

168430

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BEŞ BOYUTLU DÖNEN KARA DELİĞİN
UZAY-ZAMANINDA PARÇACIĞIN HAREKETİ**

Fizikçi Güzide UNCU

**FBE Fizik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reyhan KAYA. *Reyhan Kaya*

Prof. Dr. Aya OĞUZ *Aya Oğuz*

Doç. Dr. Mehmet ŞİRİN *Mehmet Şirin*

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. MYERS-PERRY METRİĞİ ve ÖZELLİKLERİ	3
3. IŞIK ve PARÇACIKLAR İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ: İLK İNTEGRALLER	9
4. HAREKETİN GENEL TİPLERİ ve ÖZEL DURUMLAR	16
4.1 Merkezci Hareket	16
4.2 Θ Yönünde Hareket	17
4.3 Dairesel Yörüngeler	19
5. SONUÇLAR	24
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	27

SİMGE LİSTESİ

E	Enerji
g_{ab}	Metrik tansör
H	Hamiltoniyen
$K^{\mu\nu}$	Killing tansörü
L	Açısal momentum
$\mathbf{L}$	Lagranjiyen
m	Kütle
p	Eşlenik momentum
r_0	Kara deliğin kütlesi ile ilgili uzunluk parametresi
S	Eylem
V	Etkin potansiyel
N	Uzayın boyutu
λ	Afin parametresi
Ω	Açısal hız
τ	Öz zaman



KISALTMA LİSTESİ

GeV	Giga elektron volt
TeV	Terra elektron volt



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1 Merkezci Hareket Etkin Potansiyel.....	21



ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana veren, başlangıcından sonuna kadar çalışmalarımın her aşamasında düşünce ve önerilerinden yararlandığım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Reyhan Kaya'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca konu ile ilgili fikir alış-verişinde bulunduğum değerli arkadaşlarım Doktora öğrencileri Fatih Erman ve Ahmet Baykal'a teşekkür ederim.



BEŞ BOYUTLU DÖNEN KARADELİĞİN UZAY-ZAMANINDA PARÇACIĞIN HAREKETİ

Güzide UNCU
Fizik, Yüksek Lisans Tezi

Bu çalışmada dönen bir kara deliğin beş boyutlu uzay-zamanında parçacıkların hareketleri çalışılmıştır. Bu tür bir kara deliği tasvir eden Myers-Perry metriği ele alınmış ve metriğin simetrilerinden yararlanarak sistemin üç Killing vektörünün yanısıra bir de Killing tansörüne sahip olduğu gösterilmiştir. Bu simetriler aracılığıyla Hamilton-Jacobi hareket denklemlerinin değişkenlerine ayrıştırılabileceği gösterilmiş ve sistemin hareket sabitleri (ilk integralleri) belirlenmiştir.

İlk integraller kullanılarak hareket denklemleri birinci derece denklemlere indirgenmiştir. Parçacığın farklı tür hareketleri betimlenerek, hareketin bazı ilginç özel durumları incelenmiştir. Son olarak metriğin artalanındaki ekvatorial düzlemlerde hiçbir kararlı dairesel yörüngenin bulunmadığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kara delik, Myers-Perry metriği, Killing vektörü, Killing tansörü.

PARTICLE MOTION IN A SPACE-TIME OF A FIVE DIMENSIONAL ROTATING BLACK HOLE

Güzide UNCU
Physics, Ms. Thesis

In this work the motion of particles in a space-time of a five-dimensional rotating black hole is studied. In addition the Myers-Perry metric which describes such a blackhole is considered and exploiting the symmetries of the metric it is shown that the system has a Killing tensor in addition to three Killing vectors. Using this symmetries it is shown that Hamilton-Jacobi equations of motion allows a separation of variables and the constants of motion (first integrals) are found.

The symmetries are used to reduce the equations of motion in the first-order form. Different types of motion of a particle is described and some interesting special cases are studied. Finally it is proven that there are no stable circular orbits in equatorial planes in the background of this metric.

Keywords: Blackhole, Myers-Perry metric, Killing vector, Killing tensor.

1. GİRİŞ

Fizikçilerin amacı doğada olduğu bilinen 4 kuvveti birleştirerek doğanın nihai yasasını bulmaktır. Şu ana kadar Standart Model, zayıf, güçlü ve elektromanyetik kuvvetleri birleştirmeyi başardı. Ancak bu kuvvetlerle kütleçekimini bir teoride birleştirmek oldukça zor görünmektedir.

Kütleçekimi ile elektromanyetizmayı birleştiren ilk yüksek boyutlu birleştirme kuramı Theoder Kaluza ve Oskar Klein tarafından ortaya atıldı. Kaluza-Klein bu iki kuvveti 5 boyutlu teoride birleştirmeye çalıştılar.

Bu dört kuvveti birleştirmek için elimizdeki teorilerden en güçlü aday sicim kuramıdır. Sicim kuramının ana varsayımı, maddenin yapıtaşlarının nokta parçacıklar değil, kapalı ya da açık bir boyutlu sicimler olduğudur. Sicim kuramında en önemli problem fazla sayıda süpersicim kuramı olmasıydı.

1995'ten sonra beş tane olan süpersicim kuramı M kuramı adı altında birleştirildi. M kuramında ise temel yapıtaşı 2 boyutlu zarlardır. Süpersimetrisinin olduğu düşünülürse M kuramının kuantum mekaniği ile uyumlu olabilmesi için uzayın 11 boyuttan oluşması gerekmektedir. Bu da 11 boyutlu kuramdan 4 boyutlu fiziği nasıl elde edeceğimiz sorusunu doğurur. Bu sorunun çözümü için bir öneri, ekstra büyük boyutlar içeren zar dünya modelleridir. Bu modellerdeki ana fikir evrenimizin 5 boyutlu düz ya da hiperbolik uzay-zamanda evrilen 4 boyutlu bir D-zar olduğudur. Yani, 5 boyutlu uzayın sahip olduğu temel nitelikler 4 boyutlu fizikte halen cevabını bulamadığımız temel sorunlara çözüm getirebilir.

Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos ve Gia Dvali daha da radikal bir düşünce ortaya attılar. Bu kuramcılara göre beşinci boyutun ölçeği, bir milimetre bile olabilirdi. Üç kuramcıyı bu iddialı önermeye ulaştıran hedef, “hiyerarşi sorununu” çözmekti. Yani elektrozayıf birleşmenin düşük enerjisi ile öteki birleşme düzeyleri arasındaki uçurumu kaldırmayı hedefliyorlardı. Araştırmacılar, zayıf kütleçekimin öteki kuvvetler kadar güçlendiği Planck ölçeğinin, elektrozayıf ölçeğine indirilmesiyle sorunun çözüleceğini düşündüler. Ancak bunun için iki ya da daha fazla ek boyut gerekiyordu. Bu boyutların ölçekleriye bir milimetrenin biraz altında olmalıydı. Böyle büyük boyutları algılayamıyor olmamızı ise bunların yalnızca kütleçekimince algılanmasıyla açıklıyorlardı (Arkani-Hamed vd.,1998).

Zar modellerinin genel özelliği temel kuantum kütleçekim ölçeğinin çok düşük olabileceğini (TeV mertebesinde) ve ekstra uzaysal boyutların büyüklüğünün Planck uzunluğundan ($\sim 10^{-33}$ cm) çok daha geniş olabileceğini ileri sürmeleridir.

