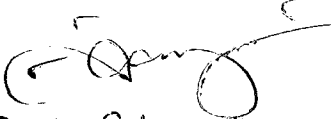


**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**


Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL


Doç. Dr. G. Ağar


MUSTAFA S. S. S.

BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

Engin METE

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

106188

İSTANBUL, 2001

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

“Matematiğin hiçbir dalı yoktur ki, ne kadar soyut olursa olsun, bir gün gerçek dünyada uygulama alanı bulmasın.”

Lobachevsky

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	ii
ÇİZELGE LİSTESİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
1.2 Bulanık Matematiksel Programlamanın Uygulama Alanları	2
2. BELİRSİZ VEYA BULANIK SAYILAR	3
2.1 Giriş	3
2.2 Bulanık Sayılarda Toplama	8
2.3 Bulanık Sayılarda Çıkarma	14
2.4 Bulanık Sayılarda Çarpma	18
2.5 Bulanık Sayılarda Bölme	24
2.6 L-R. Dubois ve Prade Bulanık Sayılar	26
2.7 Üçgen Bulanık Sayılar	29
3. BULANIK KÜMELER	31
3.1 Giriş	31
3.2 Bulanık Kümeler	32
3.3 Bulanık Kümelerde Temel İşlemler	34
3.4 λ Tümlenyeni	37
3.5 Konveks Bulanık Kümeler	40
3.6 Destek Kümesi	40
3.7 α Kesenleri	40
3.8 Uzanım Prensibi	41
4. BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA	44
4.1 Giriş	44
4.2 Bulanık Lineer Programlama	45
4.2.1 Simetrik Lineer Programlama	45
4.2.2 Bulanık Kısıtlamalar ve Kesin Amaç fonksiyonlar ile Lineer Programlama	50
4.2.3 İlaveler	54
4.3 Bulanık Parametrelerle Bulanık Lineer Programlama	60
4.4 Uygulamalar	67
4.4.1 Yöntemsel Uygulamalar	67
4.4.2 Pratik Uygulamalar	68
KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	75

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Bulanık sayıların tanımı 4
Şekil 2.2	Bulanık sayıların tanımı 4
Şekil 2.3	R' de olağan bir alt küme 6
Şekil 2.4	R' de bir bulanık alt küme 7
Şekil 2.5	Bir konveks bulanık alt küme(normal olmayan) 7
Şekil 2.6	Bir bulanık alt küme(normal) 8
Şekil 2.7	Bir konveks ve normal bulanık küme 8
Şekil 2.8	İki bulanık sayının toplamı 12
Şekil 2.9	İki üçgen bulanık sayının toplamı 13
Şekil 2.10	İki bulanık sayının farkı 14
Şekil 2.11	İki bulanık sayının çarpımı 21
Şekil 2.12	İki bulanık sayının bölümü 26
Şekil 2.13	Konveks ve normal L-R bulanık fonksiyon 27
Şekil 2.14	$\Phi(x)$ ' in F_L genişlemesi ve F_R daralması 27
Şekil 2.15	Bir yarı simetrik L- R bulanık sayı 29
Şekil 2.16	Bir üçgen bulanık sayı $A = (a_1, a_2, a_3)$ 29
Şekil 3.1	Boy grafiği 31
Şekil 3.2	Yaşlılık grafiği 32
Şekil 3.3	Bulanık alt küme A 33
Şekil 3.4	Kısalık, ortalama ve uzunluğa göre boy grafiği 34
Şekil 4.1	Bulanık üçgen sayı $\tilde{a} = (m, m, \alpha, \beta)_{L-L}$ 61

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4.1 Örnek 4.2 ' nin çözümü	65
Çizelge 4.2 Örnek 4.2 ' nin çözümü	65
Çizelge 4.3 Örnek 4.2 ' nin çözümü	66
Çizelge 4.4 Örnek 4.2 ' nin çözümü	66



ÖZET

Bu tezde; bulanık sayılar, bulanık kümeler ve bulanık matematiksel programlama konuları ele alınmıştır.

İkinci bölümde, bulanık sayılarla ilgili temel tanımlar ve genel özellikler verilmiştir. Ayrıca, bulanık sayılarda aritmetik işlemlerle ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bulanık kümelerle ilgili temel kavram ve tanımlamalar incelenmiştir. Bazı bulanık küme özellikleri ile ilgili örnekler verilmiştir.

Son bölümde, bulanık matematiksel programlama konusu işlenmiştir. Genel olarak, simetrik lineer programlama teorisi işlenmiştir ve bu teoriyle ilgili temel teoremler ve tanımlar verilmiştir. Ayrıca, lineer olmayan üyelik fonksiyonların kullanımı ve bulanık parametrelerle matematiksel programlama işlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayılar, bulanık kümeler, bulanık matematiksel programlama.



