}{A}, p_2, p_3 \right)
\end{aligned}$$

veya

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} - \frac{Ap_1 + D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_G} \mathbf{n}$$

elde edilir.

Örnek 3.7

$P = (1, 2, 3)$ noktası ve $2y + z + 3 = 0$ Galile düzlemi verilsin. $P = (1, 2, 3)$ noktasından geçen doğrultmanı $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$ olan doğrunun denklemi $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} = t$ elde edilir. $P = (1, 2, 3)$ noktasının düzlem üzerine dik izdüşümü $S = (x_0, y_0, z_0)$ olsun. $S \in d$ ve $S \in (H)$ olduğundan $x_0 = 1, y_0 = 2 + 2t, z_0 = 3 + t$ ve $2(2 + 2t) + (3 + t) + 3 = 0$ ve $t = -2$ bulunur. Buradan $S = (1, -2, 1)$ elde edilir.

Bir diğer yolla,

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mathbf{p} - \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_\delta} \mathbf{n} \\
&= (1, 2, 3) - \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} (0, 2, 1) \\
&= (1, 2, 3) - 2(0, 2, 1) \\
&= (1, -2, 1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.8

$P = (1, 2, 3)$ noktası ve $x + 2y + z + 2 = 0$ Galile düzlemi verilsin. $P = (1, 2, 3)$ noktasından geçen doğrultmanı $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$ olan doğrunun denklemi $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} = t$ elde edilir.

$P=(1,2,3)$ noktasının düzlem üzerine düzlemin normali boyunca dik izdüşümü $S=(x_0,y_0,z_0)$ olsun. $S \in d$ ve $S \in (H)$ olduğundan $x_0=1, y_0=2+2t, z_0=3+t$ ve $1+2(2+2t)+(3+t)+2=0$ ve $t=-2$ bulunur. Buradan $P=(1,2,3)$ noktasının $x+2y+z+2=0$ Galile düzlemi üzerine dik izdüşümü $S=(1,-2,1)$ elde edilir.

Örnek 3.9

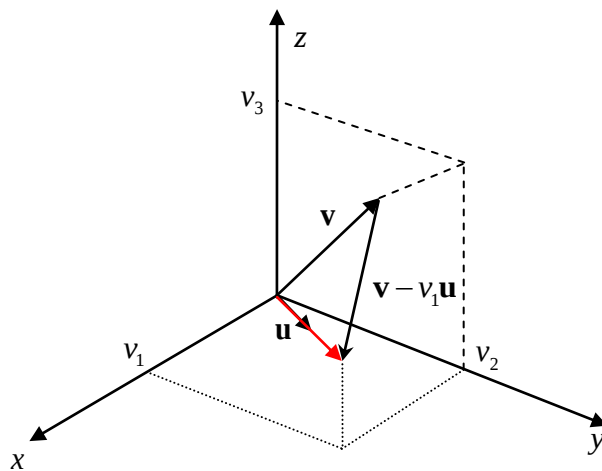
G^3 Galile uzayında $P=(1,2,3)$ noktasının $x+2=0$ Öklid düzlemine dik izdüşümünü

$x=-2$ olduğundan $S=(-2,2,3)$ bulunur.

3.2 Galile Uzayında Lineer Cebir

3.2.1 İç Çarpımın Geometrik Yorumu

$\mathbf{u}$ birim vektör ve $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ herhangi bir vektör olmak üzere $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = v_1 = \|\mathbf{v}_1\mathbf{u}\|_G$ yazılabilir. Dolayısıyla iki vektörün iç çarpımı, birim olmayan vektörün birim vektör üzerine Galile anlamında dik izdüşüm vektörünün boyunu verir. Burada $\mathbf{v}-v_1\mathbf{u}$ izotropik olmayan vektör olup $\mathbf{u}$ vektörüne Galile anlamda diktir.



Şekil 3. 1 İç çarpımın geometrik yorumu

3.2.2 Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu

$\mathbf{x}=(x_1,y_1,z_1), \mathbf{y}=(x_2,y_2,z_2) \in G^3$ iki izotropik olmayan vektörü verilsin. Bu durumda

$$\|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta = \sqrt{(z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}$$

ve

$$\mathbf{x} = \left(1, \frac{y_1}{x_1}, \frac{z_1}{x_1}\right), \mathbf{y} = \left(1, \frac{y_2}{x_2}, \frac{z_2}{x_2}\right) \text{ vektörleri arasındaki açı}$$

$$\alpha = m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$= \sin_g \alpha = \frac{\sqrt{(z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}}{|x_1| |x_2|}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta &= |x_1| |x_2| \frac{\sqrt{(z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}}{|x_1| |x_2|} \\ &= \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y}\|_G \sin_g \alpha \end{aligned}$$

yazılabilir.

3.2.3 Galile Uzayında Paralelkenarın Alanı

- i. $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2) \in G^3$ izotropik olmayan vektörler arasındaki açı α olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= (\text{Taban})(\text{Yükseklik}) \\ &= (\|\mathbf{x}\|_G)(\|\mathbf{y}\|_G \sin_g \alpha) \\ &= \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y}\|_G \sin_g \alpha \\ &= \|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta \end{aligned}$$

elde edilir.

- ii. $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1)$ izotropik olmayan, $\mathbf{y} = (0, y_2, z_2)$ izotropik vektörler arasındaki açı α olsun.

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= (\text{Taban})(\text{Yükseklik}) \\ &= (\|\mathbf{x}\|_G)(\|\mathbf{y}\|_\delta) \\ &= \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y}\|_\delta \end{aligned}$$

elde edilir.

- iii. $\mathbf{x} = (0, y_1, z_1), \mathbf{y} = (0, y_2, z_2)$ izotropik vektörler arasındaki açı α olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= (\text{Taban})(\text{Yükseklik}) \\ &= (\|\mathbf{x}\|_\delta)(\|\mathbf{y}\|_\delta \sin_e \alpha) \\ &= \|\mathbf{x} \times_\delta \mathbf{y}\|_G \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ izotropik vektörleri $x = 0$ Öklid düzleminde yatar. Bu yüzden açılar Öklid açılar ve $\sin_e \alpha$ Öklid anlamında sinüs fonksiyonu olarak hesaplanır.

Sonuç olarak, Galile Uzayında vektörel çarpımın geometrik yorumu için iki yorum yapılabilir:

1. İki vektörün vektörel çarpımı bu iki vektöre dik olan yeni bir vektör oluşturur.
2. İki izotropik olmayan vektör tarafından kurulan paralelkenarın alanı iki vektörün vektörel çarpımının boyuna eşittir.

Özellikler

- 1) $\forall \mathbf{x} \in G^3$ için $\mathbf{x} \times_G \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- 2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^3$ için $\mathbf{x} \times_G \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times_G \mathbf{x}$,
- 3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^3$ için $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times_G \mathbf{z} = (\mathbf{x} \times_G \mathbf{z}) + (\mathbf{y} \times_G \mathbf{z})$,
- 4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^3$ için $\mathbf{z} \times_G (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{z} \times_G \mathbf{x}) + (\mathbf{z} \times_G \mathbf{y})$,
- 5) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \mathbf{x} \times_G \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times_G \lambda \mathbf{y})$,
- 6) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G^3$ için $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ lineer bağımlı ise $\mathbf{x} \times_G \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- 7) $\forall \mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2, z_2) \in G^3$ için $\|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta = \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y}\|_G \sin_g \alpha$
- 8) $\forall \mathbf{x} = (0, y_1, z_1), \mathbf{y} = (0, y_2, z_2) \in G^3$ için $\|\mathbf{x} \times_\delta \mathbf{y}\|_G = \|\mathbf{x}\|_\delta \|\mathbf{y}\|_\delta \sin_e \alpha$
- 9) $\forall \mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{y} = (0, y_2, z_2) \in G^3$ için $\|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta = \|\mathbf{x}\|_\delta \|\mathbf{y}\|_\delta$.

3.2.4 Galile Uzayında Üç Vektör Üzerine Kurulan Paralel yüzünün Hacmi

Bilindiği gibi Hacim, Taban Alan ile Yüksekliğin çarpımı ile bulunur yani $Hacim = (Taban Alan)(Yükseklik)$

ile hesaplanır. Ancak Galile Uzayında taban alanın bulunduğu düzleme göre hesabı değişeceğinden aşağıdaki durumlar incelenmelidir:

- i. $\mathbf{x}$ izotropik olmayan $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ izotropik vektörler olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 Hacim &= (Taban Alan)(Yükseklik) \\
 &= (\|\mathbf{y} \times_\delta \mathbf{z}\|_G)(\|\mathbf{x}\|_G) \\
 &= \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y} \times_\delta \mathbf{z}\|_G
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

- ii. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ izotropik olmayan ve $\mathbf{z}$ izotropik vektör olsun. Bu durumda $\mathbf{z}$ izotropik vektörü $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri tarafından kurulan paralelkenara diktir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \text{Hacim} &= (\text{Taban Alan})(\text{Yükseklik}) \\ &= \|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta \|\mathbf{z}\|_\delta \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

- iii. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ izotropik olmayan vektörler olsun. Bu durumda $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri tarafından kurulan paralelkenarın alanı $\|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta$ ile hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned} \text{Hacim} &= (\text{Taban Alan})(\text{Yükseklik}) \\ &= (\|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta)(\text{Yükseklik}) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada *Yükseklik*, $\mathbf{z}$ vektörünün uç noktasından $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ tarafından kurulan paralelkenara olan dik uzaklık (yani $\mathbf{z}$ vektörünün uç noktasının $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin gerdiği düzleme dik uzaklığı) ile hesaplanır.

3.2.5 Karma Çarpım

Galile Uzayında üç vektörün karma çarpımı için temelde 4 durum söz konusudur:

1. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ izotropik vektörler olsun. Yani, $\mathbf{x} = (0, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (0, y_2, y_3)$ ve $\mathbf{z} = (0, z_2, z_3)$ ise

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} \times_\delta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G &= 0 \\ &= \text{Üç vektör üzerine kurulan paralel yüzünün hacimi} \end{aligned}$$

bulunur.

2. $\mathbf{x}$ izotropik olmayan ve $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ izotropik vektörler olsun. Yani, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (0, y_2, y_3)$ ve $\mathbf{z} = (0, z_2, z_3)$ ise

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{y} \times_\delta \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle_G| &= |x_1(z_2y_3 - y_2z_3)| \\ &= \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y} \times_\delta \mathbf{z}\|_G \\ &= \text{Üç vektör üzerine kurulan paralel yüzünün hacimi} \end{aligned}$$

bulunur.

3. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ izotropik olmayan vektörler, yani $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda,

$$\langle \mathbf{x} \times_G \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G = 0$$

$\neq$ Üç vektör üzerine kurulan paralel yüzünün hacmi

bulunur.

4. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ izotropik olmayan ve $\mathbf{z}$ izotropik vektörler olsun. Yani, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\mathbf{z} = (0, z_2, z_3)$ ise

$$\langle \mathbf{x} \times_G \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_\delta = x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 + x_1 y_2 z_3 - x_2 y_1 z_3$$

$$= \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$\neq$ Üç vektör üzerine kurulan paralel yüzünün hacmi

Örnek 3.10

$\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{y} = (0, 5, 4)$ ve $\mathbf{z} = (0, 3, 2)$ olsun. Bu durumda bu üç vektör için karma çarpım

$\langle \mathbf{y} \times_\delta \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle_G = -12$ elde edilir. Bu üç vektörün oluşturduğu paralel üç yüzünün hacmi için

$\mathbf{x} \times_\delta \mathbf{y} = (-2, 0, 0)$ ve

$$Hacim = \|\mathbf{x}\|_G \|\mathbf{y} \times_\delta \mathbf{z}\|_G$$

$$= 1.12$$

$$= 12$$

elde edilir.

Örnek 3.11

$\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{y} = (1, 1, 0)$ ve $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$ olsun. Bu durumda bu üç vektör için karma çarpım

$\langle \mathbf{x} \times_G \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0$ elde edilir. Fakat bu üç vektörün oluşturduğu paralel üç yüzünün hacmi için

$\mathbf{x} \times_G \mathbf{y} = (0, 0, 1)$ ve $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$ olduğundan

$$Hacim = (\text{Taban Alan})(\text{Yükseklik})$$

$$= 1.1$$

$$= 1$$

elde edilir.

Örnek 3.12

$\mathbf{x}=(1,2,3), \mathbf{y}=(1,5,4)$ ve $\mathbf{z}=(0,3,2)$ olsun. Bu durumda bu üç vektör için karma çarpım $\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}=(0,-1,3)$ ve $\langle \mathbf{x} \times_G \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 3$ elde edilir. Fakat bu üç vektörün oluşturduğu paralel üç yüzünün hacmi için $\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}=(0,-1,3), \mathbf{z}=(0,3,2)$ ve

$$\begin{aligned} \text{Hacim} &= \|\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}\|_\delta \|\mathbf{z}\|_\delta \\ &= \sqrt{130} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.13

Galile Uzayında iki izotropik vektör ve bir izotropik olmayan vektörün karma çarpımı bu üç vektör üzerine kurulan paralel üç yüzünün hacimini verir.

3.2.6 Üç vektörün Vektörel Çarpımı

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^3$ izotropik olmayan vektörlerin vektörel çarpımı $(\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}) \times_G \mathbf{z}$ olmak üzere $(\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}) \times_G \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G \mathbf{x}$,

veya

$$\mathbf{x} \times_G (\mathbf{y} \times_G \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G \mathbf{z},$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse $(\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}) \times_G \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \times_G (\mathbf{y} \times_G \mathbf{z})$ olup vektörel çarpım işleminde birleşme özelliği yoktur.

Örnek 3.14

$\mathbf{x}=(1,1,0), \mathbf{y}=(0,1,2), \mathbf{z}=(1,1,1)$ ise

$\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}=(0,-2,1)$ olmak üzere $(\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}) \times_G \mathbf{z}=(0,1,2)$ bulunur. Bir başka yolla,

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G = 1, \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G = 0$ olmak üzere $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_G \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_G \mathbf{x} = 1.\mathbf{y} + 0.\mathbf{x} = (0,1,2)$ elde edilir.

3.2.7 Jacobi Özdeşliği

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in G^3$ izotropik olmayan vektörler için $(\mathbf{x} \times_G \mathbf{y}) \times_G \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times_G \mathbf{z}) \times_G \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times_G \mathbf{x}) \times_G \mathbf{y} = \mathbf{0}$ eşitliğine Jacobi özdeşliği denir.

3.2.8 Galile Uzayında Ortonormal Baz Vektörleri

Tanım 3.15

Galile Uzayında $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ vektörleri verilsin. Eğer

$$\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle_G = 1, \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \rangle_\delta = 1, \langle \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_3 \rangle_\delta = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle_G = 0, \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3 \rangle_G = 0, \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \rangle_\delta = 0$$

sağlanıyorsa $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ vektörlerine *ortonormal baz vektörleri* denir. Galile Uzayında $S = \{\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{g}_3 = (0, 0, 1)\}$ vektörlerine *standart ortonormal baz vektörleri* denir.

3.2.9 Galile Uzayında Özel Matrisler

Tanım 3.16

$A: G^3 \rightarrow G^3$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall X \in G^3$ için $\langle A(X), A(X) \rangle = \langle X, X \rangle$ sağlanıyor ise A lineer dönüşümüne lineer ortogonal dönüşüm denir. A lineer dönüşümüne karşılık gelen matrise ise *ortogonal matris* denir.

Tanım 3.17

$A: G^3 \rightarrow G^3$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall X, Y \in G^3$ için $\langle A(X), Y \rangle = \langle X, A(Y) \rangle$ sağlanıyor ise A lineer dönüşümüne *simetrik dönüşüm* denir. A simetrik dönüşümüne karşılık gelen matrise ise *simetrik matris* denir.