Ekstra şişman boyutlu bu modellerde bir kara deliğin minimum kütlesi Planck kütlesinden (10^{19} GeV) çok daha küçük ve TeV boyutunda olabilir (Antoniadis vd., 1998). Bu tarz küçük kara delikler ileride parçacık hızlandırıcılarındaki çarpışmalarda ve kozmik ışın deneylerinde oluşturulabilir (Eardly ve Giddings, 2002). Bu şekilde oluşturulan kara deliklerin bir çoğunun dönen kara delikler olacağı beklenir (Giddings ve Thomas, 2002). Bu gibi yüksek boyutlu mini kara delikler Einstein boşluk denklemlerinin klasik çözümleri ile betimlenebilir. Bu mini kara delikler zara bağlanabilirler ya da eğer zar gerilimi küçük ise zarı terk ederek kütle uzayında hareket edebilirler (Frolov, 2002).

Son zamanlarda yüksek boyutlu kara delikler oldukça ilgi çekti (Voloshin, 2002; Clement vd., 2003). Yüksek boyutlu kara delikler sicim teorisi kullanarak da incelenmiştir. Sicim teorisindeki farklı modellerden oluşan düşüncelerden yola çıkarak yüksek boyutlu (özellikle 5 boyutlu uzay-zamanda) kara delikler hakkında birçok çalışma yapılmıştır (Gibbons ve Herdeiro, 1999; Herdeiro, 2000). Bu çalışmalarda elde edilen çözümler Einstein denkleminin boşluk çözümleri değildir ve süpersimetrinin sağlanması için bazı parametreler özel değerler almalıdır.

Bu çalışmada dönen bir kara deliğin 5 boyutlu uzay-zamanında parçacığın hareketi incelendi. Bu uzay-zamanda Killing tansörlerin varlığı gösterildi.

2. MYERS-PERRY METRİĞİ ve ÖZELLİKLERİ

Bu çalışmada, 5 boyutta dönen kara deliğin dış alan çözümleri ele alınmıştır. Dönen kara deliği, yoğunluğu çok büyük küresel ya da elipsoid kütlelerin (kendi etrafında) dönen hali olarak düşünebiliriz.

İki nokta arasındaki sonsuz küçük uzaklık

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada g_{ab} metrik tansörünü gösterir. Metrik tanımlandığı uzayın geometrik özelliklerini tayin eder.

3+1, (N=3), boyutlu yüksüz kara delik iki büyüklük tarafından karakterize edilir. Bunlardan birincisi kütle, m, ikincisi ise açısal momentum, a'dır.

Dönen kara deliğin 3+1, (N=3), boyuttaki çözümünü veren metrik Kerr metriği olarak adlandırılır. Boyer-Lindquist koordinatları Kerr çözümünün temel özelliklerini irdelemek için en uygun koordinattır. Eğer $a=0$ alırsak Schwarzschild çözümünü elde ederiz (Inverno, 1992).

N+1, (N>3) boyutlarda durum daha karmaşıktır. Uygun sınır koşulları ile Einstein denkleminin boşluktaki çözümü oldukça zordur (Myers ve Perry, 1986).

Boyer-Lindquist koordinatlarında N çift boyutlu dönen kara delik için metrik,

$$ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a_i^2)(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) + \frac{\mu r^2}{\pi F} (dt + a_i \mu_i^2 d\phi_i^2)^2 + \frac{\pi F}{\pi - \mu r^2} dr^2 \quad (2.2)$$

şeklinde verilmiştir.

Burada

$$\pi = \prod_{i=1}^{(N-1)/2} (r^2 + a_i^2) \quad (2.3)$$

ve

$$F = 1 - \frac{a_i^2 \mu_i^2}{r^2 + a_i^2} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca μ_i 'ler birbirinden bağımsız değildir ve

$$\mu_i^2 = 1 \quad (2.5)$$

bağıntısı vardır.

5 boyutlu yani $N=4$ için dönen kara delik $i=1,2$ değerleri alır ve metrik aşağıdaki gibi daha basit formda yazılır.

$$ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a_1^2)(d\mu_1^2 + \mu_1^2 d\phi_1^2) + (r^2 + a_2^2)(d\mu_2^2 + \mu_2^2 d\phi_2^2) + \frac{\mu r^2}{\pi F} (dt + a_1 \mu_1^2 d\phi_1 + a_2 \mu_2^2 d\phi_2)^2 + \frac{\pi F}{\pi - \mu r^2} dr^2 \quad (2.6)$$

$a_1 = a$ ve $a_2 = b$ olarak seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \pi &= (r^2 + a_1^2)(r^2 + a_2^2), \\ \pi &= (r^2 + a^2)(r^2 + b^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ve

$$\begin{aligned} F &= 1 - \frac{a_1^2 \mu_1^2}{r^2 + a_1^2} - \frac{a_2^2 \mu_2^2}{r^2 + a_2^2}, \\ F &= 1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2} - \frac{b^2 \cos^2 \theta}{r^2 + b^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

denklemleri ile ifade edilir.

(2.5) bağ koşulunun sağlanması için,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sin \theta \\ \mu_2 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= \cos \theta d\theta \\ d\mu_2 &= -\sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

denklemleri elde edilir.

(2.6) denkleminde $\phi_1 \rightarrow \phi$ ve $\phi_2 \rightarrow \psi$ kullanılarak

$$ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a^2)(\cos^2 \theta d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (r^2 + b^2)(\sin^2 \theta d\theta^2 + \cos^2 \theta d\psi^2) + \frac{\mu r^2}{\pi F} (dt + a \sin^2 \theta d\phi + b \cos^2 \theta d\psi)^2 + \frac{\pi F}{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2) - \mu r^2} dr^2 \quad (2.11)$$

denklemini bulunur. Bu denklemde

$$\pi F = (r^2 + a^2)(r^2 + b^2) \left(1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2} - \frac{b^2 \cos^2 \theta}{r^2 + b^2}\right) \quad (2.12)$$

yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{4\Delta} dx^2 + \rho^2 d\theta^2 - dt^2 + (x + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + (x + b^2) \cos^2 \theta d\psi^2 + \frac{r_0^2}{\rho^2} \left[dt + a \sin^2 \theta d\phi + b \cos^2 \theta d\psi \right]^2 \quad (2.13)$$

denklemini bulunur (Frolov, 2003). Burada,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta, \\ \Delta &= (x + a^2)(x + b^2) - r_0^2 x. \end{aligned} \quad (2.14)$$

r_0 , kara deliğin kütlesi ile ilgili olan uzunluk parametresidir. ϕ ve ψ açıları $[0, 2\pi]$ aralığında değerler alırken, θ açısı $[0, \pi]$ arasında değerler almaktadır. Aynı zamanda r yarıçapı yerine $x=r^2$ koordinatını kullanıyoruz. Bu sayede hesaplar kolaylaşıyor ve bir çok ifade daha kısa bir şekil alıyor.