ABSTRACT

In this thesis, fuzzy numbers, fuzzy sets and fuzzy mathematical programming were dealt with.

In the section two, basic definitions and general features concerning fuzzy numbers were given. In addition, some examples in fuzzy numbers concerning arithmetic operation were given.

In the section three, basic concepts and definitions concerning fuzzy sets were studied. Some examples concerning features of fuzzy sets were given.

In the last section, the subject of fuzzy mathematical programming was worked. In general, theory of symmetric linear programming was worked and basic theorems and definitions concerning this theory were given. In addition, usage of nonlinear membership functions and fuzzy mathematical programming with fuzzy parameters were worked.

Keywords: Fuzzy numbers, fuzzy sets, fuzzy mathematical programming.

1. GİRİŞ

1965 ' de Lütü A. Zadeh tarafından bulanık(fuzzy) küme teorisinin ortaya atılmasından sonra; bulanık küme teorisi, yöneylem araştırması, yönetim bilimi, yapay zekâ – uzman sistemler, kontrol teorisi ve özellikle teknolojiye uygulanmaya başlamıştır.

Matematiksel programlamada, bir gerçek problem matematiksel modellerle ifade edilir. Eğer bir model, sınırlamaları olmayan bir gerçek probleme yaklaşırsa, model karmaşık bir model olur ve çözümü bulmak güçleşir ve çelişkili sonuçlar ortaya çıkar. Bununla birlikte, gerçek problemler doğal dille ifade edilebilen kısıtlama ve amaçlar içerirler. Örneğin, belirsizlik ifade edilirken, “yaklaşık A lira kazanmak isteriz” veya “B civarında veya daha az yatırım yapmak isteriz” ifadeleri bir çeşit belirsizlik içerir. Bulanık matematiksel programlama, bu tür belirsizlikleri bulanık kümelerdeki terimlerle ifade eder ve bizim kavrayışımıza yakın hale getirir.

Klasik matematiksel programlama problemlerinde, kısıtlamalara bağlı olan maximize olmuş bir amaç fonksiyonun çözümünü buluruz. Gerçek problemlerde, nesnelerdeki kısıtlamalar ve objektif fonksiyonları esnek olarak ele alırız. Örneğin, bir şirket yatırım probleminde, yatırım plan aşamaları için kullanılabilir para miktarını saptamak belirsizdir. Bununla beraber memnuniyet için standartları izlemek, birçok şirket için daha iyidir, yani belli bir seviyeye kadarki kâr, maximum şirket kârından daha kabul edilebilirdir. Bir memnuniyet derecesi için standartları izleyen amaç kümelerini ele alan bir yaklaşım, reel problemlere, maxzimize olmuş amaç fonksiyondan daha yakındır.

Bulanık(fuzzy) lineer programlama, klasik lineer programlamanın yetersiz kaldığı durumlardan dolayı ortaya çıkmıştır. Bir lineer programlama modeli şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & z = c x \\ & A x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Burada c, amaç fonksiyonun kâr katsayılarının vektörü; b, mevcut toplam kaynakların vektörüdür. x, karar değişkenlerin vektörü ve A, katsayılar matrisidir. Eğer kısıtlar, bel-

li bir tölerans aralığı ile ifade edilirse, o zaman yukarıdaki model yetersiz kalır. Örneğin, bir işyerindeki üretim modelini tasarlarken, toplam çalışma saatleri hergün için aynı olmayabilir. Çalışma saatleri için kesin bir kısıt olmayabilir. Fazla mesaiden ve işe hergün aynı sayıda işçinin gelmediği düşünülerek, günlük çalışma saatleri; örneğin, 300 saat değilde, $300 \leq t \leq 350$ arasında değişebilir. Yada hergün için mal stokundan, 500 birim değilde, $500 \leq \text{stok} \leq 550$ arasında tüketim olabilir. Bu ve benzeri belirsizlik durumlarında aşağıdaki bulanık lineer programlama modeli önerilir:

$$\text{maximum } z = c x$$

$$A x \leq b + p \quad (1.2)$$

$$x \geq 0$$

p: tölerans aralığı

1.1 Bulanık Matematiksel Programlamanın Uygulama Alanları

BMP 'de modellerin çoğunluğu simetri olması nedeniyle amaç fonksiyonların sayısı sorun olmaz. Klasik matematiksel programlamada, normalde tek amaç fonksiyon kabul edilebilir çözüm uzayı dizisi oluşturur. Eğer amaç fonksiyon birden fazla ise, çok amaçlı karar verici modeller veya "vektörel optimizasyon" modelleri uygulanır, normalde fazlasıyla hesaplama çabası gerektirir. Bu yüzden BMP, tamamıyla çok kriter analizinin geniş kapsamına uygulanmaktadır.