Tanım 3.18

$A: G^3 \rightarrow G^3$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall X, Y \in G^3$ için $\langle A(X), Y \rangle = -\langle X, A(Y) \rangle$ sağlanıyor ise A lineer dönüşümüne antisimetrik dönüşüm denir. A antisimetrik dönüşümüne karşılık gelen matrise ise antisimetrik matris denir.

3.2.10 Galile Uzayında Bazdan Baza Geçiş Matrisi

Galile Uzayında $S = \{\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{g}_3 = (0, 0, 1)\}$ standart ortonormal baz vektörleri ve $S' = \{\mathbf{g}'_1 = (1, a, b), \mathbf{g}'_2 = (0, c, d), \mathbf{g}'_3 = (0, e, f)\}$ ortonormal baz vektörleri verilsin.

$\mathbf{g}'_i \in G^3, i=1, 2, 3$ için $\mathbf{g}'_i \in sp\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ olur. Buradan

$$\begin{cases} \mathbf{g}'_1 = 1.\mathbf{g}_1 + a.\mathbf{g}_2 + b.\mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}'_2 = 0.\mathbf{g}_1 + c.\mathbf{g}_2 + d.\mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}'_3 = 0.\mathbf{g}_1 + e.\mathbf{g}_2 + f.\mathbf{g}_3 \end{cases}$$

bulunur. Böylece matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{g}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $G' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{g}'_3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix}$ ve $G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $G' = PG$ olur.

Burada $\det P = 1$ olduğundan P matrisinin tersi mevcuttur. Burada $\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ matrisi $\{\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$

ortonormal olmasından dolayı ortogondur. Ayrıca $A: G^3 \rightarrow G^3, A(X) = P^T X$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $\forall X \in G^3$ için

$$A(X) = P^T X$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= (x_1, ax_1 + cx_2 + ex_3, bx_1 + dx_2 + fx_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\langle A(X), A(X) \rangle_G = \langle X, X \rangle_G$ ve $\langle A(X), A(X) \rangle_\delta = \langle X, X \rangle_\delta$ sağlanır.

Böylece A lineer dönüşümüne karşılık gelen P^T matrisi Galile anlamda ortogonal matristir.

Şimdi 3–boyutlu Galile Uzayında herhangi iki ortonormal baz vektörleri için geçiş matrisini bulalım:

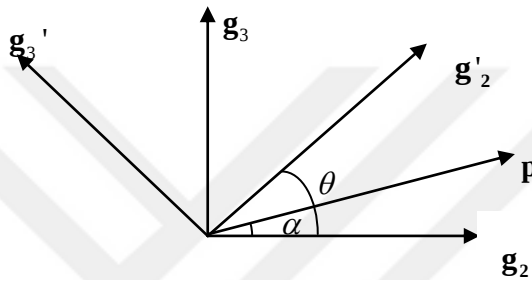
$S = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, ve $S' = \{\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$ ortonormal baz vektörleri verilsin. Burada

$$\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle_G = 1, \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \rangle_\delta = 1, \langle \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_3 \rangle_\delta = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle_G = 0, \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3 \rangle_G = 0, \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \rangle_\delta = 0$$

ve

$$\langle \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_1 \rangle_G = 1, \langle \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_2 \rangle_\delta = 1, \langle \mathbf{g}'_3, \mathbf{g}'_3 \rangle_\delta = 1 \text{ ve } \langle \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2 \rangle_G = 0, \langle \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_3 \rangle_G = 0, \langle \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3 \rangle_\delta = 0$$

dır.



Şekil 3.2 $x = 0$ Öklid düzlemindeki baz vektörleri

Eğer $\mathbf{g}'_2$ ve $\mathbf{g}_2$ vektörleri arasındaki açiya θ denilirse

$$\begin{cases} \mathbf{g}'_2 = \cos \theta \mathbf{g}_2 + \sin \theta \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}'_3 = -\sin \theta \mathbf{g}_2 + \cos \theta \mathbf{g}_3 \end{cases}$$

bulunur. Ayrıca $\mathbf{g}'_1 \in sp\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ olduğundan $\mathbf{g}'_1 = 1.\mathbf{g}_1 + a.\mathbf{g}_2 + b.\mathbf{g}_3$ olacak şekilde

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ vardır. Böylece } G' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{g}'_3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ve } G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} \text{ dersek, } G' = PG$$

olur. Ek olarak, $\mathbf{p} = \mathbf{g}_1 \mathbf{g}'_1$ ve $\|\mathbf{p}\|_\delta = r$ dersek Şekil 3.2 den de görüleceği gibi $\langle \mathbf{p}, \mathbf{g}_2 \rangle = r \cos \alpha$ bulunur. Böylece,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & r \cos \alpha & r \sin \alpha \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ve

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta & -r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç 3.19

Galile ortonormal bazlar arası geçiş matrisinin transpozu Galile anlamında ortogonal matristir.

Örnek 3.20

Galile Uzayında $S = \left\{ \mathbf{g}_1 = (1,1,1), \mathbf{g}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{g}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ ortonormal baz

vektörleri ve $S' = \left\{ \mathbf{g}'_1 = (1,2,3), \mathbf{g}'_2 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \mathbf{g}'_3 = \left(0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right) \right\}$ ortonormal baz vektörleri

verilsin. $\mathbf{p} = \mathbf{g}'_1 - \mathbf{g}_1 = (0,1,2)$ olduğundan $r = \|\mathbf{p}\|_s = \sqrt{5}$ bulunur. Buradan

$\cos \alpha = \left\langle \frac{\mathbf{p}}{r}, \mathbf{g}_2 \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}$ olup $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ elde edilir. Ayrıca $\cos \theta = \langle \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}_2 \rangle = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ ve

$\sin \theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ elde edilir. Böylece geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

bulunur.

3.3 Galile Uzakında Bir Yüzeyin Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü

3.3.1 Admissible Yüzeyin Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü

G^3 Galile Uzakında C^3 sınıfından bir Ψ yüzeyi $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \neq 0, \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \neq 0$ olmak üzere

$\Psi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, $f, g, h \in C^3, u, v \in \mathbb{R}$ parametrik denklemi ile verilsin.

G^3 Galile Uzakında bir admissible yüzeyin birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\Psi_u \times_G \Psi_v}{\|\Psi_u \times_G \Psi_v\|_\delta}$$

izotropik vektörü ile verilir, [58].

Tanım 3.21

G^3 Galile Uzakında bir admissible Ψ yüzey parçasının bir X noktasındaki *skaler alan elementi* dF_Ψ ile gösterilir ve

$$dF_\Psi = \|\Psi_u \times_G \Psi_v\|_\delta du \wedge dv$$

veya $W = \|\Psi_u \times_G \Psi_v\|_\delta$ olmak üzere

$$dF_\Psi = W du \wedge dv$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.22

G^3 Galile Uzakında bir admissible Ψ yüzey parçasının u, v parametrelerinin bir alt bölgesi Γ olsun. Bu durumda Γ bölgesi üzerinde Ψ yüzey parçasının skaler alanı

$$F_\Psi = \iint_\Gamma dF_\Psi \text{ ile tanımlanır.}$$

Tanım 3.23

Ψ admissible yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için

$$d\mathbf{F}_\Psi = \frac{1}{2} d\Psi \hat{\times}_G d\Psi$$

şeklinde tanımlanan vektöre, Ψ admissible yüzeyinin X noktasındaki *vektörel alan elementi* denir. Burada " $\hat{\times}_G$ " işlemi vektörler arasındaki vektörel çarpımı ve 1–formlar arasındaki dış çarpımı göstermektedir.

Tanım 3.24

Γ bölgesi üzerinde tanımlı bir Ψ admissible yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için alan vektörü $\mathbf{F}_\Psi$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{F}_\Psi = \iint_{\Gamma} d\mathbf{F}_\Psi$$

ile tanımlanır.

Özellikler

1) $d\mathbf{F}_\Psi$ vektörel alan elementi, X noktasında Ψ admissible yüzeyinin normali doğrultusundadır. Yani,

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_\Psi &= \frac{1}{2} d\Psi \hat{\times}_G d\Psi \\ &= \frac{1}{2} (\Psi_u du + \Psi_v dv) \hat{\times}_G (\Psi_u du + \Psi_v dv) \\ &= \Psi_u \times_G \Psi_v du \wedge dv \\ &= \mathbf{n} dF_\Psi \end{aligned}$$

yazılabilir.

2) $d\mathbf{F}_\Psi$ vektörel alan elementinin normu, X noktasında Ψ admissible yüzeyinin skaler alan elementine eşittir. Yani,

$$\|d\mathbf{F}_\Psi\|_\delta = \|\mathbf{n} dF_\Psi\|_\delta = dF_\Psi$$

dir.

3.3.2 Öklid Yüzey Parçasının Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü

G^3 Galile Uzayında bir Öklid düzlemindeki Ψ yüzeyi

$$\Psi(u, v) = (c, g(u, v), h(u, v)), g, h \in C^3, u, v \in \mathbb{R}, c = \text{sabit}$$

parametrik denklemi ile verilsin. Bu durumda, Ψ yüzeyi $x = c$ Öklid düzleminde bir düzlem parçasıdır. G^3 Galile Uzayında bir Öklid yüzeyinin birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\Psi_u \times_{\delta} \Psi_v}{\|\Psi_u \times_{\delta} \Psi_v\|_G} = (1, 0, 0)$$

olarak hesaplanır.

Tanım 3.25

G^3 Galile Uzayında bir Ψ Öklid yüzey parçasının bir X noktasındaki *skaler alan elementi* dF_{Ψ} ile gösterilir ve

$$dF_{\Psi} = \|\Psi_u \times_{\delta} \Psi_v\|_G du \wedge dv$$

veya $W = \|\Psi_u \times_{\delta} \Psi_v\|_G$ olmak üzere

$$dF_{\Psi} = W du \wedge dv$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.26

G^3 Galile Uzayında bir Ψ Öklid yüzey parçasının u, v parametrelerinin bir alt bölgesi Γ olsun. Bu durumda Γ bölgesi üzerinde Ψ yüzey parçasının skaler alanı

$$F_{\Psi} = \iint_{\Gamma} dF_{\Psi} \text{ ile tanımlanır.}$$

Tanım 3.27

G^3 Galile Uzayında Ψ Öklid yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için

$$d\mathbf{F}_{\Psi} = \frac{1}{2} d\Psi \hat{\times}_{\delta} d\Psi$$

şeklinde tanımlanan vektöre, Ψ Öklid yüzeyinin X noktasındaki *vektörel alan elementi* denir. Burada " $\hat{\times}_{\delta}$ " işlemi vektörler arasındaki δ -vektörel çarpımı ve 1-formlar arasındaki dış çarpımı göstermektedir.

Tanım 3.28

G^3 Galile Uzayında Γ bölgesi üzerinde tanımlı bir Ψ Öklid yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için alan vektörü $\mathbf{F}_\Psi$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{F}_\Psi = \iint_{\Gamma} d\mathbf{F}_\Psi$$

ile tanımlanır.

Özellikler

G^3 Galile Uzayındaki Öklid yüzey parçalarının;

- 1) $d\mathbf{F}_\Psi$ vektörel alan elementi, X noktasında Ψ Öklid yüzeyinin normali doğrultusundadır.
- 2) $d\mathbf{F}_\Psi$ vektörel alan elementinin normu, X noktasında Ψ Öklid yüzeyinin skaler alan elementine eşittir.

Örnek 3.29

$\Gamma = \left\{ 0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < \frac{\pi}{2} \right\}$ bölgesi için $\Psi(u, v) = (u + v, \cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u)$, admissible yüzeyi verilsin.

$$\Psi_u = (1, -\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u),$$

$$\Psi_v = (1, -\sin u, \cos u)$$

elde edilir. Buradan

$$\Psi_u \times_G \Psi_v = (0, -v \sin u, v \cos u)$$

olduğundan $\|\Psi_u \times_G \Psi_v\|_{\delta} = v$ bulunur. Ayrıca yüzeyin normali $\mathbf{n} = (0, -\sin u, \cos u)$ elde edilir. Böylece $d\mathbf{F}_\Psi$ skaler alan elementi $dF_\Psi = v du dv$ ve admissible yüzeyin yüzey alanı

$$F_\Psi = \iint_{\Gamma} dF_\Psi = \iint_{\Gamma} v du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du dv = \frac{\pi^3}{16}$$

elde edilir. Ayrıca Γ bölgesi için admissible yüzeyin bir X noktasındaki vektörel alan elementi

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_\Psi &= \Psi_u \times \Psi_v du \wedge dv \\
&= (0, -v \sin u, v \cos u) du \wedge dv \\
&= \mathbf{n} dF_\Psi
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Γ bölgesi için admissible yüzeyin bir X noktasındaki vektörel alan vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\Psi &= \iint_{\Gamma} d\mathbf{F}_\Psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, -v \sin u, v \cos u) du \wedge dv \\
&= \left(0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -v \sin u du dv, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \cos u du dv \right) \\
&= \left(0, -\frac{1}{8} \pi^2, \frac{1}{8} \pi^2 \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

3.4 Admissible Yüzeyin Dik İzdüşüm Alanı

3.4.1 Admissible Yüzeyin Bir Galile Düzlemine İzdüşüm Alanı

Şimdi Ψ admissible yüzey parçasının birim normal vektörü $\mathbf{e}$ olan bir G^2 Galile düzlemine dik izdüşümünü inceleyelim:

Ψ admissible yüzey parçasının birim normal vektörü $\mathbf{e}$ olan bir $Ax + By + Cz + D = 0$ Galile düzlemine dik izdüşümü Ψ^n olsun. Ψ admissible yüzey parçasının bir X noktasındaki vektörel alan elementi $d\mathbf{F}_\Psi$ ve Ψ^n yüzey parçasının vektörel alan elementi $d\mathbf{F}_{\Psi^n}$ ile gösterelim ve X noktasının birim normal vektörü $\mathbf{e}$ olan bir G^2 Galile düzlemine (izotropik düzlemine) dik izdüşümü X^n olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_{\Psi^n} &= \frac{1}{2} d\mathbf{x}^n \hat{\times}_G d\mathbf{x}^n \\
&= \frac{1}{2} \left(d\mathbf{x} - (Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3) \mathbf{e} \right) \hat{\times}_G \left(d\mathbf{x} - (Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3) \mathbf{e} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{1}{2} d\mathbf{x} \hat{\times}_G d\mathbf{x} = dx_3 dx_1 \mathbf{g}_2 + dx_1 dx_2 \mathbf{g}_3,$$

$$\frac{1}{2} d\mathbf{x} \hat{\times}_G (Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3) \mathbf{e} = \frac{1}{2} \left[(-BCdx_1 dx_2 - C^2 dx_1 dx_3) \mathbf{g}_2 + (-B^2 dx_2 dx_1 - BCdx_3 dx_1) \mathbf{g}_3 \right],$$

$$\frac{1}{2} (Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3) \mathbf{e} \hat{\times}_G d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \left[(-BCdx_1 dx_2 - C^2 dx_1 dx_3) \mathbf{g}_2 + (-B^2 dx_2 dx_1 - BCdx_3 dx_1) \mathbf{g}_3 \right],$$

ve

$$\frac{1}{2} (Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3) \mathbf{e} \hat{\times}_G (Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3) \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

olarak hesaplanır. Buradan $B^2 + C^2 = 1$ olduğu göz önünde bulundurulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $d\mathbf{F}_{\Psi^n} = \langle d\mathbf{F}_{\Psi}, \mathbf{e} \rangle_{\delta} \mathbf{e}$ olduğu kolaylıkla görülür. $d\mathbf{F}_{\Psi^n}$ vektörel alan elementinin normu skaler alan elementine eşit olduğundan $F_{\Psi^n} = |\langle \mathbf{F}_{\Psi}, \mathbf{e} \rangle_{\delta}|$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 3.30

Ψ admissible yüzey parçasının birim normal vektörü $\mathbf{e}$ olan bir Galile düzlemine dik izdüşümü Ψ^n olsun. Ψ admissible yüzey parçasının bir X noktasındaki vektörel alan vektörü $\mathbf{F}_{\Psi}$ ve Ψ^n yüzey parçasının skaler alanı F_{Ψ^n} olmak üzere

$$F_{\Psi^n} = |\langle \mathbf{F}_{\Psi}, \mathbf{e} \rangle_{\delta}|$$

ile hesaplanır.