Kara deliğin olay ufkunun içine giren bir madde hatta ışık bile bir daha dışarı çıkamaz. Her parçacık, uzay- zaman eğriliğinin sonsuz olduğu bu noktada varlığını yitirir.

$$\Delta = (x + a^2)(x + b^2) - r_0^2 x = 0 \quad (2.15)$$

olduğunda metrik sonsuz olur.

Kara deliğin olay ufku $x = x_+$ 'da yer almaktadır. Burada,

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[r_0^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{(r_0^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2} \right] \quad (2.16)$$

ifadesi ile verilmektedir. Açısal hızlar Ω_a , Ω_b

$$\Omega_a = \frac{a}{x_+ + a^2}, \quad \Omega_b = \frac{b}{x_+ + b^2} \quad (2.17)$$

denklemleri ile ifade edilir (Straumann, 1984).

Denklem (2.13) de verilen metriği matris formunda yazarak determinantını ve tersini hesaplayalım.

$\mu = 0,1,2,3,4$ indisleri için sırasıyla t, x, θ, ϕ, ψ değişkenlerini alalım.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{r_0^2}{\rho^2} - 1 & 0 & 0 & \frac{r_0^2}{\rho^2} (a \sin^2 \theta) & \frac{r_0^2}{\rho^2} (b \cos^2 \theta) \\ 0 & \frac{\rho^2}{4\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 & 0 \\ \frac{r_0^2}{\rho^2} (a \sin^2 \theta) & 0 & 0 & \sin^2 \theta \left(x + a^2 + \frac{r_0^2}{\rho^2} (a^2 \sin^2 \theta) \right) & \frac{r_0^2}{\rho^2} (ab \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\ \frac{r_0^2}{\rho^2} (b \cos^2 \theta) & 0 & 0 & \frac{r_0^2}{\rho^2} (ab \sin^2 \theta \cos^2 \theta) & \cos^2 \theta \left(x + b^2 + \frac{r_0^2}{\rho^2} (b^2 \cos^2 \theta) \right) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Yukarıdaki ifadededen,

$$g_{tt} = \frac{r_0^2}{\rho^2} - 1,$$

$$g_{t\phi} = \frac{r_0^2}{\rho^2} (a \sin^2 \theta),$$

$$g_{t\psi} = \frac{r_0^2}{\rho^2} (b \cos^2 \theta),$$

$$g_{xx} = \frac{\rho^2}{4\Delta},$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2,$$

$$g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \left(x + a^2 + \frac{r_0^2}{\rho^2} (a^2 \sin^2 \theta) \right),$$

$$g_{\phi\psi} = \frac{r_0^2}{\rho^2} (a b \sin^2 \theta \cos^2 \theta),$$

$$g_{\psi\psi} = \cos^2 \theta \left(x + b^2 + \frac{r_0^2}{\rho^2} (b^2 \cos^2 \theta) \right). \quad (2.19)$$

elde edilir.

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \quad (2.20)$$

ifadesinden

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \rho^2 \quad (2.21)$$

bulunur.

Metriğin kontravaryant bileşenleri

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}, \quad \begin{cases} \rho = \mu & \text{ise } 1 \\ \rho \neq \mu & \text{ise } 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

bağıntısından yararlanarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g^{tt} = \frac{1}{\rho^2} \left[(a^2 - b^2) \sin^2 \theta - \frac{(x + a^2) [\Delta + r_0^2 (x + b^2)]}{\Delta} \right],$$

$$g^{t\phi} = \frac{a r_0^2 (x + b^2)}{\rho^2 \Delta},$$

$$g^{t\psi} = \frac{b r_0^2 (x + a^2)}{\rho^2 \Delta},$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{(a^2 - b^2)(x + b^2) + b^2 r_0^2}{\Delta} \right],$$

$$g^{\psi\psi} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{(a^2 - b^2)(x + a^2) - a^2 r_0^2}{\Delta} \right],$$

$$g^{\phi\psi} = -\frac{a b r_0^2}{\rho^2 \Delta},$$

$$g^{xx} = 4 \frac{\Delta}{\rho^2},$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}. \quad (2.23)$$

$$a \leftrightarrow b, \quad \theta \leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \phi \leftrightarrow \psi. \quad (2.24)$$

(2.13) metriği yukarıdaki dönüşümler altında değişmezdir.

Killing vektörleri, manifoldun sonsuz küçük sürekli simetrilerinin üreteçleri olarak görülebirlirler. Killing vektörlerini bulmak için

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (2.25)$$

Killing denklemi çözülür. Burada

$$\xi_{\alpha;\beta} = \xi_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi_{\mu} \quad (2.26)$$

ifadesi kullanılır.

Bu metrik ∂_t , ∂_ϕ ve ∂_ψ olmak üzere üç Killing vektörüne sahiptir. Ayrıca $a=b$ için metrik iki ek Killing vektörüne daha sahip olur (Frolov ve Kory, 2004). Bu Killing vektörleri aşağıdaki gibidir.

$$\cos \bar{\theta} \partial_{\bar{\theta}} - \cot \bar{\theta} \sin \bar{\phi} \partial_{\bar{\phi}} + \frac{\sin \bar{\phi}}{\sin \bar{\theta}} \partial_{\bar{\psi}}, \quad (2.27)$$

ve

$$-\sin \bar{\phi} \partial_{\bar{\theta}} - \cot \bar{\theta} \cos \bar{\phi} \partial_{\bar{\phi}} + \frac{\cos \bar{\phi}}{\sin \bar{\theta}} \partial_{\bar{\psi}}. \quad (2.28)$$

Burada $\bar{\phi} = \psi - \phi$, $\bar{\psi} = \psi + \phi$ ve $\bar{\theta} = 2\theta$ 'dır.

Gelecek bölümde genel durum için (2.13) metriğinin aynı zamanda (2.29) denklemini sağlayan Killing tansörüne de $K^{\mu\nu}$ sahip olduğu gösterilecektir.

Killing tansörü

$$K_{(\mu\nu;\sigma)} = 0 \quad (2.29)$$

denklemini sağlar.

3. IŞIK ve PARÇACIKLAR İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ: İLK İNTEGRALLER

Hareket integralleri sistemde korunan büyüklüklerdir. Hareket integralleri biliniyorsa parçacığın hareketi hakkında bilgi sahibi olunabilir (Goldstein, 1980).

$g_{\mu\nu}$ metrik tansörü ile betimlenen eğri uzay-zamanda m kütlesine sahip bir test parçacığı için hareket denklemleri,

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = 0 \quad (3.1)$$

denklemleri ile verilir.

Burada $\frac{D}{D\tau}$ öz zaman τ 'ya göre kovaryant türevi simgelemektedir. Bu bölümde bu denklemler Hamilton-Jacobi yöntemi kullanılarak Myers-Perry metriğinde incelendi. Bu inceleme Carter tarafından dört boyutlu Kerr metriği için geliştirilen yaklaşıma benzerdir (Carter, 1968; Misner, 1973).