BLP, duyumsal kısıtlamalarla birlikte karışım problemlerine uygulanmaktadır( ikolata, şampanya, boya karışımları). Boya uygulamaları (Zimmermann, 1986), Locistik (Ernst, 1982). FMP 'deki yöntemsel ve gerçek uygulamalar, fonksiyonel problemlerin çözümünde önerilmiştir. Bu tip uygulama; Medya Seçim(Wiedey ve Zimmerman, 1978). Diğer uygulamalar: Bakım(Holtz ve Desonki, 1981),  retim Planı (Hintz ve Zimmermann, 1989), Kesme Stok Problem(Nickels, 1990), Sayısal Programlama (Zimmermann ve Pollatschek, 1984; Ignizio, 1983), Kesirli Programlama (Luhandjula, 1984), Lineer Olmayan Programlama (Sakawa, 1989).

2. BELİRSİZ VEYA BULANIK SAYILAR

2.1 Giriş

Alt ve üst sınırların kullanılmasında belirsizliğin azalmasının bir yönü güven aralığıdır. Belirsizliği pratik ve mantıksal durumlarda ele almak herhangi mevcut bilgilerle olur. Bu bilgi nesnel(ölçülebilir iki veri arasındaki durum) veya subjektif (tecrübeler veya uzman kişilerin düşüncelerinden elde edilen bilgiler) olabilir.

Güven aralığı kavramı yerine “tahmin seviyesi” kullanılabilir. Örneğin bir işin tamamının kesin iki tarih arasında yapıldığını farz edelim. Bu tarihler 15 Mayıs ve 31 Mayıs olsun. Bu bir güven aralığıdır. Aynı işin tamamının 22 Mayıs'ta olabildiğini farz edelim, bu olası bir tarih. Birinci güven aralığı [15 Mayıs, 31 Mayıs] iken, ikinci güven aralığı [22 Mayıs]. Biz iki güven aralığı için iki durum kararlaştırsak; [Mayıs 15, Mayıs 31] için 0, [Mayıs 22, Mayıs 22] için 1. Bu güven aralıkları gerçekten tahmin seviyeleridir ve [0,1] aralığı ile temsil edilir.

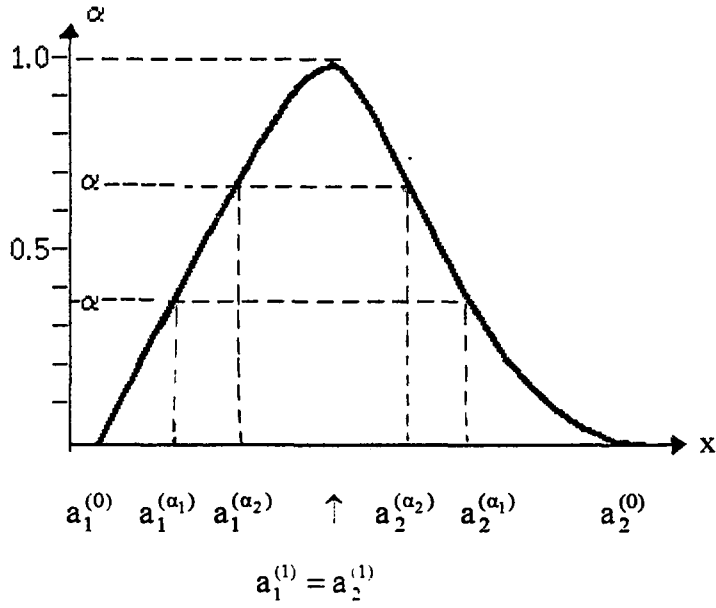
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]:$

$$(\alpha_1 < \alpha_2) \Rightarrow ([a_1^{(\alpha_2)}, a_2^{(\alpha_2)}] \subset [a_1^{(\alpha_1)}, a_2^{(\alpha_1)}]).$$

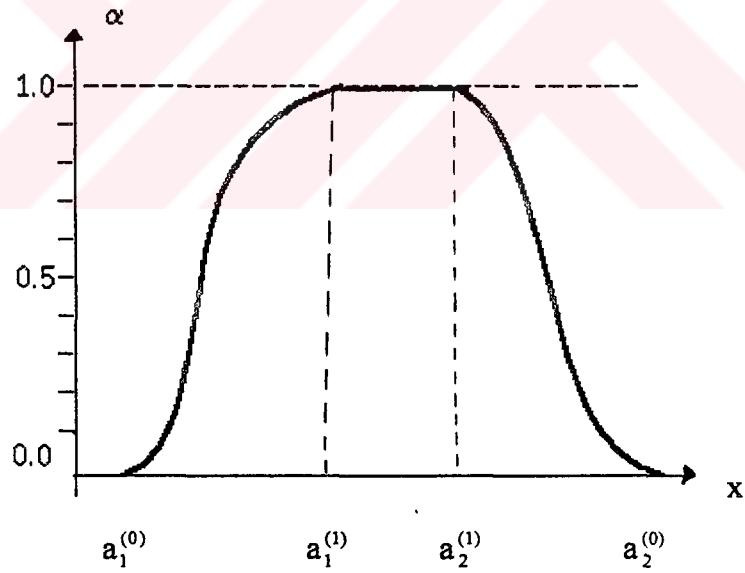
Eğer α artarsa güven aralığı artmaz. Şekil 2.1'deki gibi. Güven aralığı ve tahmin seviyesi kavramları birleşmektedir.