3.4.2 Admissible Yüzeyin Bir Öklid Düzlemine İzdüşüm Alanı

Şimdi Ψ admissible yüzey parçasının birim normal vektörlü bir Öklid düzlemine dik izdüşümünü inceleyelim:

Ψ admissible yüzey parçasının birim normal vektörlü bir Öklid düzlemine dik izdüşümü Ψ^n olsun. Ψ^n yüzey parçasının vektörel alan elementi $d\mathbf{F}_{\Psi^n}$ ile gösterelim ve X noktasının birim normal vektörlü bir Öklid düzlemi üzerine dik izdüşümü X^n olsun.

Böylece

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_{\Psi_X^n} &= \frac{1}{2} d\Psi^n \times_{\delta} d\Psi^n \\
&= \frac{1}{2} (\Psi_u^n du + \Psi_v^n dv) \times_{\delta} (\Psi_u^n du + \Psi_v^n dv) \\
&= \Psi_u^n \times_{\delta} \Psi_v^n du \wedge dv
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_{\Psi_X^n} &= \frac{\Psi_u^n \times_{\delta} \Psi_v^n}{\|\Psi_u^n \times_{\delta} \Psi_v^n\|_G} \|\Psi_u^n \times_{\delta} \Psi_v^n\|_G du \wedge dv \\
&= \mathbf{n}_{\Psi_X^n} dF_{\Psi_X^n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 3.31

Ψ admissible yüzey parçasının birim normal vektörlü bir Öklid düzlemine dik izdüşümü Ψ^n olsun. Ψ^n yüzey parçasının bir X noktasındaki vektörel alan vektörü $\mathbf{F}_{\Psi_X^n}$ ve Ψ^n yüzey parçasının skaler alanı F_{Ψ^n} olmak üzere

$$F_{\Psi_X^n} = \|\mathbf{F}_{\Psi_X^n}\|_G$$

ile hesaplanır.

Örnek 3.32

$\Gamma = \left\{ 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \right\}$ olmak üzere $\Psi(u, v) = (u + v, \cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u)$ yüzeyi

verilsin. xOy düzleminin birim normal vektörü $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ dir. Böylece $d\mathbf{F}_{\Psi^n} = \langle d\mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle_{\delta} \mathbf{e}$ yani,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_{\Psi^n} &= \langle d\mathbf{F}_{\Psi}, \mathbf{e} \rangle_{\delta} \mathbf{e} \\
&= \langle (0, -v \sin u du \wedge dv, v \cos u du \wedge dv), (0, 0, 1) \rangle_{\delta} \mathbf{e} \\
&= v \cos u du \wedge dv
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\Psi^n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \cos u \, du \wedge dv \mathbf{e} \\
&= \frac{1}{8} \pi^2 \mathbf{e} \\
&= \left(0, 0, \frac{1}{8} \pi^2 \right)
\end{aligned}$$

hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned}
F_{\Psi^n} &= \left| \langle \mathbf{F}_{\Psi^n}, \mathbf{e} \rangle_{\delta} \right| \\
&= \frac{1}{8} \pi^2
\end{aligned}$$

bulunur.

yOz düzleminin birim normal vektörü $\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0)$ dir. Böylece $d\mathbf{F}_{\Psi^n} = \Psi_u^n \times_{\delta} \Psi_v^n \, du \, dv$ yani,

$$\Psi_u^n = (0, -\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u),$$

$$\Psi_v^n = (0, -\sin u, \cos u)$$

olmak üzere

$$d\mathbf{F}_{\Psi^n} = (-v, 0, 0) \, du \, dv$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\Psi^n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-v \, du \, dv, 0, 0) \\
&= \left(\frac{1}{16} \pi^3, 0, 0 \right)
\end{aligned}$$

hesaplanır. Böylece skaler alan

$$F_{\Psi^n} = \frac{1}{16} \pi^3$$

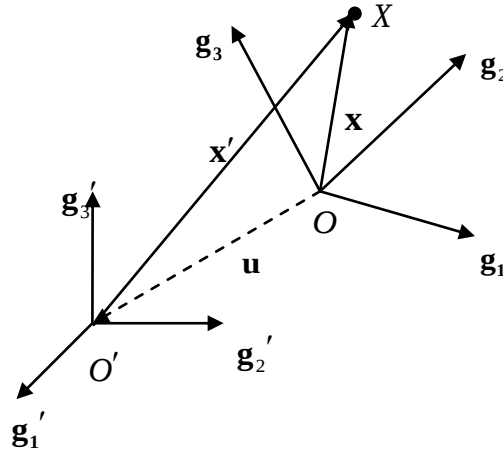
şeklinde elde edilir.

GALİLE UZAYINDA HAREKET

Tezimizin bu orijinal bölümünde, G^3 Galile Uzayında Galile Uzay hareketleri çalışılmış ve Galile Uzay Hareketleri altında Klasik Holditch Teoreminin hacimler için elde edilen uzaysal genellemeleri elde edilmiştir. Ayrıca Galile Hareketleri altında oluşan yörünge yüzeylerin düzlemler üzerine izdüşüm alanları için Holditch Tipi Teoremler incelenmiştir.

4.1 Galile Uzayında Hareket**Tanım 4.1**

R ve R' üç boyutlu G^3 Galile Uzayları ve $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ ve $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$, sırasıyla, R ve R' uzaylarının ortonormal çatıları olsun. Kabul edelim ki, $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(t)$ yani $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ dik çatısı $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$ dik çatısına göre hareket etsin. Ayrıca $X \in R$ noktasının R ve R' uzaylarının dik koordinat sistemine göre konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x}'$ ve $\mathbf{x}$ ile verilsin.



Şekil 4. 1 Galile Uzayında Hareket

$$\mathbf{OO'} = \mathbf{u} = u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2 + u_3 \mathbf{g}_3$$

olmak üzere $X \in R$ noktası için

$$\mathbf{x'} = -\mathbf{u} + \mathbf{x}$$

denklemine *3-Boyutlu Galile uzay hareketinin vektörel denklemi* denir. Bu Galile uzay hareketi $H = R/R'$ ile veya kısaca H ile gösterilir. Burada, $H = R/R'$ hareketi esnasında $\mathbf{x'}$, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{u}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır ve $\mathbf{u}$ vektörüne $H = R/R'$ hareketinin *öteleme vektörü* denir. Bu durumda, R uzayının R' uzayına göre hareketi elde edilir. Ayrıca, R ve R' uzaylarına, sırasıyla, *hareketli* ve *sabit Galile uzayları* ve $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ ve $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$ çatılarına, sırasıyla, *hareketli* ve *sabit çatıları* denir. Burada, R ve R' uzayları aynı yönde yönlendirilmektedir.

4.2 Galile Hareketlerin Türev Denklemleri ve İntegrallenebilme Koşulları

Eğer $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ ve $\{\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$ ortonormal bazları matris formunda, sırasıyla,

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} \text{ ve } G' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{g}'_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilirse; A regüler matris olmak üzere

$$G = AG' \text{ ve } G' = A^{-1}G$$

sağlanır. Böylece her iki tarafın türevini alırsak ve G' sabit çatı olduğundan

$$dG = dAA^{-1}G$$

veya

$$dG = \Omega G$$

yazılabilir. Kabul edelim

$$\Omega = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{g}}_1 \\ \dot{\mathbf{g}}_2 \\ \dot{\mathbf{g}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_1 = a_{11}\mathbf{g}_1 + a_{12}\mathbf{g}_2 + a_{13}\mathbf{g}_3 \\ \dot{\mathbf{g}}_2 = a_{21}\mathbf{g}_1 + a_{22}\mathbf{g}_2 + a_{23}\mathbf{g}_3 \\ \dot{\mathbf{g}}_3 = a_{31}\mathbf{g}_1 + a_{32}\mathbf{g}_2 + a_{33}\mathbf{g}_3 \end{cases}$$

yazılabilir. Eğer bu son denklemlerin her biri, sırasıyla, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ile iç çarpılır ve $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$

ortonormal olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer bir ifadeyle,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Tanım 4.2

Ω matrisinin sıfırdan farklı bileşenleri ile tanımlanan

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{g}_1 + \omega_2 \mathbf{g}_2 + \omega_3 \mathbf{g}_3$$

vektörüne $H = R / R'$ hareketinin *dönme vektörü* adı verilir.

Özel olarak, $\omega_1 = 0$ ise bu durumda $H = R / R'$ Galile hareketi yalnızca kayma (shear) ve öteleme hareketlerinden oluşur.

Eğer Ω matrisi için verilen son eşitlik, $dG = \Omega G$ denkleminde kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{g}_1 \\ d\mathbf{g}_2 \\ d\mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{cases} d\mathbf{g}_1 = \omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2 \\ d\mathbf{g}_2 = -\omega_1 \mathbf{g}_3 \\ d\mathbf{g}_3 = \omega_1 \mathbf{g}_2 \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca $d\mathbf{g}_i, i=2,3$ için verilen bu denklem, $\boldsymbol{\omega}$ dönme vektörü kullanarak

$$\begin{cases} d\mathbf{g}_2 = -\omega_1 \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_2 \times_G \boldsymbol{\omega}, \\ d\mathbf{g}_3 = \omega_1 \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3 \times_G \boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Eğer

$$\begin{cases} d\mathbf{g}_1 = \omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2, \\ d\mathbf{g}_2 = -\omega_1 \mathbf{g}_3, \\ d\mathbf{g}_3 = \omega_1 \mathbf{g}_2, \end{cases}$$

denklemlerinin dış türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= d(d\mathbf{g}_1) \\ &= d(\omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2) \\ &= d\omega_2 \mathbf{g}_3 + \omega_2 \wedge d\mathbf{g}_3 - d\omega_3 \mathbf{g}_2 - \omega_3 \wedge d\mathbf{g}_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{cases} d\mathbf{g}_1 = \omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2, \\ d\mathbf{g}_2 = -\omega_1 \mathbf{g}_3, \\ d\mathbf{g}_3 = \omega_1 \mathbf{g}_2, \end{cases}$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_2 \mathbf{g}_3 + \omega_2 \wedge (\omega_1 \mathbf{g}_2) - d\omega_3 \mathbf{g}_2 - \omega_3 \wedge (-\omega_1 \mathbf{g}_3) \\ &= (-d\omega_3 - \omega_2 \wedge \omega_1) \mathbf{g}_2 + (d\omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_1) \mathbf{g}_3 \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ ortonormal vektör sistemi lineer bağımsız olduğundan

$$d\omega_2 = -\omega_3 \wedge \omega_1$$

$$d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= d(d\mathbf{g}_2) \\ &= d(-\omega_1 \mathbf{g}_3) \\ &= -d\omega_1 \mathbf{g}_3 - \omega_1 \wedge d\mathbf{g}_3 \\ &= -d\omega_1 \mathbf{g}_3 - \omega_1 \wedge (\omega_1 \mathbf{g}_2) \\ &= -d\omega_1 \mathbf{g}_3 \end{aligned}$$

böylece $d\omega_1 = 0$ bulunur. Bu durumda, $H = R/R'$ hareketinin dönme vektörünün bileşenleri için integrallenebilme koşulları

$$d\omega_1 = 0, d\omega_2 = -\omega_3 \wedge \omega_1, d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathbf{O}'\mathbf{O} = -\mathbf{u} = -u_1 \mathbf{g}_1 - u_2 \mathbf{g}_2 - u_3 \mathbf{g}_3$$

vektörünün diferansiyeli alınır ve türev denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} -d\mathbf{u} &= -du_1 \mathbf{g}_1 - du_2 \mathbf{g}_2 - du_3 \mathbf{g}_3 - u_1 \wedge d\mathbf{g}_1 - u_2 \wedge d\mathbf{g}_2 - u_3 \wedge d\mathbf{g}_3 \\ &= -du_1 \mathbf{g}_1 - du_2 \mathbf{g}_2 - du_3 \mathbf{g}_3 - u_1 \wedge (\omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2) - u_2 \wedge (-\omega_1 \mathbf{g}_3) - u_3 \wedge (\omega_1 \mathbf{g}_2) \\ &= -du_1 \mathbf{g}_1 + (-du_2 + u_1 \omega_3 - u_3 \omega_1) \mathbf{g}_2 + (-du_3 - u_1 \omega_2 + u_2 \omega_1) \mathbf{g}_3 \\ &= \sigma_1 \mathbf{g}_1 + \sigma_2 \mathbf{g}_2 + \sigma_3 \mathbf{g}_3 \end{aligned}$$

böylece

$$\sigma' = -d\mathbf{u} = \sigma_1 \mathbf{g}_1 + \sigma_2 \mathbf{g}_2 + \sigma_3 \mathbf{g}_3$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\sigma' = -d\mathbf{u} = \sigma_1 \mathbf{g}_1 + \sigma_2 \mathbf{g}_2 + \sigma_3 \mathbf{g}_3$$

denkleminin dış türevi alınır

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= d\sigma' \\
&= d\sigma_1 \mathbf{g}_1 + d\sigma_2 \mathbf{g}_2 + d\sigma_3 \mathbf{g}_3 + \sigma_1 \wedge d\mathbf{g}_1 + \sigma_2 \wedge d\mathbf{g}_2 + \sigma_3 \wedge d\mathbf{g}_3 \\
&= d\sigma_1 \mathbf{g}_1 + (d\sigma_2 - \sigma_1 \omega_3 + \sigma_3 \omega_1) \mathbf{g}_2 + (d\sigma_3 + \sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1) \mathbf{g}_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer olarak, $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ lineer bağımsız olduğundan bu son denklemden

$$\begin{aligned}
d\sigma_1 &= 0 \\
d\sigma_2 &= \sigma_1 \omega_3 - \sigma_3 \omega_1 \\
d\sigma_3 &= -\sigma_1 \omega_2 + \sigma_2 \omega_1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $H = R/R'$ hareketinin öteleme vektörü ile ilgili olarak elde edilen bu integrallenebilme koşulları

$$\begin{cases} d\sigma_1 = 0 \\ d\sigma_2 = \sigma_1 \omega_3 - \sigma_3 \omega_1 \\ d\sigma_3 = -\sigma_1 \omega_2 + \sigma_2 \omega_1 \end{cases}$$

denklemleri ile verilir.

Tanım 4.3

$$\begin{cases} d\mathbf{g}_1 = \omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2, \\ d\mathbf{g}_2 = -\omega_1 \mathbf{g}_3, \\ d\mathbf{g}_3 = \omega_1 \mathbf{g}_2, \end{cases} \quad \text{ve } \sigma' = -d\mathbf{u} = \sigma_1 \mathbf{g}_1 + \sigma_2 \mathbf{g}_2 + \sigma_3 \mathbf{g}_3$$

denklemlerine $H = R/R'$, 3-boyutlu Galile uzay hareketinin *türev denklemleri* denir.