(3.1) denklemleri

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.2)$$

Lagranjiyenden türetilir. Bu denklemde ki türevler afin parametresi λ 'ya göre alınan kısmi türevlerdir. Uygunluk için

$$\tau = m\lambda \quad (3.3)$$

seçelim. Bu seçim

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -m^2 \quad (3.4)$$

ifadesine eşdeğerdir. Denklem (3.2) kullanılarak eşlenik momentumlar

$$\begin{aligned}
p_w &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}^w}, \\
p_w &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^w} \right) \dot{x}^\nu + \left(\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^w} \right) \dot{x}^\mu \right], \\
p_w &= \frac{1}{2} g_{w\nu} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu w} \dot{x}^\mu, \\
p_w &= g_{w\nu} \dot{x}^\nu,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$w \rightarrow \mu$ yazılırsa

$$p_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \tag{3.6}$$

olarak hesaplanır.

$$H = p \dot{q} - \mathbf{L} \tag{3.7}$$

denkleminin sistemin Hamiltoniyeni

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{3.8}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemde (3.6) eşitliği ve

$$I = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{3.9}$$

denklemini kullanarak Hamiltoniyen eşlenik momentumlar cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \tag{3.10}$$

(2.13) metriği kullanılarak hesaplanan momentumları açık bir şekilde yazmak yararlı olacaktır. Momentumları açık bir şekilde yazmak için (3.6) denklemini kullanılır ve

$$\begin{aligned}
p_t &= \left(-1 + \frac{r_0^2}{\rho^2}\right) \dot{t} + \frac{r_0^2 a \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi} + \frac{r_0^2 b \cos^2 \theta}{\rho^2} \dot{\psi}, \\
p_\phi &= \frac{r_0^2 a \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \left(x + a^2 + \frac{r_0^2 a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \dot{\phi} + \frac{r_0^2 a b \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\rho^2} \dot{\psi}, \\
p_\psi &= \frac{r_0^2 b \cos^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \frac{r_0^2 a b \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi} + \left(x + b^2 + \frac{r_0^2 b^2 \cos^2 \theta}{\rho^2}\right) \cos^2 \theta \dot{\psi}, \\
p_x &= \frac{\rho^2}{4\Delta} \dot{x}, \\
p_\theta &= \rho^2 \dot{\theta}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

denklemleri bulunur. (2.13) metriğinin simetrilerinden, hareketin en az üç sabitinin var olması gerektiğini anlayabiliriz. Bunlar enerji E ve ϕ ile ψ açılarınca tanımlanan bağımsız düzlemlerdeki açısal momentumun korunumlarına karşılık gelmektedir. Öyleyse,

$$p_t = -E, \quad p_\phi = \Phi \quad \text{ve} \quad p_\psi = \Psi \tag{3.12}$$

yazabiliriz. Aynı zamanda denklem (3.3) ile verilen ve durgun kütlelerin korunumuna karşılık gelen hareketin bir sabiti daha vardır. Hareket denklemlerinin oluşturduğu sistemi tamamiyle çözebilmek için hareketin bir sabitine daha ihtiyacımız var. Bu sabit, hareket denklemlerini çözmek için kullanılan Hamilton-Jacobi yönteminden elde edilebilir.

Eğer Hamiltoniyen korunuyorsa çözüm, tüm koordinatların çevrimsel olduğu bir koordinat sistemine dönüşümle elde edilir. Çünkü bu durumda hareketin integrali çok basit olur.

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{3.13}$$

Denklem (3.10) ile verilen Hamiltoniyenden yola çıkılarak, Hamilton-Jacobi denklemleri

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. Burada S eylemi göstermektedir. Hareket denklemlerinin ayrıştırılabileceği gösterilmiştir (Frolov ve Dejan, 2003). Bu yüzden eylem

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + \Phi \phi + \Psi \psi + S_\theta + S_x \tag{3.15}$$

şeklinde olmalıdır. Burada S_x ve S_θ sırasıyla x ve θ 'nın fonksiyonlarıdır. (3.14) ve (3.15) denklemlerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} & 4\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[(a^2 - b^2)\sin^2 \theta - \frac{(x+a^2)[\Delta + r_0^2(x+b^2)]}{\Delta}\right]E^2 \\ & - \frac{2ar_0^2(x+b^2)}{\rho^2\Delta}E\Phi - \frac{2br_0^2(x+a^2)}{\rho^2\Delta}E\Psi + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{(a^2 - b^2)(x+b^2) + b^2r_0^2}{\Delta}\right]\Phi^2 \\ & - \frac{2abr_0^2}{\rho^2\Delta}\Phi\Psi + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{(a^2 - b^2)(x+a^2) - a^2r_0^2}{\Delta}\right]\Psi^2 = -m^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde çeşitli sadeleştirmeler yapılarak

$$\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + (m^2 - E^2)(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + \frac{\Phi^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\Psi^2}{\cos^2 \theta} = K \quad (3.17)$$

ve

$$4\Delta\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}\right)^2 + (m^2 - E^2)x - \frac{r_0^2(x+a^2)(x+b^2)}{\Delta}\varepsilon^2 - (a^2 - b^2)\left(\frac{\Phi^2}{x+a^2} - \frac{\Psi^2}{x+b^2}\right) = -K \quad (3.18)$$

denklemleri bulunur. Burada

$$\varepsilon = E + \frac{a\Phi}{x+a^2} + \frac{b\Psi}{x+b^2} \quad (3.19)$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemlerde K , hareketin yeni bir sabitidir. İşlemlerimizde $K \rightarrow K + \text{sabit}$ serbestliğini ($\text{sabit} = a^2.E^2$ olarak) denklem (2.24) dönüşümü altında değişmez formda denklemler elde etmek için kullandık. $p_\theta = S_{,\theta}$ ve $p_x = S_{,x}$ ilişkilerini kullanarak $(S_\theta)_{,\theta}$ ve $(S_x)_{,x}$ ifadeleri yerine sırasıyla p_θ ve p_x ile değiştirebiliriz.

Korunan K niceliği p_μ momentumlarında ikinci derecedendir ve $K_{\mu\nu}$ Killing tansörü (Wald, 1984) ile

$$K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = K \quad (3.20)$$

ifadesi ilişkilendirilebilir. Denklem (3.21) kullanılarak, (3.20) denkleminin doğruluğu gösterilebilir.

$$K^{\mu\nu} = -\left(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta\right) \left(g^{\mu\nu} + \delta_t^\mu \delta_t^\nu\right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \delta_\phi^\mu \delta_\phi^\nu + \frac{1}{\cos^2 \theta} \delta_\psi^\mu \delta_\psi^\nu + \delta_\theta^\mu \delta_\theta^\nu. \quad (3.21)$$

(3.21) denkleminden yararlanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$K^{00} p_0 p_0 + 2K^{03} p_0 p_3 + 2K^{04} p_0 p_4 + K^{11} p_1 p_1 + K^{22} p_2 p_2 + K^{33} p_3 p_3 + K^{44} p_4 p_4 + 2K^{34} p_3 p_4 = K. \quad (3.22)$$

Bu denklemde p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 'ün aşağıdaki değerleri yerleştirilirse (3.20) denkleminin doğruluğu kanıtlanmış olur.

$$p_0 = -E, p_1 = \frac{\partial S_x}{\partial x}, p_2 = \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}, p_3 = \Phi, p_4 = \Psi. \quad (3.23)$$

Benzer bir sonuç 4 boyutlu Kerr metriği için Carter tarafından 1968 yılında elde edilmiştir (Carter, 1968).

(3.17) ve (3.18) denklemlerini daha basit formda yazabiliriz.