Tahminin α seviyesi ile güven aralığı arasındaki birleştirme, α seviyesinde tanımlı bulanık sayı kavramı veya bulanık sayı olacaktır. Bu birleşme doğal, çoğu zaman kesin, insan düşüncesinin mekanizması içinde bir değer subjektif yaklaşımının bir boyutuna uygun gelir.

0'dan 1'e değişen güven aralığındaki değişiklik iki tür eğriyle gösterilebilir. Şekil 2.1'deki düzgün eğri veya eğimi daha farklı, yassı bölgeye dönüşmüş şekil 2.2'deki gibi.



Şekil 2.1 Bulanık sayıların tanımı.



Şekil 2.2 Bulanık sayıların tanımı.

Bulanık kelimesi ilk kez Zadeh tarafından bulanık kümeler kitabında tanıtılmıştır. Bu kelimeyi, bulanık alt küme veya bulanık kümeden bir bulanık kümeye matematiksel kavramı genellemekle kullanmıştır. Bulanık kümedeki bir üyelik fonksiyon, referans kümesinin her elamanı için tanımlanır(Boolean cebirinde bu kavram karakteristik

fonksiyon olarak ifade edilir). Üyelik fonksiyon $[0,1] \subset \mathbb{R}^+$ de değerler alır, Boolean cebirinde bu değerler, $\{0,1\}$ kümesidir.

Bu bölümde bulanık sayı kavramı, tahmin seviyesi ve güven aralığının birleştirilmesinde kullanılmaktadır. Bu bir bulanık sayıyı tanıtmamanın klasik yöntemi değil ve bulanık küme kavramı teorisi açısından bu kavramı tanıtacağız. İlk olarak bulanık küme kavramı ve bulanık sayı kavramı arasında nasıl bir fark olduğunu açıklayalım. E bir referans kümesi(örneğin R veya Z 'de) olsun. A olağan bir alt küme, bunun referans

$$\forall x \in E : \mu_A(x) \in \{0,1\},$$

kümesi kendi karakteristik fonksiyonuyla tanımlanır. E deki elamanların A' ya ait olması yada olmamasını karakteristik fonksiyonun değeri gösterir(1 veya 0).

E referans kümesi ve A bulanık alt kümesini tanımlayacak karakteristik fonksiyon üyelik fonksiyon olarak adlandırılır ve $\{0,1\}$ kümesi yerine $[0,1]$ aralığında değerler alır.

$$\forall x \in E : \mu_A(x) \in [0,1],$$

E nin elamanları $[0,1]$ deki derece ile A ya ait olmaktadır. Bu genişleme olağan alt kümeden bulanık kümedir.

Şekil 2.3 R 'deki olağan alt kümeyi, şekil 2.4 R 'deki bulanık alt kümeyi gösterir.

Bulanık alt küme kavramından gelen belirsiz veya bulanık sayı kavramları için iki özellik tanımlanır. Bu özellikler bulanık alt kümenin normallik ve konvekslik özellikleridir.

Tanım: A R de konveks bir alt küme ancak ve ancak her olağan

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1],$$

kümesi R de kapalı bir aralıksa konveks bir alt kümedir (Şekil 2.5). Konvekslik özelliği ile ilgili başka bir tanım aşağıdaki gibidir:

Tanım:

$$\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in R:$$

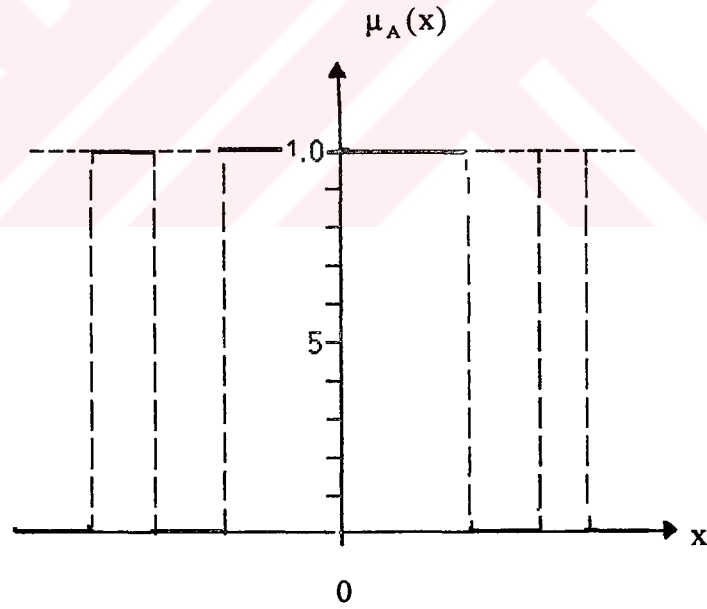
$$\forall \lambda \in [0,1] \text{ için, } \mu_A[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}] \geq \mu_A(x^{(1)}) \wedge \mu_A(x^{(2)})$$