4.3 Hızlar ve Hızların Terkibi

Şimdi $H = R/R'$ hareketi altında, R hareketli uzayında ele alınan herhangi bir noktanın R' sabit uzayını temsil eden dik çatının başlangıç noktasına göre konum vektörünün değişimini inceleyelim:

R hareketli uzayındaki herhangi bir X noktasının $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ hareketli dik çatısının başlangıç noktasına göre konum vektörü $\mathbf{OX} = \mathbf{x}$ ve

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{g}_i$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{OX}$$

vektörel denklemi için X noktasının $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$ sabit dik çatısının başlangıç noktasına göre konum vektörü $\mathbf{O}'\mathbf{X} = \mathbf{x}'$ ve $\mathbf{O}'\mathbf{O} = -\mathbf{u}$ olduğundan

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{u} + \mathbf{x}$$

yazılabilir. O halde, $\mathbf{x}'$ konum vektörünün değişimi

$$d\mathbf{x}' = -d\mathbf{u} + d\mathbf{x}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}' &= \sigma_1 \mathbf{g}_1 + \sigma_2 \mathbf{g}_2 + \sigma_3 \mathbf{g}_3 + dx_1 \mathbf{g}_1 + dx_2 \mathbf{g}_2 + dx_3 \mathbf{g}_3 + x_1 d\mathbf{g}_1 + x_2 d\mathbf{g}_2 + x_3 d\mathbf{g}_3 \\ &= \sigma_1 \mathbf{g}_1 + \sigma_2 \mathbf{g}_2 + \sigma_3 \mathbf{g}_3 + dx_1 \mathbf{g}_1 + dx_2 \mathbf{g}_2 + dx_3 \mathbf{g}_3 + x_1 (\omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2) + x_2 (-\omega_1 \mathbf{g}_3) + x_3 (\omega_1 \mathbf{g}_2) \\ &= \sigma_1 \mathbf{g}_1 + (\sigma_2 - x_1 \omega_3 + x_3 \omega_1) \mathbf{g}_2 + (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \mathbf{g}_3 + dx_1 \mathbf{g}_1 + dx_2 \mathbf{g}_2 + dx_3 \mathbf{g}_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.4

$H = R / R'$ hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının R' sabit uzayında ve R hareketli uzayında sahip olduğu hız vektörlerine, sırasıyla, mutlak ve relatif hız vektörleri denir ve bu hız vektörleri, sırasıyla,

$$\mathbf{X}_A = d\mathbf{x}'$$

ve

$$\mathbf{X}_R = dx_1 \mathbf{g}_1 + dx_2 \mathbf{g}_2 + dx_3 \mathbf{g}_3$$

ile verilir.

Tanım 5.5

$H = R / R'$ hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının mutlak hız vektörü ile relatif hız vektörü arasındaki farka sürüklenme hız vektörü denir, bu hız vektörü $\mathbf{X}_F$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{X}_F = \sigma_1 \mathbf{g}_1 + (\sigma_2 - x_1 \omega_3 + x_3 \omega_1) \mathbf{g}_2 + (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \mathbf{g}_3$$

ile hesaplanır.

Böylece düzlemsel hareketler altında hız vektörleri arasındaki ilişkiye benzer olarak, Galile uzayında aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.5

$H = R / R'$ hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasında

$$\mathbf{X}_A = \mathbf{X}_F + \mathbf{X}_R$$

bağıntısı geçerlidir.

4.4 Hareketin Pol Noktaları

Genel hareketler için sürüklenme hızını sıfır yapan noktalara pol noktası denir ve $\mathbf{X}_F = \mathbf{0}$ ile karakterize edilir.

$$\mathbf{X}_F = \mathbf{0}$$

$$= \sigma_1 \mathbf{g}_1 + (\sigma_2 - x_1 \omega_3 + x_3 \omega_1) \mathbf{g}_2 + (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \mathbf{g}_3,$$

böylece

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -\sigma_1 \\ -\omega_3 x_1 + 0x_2 + \omega_1 x_3 = -\sigma_2 \\ \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 + 0x_3 = -\sigma_3 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğundan sistemin bir parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır ve $\sigma_1 = 0$ elde edilir.

Dolayısıyla, x_1 keyfi sabit olmak üzere

$$\begin{cases} 0x_2 + \omega_1 x_3 = -\sigma_2 + \omega_3 x_1 \\ -\omega_1 x_2 + 0x_3 = -\sigma_3 - \omega_2 x_1 \end{cases}$$

sisteminin çözümü

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\sigma_3 + \omega_2 x_1}{\omega_1} \\ x_3 = \frac{-\sigma_2 + \omega_3 x_1}{\omega_1} \end{cases}$$

bulunur. Böylelikle, hareketin P dönme polü

$$\begin{aligned} P &= (p_1, p_2, p_3) \\ &= \left(x_1, \frac{-\sigma_3 - \omega_2 x_1}{\omega_1}, \frac{\sigma_2 - \omega_3 x_1}{\omega_1} \right) \end{aligned}$$

doğrusu olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = p_2 \omega_1 - \omega_2 x_1 \\ \sigma_3 = -p_3 \omega_1 + \omega_3 x_1 \end{cases}$$

olduğundan sürüklenme hızı $\mathbf{X}_F = \{(x_3 - p_3)\mathbf{g}_2 - (x_2 - p_2)\mathbf{g}_3\}\omega_1$ olarak yeniden düzenlenebilir. Böylece, $H = R/R'$ hareketi altında

$$\mathbf{P}\mathbf{X} = (x_1 - p_1)\mathbf{g}_1 + (x_2 - p_2)\mathbf{g}_2 + (x_3 - p_3)\mathbf{g}_3$$

pol ışını ile

$$\mathbf{X}_F = \{(x_3 - p_3)\mathbf{g}_2 - (x_2 - p_2)\mathbf{g}_3\}\omega_1$$

sürüklenme hızı Galile anlamında diktir.

Eğer $H = R/R'$ hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktası sabit ise $\mathbf{X}_R = 0$ olacağından

$\mathbf{X}_A = \mathbf{X}_F$ elde edilir. Buna göre herhangi bir $X \in R$ sabit noktası için türev denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= x_1 d\mathbf{g}_1 + x_2 d\mathbf{g}_2 + x_3 d\mathbf{g}_3 \\ &= x_1 (\omega_2 \mathbf{g}_3 - \omega_3 \mathbf{g}_2) + x_2 (-\omega_1 \mathbf{g}_3) + x_3 (\omega_1 \mathbf{g}_2) \\ &= (-x_1 \omega_3 + x_3 \omega_1) \mathbf{g}_2 + (x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \mathbf{g}_3 \end{aligned}$$

böylece

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x} \times_G \boldsymbol{\omega}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$d\mathbf{x}' = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{x} \times_G \boldsymbol{\omega}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sigma_1 \\ \tau_2 &= \sigma_2 + x_3 \omega_1 - \omega_3 x_1 \\ \tau_3 &= \sigma_3 + x_1 \omega_2 - \omega_1 x_2 \end{aligned}$$

denilirse

$$d\mathbf{x}' = \tau_1 \mathbf{g}_1 + \tau_2 \mathbf{g}_2 + \tau_3 \mathbf{g}_3$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

4.5 Galile Hareketler Altında Yörünge Yüzeylerinin Hacmi

Şimdi, $H = R/R'$ Galile uzay hareketinin öteleme ve baz vektörlerinin, sırasıyla, t_1, t_2 ve t_1, t_2, t_3 reel parametrelerinin diferensiyellenebilir periyodik fonksiyonlar olması durumunu göz önüne alacağız. Diğer bir ifadeyle, H_2 veya H_3 ile göstereceğimiz 2–parametrelili ve 3–parametrelili periyodik Galile Uzay Hareketleri üzerinde çalışacağız. Genel hareketler için uzayda 1–parametrelili hareketler altında bir X noktası, bir yörünge eğrisi; 2–parametrelili hareketler altında bir X noktası, bir yörünge yüzeyi ve 3–parametrelili hareketler altında bir X noktası, bir hacimsel bir yörünge yüzeyi belirler.

H_3 hareketi altında, R hareketli uzayında alınan sabit bir X noktasının R' sabit uzayında belirlediği bölgenin hacim elementi

$$dJ_X = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan yararlanarak elde edilen R hareketli uzayında alınan sabit bir X noktasının R' sabit uzayında belirlediği bölge S olmak üzere

$$J_X = \int_S dJ_X$$

ifadesine bu bölgenin hacmi denir.

Bu tanıma göre H_3 hareketi esnasında, $O \in R$ başlangıç noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için

$$dJ_O = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$$

bulunur. Bu durumda, $O \in R$ noktasının R' de belirlenen S bölgesindeki hacmi için

$$J_O = \int_S d\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$$

yazılabilir. Ayrıca, H_3 hareketi altında sabit bir $X \in R$ noktasının R' de belirlediği bölgenin

dJ_X hacim elementi için

$$\begin{aligned} dJ_X &= \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \\ &= \sigma_1 \wedge (\sigma_2 + x_3 \omega_1 - \omega_3 x_1) \wedge (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - \omega_1 x_2) \\ &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + (\sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) x_1^2 - (\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3) x_1 x_2 - (\sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_2) x_1 x_3 \\ &\quad + (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3) x_1 - (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1) x_2 - (\sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_1) x_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda H_3 hareketi esnasında R hareketli uzayında alınan sabit bir X

noktasının R' sabit uzayında belirlediği hacim

$$dJ_X = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + (-\sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2)x_1^2 + (\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3)x_1x_2 + (\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2)x_1x_3 \\ + (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 - \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \sigma_3)x_1 - (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1)x_2 + (\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3)x_3$$

elde edilir. Yani, J_X hacimi, x_i bileşenlerine göre bir kuadratik polinomdur. Ayrıca, H_3 hareketi esnasında R hareketli uzayında alınan sabit bir X noktasının R' sabit uzayında belirlediği hacim için

$$a = \int_S \sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

$$b_2 = \int_S (\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3), \quad b_3 = \int_S (\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2)$$

$$c_1 = \int_S \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 - \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \sigma_3, \quad c_2 = -\int_S (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1), \quad c_3 = \int_S \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3$$

olmak üzere

$$J_X = J_O + ax_1^2 + \sum_{i=2}^3 b_i x_1 x_i + \sum_{i=1}^3 c_i x_i$$

elde edilir.

Teorem 4.6

H_3 Galile uzay hareketi altında eşit hacimli bölgeler belirleyen hareketli uzayın bütün sabit noktaları bir φ_X kuadriği üzerinde bulunur.

4.5.1 Hacimler için Klasik Holditch Teoremi

H_3 hareketi altında, R hareketli uzayda doğrudan üç sabit noktanın R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

$X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, R sabit uzayında iki farklı sabit nokta ve $Z = (z_i)$ de XY doğru parçası üzerinde barisantrik koordinatları

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1$$

olan bir diğer sabit nokta olsun. Bu durumda, H_3 hareketi esnasında sabit bir Z noktasının R' sabit uzayında belirlediği bölgenin J_Z hacimi

$$\begin{aligned}
J_Z &= J_O + az_1^2 + \sum_{i=2}^3 b_i z_1 z_i + \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&= J_O + a(\lambda x_1 + \mu y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (\lambda x_1 + \mu y_1)(\lambda x_i + \mu y_i) + \sum_{i=1}^3 c_i (\lambda x_i + \mu y_i)
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Eğer gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu \left(J_O + ax_1y_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 b_i (x_1y_i + y_1x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i) \right) + \mu^2 J_Y$$

bulunur. Burada $J_O + ax_1y_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 b_i (x_1y_i + y_1x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i)$ ifadesi yerine J_{XY} yazılırsa

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu J_{XY} + \mu^2 J_Y$$

olarak ifade edilebilir.

Tanım 4.7

H_3 hareketi esnasında,

$$J_{XY} = J_O + ax_1y_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 b_i (x_1y_i + y_1x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i)$$

olarak tanımlanan J_{XY} ifadesine, sabit $X, Y \in R$ noktalarının R' de belirledikleri karışık yörünge hacimi denir.

Özel olarak, $Y = X$ alınırsa $J_{XX} = J_X$ ve X yerine Y , Y yerine X noktası alınırsa $J_{YX} = J_{XY}$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$J_X - 2J_{XY} + J_Y = a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i)$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu J_{XY} + \mu^2 J_Y$$

ve $\lambda + \mu = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlikler yardımıyla gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned}
J_Z &= \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu J_{XY} + \mu^2 J_Y \\
&= \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda\mu \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.8

X ve Y noktaları, R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. H_3 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının sabit R' uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasında

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right)$$

bağıntısı vardır.

Özel olarak, eğer $x_1 = y_1$ (dolayısıyla $z_1 = x_1 = y_1$) ise bu durumda $J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y$ elde edilir.

Sonuç 4.9

X ve Y noktaları, R hareketli uzayında aynı Öklid düzleminde iki farklı nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. H_3 hareketi altında X , Y ve Z noktalarının sabit R' uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasında

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y$$

bağıntısı vardır.

Tanım 4.10

H_3 hareketi altında, sabit $X, Y \in R$ noktaları arasındaki uzaklık

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right), \varepsilon = \pm 1$$

olmak üzere $D(X, Y)$ ile tanımlanır.

Yukarıdaki tanımdan, H_3 hareketi altında X , Y ve Z noktalarının sabit R' uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right)$$

ilişkisi

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Ayrıca X, Y ve Z doğrudan doğruya için

$$D(X, Z) + D(Z, Y) = D(X, Y)$$

ve XY doğru parçası üzerinde barisantrik koordinatlarda verilen $Z = (z_i)$ noktası için

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1$$

denklemindeki λ ve μ için $D(X, Y) \neq 0$ olmak üzere

$$\lambda = \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)}$$

ve

$$\mu = \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)}$$

yazılabilir. Böylece

$$J_Z = \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)} J_X + \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)} J_Y - \varepsilon \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)} \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)} D^2(X, Y)$$

veya

$$J_Z = \frac{1}{D(X, Y)} (D(Z, Y) J_X + D(X, Z) J_Y) - \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y)$$

elde edilir.

Ayrıca periyodik H_3 hareketi esnasında R hareketli uzayındaki sabit X ve Y noktası, $x_1 \neq y_1$ olduğundan aynı yörünge yüzeyinin bir parçasını çizer fakat tamamını çizmez. Bununla birlikte XY doğru parçasının X ve Y uç noktaları H_3 hareketi altında eşit hacimli bölgeler belirlesin. Bu durumda $J_X = J_Y$ dir. $\lambda + \mu = 1$ olduğundan

$$J_X - J_Z = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1$$

bulunur. Böylece Klasik Holditch Teoremi'nin Galile Uzayında uzaysal bir genelleştirmesi aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 4.11

R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta $X = (x_i)$, $Y = (y_i)$, $x_1 \neq y_1$ ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. H_3 hareketi altında, XY doğru parçasının X ve Y uç noktaları R' sabit uzayında eşit hacimli bölgeler belirlerken Z noktası da R' sabit uzayında farklı hacimli bir bölge belirlesin. Bu durumda bu iki hacim arasındaki fark, yalnızca Z noktasının XY doğru parçası üzerindeki konumuna bağlıdır.

Özel olarak, $x_1 = y_1$ olmak üzere XY doğru parçasının X ve Y uç noktaları eşit hacimli bölgeleri belirlesin. Bu durumda $J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y$ ve $J_X = J_Y$ ve $\lambda + \mu = 1$ olduğundan

$$J_X - J_Z = 0$$

elde edilir.

Özel Durum

R hareketli uzayında aynı Öklid düzleminde olacak şekilde iki farklı sabit nokta $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $x_1 = y_1$ ve XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta Z olsun. Bu durumda, H_3 hareketi altında XY doğru parçasının X ve Y uç noktaları R' sabit uzayında aynı hacimsel bölgeyi belirlerken Z noktası da R' sabit uzayında X ve Y uç noktalarının oluşturduğu bölgenin hacimine eşit hacimli bir bölge belirler.