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = \sigma_\theta \sqrt{\Theta}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + (m^2 - E^2)(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + \frac{\Phi^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\Psi^2}{\cos^2 \theta} &= K, \\ \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 &= \left[K + (E^2 - m^2)(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - \frac{\Phi^2}{\sin^2 \theta} - \frac{\Psi^2}{\cos^2 \theta} \right], \\ \Theta &= \left[K + (E^2 - m^2)(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) - \frac{\Phi^2}{\sin^2 \theta} - \frac{\Psi^2}{\cos^2 \theta} \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Bu ifadeler sonucunda daha sonra kullanılacak olan Θ açık bir şekilde elde edilir. Aynı şekilde χ için

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = \sigma_x \sqrt{X}, \quad (3.26)$$

$$X = \frac{\chi}{4\Delta^2}, \quad (3.27)$$

$$4\Delta \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^2 + (m^2 - E^2)x - \frac{r_0^2(x+a^2)(x+b^2)}{\Delta} \varepsilon^2 - (a^2 - b^2) \left(\frac{\Phi^2}{x+a^2} - \frac{\Psi^2}{x+b^2} \right) = -K,$$

$$4\Delta^2 \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^2 = \Delta \left[(E^2 - m^2)x + (a^2 - b^2) \left(\frac{\Phi^2}{x+a^2} - \frac{\Psi^2}{x+b^2} \right) - K \right] + r_0^2(x+a^2)(x+b^2) \varepsilon^2, \quad (3.28)$$

$$\chi = \Delta \left[(E^2 - m^2)x + (a^2 - b^2) \left(\frac{\Phi^2}{x+a^2} - \frac{\Psi^2}{x+b^2} \right) - K \right] + r_0^2(x+a^2)(x+b^2) \varepsilon^2.$$

işlemleri yapılır.

(3.24) ve (3.26)'daki denklemlerin sağ taraflarındaki $\sigma_\theta = \pm$ ve $\sigma_x = \pm$ işaret fonksiyonları birbirinden bağımsızlardır. Her iki denklemde de işaret değişimi sağ taraftaki ifadenin yok olduğu dönüm noktalarında olur.

Hamilton-Jacobi eylemini bu fonksiyonlar cinsinden yazabiliriz.

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + \Phi \phi + \Psi \psi + \sigma_\theta \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta + \sigma_x \int^x \sqrt{X} dx \quad (3.29)$$

Hamilton-Jacobi denklemlerinin çözümü için S 'nin K, m, E, Φ ve Ψ 'ye göre türevlerini alalım. Böylece

$$\int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int^x \frac{dx}{4\Delta\sqrt{X}}, \quad (3.30)$$

$$\lambda = \int^\theta \frac{1}{\sqrt{\Theta}} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta + \int^x \frac{1}{\sqrt{X}} \frac{x}{4\Delta} dx, \quad (3.31)$$

$$t = \int^\theta \frac{1}{\sqrt{\Theta}} E (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) d\theta + \int^x \frac{1}{\sqrt{X}} \left[\frac{r_0^2(x+a^2)(x+b^2)}{4\Delta^2} \varepsilon + \frac{x E}{4\Delta} \right] dx, \quad (3.32)$$

$$\phi = \int^\theta \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \frac{\Phi}{\sin^2 \theta} d\theta - \int^x \frac{1}{\sqrt{X}} \left[\frac{a r_0^2(x+b^2)}{4\Delta^2} \varepsilon + \frac{(a^2 - b^2)\Phi}{4\Delta(x+a^2)} \right] dx, \quad (3.33)$$

$$\psi = \int^\theta \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \frac{\Psi}{\cos^2 \theta} d\theta - \int^x \frac{1}{\sqrt{X}} \left[\frac{b r_0^2(x+a^2)}{4\Delta^2} \varepsilon - \frac{(a^2 - b^2)\Psi}{4\Delta(x+b^2)} \right] dx. \quad (3.34)$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemleri birinci dereceden diferansiyel denklemler cinsinden yazmak daha kullanışlıdır. Bu denklemler λ afin parametresine göre doğrudan türev alınarak elde edilir.

$$\rho^2 \dot{\theta} = \sigma_\theta \sqrt{\Theta}, \quad (3.35)$$

$$\rho^2 \dot{x} = \sigma_x 2\sqrt{\chi}, \quad (3.36)$$

$$\rho^2 \dot{t} = E\rho^2 + \frac{r_0^2(x+a^2)(x+b^2)}{\Delta} \varepsilon, \quad (3.37)$$

$$\rho^2 \dot{\phi} = \frac{\Phi}{\sin^2 \theta} - \frac{ar_0^2(x+b^2)}{\Delta} \varepsilon - \frac{(a^2-b^2)\Phi}{(x+a^2)}, \quad (3.38)$$

$$\rho^2 \dot{\psi} = \frac{\Psi}{\cos^2 \theta} - \frac{br_0^2(x+a^2)}{\Delta} \varepsilon + \frac{(a^2-b^2)\Psi}{(x+b^2)}. \quad (3.39)$$

4. HAREKETİN GENEL TİPLERİ ve ÖZEL DURUMLARI

4.1 Merkezci Hareket

Myers-Perry metriğinde bir parçacığın jeodezik dünya çizgisi E , Φ , Ψ ve K 'nın ilk integralleri ile tamamen belirlendi. Hareketi kara deliğin dışında tartışacağız ve $\Delta > 0$ olduğunu farz edeceğiz. Diğer parametrelerin sabit değerleri için x 'in fonksiyonu olan (3.28) denklemi ile verilen χ 'yi ele alalım.

Büyük uzaklıklarda X 'in ilk terimi olan $E^2 - m^2$ faktörü önem kazanır. $E^2 < m^2$ olduğunda X fonksiyonu büyük x değerlerinde negatif olur. Öyleyse yalnızca $E^2 > m^2$ olan yörüngeler sonsuza gidebilir. Bu yörüngelere sınırsız adı verilir. $E^2 < m^2$ için yörünge daima sınırlıdır ve parçacık sonsuza ulaşamayabilir.

(2.13) metriğinde test parçacığının hareketinin niteliksel karakteristiklerini inceleyebilmek için etkin potansiyeli kullanmak uygundur. χ 'yi şu şekilde yazalım.

$$\chi = \alpha E^2 - 2\beta E + \gamma, \quad (4.1)$$

burada

$$\alpha = \Delta x + r_0^2 (x + a^2)(x + b^2), \quad (4.2)$$

$$\beta = -r_0^2 (x + a^2)(x + b^2) \left(\frac{a\Phi}{x + a^2} + \frac{b\Psi}{x + b^2} \right), \quad (4.3)$$

$$\gamma = \Delta \left[-m^2 x + (a^2 - b^2) \left(\frac{\Phi^2}{x + a^2} - \frac{\Psi^2}{x + b^2} \right) - K \right] + r_0^2 (x + a^2)(x + b^2) \left[\frac{a\Phi}{x + a^2} + \frac{b\Psi}{x + b^2} \right]^2. \quad (4.4)$$