Tanım:

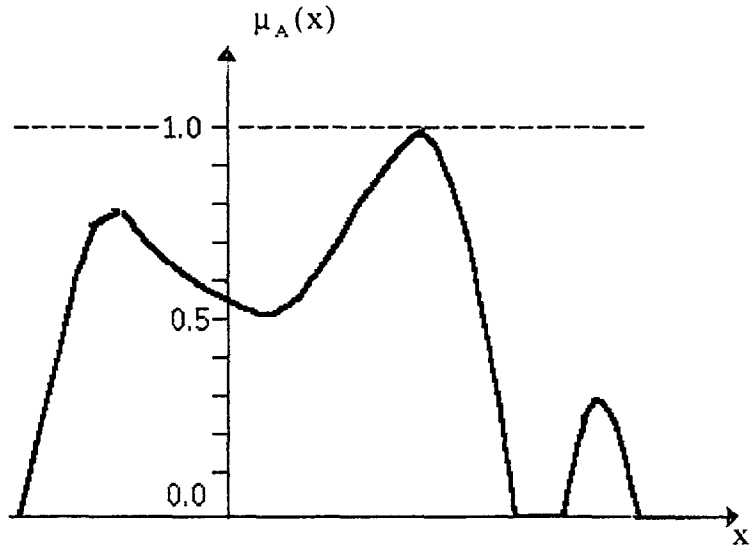
A R 'de bir bulanık alt küme $A \subset R$ normal ise $\Leftrightarrow \forall x \in R: \bigvee_n \mu_A(x) = 1$ dir.

$\mu_A(x)$ ' in en büyük değeri 1 dir. Bu değer her zaman maximum değer olmayabilir.

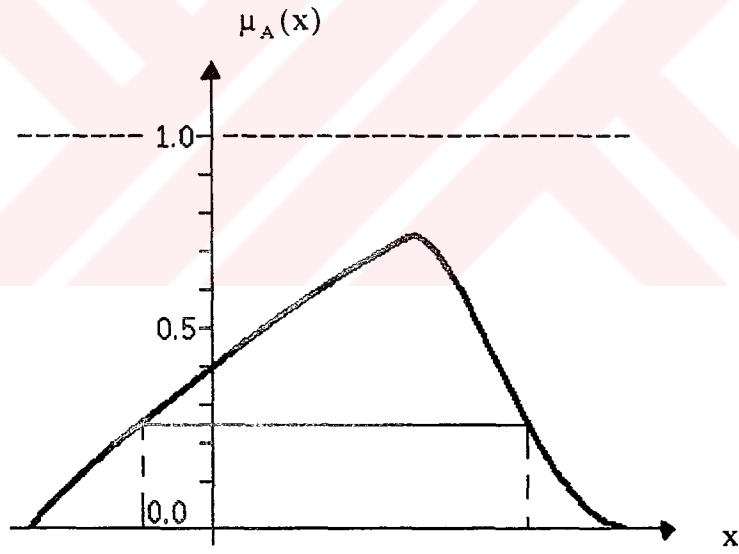
Şekil 2.5 'de normal olmayan bulanık alt küme, şekil 2.6'de normal bulanık alt küme gösterilmektedir. R deki bir bulanık sayı R 'nin konveks ve normal alt kümesidir (şekil 2.7).



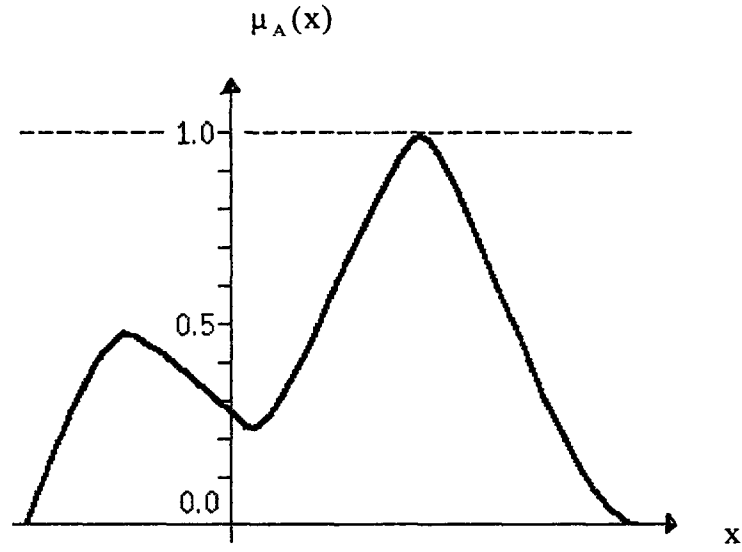
Şekil 2.3 R 'de olağan bir alt küme.