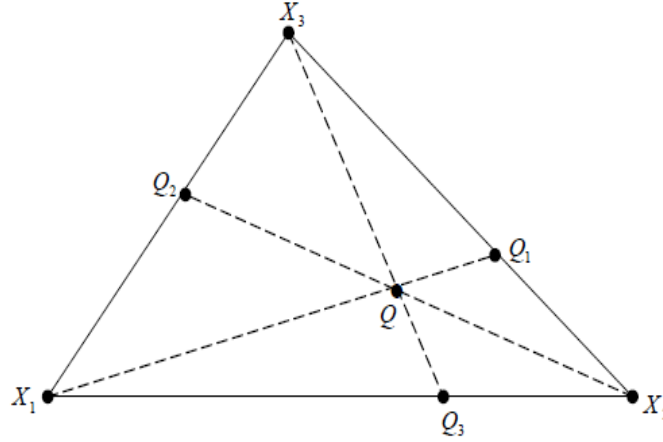
4.5.2 Hacimler için Holditch Teoreminin Bir Genelleştirmesi

H_3 hareketi altında, R hareketli uzayında ele alınan doğrudan olmayan üç sabit noktanın ve bu sabit noktaların bulunduğu düzlem üzerindeki bir diğer sabit noktanın, R' sabit uzayında belirlediği bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Teorem 4.12

R hareketli uzayında köşe noktaları $X_1 = (x_i)$, $X_2 = (y_i)$, $X_3 = (z_i)$ ve $x_1 \neq y_1 \neq z_1$ olan bir üçgeni göz önüne alalım. H_3 hareketi altında, R' sabit uzayında üçgenin köşe noktaları eşit hacimli bölgeler belirlerken; bu köşe noktaların tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit Q noktası da R' uzayında farklı hacimli bir bölge belirlesin. Bu iki hacim arasındaki fark, yalnızca hareket eden üçgendeki, $D(X_k, Q)$, $D(X_k, Q_k)$, $D(Q_k, X_j)$ ve

$D(X_i, Q_k)$ uzaklıklarına bağlıdır. Burada Q_i noktaları, X_iQ ve X_jX_k , $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$ doğru parçalarının kesişim noktalarıdır.



Şekil 4. 2 Hareketli uzayda sabit bir üçgen

İspat

$X_1 = (x_i)$, $X_2 = (y_i)$ ve $X_3 = (z_i)$, R de doğrudan olmayan üç sabit nokta ve $Q = (q_i)$ de X_1 , X_2 ve X_3 noktalarının tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit nokta olsun. Bu durumda Q noktasının bileşenleri için

$$q_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

yazılabilir. H_3 hareketi altında Q noktasının belirlediği bölgenin hacmi;

$$J_X = J_O + ax_1^2 + \sum_{i=2}^3 b_i x_1 x_i + \sum_{i=1}^3 c_i x_i, \quad J_{XY} = J_O + ax_1 y_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 y_i + y_1 x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i) \quad \text{ve}$$

$q_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ eşitlikleri yardımıyla,

$$J_Q = \lambda_1^2 J_{X_1} + \lambda_2^2 J_{X_2} + \lambda_3^2 J_{X_3} + 2\lambda_1 \lambda_2 J_{X_1 X_2} + 2\lambda_1 \lambda_3 J_{X_1 X_3} + 2\lambda_2 \lambda_3 J_{X_2 X_3}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca bu denklemde,

$$J_X - 2J_{XY} + J_Y = a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i),$$

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right), \varepsilon = \pm 1 \text{ ve } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ eşitlikleri göz}$$

önünde bulundurulursa;

$$J_Q = \lambda_1 J_{X_1} + \lambda_2 J_{X_2} + \lambda_3 J_{X_3} - \left\{ \varepsilon_{12} \lambda_1 \lambda_2 D^2(X_1, X_2) + \varepsilon_{13} \lambda_1 \lambda_3 D^2(X_1, X_3) + \varepsilon_{23} \lambda_2 \lambda_3 D^2(X_2, X_3) \right\}$$

elde edilir.

Şimdi $Q_1 = (q_{1i})$ noktasını göz önüne alalım. X_2, Q_1, X_3 noktaları doğrudan olduğundan

$$q_{1i} = \mu_{11} y_i + \mu_{12} z_i, \mu_{11} + \mu_{12} = 1,$$

ve X_1, Q, Q_1 doğrudan olduğundan

$$q_i = \mu_{13} q_{1i} + \mu_{14} x_i, \mu_{13} + \mu_{14} = 1$$

yazılabilir. Burada

$$\mu_{11} = \frac{D(Q_1, X_3)}{D(X_2, X_3)}, \mu_{12} = \frac{D(X_2, Q_1)}{D(X_2, X_3)}, \mu_{13} = \frac{D(X_1, Q)}{D(Q_1, X_1)}, \mu_{14} = \frac{D(Q_1, Q)}{D(Q_1, X_1)}$$

olup $q_{1i} = \mu_{11} y_i + \mu_{12} z_i$, denklemi $q_i = \mu_{13} q_{1i} + \mu_{14} x_i$, denkleminde yerine yazılırsa

$$q_i = \mu_{14} x_i + \mu_{13} \mu_{11} y_i + \mu_{13} \mu_{12} z_i$$

bulunur. Böylece

$$\lambda_1 = \mu_{14}, \lambda_2 = \mu_{13} \mu_{11}, \lambda_3 = \mu_{13} \mu_{12}$$

elde edilir. Benzer şekilde $Q_2 = (q_{2i})$ noktası göz önüne alınırsa

$$\mu_{21} = \frac{D(Q_2, X_1)}{D(X_1, X_3)}, \mu_{22} = \frac{D(X_3, Q_2)}{D(X_1, X_3)}, \mu_{23} = \frac{D(X_2, Q)}{D(Q_2, X_1)}, \mu_{24} = \frac{D(Q_2, Q)}{D(Q_2, X_1)}$$

olmak üzere

$$\lambda_1 = \mu_{22} \mu_{23}, \lambda_2 = \mu_{24}, \lambda_3 = \mu_{21} \mu_{23}$$

elde edilir. Öte yandan $Q_3 = (q_{3i})$ noktası için

$$\mu_{31} = \frac{D(Q_3, X_2)}{D(X_1, X_2)}, \mu_{32} = \frac{D(X_1, Q_3)}{D(X_1, X_2)}, \mu_{33} = \frac{D(X_3, Q)}{D(Q_3, X_3)}, \mu_{34} = \frac{D(Q_3, Q)}{D(Q_3, X_3)}$$

olmak üzere

$$\lambda_1 = \mu_{31}\mu_{33}, \lambda_2 = \mu_{32}\mu_{33}, \lambda_3 = \mu_{34}$$

bulunur. Böylece eğer Q_i noktaları, X_iQ ve X_jX_k , $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, doğru parçalarının kesişim noktaları ise, mümkün olan tüm uzaklıkların sıfırdan farklı olmaları kabulü altında, λ_i , $1 \leq i \leq 3$ için

$$\lambda_i = \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} = \frac{D(X_j, Q)}{D(X_j, Q_j)} \frac{D(X_k, Q_j)}{D(X_k, X_i)} = \frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \frac{D(Q_k, X_j)}{D(X_i, X_j)}$$

yazılabilir.

Böylece yukarıdaki λ_i eşitliklerinden

$$J_Q = \sum_{i=1}^3 \frac{D(Q, Q_i)}{D(X, Q_i)} J_{X_i} - \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k)$$

bulunur. Ayrıca X_1 , X_2 , ve X_3 noktaları, H_3 hareketi altında R' sabit uzayında eşit hacimli bölgeleri belirlediklerinden $J_{X_1} = J_{X_2} = J_{X_3}$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ olduğundan son denklemden

$$J_{X_1} - J_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$ elde edilir.

Özel Durum

R hareketli uzayında köşe noktaları $X_1 = (x_i)$, $X_2 = (y_i)$, $X_3 = (z_i)$ ve $x_1 = y_1 = z_1$ olan bir üçgeni göz önüne alalım. H_3 hareketi altında, R' sabit uzayında üçgenin köşe noktaları aynı bölgeyi belirlerken; bu köşe noktaların bulunduğu düzlem üzerindeki bir diğer sabit Q noktası da R' sabit uzayında farklı bölge belirlesin. Bu durumda iki bölgenin hacimi birbirine eşittir.

4.6 Yörünge Yüzeylerinin Dik İzdüşüm Alanları için Holditch Tipi Teoremler

Şimdi, G^3 de periyodik bir H_2 hareketi esnasında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir noktanın R' sabit uzayında çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri verilecektir.

4.6.1 Yörünge Yüzeyinin Vektörel Alan Elementi ve Alan Vektörü

$X \in R$ sabit noktası, H_3 hareketi esnasında R' sabit uzayında hacimsel bir bölge belirlensin. Bu durumda H_3 hareketi ile birlikte oluşan H_2 hareketi altında $X \in R$ sabit noktası bir admissible yüzey oluşturur. Bu admissible yüzeyi, Ψ_X ile gösterelim. Ψ_X yüzeyi, H_3 hareketi ile aynı anda oluşan periyodik bir H_2 hareketi altında meydana gelir. O halde X noktasının periyodik H_2 hareketi altında R' sabit uzayında çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin $d\mathbf{F}'_X$ ile gösterilecek olan vektörel alan elementi için,

$$d\mathbf{F}'_{\Psi_X} = \frac{1}{2} d\mathbf{x}' \times_G d\mathbf{x}' = \tau_3 \wedge \tau_1 \mathbf{g}_2 + \tau_1 \wedge \tau_2 \mathbf{g}_3$$

izotropik vektörü elde edilir. Böylece X noktasının kapalı H_2 hareketi altında R' de çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin Γ bölgesi üzerindeki $\mathbf{F}'_{\Psi_X}$ ile gösterilecek olan alan vektörü

$$\mathbf{F}'_{\Psi_X} = \iint_{\Gamma} d\mathbf{F}'_{\Psi_X} = \sum_{i=2}^3 \iint_{\Gamma} \tau_j \wedge \tau_k \mathbf{g}_i$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca

$$\tau_3 \wedge \tau_1 = (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - \omega_1 x_2) \wedge \sigma_1 = \sigma_1 \wedge \sigma_3 + \omega_2 \wedge \sigma_1 x_1 - \omega_1 \wedge \sigma_1 x_2$$

ve

$$\tau_1 \wedge \tau_2 = \sigma_1 \wedge (\sigma_2 + x_3 \omega_1 - \omega_3 x_1) = \sigma_1 \wedge \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 x_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 x_1$$

olmak üzere alan vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_{\Psi_X} &= \iint_{\Gamma} \tau_3 \wedge \tau_1 \mathbf{g}_2 + \tau_1 \wedge \tau_2 \mathbf{g}_3 \\
&= \iint_{\Gamma} (\sigma_1 \wedge \sigma_3 + \omega_2 \wedge \sigma_1 x_1 - \omega_1 \wedge \sigma_1 x_2) \mathbf{g}_2 + (\sigma_1 \wedge \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 x_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 x_1) \mathbf{g}_3 \\
&= \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \sigma_3 \mathbf{g}_2 + x_1 \iint_{\Gamma} \omega_2 \wedge \sigma_1 \mathbf{g}_2 - x_2 \iint_{\Gamma} \omega_1 \wedge \sigma_1 \mathbf{g}_2 + \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \mathbf{g}_3 + x_3 \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \omega_1 \mathbf{g}_3 - x_1 \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \omega_3 \mathbf{g}_3
\end{aligned}$$

yazılabilir.

4.6.2 Yörünge Yüzeylerinin Galile Düzlemi Üzerine Dik İzdüşüm Alanları

Periyodik H_2 hareketi esnasında, R hareketli uzayında sabit X noktasının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeyinin, Γ bölgesi üzerinde tanımlı, $\mathbf{e}'$ izotropik birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanı

$$\begin{aligned}
F'_{\Psi_X} &= \left| \left\langle \mathbf{F}'_{\Psi_X}, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} \right| \\
&= \left| \left\langle \iint_{\Gamma} (\sigma_1 \wedge \sigma_3 + \omega_2 \wedge \sigma_1 x_1 - \omega_1 \wedge \sigma_1 x_2) \mathbf{g}_2 + (\sigma_1 \wedge \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 x_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 x_1) \mathbf{g}_3, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} \right|
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{cases}
K = \left\langle \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \sigma_3 \mathbf{g}_2, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} + \left\langle \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \mathbf{g}_3, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} \\
M = \left\langle \iint_{\Gamma} \omega_2 \wedge \sigma_1 \mathbf{g}_2, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} + \left\langle \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \omega_3 \mathbf{g}_3, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} \\
N = - \left\langle \iint_{\Gamma} \omega_1 \wedge \sigma_1 \mathbf{g}_2, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta} \\
L = \left\langle \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \omega_1 \mathbf{g}_3, \mathbf{e}' \right\rangle_{\delta}
\end{cases}$$

olmak üzere

$$F'_{\Psi_X} = |K + Mx_1 + Nx_2 + Lx_3|$$

olarak hesaplanır.

Şimdi, periyodik H_2 hareketi esnasında, R hareketli uzayında sabit $X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$ noktalarını göz önüne alalım. Bu durumda X ve Y noktalarının Γ bölgesi üzerinde tanımlı,

R' sabit uzayında çizdikleri kapalı Ψ_X ve Ψ_Y yörünge yüzeylerinin, $\mathbf{e}'$ birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları arasındaki fark

$$F'_{\Psi_X} - F'_{\Psi_Y} = |Mx_1 + Nx_2 + Lx_3 + K| - |My_1 + Ny_2 + Ly_3 + K|$$

olarak elde edilir. Böylece izotropik düzlemdeki $F = M(x_1 - y_1)$ Holditch teoremine analog olarak aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir.

Teorem 4.13

Periyodik H_2 Galile hareketi altında, R hareketli uzayının $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ farklı iki sabit noktası, sırasıyla, R' sabit uzayında Ψ_X ve Ψ_Y yörünge yüzeylerini çizsin. Bu durumda Ψ_X ve Ψ_Y yörünge yüzeylerinin $\mathbf{e}'$ birim normal vektörlü bir Galile düzlemine izdüşüm alanları arasındaki fark

$$F'_{\Psi_X} - F'_{\Psi_Y} = |Mx_1 + Nx_2 + Lx_3 + K| - |My_1 + Ny_2 + Ly_3 + K|$$

olarak hesaplanır. Yani, Ψ_X ve Ψ_Y admissible yörünge yüzeylerinin $\mathbf{e}'$ birim normal vektörlü bir Galile (izotropik) düzlemine Ψ_X^n ve Ψ_Y^n izdüşüm yüzeylerinin alanları arasındaki fark Ψ_X^n ve Ψ_Y^n izdüşüm yüzeylerinden bağımsız, M, N, L, K hareket sabitlerine (İngilizcede motion constant, Almancada zwanglaufkonstanten) ve $x_i - y_i, i = 1, 2, 3$ koordinat farklarına bağlıdır.