Merkezcil dönüm noktaları $\chi = 0$, $E = V_{\pm}(x)$ koşulu ile tanımlanmıştır. Burada $V_{\pm}$

$$V_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \quad (4.5)$$

şeklindedir. $V_{\pm}$ niceliklerine etkin potansiyeller adı verilir. Etkin potansiyel x 'in ve Φ , Ψ , K hareket integrallerinin fonksiyonudur. Sonsuzda ve olay ufkunda $V_{\pm}$ etkin potansiyellerinin limit değerleri,

$$V_{\pm} = \frac{-r_0^2(x+a^2)(x+b^2)\left(\frac{a\Phi}{x+a^2} + \frac{b\Psi}{x+b^2}\right) \pm \sqrt{A}}{\Delta x + r_0^2(x+a^2)(x+b^2)} \quad (4.6)$$

denkleminde

$$\begin{aligned} A = & \left[-r_0^2(x+a^2)(x+b^2)\left(\frac{a\Phi}{x+a^2} + \frac{b\Psi}{x+b^2}\right) \right]^2 - [\Delta x + r_0^2(x+a^2)(x+b^2)] \\ & \times \Delta \left[-m^2x + (a^2 - b^2)\left(\frac{\Phi^2}{x+a^2} - \frac{\Psi^2}{x+b^2}\right) - K \right] + r_0^2(x+a^2) \\ & \times (x+b^2) \left[\frac{a\Phi}{x+a^2} + \frac{b\Psi}{x+b^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ifadesi kullanılarak

$$V_{\pm}(x=\infty) = \pm m, \quad V_{\pm}(x_+) = \Phi\Omega_a + \Psi\Omega_b \quad (4.8)$$

olur (Frolov ve Igor, 1998).

E enerjili bir parçacığın hareketi yalnızca $E \geq V_+$ veya $E \leq V_-$ olan bölgelerde mümkündür. (4.5) ifadesi bu bölgeleri birbiri ile ilişkilendiren $E \rightarrow -E$, $\Phi \rightarrow -\Phi$ ve $\Psi \rightarrow -\Psi$ dönüşümleri altında değişmez kalır.

4.2 Θ Yönünde Hareket

Şimdi θ yönünde hareketi ele alalım. $\Theta \geq 0$ olduğu için $E^2 < m^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğu sınırlı hareket yalnızca $K \geq 0$ iken mümkündür. Sınırlı hareket durumunda ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ eşitsizlikleri sağlandığında $K > 0$ olur. $K > 0$ için sınırlı ve sınırsız yörüngelerin ikisi de var olur. Sadece $\Phi = 0$ ise parçacık alt uzay $\theta = 0$ 'a ve sadece $\Psi = 0$ ise parçacık alt uzay $\theta = \frac{\pi}{2}$ 'ye ulaşabilir. $\Psi = 0$ için eğer $K = \Phi^2 - (E^2 - m^2)b^2$ ise yörünge $\theta = \frac{\pi}{2}$

yüzeyindedir. (3.25) denkleminde $\Psi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ seçilirse,

$$\Theta = (E^2 - m^2) b^2 - \Phi^2 + K \quad (4.9)$$

olur. Burada

$$K = \Phi^2 - (E^2 - m^2) b^2 \quad (4.10)$$

dir. Benzer durumda $\Phi = 0$ için eğer $K = \Psi^2 - (E^2 - m^2) a^2$ ise yörünge $\theta = 0$ yüzeyinde olur.

(3.25) denkleminde $\Phi = 0$, $\theta = 0$ seçilirse,

$$\Theta = (E^2 - m^2) a^2 - \Psi^2 + K \quad (4.11)$$

ve

$$K = \Psi^2 - (E^2 - m^2) a^2 \quad (4.12)$$

elde edilir.

Hareketin özel bir alt sınıfı da parçacıkların θ açısının $\theta = \theta_0$ değerinde sabit olduğu merkezci yörüngelere benzer yörüngelerde hareket ettiği durumlardır. Bu tür harekete karşılık gelen hareket integralleri arasındaki ilişki aynı anda

$$\Theta(\theta_0) = \left. \frac{d\Theta}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0 \quad (4.13)$$

denklemleri çözülerek bulunabilir. Bu denklemler şu formdadır

$$\Theta(\theta_0) = 0, \quad (4.14)$$

$$(E^2 - m^2) (a^2 \cos^2 \theta_0 + b^2 \sin^2 \theta_0) - \frac{\Phi^2}{\sin^2 \theta_0} - \frac{\Psi^2}{\cos^2 \theta_0} + K = 0.$$

Aynı şekilde

$$\left. \frac{d\Theta}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0 \quad (4.15)$$

eşitliğinde çeşitli sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{aligned}
(E^2 - m^2) 2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 (-a^2 + b^2) - \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\sin^4 \theta_0} \Phi^2 - \frac{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\cos^4 \theta_0} \Psi^2 + K &= 0, \\
2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 \left[(E^2 - m^2)(b^2 - a^2) + \frac{\Phi^2}{\sin^4 \theta_0} - \frac{\Psi^2}{\cos^4 \theta_0} \right] + K &= 0, \\
(E^2 - m^2)(b^2 - a^2) + \frac{\Phi^2}{\sin^4 \theta_0} - \frac{\Psi^2}{\cos^4 \theta_0} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

denklemleri bulunur. İkinci denklemde $\theta_0 = 0$ ve $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ durumları ele alınmadı.

4.3 Dairesel Yörüngeler

Dört boyutta kütleçekimsel alanın bir özelliği, kara deliğin dışında yer alan bölgede sınırlı yörüngelerin varlığıdır. Bu tür yörüngeler için iki tane dönüm noktası vardır. Bu dönüm noktaları parçacığın izlediği yolun merkezci koordinatının maksimum ve minimumuna karşılık gelir. Bunun anlamı $E = \text{sabit}$ çizgisinin, $V(r)$ etkin potansiyelini farklı iki r_1 ve r_2 noktasında kesmesidir. Bu iki nokta arasında $E > V(r)$ olur. $V(r)$ fonksiyonu $r_1 < r_{\min} < r_2$ arasında bir minimuma sahiptir. Özel durum için $E = V(r_{\min})$ olduğu zaman yörünge daireseldir. Öyleyse kararlı ve dairesel yörüngelerin varlığı kara deliklerin dışında yer alan sınırlı yörüngeler için gerekli koşuldur. Üç uzaysal boyuttan daha fazla boyuta sahip uzay-zamandaki Newton kütleçekimde kararlı dairesel yörüngelerin olmadığı bilinmektedir.

Schwarzschild metriği,

$$ds^2 = -F dt^2 + \frac{dr^2}{F} + r^2 d\Omega_{k+2}^2, \quad F = 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{k+1} \tag{4.17}$$

burada $d\Omega_{k+2}^2$ $(k+2)$ boyutlu küre üzerindeki metriktir ve kararlı dairesel yörüngelere izin vermez. (4.17) metriği ve (3.4) ifadeleri kullanılarak

$$-m^2 = -F \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{F} + r^2 \dot{\phi}^2 \tag{4.18}$$

elde edilir.

$$E = -g_{ab} \xi^a u^b \tag{4.19}$$

ve

$$L = r^2 \dot{\phi} \quad (4.20)$$

denklemlerinden yararlanılarak (Wald, 1984).