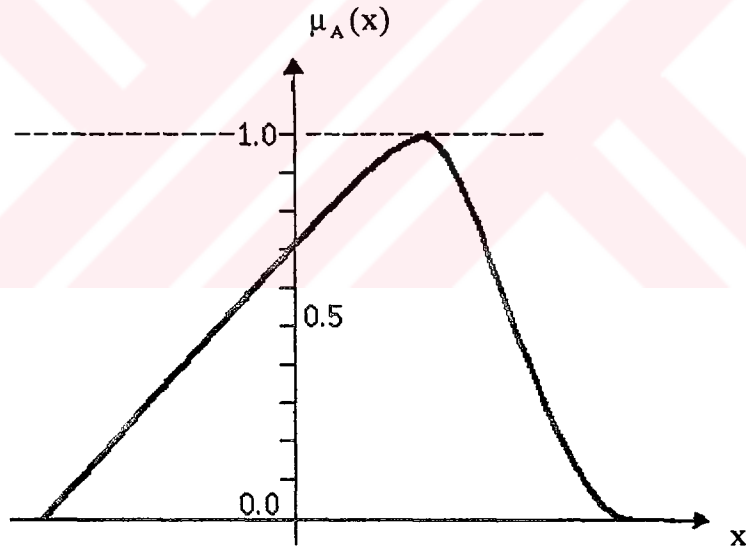
Şekil 2.4 R ' de bir bulanık alt küme.



Şekil 2.5 Bir konveks bulanık alt küme(normal olmayan).



Şekil 2.6 Bir bulanık alt küme (normal).



Şekil 2.7 Bir konveks ve normal bulanık küme.

2.2 Bulanık Sayılarda Toplama

Örneğin ; A ve B iki bulanık sayısı ve A_α ve B_α ; $\alpha, \alpha \in [0,1]$ tahmin seviyesi için A ve B 'nin güven aralıkları olsun. Aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$A_{\alpha} + B_{\alpha} = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right] (+) \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} \right] = \left[a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} \right] \quad (2.1)$$

Eğer $A, B \subset R$ ise α seviyesinde güven aralığı için A_{α} ve B_{α} olağan kümeleri şu şekilde tanımlanır:

$$A_{\alpha} = \{ x \mid \mu_A(x) \geq \alpha \} \quad (2.2)$$

$$B_{\alpha} = \{ x \mid \mu_B(x) \geq \alpha \} \quad (2.3)$$

Bulanık sayıların toplamı için başka bir yöntem aşağıdaki gibidir:

$$A, B \subset R, \quad x, y, z \in R \quad \text{ için } \quad \mu_{A (+) B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (2.4)$$

(2.2) ve (2.3) ' den ;

$$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right] \quad (2.5)$$

$$\bigcup_{\alpha} B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} \right] \quad (2.6)$$

yazabiliriz.

$$\text{Eğer } x \in \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right] \quad \text{ ise } \quad \mu_A(x) = 1$$

$$\text{Eğer } x \notin \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right] \quad \text{ ise } \quad \mu_A(x) = 0$$

$$\text{Eğer } x \in \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} \right] \quad \text{ ise } \quad \mu_B(x) = 1 \quad (2.7)$$

Eğer $x \notin [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$ ise $\mu_B(x) = 0$.

dir.

(2.4) 'den yararlanarak, her α seviyesi ve $x, y, z \in R$ için

$$\mu_{A_\alpha (+) B_\alpha}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_{A_\alpha}(x) + \mu_{B_\alpha}(y)) \quad (2.8)$$

yazılabilir. x ve y 'nin bütün değerleri için, $\mu_{A_\alpha}(x) = 1$ ve $\mu_{B_\alpha}(y) = 1$ olursa, (2.8) 'in sağ tarafı 1 olur. Aksi takdirde 0 değerini verir. $z = x + y$ için,

$$z \in [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]$$

yazabiliriz. (2.5) ve (2.6) 'dan,

$$A_\alpha (+) B_\alpha = \bigcup_{\alpha} [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \quad (2.9)$$

yazabiliriz. Şekil 2.8, iki bulanık sayının toplamını gösterir.