4.6.3 Yörünge Yüzeylerinin Öklid Düzlemi Üzerine Dik İzdüşüm Alanları

Şimdi Ψ_X yüzeyinin Galile uzayındaki birim normal vektörlü bir Öklid düzlemine dik izdüşüm alanını inceleyelim:

$X \in R$ sabit noktası, H_3 hareketi esnasında R' sabit uzayında hacimsel bir bölge belirlesin. Bu durumda $X \in R$ sabit noktası, H_3 hareketi ile birlikte oluşan H_2 hareketi altında bir Ψ_X yüzeyi meydana getirir. H_2 hareketi altında R' sabit uzayında $X \in R$ sabit noktasının hız vektörü $d\mathbf{x}' = \tau_1 \mathbf{g}_1 + \tau_2 \mathbf{g}_2 + \tau_3 \mathbf{g}_3$ olarak hesaplanmıştı. Ψ_X yüzeyinin birim normal vektörlü bir Öklid düzlemi üzerine dik izdüşümü Ψ_X^n ve Öklid düzleminin birim normal vektörü

$\mathbf{e}' = (1, 0, 0)$ olsun. Bu durumda Ψ_X^n yüzeyinin $d\mathbf{F}'_{\Psi_X^n}$ ile gösterilecek olan vektörel alan elementi için $d\mathbf{x}'^n = \tau_1 \mathbf{g}_1^n + \tau_2 \mathbf{g}_2^n + \tau_3 \mathbf{g}_3^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} &= \frac{1}{2} d\mathbf{x}'^n \times_{\delta} d\mathbf{x}'^n \\ &= (\tau_1 \wedge \tau_2) \mathbf{g}_1^n \times_{\delta} \mathbf{g}_2^n + (\tau_1 \wedge \tau_3) \mathbf{g}_1^n \times_{\delta} \mathbf{g}_3^n + (\tau_2 \wedge \tau_3) \mathbf{g}_2^n \times_{\delta} \mathbf{g}_3^n \end{aligned}$$

veya

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1^n \times_{\delta} \mathbf{g}_2^n = k\mathbf{e}', \\ \mathbf{g}_1^n \times_{\delta} \mathbf{g}_3^n = l\mathbf{e}', \\ \mathbf{g}_2^n \times_{\delta} \mathbf{g}_3^n = \mathbf{e}' \end{cases}$$

olmak üzere

$$d\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} = ((\tau_1 \wedge \tau_2)k + (\tau_1 \wedge \tau_3)l + (\tau_2 \wedge \tau_3))\mathbf{e}'$$

vektörü elde edilir. Böylece Ψ_X^n yüzeyinin skaler alan elementi için

$$dF_{\Psi_X^n} = ((\tau_1 \wedge \tau_2)k + (\tau_1 \wedge \tau_3)l + (\tau_2 \wedge \tau_3))$$

bulunur. Bu durumda, Ψ_X^n yüzeyinin skaler alan elementi

$$\begin{aligned} dF_{\Psi_X^n} &= ((\tau_1 \wedge \tau_2)k + (\tau_1 \wedge \tau_3)l + (\tau_2 \wedge \tau_3)) \\ &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 k + \sigma_1 \wedge \sigma_3 l + \sigma_2 \wedge \sigma_3 + (\sigma_2 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge \sigma_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 k + \omega_2 \wedge \sigma_1 l) x_1 \\ &\quad + (-\sigma_2 \wedge \omega_1 - \omega_1 \wedge \sigma_1 l) x_2 + (\omega_1 \wedge \sigma_3 + \sigma_1 \wedge \omega_1 k) x_3 \\ &\quad + \omega_3 \wedge \omega_1 x_1 x_2 + \omega_1 \wedge \omega_2 x_1 x_3 - \omega_3 \wedge \omega_2 x_1^2 \end{aligned}$$

olduğundan Ψ_X^n yüzeyinin skaler alanı için

$$\begin{aligned} F_{\Psi_X^n} &= \iint_{\Gamma} ((\tau_1 \wedge \tau_2)k + (\tau_1 \wedge \tau_3)l + (\tau_2 \wedge \tau_3)) \\ &= \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \sigma_2 k + \sigma_1 \wedge \sigma_3 l + \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ &\quad + x_1 \iint_{\Gamma} (\sigma_2 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge \sigma_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 k + \omega_2 \wedge \sigma_1 l) + x_2 \iint_{\Gamma} (-\sigma_2 \wedge \omega_1 - \omega_1 \wedge \sigma_1 l) \\ &\quad + x_3 \iint_{\Gamma} (\omega_1 \wedge \sigma_3 + \sigma_1 \wedge \omega_1 k) + x_1 x_2 \iint_{\Gamma} \omega_3 \wedge \omega_1 + x_1 x_3 \iint_{\Gamma} \omega_1 \wedge \omega_2 - x_1^2 \iint_{\Gamma} \omega_3 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

veya

$$a = -\iint_{\Gamma} \omega_3 \wedge \omega_2$$

$$b_2 = \iint_{\Gamma} \omega_3 \wedge \omega_1$$

$$b_3 = \iint_{\Gamma} \omega_1 \wedge \omega_2$$

$$c_1 = \iint_{\Gamma} (\sigma_2 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge \sigma_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 k + \omega_2 \wedge \sigma_1 l)$$

$$c_2 = \iint_{\Gamma} (-\sigma_2 \wedge \omega_1 - \omega_1 \wedge \sigma_1 l)$$

$$c_3 = \iint_{\Gamma} (\omega_1 \wedge \sigma_3 + \sigma_1 \wedge \omega_1 k)$$

$$d = \iint_{\Gamma} \sigma_1 \wedge \sigma_2 k + \sigma_1 \wedge \sigma_3 l + \sigma_2 \wedge \sigma_3$$

olmak üzere

$$F_{\Psi_X^n} = a x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_1 x_3 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + d$$

yazılabilir. Buradan $\mathbf{F}'_{\Psi_X^n}$ alan vektörü

$$\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} = F'_{\Psi_X^n} \mathbf{e}'$$

olarak hesaplanır.

Şimdi, kapalı H_2 hareketi esnasında, R hareketli uzayında ele alınan doğrudan üç sabit noktanın R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin, Γ bölgesi üzerinde tanımlı parçalarının birim normal vektörlü Öklid düzlemi üzerine dik izdüşüm alanları arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

$X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, R de iki farklı sabit nokta ve $Z = (z_i)$ de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Kapalı H_2 hareketi altında X, Y ve Z noktalarının R' de çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarını, sırasıyla, Ψ_X, Ψ_Y, Ψ_Z ve izdüşüm yüzey parçalarını $\Psi_X^n, \Psi_Y^n, \Psi_Z^n$ ile gösterelim. O halde Ψ_Z^n yüzey parçası

skaler alanı

$$F'_{\Psi_Z^n} = a z_1^2 + b_2 z_1 z_2 + b_3 z_1 z_3 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + d$$

ve alan vektörü

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} = (az_1^2 + b_2 z_1 z_2 + b_3 z_1 z_3 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + d) \mathbf{e}'$$

yazılabilir. Ayrıca, yukarıdaki denklemler ışığında,

$$F'_{\Psi_Z^n} = \lambda^2 F'_{\Psi_X^n} + 2\lambda\mu F'_{\Psi_{XY}^n} + \mu^2 F'_{\Psi_Y^n}$$

ve

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} = \lambda^2 \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} + 2\lambda\mu \mathbf{F}'_{\Psi_{XY}^n} + \mu^2 \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n}$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{F}'_{\Psi_{XY}^n} = \left(ax_1 y_1 + \frac{b_2}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{b_3}{2} (x_1 y_3 + x_3 y_1) + \frac{c_1}{2} (x_1 + y_1) + \frac{c_2}{2} (x_2 + y_2) + \frac{c_3}{2} (x_3 + y_3) + d \right) \mathbf{e}'$$

olarak gösterilmiştir.

Tanım 4.14

Periyodik H_2 hareketi esnasında,

$$\mathbf{F}'_{\Psi_{XY}^n} = \left(ax_1 y_1 + \frac{b_2}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{b_3}{2} (x_1 y_3 + x_3 y_1) + \frac{c_1}{2} (x_1 + y_1) + \frac{c_2}{2} (x_2 + y_2) + \frac{c_3}{2} (x_3 + y_3) + d \right) \mathbf{e}'$$

vektörüne, sabit $X, Y \in R$ noktalarının R' de belirlenen *izdüşüm karma alan vektörü* adı verilir. Burada X yerine Y ve Y yerine X alınırsa $\mathbf{F}'_{\Psi_{XY}^n} = \mathbf{F}'_{\Psi_{YX}^n}$ ve $X = Y$ için

$$\mathbf{F}'_{\Psi_{XX}^n} = \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} \text{ sağlanır.}$$

Ayrıca,

$$\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} - 2\mathbf{F}'_{\Psi_{XY}^n} + \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n} = \left(a(x_1 - y_1)^2 + b_2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + b_3(x_1 - y_1)(x_3 - y_3) \right) \mathbf{e}'$$

elde edilir.

Tanım 4.15

H_2 hareketi altında, sabit $X, Y \in R$ noktaları arasındaki uzaklık

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i(x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right), \varepsilon = \pm 1$$

olmak üzere $D(X, Y)$ ile tanımlanır.

Yukarıdaki tanımdan, H_2 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının sabit R' uzayında belirledikleri yüzeylerin Öklid düzlemi üzerine izdüşüm alan vektörleri için

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} = \lambda \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} + \mu \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n} - \varepsilon \lambda \mu \left(a(x_1 - y_1)^2 + \sum_{i=2}^3 b_i (x_1 - y_1)(x_i - y_i) \right) \mathbf{e}'$$

veya

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} = \lambda \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} + \mu \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n} - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \mathbf{e}'$$

yazılabilir. Ayrıca X, Y ve Z doğruduş olduğu için $D(X, Z) + D(Z, Y) = D(X, Y)$

ve XY doğru parçası üzerinde barisantrik koordinatlarda verilen $Z = (z_i)$ noktası için

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1$$

denklemindeki λ ve μ için $D(X, Y) \neq 0$ yani $x_1 \neq y_1$ olmak üzere

$$\lambda = \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)}$$

ve

$$\mu = \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)}$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} = \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)} \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} + \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)} \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n} - \varepsilon \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)} \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)} D^2(X, Y) \mathbf{e}'$$

veya

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} = \frac{1}{D(X, Y)} \left(D(Z, Y) \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} + D(X, Z) \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n} \right) - \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y) \mathbf{e}'$$

elde edilir.

Ayrıca XY doğru parçasının X ve Y uç noktaları H_2 hareketi altında yörünge yüzeyleri eşit izdüşüm alanına sahip olsun yani $\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} = \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n}$ olsun. Bu durumda $\lambda + \mu = 1$ olduğundan

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} - \mathbf{F}'_{\Psi_X^n} = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y) \mathbf{e}', \quad \varepsilon = \pm 1$$

ve

$$\mathbf{F}'_{\Psi_Z^n} - \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n} = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1$$

bulunur. Böylece şu teoremi ispatsız verebiliriz:

Teorem 4.16

Periyodik H_2 hareketi altında, R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta $X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, $x_1 \neq y_1$ ve Z de XY doğru parça üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. H_2 hareketi altında, XY doğru parçasının uç noktaları R' sabit uzayında ($\mathbf{e}'$ vektörü doğrultusunda) aynı ($\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} = \mathbf{F}'_{\Psi_Y^n}$) izdüşüm alanına sahip Ψ_X ve Ψ_Y kapalı yörünge yüzeylerini çerken XY doğru parçası üzerindeki Z noktası da R' sabit uzayında başka bir Ψ_Z kapalı yörünge yüzeyini çizsin. Bu durumda, bu iki Ψ_X, Ψ_Z yörünge yüzeylerinin izdüşüm ($\mathbf{e}'$ birim normal vektörü doğrultusunda) alanları arasındaki fark $D(X, Z)$ ve $D(Z, Y)$ uzaklıklarına bağlıdır. Yani, Ψ_X, Ψ_Z yörünge yüzeylerinin ($\mathbf{e}'$ birim normal vektörü doğrultusundaki) izdüşüm Ψ_X^n ve Ψ_Z^n yüzeylerinin alanlarının arasındaki fark izdüşüm yüzeylerinden bağımsız $D(X, Z)$ ve $D(Z, Y)$ uzaklıklarına bağlıdır.

Özel Durum

Periyodik H_2 hareketi altında, R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta $X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, $x_1 = y_1$ ve Z de XY doğru parça üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. H_2 hareketi altında, XY doğru parçasının $X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$ uç noktaları R' sabit uzayında aynı Ψ_X yörünge yüzeyini belirlerken, XY doğru parçası üzerindeki sabit Z noktası da farklı Ψ_Z yörünge yüzeyini belirlesin. Bu durumda, bu yörünge yüzeylerinin $\mathbf{e}'$ birim normal vektörü

doğrultusunda izdüşüm alanları arasında $F'_{\Psi^n_Z} - F'_{\Psi^n_X} = 0$ bağıntısı vardır. Yani bu izdüşüm alanları birbirine eşittir.

Örnek 4.17

$\mathbf{g}_1 = (1, \cos v, \cos u)$, $\mathbf{g}_2 = (0, \cos v, \sin v)$, $\mathbf{g}_3 = (0, -\sin v, \cos v)$, $\mathbf{u} = (\cos u, 0, 0)$ vektörleri ile tanımlı 2-parametrelili periyodik Galile hareketi altında hareketli uzayda sabit $X = (x_1, x_2, x_3)$ noktasını göz önüne alalım. u, v -parametrelili periyodik Galile uzay hareketi altında sabit X noktasının yörünge yüzeyini inceleyelim.

Bu durumda R hareketli uzayı $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ vektörleri tarafından oluşur. Dönme öteleme ve kayma hareketlerinden oluşan u, v -parametrelili periyodik Galile uzay hareketi altında R hareketli uzayındaki sabit X noktası $\mathbf{g}'_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{g}'_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{g}'_3 = (0, 0, 1)$ vektörleri tarafından gerilen R' sabit uzayında Ψ_X admissible yörünge yüzeyi çizer. Böylece, M_2 hareketi altında R hareketli uzayındaki sabit X noktası R' sabit uzayında

$\Psi_X(u, v) = (x_1 - \cos u, (x_1 - \cos u) \cos v + x_2 \cos v - x_3 \sin v, (x_1 - \cos u) \cos u + x_2 \sin v + x_3 \cos v)$ yüzeyini çizer. $\Gamma = \{0 < u < \pi, 0 < v < \pi\}$ için yüzeyin alan vektörü $\mathbf{F}'_{\Psi_X} = (0, 4x_3, -4x_2 - 4x_1)$ olarak bulunur.

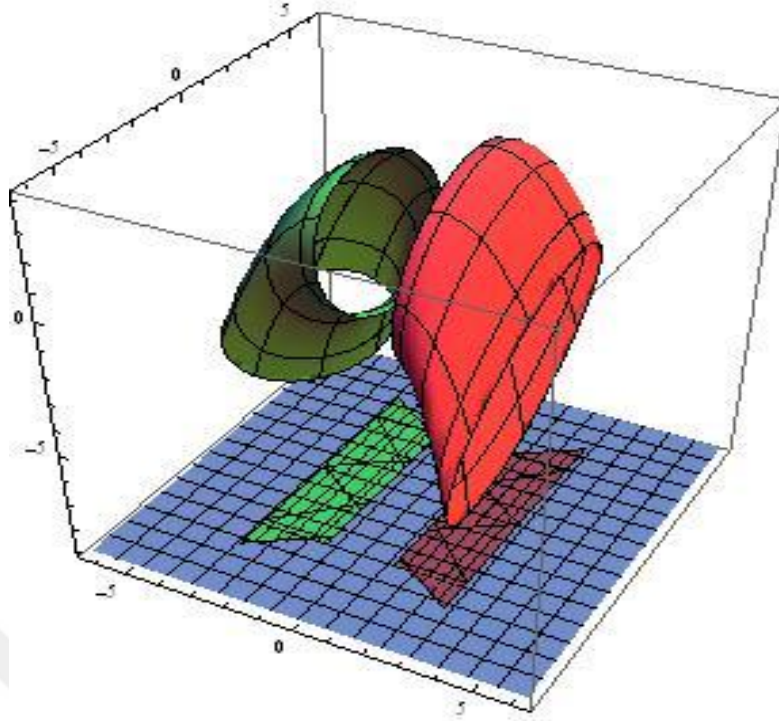
Ψ_X yüzeyinin $\mathbf{e}' = (1, 0, 0)$ normal vektörlü bir Galile (izotropik) düzlemi üzerine izdüşüm yüzeyini Ψ^n_X ile gösterelim. Bu durumda Ψ^n_X yüzeyinin skaler alanı

$$F'_{\Psi^n_X} = |-4x_2 - 4x_1|$$

elde edilir. Özel olarak, R hareketli uzayında $X = (2, 0, 3)$ ve $Y = (-2, 0, 3)$ sabit noktalarını göz önüne alalım. Bu durumda Holditch alan formülü

$$F'_{\Psi^n_X} - F'_{\Psi^n_Y} = |-4.2| - |-4.2| = 0$$

olarak hesaplanır.