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{F}, \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2}, \\ \dot{r}^2 &= E^2 - V_s^2(r). \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. Böylece kütlesi m olan parçacığın bu alandaki merkezci hareketi için etkin potansiyel

$$V_s^2(r) = F \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \quad (4.22)$$

şeklinde ifade edilir. Burada L toplam açısal momentumdur. Bu potansiyel (r_0, ∞) aralığında herhangi bir minimuma sahip değildir. $y = \frac{r_0^2}{r^2}$ değişken dönüşümü yapılarak (y , 0'dan 1'e giderse)

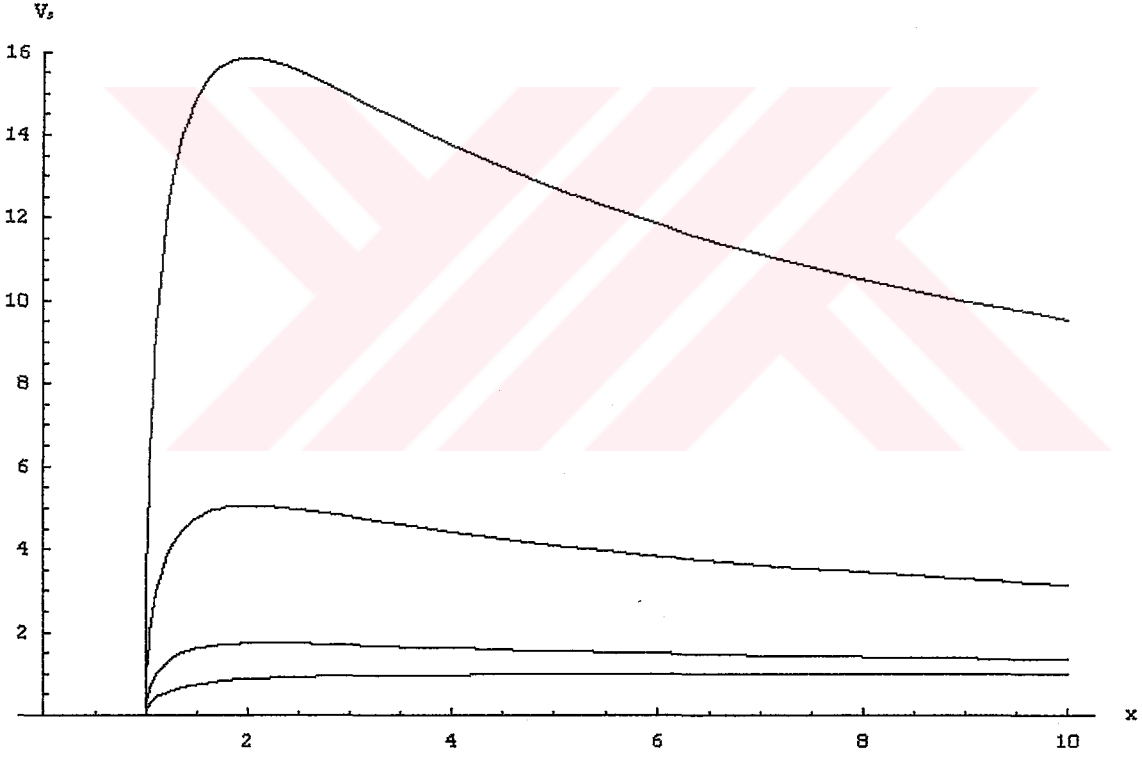
$$\begin{aligned} V_s^2(r) &= \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{k+1} \right] \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right), \\ V_s^2(y) &= \left(1 - y^{\frac{k+1}{2}} \right) \left(1 + \frac{L^2}{m^2 r_0^2} y \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde yazılabilir. $V_s^2(y)$ 'nin y 'ye göre ikinci dereceden türevi alınarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial(V_s^2(y))}{\partial y} &= \frac{L^2}{m^2 r_0^2} - \frac{k+1}{2} y^{\frac{k-1}{2}} - \frac{k+3}{2} \frac{L^2}{m^2 r_0^2} y^{\frac{k+1}{2}}, \\ \frac{\partial^2(V_s^2(y))}{\partial^2 y} &= -\frac{k^2-1}{4} y^{\frac{(k-3)}{2}} - \frac{(k+3)(k+1)L^2}{4r_0^2 m^2} y^{\frac{(k-1)}{2}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

denklemini bulunur. Bu fonksiyon sadece $y \leq 0$ için sıfırdır. V_s^2 , pozitif y için birden fazla ekstremum noktasına sahip olmayabilir. $V_s^2(y)$, $y=0$ 'da 1 ve $y=1$ 'de 0 değerini alır. $V_s^2(y)$ negatif olmadığından $V_s^2(y)$ 'nin ya monoton (düzenli) azalan bir fonksiyon olduğuna ya da bu aralıkta bir maksimuma (hiçbir şekilde minimuma sahip olmadan) sahip olduğu sonucuna varılır. Yani y değişkeni r 'nin düzenli azalan bir fonksiyonudur ve orijinal $V_s^2(r)$ fonksiyonu da [ve bunun sonucu] minimuma sahip değildir. Öyleyse $V_s^2(r)$ potansiyeli radyal koordinatın sonlu bir aralıkta sınırlandırıldığı harekete izin vermez.

Merkezcil Harekette Etkin Potansiyel



Şekil 4.1 Beş boyutlu Schwarzschild uzay-zamanında merkezcil hareketin etkin potansiyelinin farklı açısal momentum (L) değerleri için grafiği. Bu grafikte $m=r_0=1$ alınmış olup grafikteki dört farklı eğri alttan başlayarak sırası ile $L=1, 10, 100$ ve 1000 değerlerine karşılık gelmektedir.

Bu potansiyelin herhangi bir kararlı dairesel yörüngeye izin vermediğini fark etmenin bir başka yolu (4.24) denkleminin rastgele bir k ve $y > 0$ için her zaman negatif olduğudur. Benzer bir sonuç, açısal hareketin etkin potansiyeli ele alınırsa da türetilir (Thangherlini, 1963).

Şekil 4.1 5 boyutlu Schwarzschild uzay-zamanın potansiyeli için değişik L açısal momentum değerlerine karşılık gelen bir çizimini göstermektedir.

Şimdi 5 boyutlu Myers-Perry metriğinde kararlı dairesel yörüngelerin olmadığını kanıtlayacağız. En azından bu yörüngelerin $\theta = 0$ ve $\theta = \pi/2$ ekvatorial düzlemlerde yer aldığı, sadece $\theta = \pi/2$ için ispat verilecektir. Diğer durumlar için ispat benzerdir.

$x = x_0 = \text{sabit}$ dairesel yörüngeleri

$$\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad (4.25)$$

denklemleri ile tanımlanır. Burada χ (3.28) denklemi ile verilmişti. $\theta = \pi/2$ düzlemindeki yörüngeler için $\Psi = 0$ ve $K = \Phi^2 - (E^2 - m^2)b^2$ olur (bir önceki alt bölüme bakınız). Bu ifadeleri denklem (4.25) içine yerleştirerek E ve Φ değişkenleri için kuadratik denklem sistemi elde ederiz (Bardeen, 1972).