Örnek 2.1

Şekil 2.9 'da iki üçgen bulanık sayının toplamı gösterilmiştir. Aşağıda A ve B 'nin karakteristik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu iki sayının toplamını bulalım:

$\forall x \in R$:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0, & x &\leq -5 \\ &= \frac{x}{3} + \frac{5}{3}, & -5 &\leq x \leq -2 \\ &= \frac{-x}{3} + \frac{1}{3}, & -2 &\leq x \leq 1 \\ &= 0, & x &\geq 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
\mu_B(x) &= 0, & x &\leq -3 \\
&= \frac{x}{7} + \frac{3}{7}, & -3 &\leq x \leq 4 \\
&= -\frac{x}{8} + \frac{12}{8}, & 4 &\leq x \leq 12 \\
&= 0, & x &\geq 12
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Her α seviyesi için güven aralığını hesaplamak , üçgen biçimiyle tanımlanacak α 'nın fonksiyonuyla aşağıdaki gibi olur: (2.10) 'dan ,

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} / 3 + 5 / 3 \quad \text{ve} \quad \alpha = -a_2^{(\alpha)} / 3 + 1 / 3 \quad \text{elde edilir.}$$

α seviyesinde güven aralığı ,

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1] \tag{2.12}$$

(2.11) 'den

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} / 7 + 3 / 7 \quad \text{ve} \quad \alpha = -b_2^{(\alpha)} / 8 + 12 / 8 \quad \text{yazılırsa,}$$

buradan B'nin α seviyesinde güven aralığı:

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12] \tag{2.13}$$

(2.12) ve (2.13) toplanırsa :

$$\begin{aligned}
A_\alpha (+) B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1] (+) [7\alpha - 3, -8\alpha + 12] \\
&= [10\alpha - 8, -11\alpha + 13]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

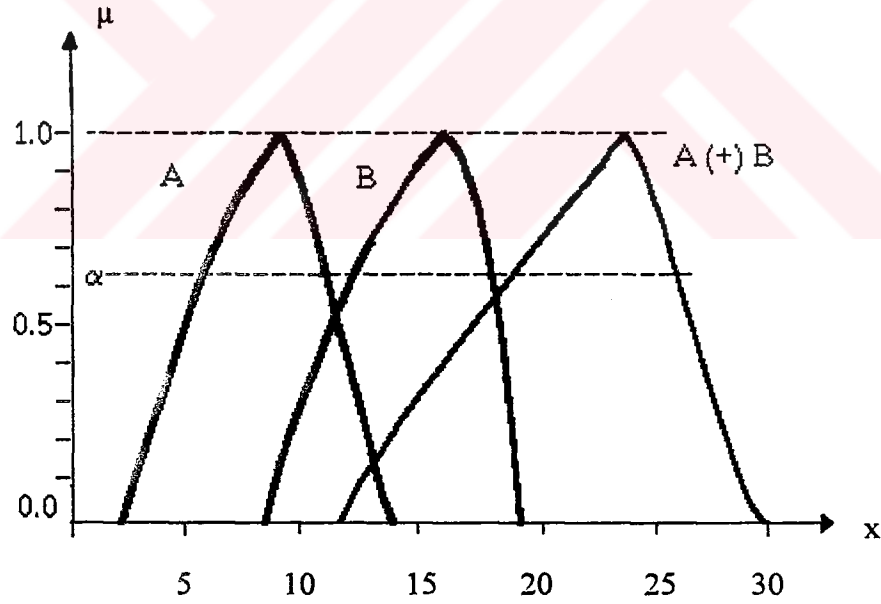
Buradan ,

$$a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} = 10\alpha - 8 \quad \text{ve} \quad a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} = -11\alpha + 13 \quad \text{elde edilir.}$$