Şekil 4.3 Ψ_X (kırmızı), Ψ_Y (yeşil) yüzeyleri ve $z = -9$ düzlemi üzerindeki Ψ_X^n (kırmızı) ve Ψ_Y^n (yeşil) izdüşüm yüzeyleri

Şimdi, Ψ_X yüzeyinin $\mathbf{e}' = (1, 0, 0)$ birim normalli bir Öklid düzlemi üzerine izdüşümü Ψ_X^n ile gösterilsin. Bu durumda $\Gamma = \{0 < u < \pi, 0 < v < \pi\}$ için Ψ_X^n yüzeyinin alan vektörü

$$\mathbf{F}'_{\Psi_X^n} = \left(-4(x_1)^2 - 4x_1x_2 + \pi x_2 - 8/3, 0, 0 \right)$$

olarak hesaplanır. Böylece izdüşüm yüzeyinin alanı

$$F'_{\Psi_X^n} = \left| -4(x_1)^2 - 4x_1x_2 + \pi x_2 - 8/3 \right|$$

bulunur. Ayrıca $D(X, Y)$ tanımı gereğince

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \left(-4(x_1 - y_1)^2 - 4(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \right), \varepsilon = \pm 1$$

olarak hesaplanır. Buna göre R hareketli uzayında sabit $X = (2, 0, 3)$ ve $Y = (-2, 0, 3)$ noktalarını göz önüne alalım. Bu durumda

$$F'_{\Psi_X^n} = F'_{\Psi_Y^n}$$

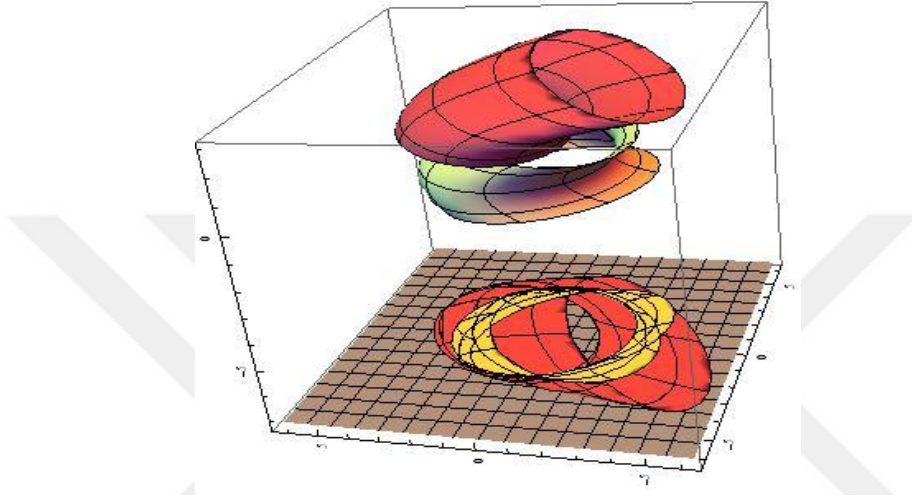
sağlanır. Böylece $\lambda = \mu = 1/2$ için $Z = (0, 0, 3)$ ve

$$F'_{\Psi_Z^n} - F'_{\Psi_X^n} = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$= 4.4 = 16$$

elde edilir. Burada H_2 hareketinin periyodu 2π hesaplanır. Böylece tüm alanlar

$\Gamma = \{0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}$ için iki katı hesaplanır.



Şekil 4. 4 Ψ_X (kırmızı), Ψ_Z (sarı) yüzeyleri ve $x = -7$ düzlemi üzerindeki Ψ_X^n (kırmızı) ve Ψ_Z^n (sarı) izdüşüm yüzeyleri

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Holditch teoremi; periyodik dönme ve öteleme hareketleri veya periyodik dönme ve kayma hareketlerinden farklı olarak, dönme, öteleme ve kayma hareketleri altında (yani G^3 Galile uzayında) hacim ve alan formülleri için incelenmiştir. Tablo 5.1 'de görüleceği gibi Öklid ve Lorentz Uzayındaki Holditch Tipi Teoremlere benzer sonuçlar elde edilmiştir. Fakat Öklid Uzaydaki [5,46,49] ve Lorentz Uzaydaki [78] gibi Holditch teoreminin direk karşılıklarının G^2 düzlemine benzer olarak sağlanmadığı görülmüştür.

Ayrıca bu çalışmanın devamında, E^3 Öklid ve L^3 Lorentz Uzayda kinematik üzerine yapılan çalışmalar G^3 Galile Uzayında incelenebilir.

Çizelge 5. 1 Holditch Tipi Teoremler

E^2	$F_A - F_X = \pi ab$, [1], $F_A - F_X = \delta/2 ab$, [5]; Burada $F_A - F_X$, sırasıyla, Holditch Halkasının ve Holditch Hilalinin alanı göstermektedir.
L^2	$F_A - F_X = \delta/2 ab$, [42] Burada $F_A - F_X$, Holditch Hilalinin alanı göstermektedir.
G^2	$F_A - F_B = M(x_1 - y_1)$, [52], $F_A - F_X = \delta/2 ab$, [53] Burada $F_A - F_B$, sırasıyla, iki farklı noktanın yörünge alanları arasındaki farkı ve $F_A - F_X$ Holditch Hilalinin alanını göstermektedir.

Çizelge 5. 1 Holditch Tipi Teoremler (Devamı)

E^3	$J_X - J_Z = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1,$ $J_{X_1} - J_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k), \quad [6,7].$ Burada $J_X - J_Z$, X ve Z noktalarının yörünge yüzeylerinin hacimleri arasındaki farkı göstermektedir.
	$F_{\Psi_Z^n} - F_{\Psi_X^n} = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1, [8]$ Burada $F_{\Psi_Z^n} - F_{\Psi_X^n}$, yörünge yüzeylerinin izdüşüm alanları arasındaki farkı göstermektedir.
L^3	$J_X - J_Z = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1, [47]$ $J_{X_1} - J_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k), \quad [47].$ Burada $J_X - J_Z$, yörünge yüzeylerinin hacimleri arasındaki farkı göstermektedir.
	$F_{\Psi_Z^n} - F_{\Psi_X^n} = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1, [47].$ Burada $F_{\Psi_Z^n} - F_{\Psi_X^n}$, yörünge yüzeylerinin izdüşüm alanları arasındaki farkı göstermektedir.
G^3	$J_X - J_Z = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1,$ $J_{X_1} - J_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k).$ Burada $J_X - J_Z$, yörünge yüzeylerinin hacimleri arasındaki farkı göstermektedir.
	$F_{\Psi_Z^n} - F_{\Psi_X^n} = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y), \quad \varepsilon = \pm 1.$ $F_{\Psi_X^n} - F_{\Psi_Y^n} = Mx_1 + Nx_2 + Lx_3 + K - My_1 + Ny_2 + Ly_3 + K .$ Burada $F_{\Psi_Z^n} - F_{\Psi_X^n}$, yörünge yüzeylerinin Öklid düzlemine izdüşüm alanları arasındaki farkı, $F_{\Psi_X^n} - F_{\Psi_Y^n}$, yörünge yüzeylerinin Galile düzlemine izdüşüm alanları arasındaki farkı göstermektedir.

- [1] Holditch, H., (1858). "Geometrical theorem", Q. J. Pure Appl. Math., 2: 38.
- [2] Blaschke, W., Müller, H. R., (1956). Ebene Kinematik, Verlag von R. Oldenbourg, München.
- [3] Hering, L., (1981). Holditch-Sätze für Regelflächen und deren Übertragungen auf ebene und sphärische Kurven, zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.), Dissertation, Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, Technische Universität Darmstadt.
- [4] Pottmann H., (1986). "Ebene Äquiforme zwangsläufe im Grossen I", Results in Mathematics, 9:131-159.
- [5] Pottmann, H., (1985). "Holditch-Sicheln", Archiv der Mathematik, 44:373-378.
- [6] Blaschke, W., (1948). "Über Integrale in der Kinematik", Archiv der Mathematik, 1:18- 22.
- [7] Müller, H. R., (1979). "Räumliche Gegenstücke zum Satz von Holditch", Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges., 30: 54-61.
- [8] Müller, H. R., (1987). "Ein Holditch-Satz für Flächenstücke im R^3 ", Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges., 39: 37-42.
- [9] Blaschke, W., (1948). "Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel", Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse, 2, : 31-37.
- [10] Broman, A., (1981). "Holditch's Theorem", Math. Mag., 54: 99-108.
- [11] Düldül, M., Kuruoğlu, N., Tutar, A., (2004), The generalization of Holditch theorem for closed space curves, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 84:1, 60-64.
- [12] Düldül, M., Kuruoğlu, N., (2007). "On the volume of the trajectory surfaces under the homothetic motions", Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 76(2):241-246.
- [13] Elliott, E. B., (1878). "A theorem in areas including Holditch's with its analogue in three dimensions", Messenger Math., 7:150-156.

- [14] Elliott, E. B., (1881). "Extension to curved surfaces of a former theorem on plane areas", Messenger Math., 10: 156-158.
- [15] Elliott, E. B., (1881). "Some theorems of kinematics on a sphere", Proc. London Math. Soc., 12:47-57.
- [16] Giering, O., Hoschek, J., (1994). Geometrie und ihre Anwendungen, Carl Hanser Verlag, Munich, 3-446-16576-2.
- [17] Güneş, R., Keleş, S., Hacısalıhoğlu, H. H., (1989). "Two corollaries of Holditch's theorem for one-parameter closed spatial motions", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A1, 38(1-2): 53-58.
- [18] Güneş, R., Keleş, S., Hacısalıhoğlu, H. H., (1989). "Two corollaries of Holditch's theorem for the parts of surface in E^3 ", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A1, 38:59-66.
- [19] Hacısalıhoğlu, H. H., (1971). "On closed spherical motions, Quarterly of Applied Mathematics", 29:269-276.
- [20] Hacısalıhoğlu, H. H., (1972). "On the pitch of a closed ruled surface, Mechanism and Machine Theory", 7:291-305.
- [21] Hacısalıhoğlu, H. H., (1974). "On the geometry of motion in the Euclidean n -space", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A1, 10:95-108.
- [22] Hoschek, J., (1975). "Eine Verallgemeinerung des Satzes von Holditch", Monatshefte für Mathematik, 80: 93-99.
- [23] Kempe, A. B., (1878). "Note on Mr. Leudesdorf's Theorem in kinematics", Messenger Math., 7: 165-167.
- [24] Leudesdorf, C., (1877). "Theorem in kinematics", Messenger Math., 7:125-127.
- [25] Leudesdorf, C., (1878). Note on the theorem in kinematics, Messenger Math., 8:11-12.
- [26] Müller, H. R., (1959). "Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik", Monatshefte für Mathematik, 63 (3):231-240.
- [27] Müller, H. R., (1978). "Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung", Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges., 29:115-119.
- [28] Müller, H. R., (1980). "Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven", Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges., 31: 129-135.
- [29] Müller, H. R., (1982). "Über den Rauminhalt kinematisch erzeugter", geschlossener Flächen, Archiv der Mathematik, 38:43-49.
- [30] Müller, H. R., (1963). Kinematik Dersleri (Çeviri), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Um.96-Mat.27, Ankara.
- [31] Pottmann, H., (1986). "Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene", Elemente der Mathematik, 41:1-6.
- [32] Pottmann H., (1987). "Ebene Äquiforme zwangsläufe im Grossen II", Results in Mathematics, 11:122-143.

- [33] Pottmann, H., (1987). "Sätze vom Holditch-Typ über den Flächeninhalt kinematisch erzeugter unbeschränkter Bereiche", Anzeiger der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Klasse, 124:43-51.
- [34] Steiner, J., (1881). Gesammelte Werke II, Reimer, Berlin.
- [35] Thüring, R., (1952). "Studien über den Holditchschen Satz", Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel, 63:221-252.
- [36] Thüring, R., (1956). "Studien über die Holditchsche Bewegung", Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel, 67:575-594.
- [37] Tutar, A., Kuruoğlu, N., (1999). "The Steiner formula and the Holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics", Mech. Mach. Theory, 34:1-6.
- [38] Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2004). "The generalized Holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics", Czechoslovak Mathematical Journal, 54 (129): 337- 340.
- [39] Müller, H. R., (1978). "Verallgemeinerung einer Formel von Steiner", Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges., 29:107-113.
- [40] Hacısalıhoğlu, H. H., (1990). On the geometry of motion of Lorentzian plane, Proc. of Assiut First International Conference of Mathematics and Statistics, Part I, 12-14 February 1990, University of Assiut, Assiut, Egypt, 87-107.
- [41] Ergin, A. A., (1991). "On the 1-parameter Lorentzian motions", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A1 , 40 (1-2): 59-66.
- [42] Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2004). "Holditch-type theorems for the planar Lorentzian motions", Int. J. Pure Appl. Math., 17(4): 467-471.
- [43] Gürses, N., (2014). 1-Parameter motions in the Affine Cayley Klein Plane, Phd. Thesis, Yildiz Technical University Graduate School of Natural and Applied Sciences.
- [44] Gürses N., Yüce S., (2015). "One Parameter Planar Motions in Generalized Complex Number Plane C_J ", Advances in Applied Clifford Algebras, 25:889-903.
- [45] Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2007). "Steiner formula and Holditch-type theorems for homothetic Lorentzian motions", Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 31 (A2):207-212.
- [46] Güngör, M. A., Tosun, M., (2008). "One parameter Lorentzian motions in Lorentz 3-space", Kragujevac J. Math., 31:95-109.
- [47] Yıldırım, H., Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2009). "Holditch Theorem for the closed space curves in Lorentzian 3-space", Acta Mathematica Scientia, 172-180.
- [48] Yıldırım, H., (2010). Spatial Motions and The Holditch-Type Theorems in 3-Dimensional Lorentzian Space, Phd. Thesis, Istanbul University Graduate School of Natural and Applied Sciences.
- [49] Yıldırım, H., Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2010). 3-boyutlu Lorentz uzayında 1-parametrelili kapalı homotetik hareketler altında Holditch-Tipi Teoremler, VIII. Geometri Sempozyumu Bildiri ve Poster Özet Kitapçığı, 29 Nisan-2 Mayıs 2010, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 41.