Çözümler,

$$E_\sigma = \sigma E, \quad \Phi_\sigma = \sigma \Phi, \quad \sigma = \pm. \quad (4.26)$$

$$\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \text{ eşitliğinde } E \text{ için,}$$

$$E = \frac{\sqrt{m^2(b^2 - r_0(a + r_0) + x^2)^2}}{[b^4 - b^2(2ar_0 + r_0^2 - 2x) + x(-2r_0(a + r_0) + x)]^{1/2}} \quad (4.27)$$

ifadesi bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{E}{m} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} \quad (4.28)$$

denklemini elde edilir.

$$\text{Aynı şekilde } \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \text{ eşitliğinde } \Phi \text{ için,}$$

$$\Phi = \frac{r_0(a^2 + ar_0 + x)\sqrt{m^2(b^2 - r_0(a + r_0) + x^2)^2}}{(b^2 - r_0(a + r_0) + x^2)[b^4 - b^2(2ar_0 + r_0^2 - 2x) + x(-2r_0(a + r_0) + x)]^{1/2}} \quad (4.29)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{\Phi}{m} = \frac{(y + a^2 - b^2 + r_0^2)r_0}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} \quad (4.30)$$

denklemini bulunur.

Burada

$$y = x - r_0a + b^2 - r_0^2, \quad y_0 = r_0\sqrt{(r_0 + a)^2 - b^2} \quad (4.31)$$

kullanılmıştır.

E ve Φ sabitleri reel olduğundan denklem (4.28) ve (4.30)'un paydalarındaki kareköklerin içindeki ifadeler pozitif olmalıdır. Bu durum

$$y^2 > y_0^2 \quad (4.32)$$

olduğunda gerçekleşir. Ama y 'nin bu değerleri için $E^2 > m^2$ olur ve potansiyel sınırsız hareketlere izin vermelidir. Bunun anlamı eğer etkin potansiyelin bir minimumu varsa en az bir tane de maksimumu olması gerekir. Bunu anlamak için ikinci türeve bakalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= 2[a^2(E^2 - m^2) + 2b^2(E^2 - m^2) - \Phi^2 + m^2r_0^2 + 3E^2x - 3m^2x], \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= 2[(E^2 - m^2)(a^2 + 2b^2 + 3x) - \Phi^2 + m^2r_0^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

İkinci türevin denklemi x için yalnızca bir çözüme sahiptir. O halde χ fonksiyonu minimuma sahip değildir. En azından ekvatorial yörüngelerde beş boyutlu dönen Myers-Perry kara deliği etrafında kararlı dairesel yörüngelerin olmadığı sonucuna varılır.

Kara deliğin dışında sınırlı kararlı yörüngelerin olmaması yüksek boyutlu kara deliklerin genel bir özelliğidir.

5. SONUÇLAR:

Dönen bir kara deliğin beş boyutlu uzay-zamanında parçacıkların hareketini inceledik. Bu problemin dört boyutlu Kerr metriği ile ilginç bir benzerliği vardır. Her iki durumda da parçacık için Hamilton-Jacobi denklemleri değişkenlerine ayrılabilir. Bu özellik Killing vektörlerine ek olarak Killing tansörlerinin de varolmasından kaynaklanmaktadır.

Beş boyutlu bir kara deliğin artalanında parçacıkların bazı ilginç durumlarını içeren (merkezcil ve θ 'nın sabit olduğu hareket gibi) değişik tür hareketlerini tanımladık.

4 boyutta, dönen kara deliğin etrafında kararlı dairesel yörüngeler olmasına karşın, 5 boyutlu Myers-Perry kara deliği için böyle kararlı dairesel yörüngeler, en azından ekvatorial düzlemde yoktur.

Daha yüksek boyuttaki dönen kara delikler için bu sonuçları genelleştirmek ilginç olabilir.



KAYNAKLAR

- Arkani-Hamed N., Dimopoulos S. ve Dvali G., (1998) "The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter", Phys. Lett. B 429:263-271.
- Antoniadis I., Arkani-Hamed N., Dimopoulos S. ve Dvali G., (1998) "New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV", Phys. Lett. B 436:257-263.
- Bardeen J.M., (1972) "Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation", W. H. Press, and S. A. Teukolsky, Astrophys.J.178:347-369.
- Carter B., (1968) "Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields", Phys. Rev. 174:1559-1571.
- Clement G., Gal'tsov D. ve Leygnac C., (2003), "Linear Dilation Black Holes", Phys. Rev. D 67: 024012 -1-024012-14.
- D'Inverno R., (1992), Introducing Einstein's Relativity, Clarendon Press.
- Eardley D. M. ve Giddings S.B., (2002), "Classical Black Hole Production in High-Energy Collisions", Phys. Rev. D 66:044011-1-044011-7.
- Frolov V. P. ve Novikov I.D., (1998), Black Hole Physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Frolov V. P. ve Stevens K. A., (2004), "Stationary Strings Near a Higher-Dimensional Rotating Black Hole", Phys. Rev. D 70:044035-1-044035-13.
- Frolov V. P. ve Stojkovic D., (2002), "Black Hole as a Point Radiator and Recoil Effect on the Brane World", Phys. Rev. Lett. 89:151302-1-151302-4.
- Frolov V. P. ve Stojkovic D., (2002), "Black Hole Radiation in the Brane World and the Recoil Effect", Phys. Rev. D 66:084002-1-084002-4.
- Frolov V. P. ve Stojkovic D., (2003), "Quantum Radiation from a 5-Dimensional Rotating Black Hole", Phys. Rev. D 67:084004-1-084004-9.
- Frolov V. P. ve Stojkovic D., (2003), "Particle and Light Motion in a Space-Time of a Five-Dimensional Rotating Black Hole", Phys. Rev. D 68:064011-1-064011-8.
- Giddings S. B. ve Thomas S., (2002), "High Energy Colliders as Black Hole Factories: The end of Short Distance Physics", Phys. Rev. D 65:056010-1-056010-7.
- Gibbons G. W. ve Herdeiro C. A. R., (1999), "Supersymmetric Rotating Black Holes and Causality Violation", Class. Quantum Grv. 16, 3619.
- Goldstein H. (1980), Classical Mechanics Addison-Wesley Publishing Company, California.
- Herdeiro C. A. R., (2000), "Special Properties of Five-Dimensional BPS Rotating Black Holes", Nucl. B582, 363.
- Misner C. W., Thorne K. S. ve Wheeler J. A., (1973), Gravitation, Freeman, San Francisco.
- Myers R.C. ve Perry M. J., (1986), "Black Holes in Higher Dimensional Space-Times", Ann. Phys. (N.Y.) 172:304-347.

Straumann N., (1984), General Relativity and Relativistic Astrophysics, Springer Verlag, Berlin.

Thangherlini F.R., (1963), "Schwarzschild Field in n Dimensions and the Dimensionality of Space Problem", Nuovo Cimento 27:636.

Voloshin M.B., (2002), "More Remarks on Suppression of Large Black Hole Production in Particle Collisions", Phys. Lett. B 524: 376-382.

Wald R., (1984), General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	23.02.1977	
Doğum Yeri	Amasya	
Lise	1991-1994	İnönü Lisesi
Lisans	1994-1998	Ege Üniversitesi Fen Fak. Fizik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurumlar:

1998-2000	Manisa Artı Dershaneleri
2002-Devam Ediyor	T.C. MEB. Abdurrahman Köksal İlköğretim Okulu