- [50] Erişir, T., Güngör, M.A., Tosun, M., (2015). "A new Generalization of Steiner Formula and the Holditch Theorem", *Adv. Appl. Clifford Algebra*, 26:97.
- [51] Yüce, S., Kuruoğlu, N., (2010). "Holditch theorem and Steiner formula for the planar hyperbolic motions", *Adv. Appl. Clifford Algebra*. 20:195-200.
- [52] Röschel, O., (1984). "Der Satz von Holditch in der isotropen Ebene", *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 36:27-32.
- [53] Pottmann H., (1986). "Ein isotropes Analogon zum Satz von Holditch", *J. Geom.*, 26(1):35-42.
- [54] Akar, M., Yüce, S., And Kuruoğlu, N., (2013). "One-parameter-Planar Motion in the Galile Plane", *International Electronic Journal of Geometry*, 6 (1):79-88.
- [55] Akbıyık M., Yüce S., (2015). "The Moving Coordinate System And Euler-Savary's Formula For The One Parameter Motions On Galilean (Isotropic) Plane", *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2015:88-105.
- [56] Tütüncü, E. E., (2009). *The Geometry of Motions in the Galile Spaces*, Phd. Thesis, Ankara University Graduate School of Natural and Applied Sciences.
- [57] Yaglom, I.M., (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis*, Springer-Verlag New York.
- [58] Röschel, O., (1984). *Die Geometrie des Galileischen Raumes*, Habilitationsschrift, Leoben.
- [59] Ali, A. T.,(2010). "Position vectors of curves in the Galile space G^3 ", *Mathematicki Vesnik*, 64(3):200-210.
- [60] Şahin, T., Yılmaz, M., (2010). "On Singularities Of The Galile Spherical Darboux ruled Surface of Space curve in G^3 ", *Ukrainian Mathematical Journal*, 62 (10) : 1597-1610.
- [61] Yaylı, Y., Tutuncu, E., (2009). Generalized Galile transformations and dual Quaternions, *Scientia Magma*, 5(1):94-100.
- [62] Akyiğit, M., Azak, A.Z., And Ersoy, S., (2009). "Involute-Evolute Curves in Galile Space G^3 ", *Scientia Magma*, 6(4):75-80.
- [63] Divjak, B., (1998). "Curves in Pseudo-Galile Geometry", *Annales Univ. Sci. Budapest*, 41: 117-128.
- [64] Divjak, B. And Milin-Sipus, Z., (2003). "Special Curves on Ruled Surfaces in Galile and Pseudo-Galile Spaces", *Acta Math. Hungar.*, 98(3): 203-215.
- [65] Kamenarovic, I., (1995). "Quadrics in the Galile Space G^3 ", *Rad Hrvatske akad. Znan. Umj. Mat.* 470(12): 139-156.
- [66] Divjak, B. And Milin-Sipus, Z., (2003). "Minding Isometries of Ruled Surfaces in Pseudo-Galile Space, *J. Geom.*, 77: 35-47.
- [67] Kamenarovic, I., (1991). "Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galile Space G^3 ", *Rad HAZU. Mat.*, 456(10): 183-196.
- [68] Ögrenmiş, A., Öztekin, H., Ergut, M., (2009). "Bertrand Curves in Galile space and Their Characterizations", *Kragujevac J. Math.*, 32:139-147.

- [69] Ögrenmiş, A., Bektaş, M., And Ergut, M., (2004). "The Characterizations for Helices in the Galile Space G^3 ", International Journal of pure and Applied Mathematics, 16(1): 29-34.
- [70] Ögrenmiş, A., Ergut, M., Bektaş, M., (2007). "On the Helices in the Galile Space G^3 ", Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 31(A2).
- [71] Pavkovic, B. J., Kamenarovic, I., (1987). "The equiform Differential Geometry of Curves in the Galile Space G^3 ", Glasnik Matematicki, 22(42): 449-457.
- [72] Sipus, Z.M., (2008). "Ruled Weingarten Surfaces in the Galile Space", Periodica Mathematica, Hungarica, 56(2):213-225.
- [73] Karacan, M. K., Tuncer, Y., (2010). "Characterization of Slant Helix in Galile and Pseudo-Galile Spaces", SAU Fen Edebiyat Fak. Dergisi, 1: 43–53.
- [74] Ekici, C., Dede, M., (2011). "On the darboux vector of ruled surfaces in Pseudo-Glilean Space", Mathematical and Computational Applications, 16(4):830-838.

GALILE DÜZLEMİ

Bu bölümde Galile Düzlemi hakkında Literatürde var olan temel bilgiler verilecektir.

A.1 Doğrusal (Rectilinear) Hareket

Doğrusal (Rectilinear) hareket; bir Φ objesinin noktalarının bir doğru boyunca hareket etmesine *doğrusal hareket* denir, [57].

Tanım A.1

Doğrusal hareketler için Galile dönüşümleri

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

altında değişmeyenlerin teorisine *Galileo'nun Görecelik Prensiplerinin Geometrisi* veya *iki boyutlu Galile düzlemi* denir ve G^2 ile gösterilir. Bazı kaynaklarda Galile düzlemine izotropik düzlem de denilmektedir.

Doğrusal hareketler için Galile dönüşümleri

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases} \quad (\text{A.1a})$$

shear dönüşümü ve

$$\begin{cases} x' = x_1 + a \\ y' = y_1 + b \end{cases} \quad (\text{A.1b})$$

öteleme dönüşümünden oluşur. Böylece iki boyutlu Öklid düzlem ve iki boyutlu Galile düzlem arasındaki temel fark, Öklidyen geometri hareketleri dönme ve öteleme dönüşümlerinden oluşurken Galile düzlem hareketlerinin öteleme ve shear dönüşümlerinden oluşmasıdır, [57].

Teorem A.2

Galile Dönüşümleri

- a) Doğruları doğrular üzerine
- b) Paralel doğruları paralel doğrular üzerine
- c) Doğrudaş AB ve CD doğru parçalarını $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$ özelliğine sahip $A'B'$ ve $C'D'$ doğrudaş doğru parçaları üzerine
- d) F cismini aynı alanlı F' cismi üzerine dönüştürür, [57].

Tanım A.3

Oy – *eksenine* paralel olan doğrulara özel doğru (special line) veya izotropik doğru denir, [57].

Tanım A.4

Oy – *eksenine* paralel olmayan doğrulara sıradan doğru (ordinary line) denir, [57].

A.2 Galile Düzlemde İç Çarpım

Tanım A.5

Galile düzleminde $\mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (x_2, y_2) \in G^2$ olmak üzere Galile iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ şeklinde gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = x_1 x_2$$

olarak tanımlanır, [57].

Tanım A.7

G^2 Galile düzleminde izotropik doğrulara paralel olan vektörlere *özel vektör* veya izotropik vektörler denir, [57].

A.3 Galile Düzleminde Özel İç Çarpım

Tanım A.8

Galile düzleminde $\mathbf{x} = (0, y_1), \mathbf{y} = (0, y_2) \in G^2$ izotropik vektörlerinin Galile özel iç çarpımı

$\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ ile gösterilir ve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\delta = y_1 y_2$$

olarak tanımlanır, [57].

A.4 Galile Düzleminde Norm

Tanım A.9

Galile düzlemin her $\mathbf{a} = (x_1, y_1) \in G^2$ vektörünün normu $\|\mathbf{a}\|_G$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G} = |x_1|$$

şeklinde tanımlanır. $\|\mathbf{a}\|_G = 1$ ise $\mathbf{a}$ vektörüne birim vektör denir, [57].

A.5 Galile düzleminde Özel Norm

Tanım A.10

Galile düzleminde $\mathbf{a} = (0, y_1) \in G^2$ izotropik vektörlerinin normu $\|\mathbf{a}\|_\delta$ ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{a}\|_\delta = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_\delta} = |y_1|$$

şeklinde tanımlanır, [57].

A.6 Galile Düzleminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Tanım A.11

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2) \in G^2$ noktaları arasındaki uzaklık d_{AB} ile gösterilir ve

$$d_{AB} = \|\mathbf{AB}\|_G = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_G}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olmak üzere işaretli uzaklık

$$d_{AB} = x_2 - x_1$$

uzaklığına eşittir. Burada $x_2 > x_1$ dir, [57].

A.7 Galile düzleminde İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık

Tanım A.12

Eğer A ve B noktaları arasındaki uzaklık sıfır ise, yani $x_1 = x_2$ ise, A ve B aynı izotropik doğru üzerindedir. Böyle noktalar için işaretli özel uzaklık $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (0, y_2 - y_1)$ olmak üzere

$$\delta_{AB} = \sqrt{\langle \mathbf{AB}, \mathbf{AB} \rangle_\delta} = y_2 - y_1$$

ile tanımlanır. Burada $y_2 > y_1$ dir, [57].

A.8 Galile Düzleminde Diklik

Tanım A.13

Galile düzleminde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G^2$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_G = 0$$

olması $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_G \neq 0$ için $\mathbf{b} = (0, y_2)$ olduğunda sağlanır. Bu durumda $\mathbf{b}$ vektörüne $\mathbf{a}$ vektörünün *diki* denir ve $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ile gösterilir, [57].

A.9 Galile Düzleminde Merkezil Çember

Tanım A.14

Sabit bir Q noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $M(x, y)$ noktalarının kümesine *çember (circle)* denir ve S ile gösterilir. Burada $Q(a, b)$ noktasına S çemberinin *merkezi* ve negatif olmayan r sayısına çemberin *yarıçapı* denir. Böylece S çemberi

$$(x - a)^2 = r^2$$

veya

Tanım A.15

Bir $Q = (x_0, y_0)$ noktasında kesişen $y = kx + s$ ve $y = k_1x + s_1$ doğruları arasındaki açı

$$\delta_{l_l} = k_1 - k$$

formülü ile hesaplanır, [57].

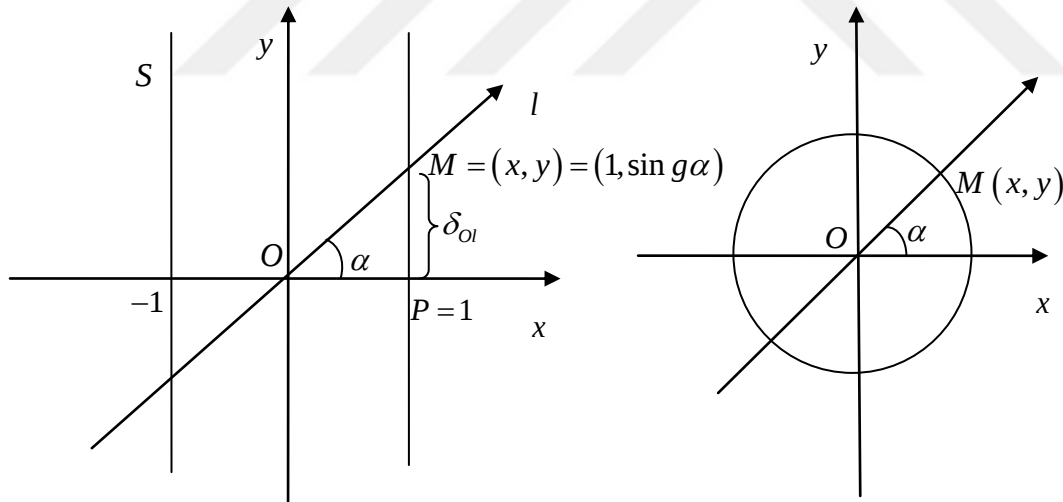
A.11 Galile Düzleminde İki Doğru Arasındaki Dik Açı

Tanım A.16

Galile düzleminde izotropik doğrular ile sıradan doğrular arasındaki açiya *dik açı* denir ve izotropik doğrulara sıradan doğruların *dikleri* denir, [57].

A.12 Galile Düzleminde Galile Trigonometri

S , O merkezli birim çember ve M , x ve y koordinatlı S üzerinde bir nokta olsun. l , OM doğrusunu ve α , δ_{Ol} açısını gösterebilir.



Şekil A. 3 Galile ve Öklid birim çemberler

Böylece Galile anlamında kosinüs ve sinüs fonksiyonları, sırasıyla, $\cos_g$ ve $\sin_g$ olmak üzere

$$\cos_g \alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sin_g \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{\delta_{Ol}}{1} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

bulunur, [57].



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mücahit AKBIYIK
Doğum Tarihi ve Yeri : 1985, Zonguldak
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : makbiyik@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	2009
Lise	Sayısal	Kilimli Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010-2011	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Akbiyik M., Yüce S., (2018). "On the Areas of the Trajectory Surface Under the Galilean Motions in the Galilean Space", International Journal Of Geometric Methods In Modern Physics, 2018:1-16.
2. Akbiyik M., Yüce S., (2017). "On The Volume Of The Trajectory Surface Under The Galilean Motions In The Galilean Space", Applied Mathematics E-Notes, 17:297-306.
3. Macit N. , Akbiyik M., Yüce S., (2017). "Some new associated curves of an admissible Frenet curve in 3-dimensional and 4-dimensional Galilean Spaces", Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 7:110-122.
4. Akbiyik M., Yüce S., (2016). "Euler Savary's Formula On Complex Plane C", Applied Mathematics E-Notes, 2016:65-71.
5. Gürses N., Akbiyik M., Yüce S., (2016). "One-Parameter Homothetic Motions and Euler-Savary Formula in Generalized Complex Number Plane C_J ", Advances in Applied Clifford Algebras, 26:, 115-136.
6. Akbiyik M., Yüce S., (2015). "The Moving Coordinate System And Euler-Savary's Formula For The One Parameter Motions On Galilean (Isotropic) Plane", International Journal of Mathematical Combinatorics, 2015:88-105.
7. Gürses N., Akbiyik M., Yüce S., (2015). "Galilean Bobillier Formula for One-Parameter Motions", International Journal of Mathematical Combinatorics, 4:74-83.

Bildiri

1. Gürses N., Akbiyik M., Yüce S., (2018). "One-Parameter Homothetic Motions in Generalized Complex Number Plane C_J ", International Congress on Matheamtics Statistics and Analytical Methods, 2-3 Mart 2018, İstanbul, Türkiye.
2. Gürses N., Yüce S., Akbiyik M., (2018). "Moving Coordinate System And Euler-Savary Formula Under One-Parameter Planar Homothetic Motions in Generalized Complex Number Plane C_J ", 16th International Geometry Sysposium, 4-7 Temmuz 2018, Manisa, Türkiye.
3. Akbiyik M., Yüce S., (2017). "The volume of the trajectory surface in 3-Dimensional Galilean Space", International Conference On Mathematics And Engineering (Icome), 10-12 Mayıs 2017, İstanbul, Türkiye.
4. Akbiyik M., Yüce S., (2017). "One-Parameter Homothetic Motion on the Galilean Plane", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications Conference (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye.
5. Akbiyik M., Yüce S., (2017). "Euler-Savary's Formula On Dual Plane", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications Conference (AHA2017), 24-27 Temmuz 2017, İstanbul, Türkiye.
6. Akbiyik M., Gürses N., Yüce S., (2016). "A survey on the Base, Rolling and Roulette Curves on Generalized Complex Number Plane C_J ", 2nd International Conference on Pure and Applied Sciences, 1-5 Haziran 2016, İstanbul, Türkiye.

7. Gürses N., Akbiyik M., Yüce S., (2014). "Galilean Bobillier Formula for One Parameter Planar Motions", 33rd Colloquim on Combinatorics, 7-8 Kasım 2014, Ilmenau, Almanya.
8. Akbiyik M., Yüce S., (2013). "A Note On Euler Savary's Formula On Galilean Plane", IWBCSM-2013 1st International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences 1-3 Haziran 2013, Tiran, Arnavutluk.
9. Gürses N., Bektaş Ö., Akbiyik M., Yüce S., (2013). "On the Osculating Spheres of a Dual Quaternionic and Dual Split Quaternionic Curve", 2nd International Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2013), 26-29 Ağustos 2013, Saraybosna, Bosna Hersek.
10. Akbiyik M., Yüce S., (2012). "Euler Savary s Formula on Galilean Plane", The Algerian-Turkish International days on Mathematics 2012, 9-11 Ekim 2012, Annaba, Cezayir.
11. Akbiyik M., Yüce S., (2012). "On the Moving Coordinate System on Galilean Plane And Pole Lines", International Conference on Applied Analysis and Algebra, 2-24 Haziran 2012, İstanbul, Türkiye.

ÖDÜLLERİ

1. 2017 Yayın Teşvik Ödülü
2. 2018 Yayın Teşvik Ödülü