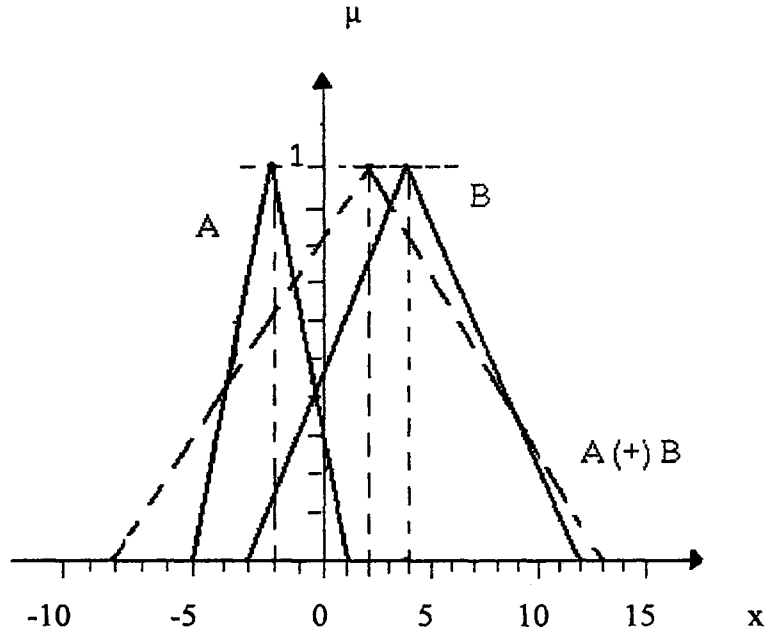
Ve,

$$\begin{aligned} \mu_{A(+)B}(x) &= 0, & x &\leq -8 \\ &= \frac{x}{10} + \frac{8}{10}, & -8 &\leq x \leq 2 \\ &= -\frac{x}{11} + \frac{13}{11}, & 2 &\leq x \leq 13 \\ &= 0, & x &\geq 13 \end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 2.8 İki bulanık sayının toplamı.



Şekil 2.9 İki üçgen bulanık sayının toplamı.

Örnek 2.2

Aşağıdaki sayısal örnekte N' deki iki bulanık sayının toplamı ele alınmıştır.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A =	0	0.1	0.3	0.8	1	0.7	0.3	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B =	0	0.3	0.6	1	0.7	0.2	0.1	0	0

$C = A + B$ olmak üzere, $\mu_C(x)$ ($0 \leq x \leq 13$) değerleri (2.4)' den faydalanarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu_C(1) = (0 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 0.1) = 0$$

$$\mu_C(2) = (0 \wedge 0.6) \vee (0.1 \wedge 0.3) \vee (0.3 \wedge 0) = 0.1$$

$$\mu_C(3) = (0 \wedge 1) \vee (0.1 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_C(4) = (0 \wedge 0.7) \vee (0.1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.6) \vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_C(5) = (0 \wedge 0.2) \vee (0.1 \wedge 0.7) \vee (0.3 \wedge 0.1) \vee (0.8 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.7 \wedge 0) = 0.6$$

$$\mu_C(6) = (0 \wedge 0.1) \vee (0.1 \wedge 0.2) \vee (0.3 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (0.7 \wedge 0.3) \vee (0.3 \wedge 0) = 0.8$$

$$\mu_C(7) = (0 \wedge 0) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.7 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.7) \vee (0.3 \wedge 0.2) \vee (0.1 \wedge 0.1) \vee (0 \wedge 0) = 1$$

$$\mu_C(8) = (0.1 \wedge 0) \vee (0.3 \wedge 0.1) \vee (0.8 \wedge 0.2) \vee (1 \wedge 0.7) \vee (0.7 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.6) \vee (0 \wedge 0.3) = 0.7$$

$$\mu_C(9) = (0.3 \wedge 0) \vee (0.8 \wedge 0.1) \vee (1 \wedge 0.2) \vee (0.7 \wedge 0.7) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.6) = 0.7$$

$$\mu_C(10) = (0.8 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0.1) \vee (0.7 \wedge 0.2) \vee (0.3 \wedge 0.7) \vee (0 \wedge 1) = 0.3$$

$$\mu_C(11) = (1 \wedge 0) \vee (0.7 \wedge 0.1) \vee (0.3 \wedge 0.2) \vee (0 \wedge 0.7) = 0.2$$

$$\mu_C(12) = (0.7 \wedge 0) \vee (0.3 \wedge 0.1) \vee (0 \wedge 0.2) = 0.1$$

$$\mu_C(13) = (0.3 \wedge 0.1) \vee (0 \wedge 0.1) = 0$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
C =	0	0.1	0.3	0.3	0.6	0.8	1	0.7	0.7	0.3	0.2	0.1	0	(2.15)

2.3 Bulanık Sayılarda Çıkarma

Toplama ile ilgili tanımlar, çıkarma için genişletilebilir.

$\forall \alpha \in [0,1] :$

$$A (-) B = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right] (-) \left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} \right] = \left[a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} \right]$$

veya

$\forall x, y, z \in R :$

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (2.16)$$

Çıkarma , B ' nin görüntüsünün A' ya eklenmesidir. B ' nin görüntüsü:

$\forall \alpha \in [0,1] :$

$$B_{\alpha}^{-} = \left[-b_2^{(\alpha)}, -b_1^{(\alpha)} \right]$$

Çıkarmada ne birleşme, ne de değişme özelliği vardır. R ' de ve Z ' de tanımlıdır, fakat R^{+} ve N' de tanımlı değildir.

Örnek 2.3

Şekil 2.10 ' de gösterilen iki üçgen bulanık sayının fark işlemini ele alalım:

$\forall x \in R :$

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0, & x &\leq 7 \\ &= \frac{x}{7} - 1, & 7 &\leq x \leq 14 \\ &= -\frac{x}{5} + \frac{19}{5}, & 14 &\leq x \leq 19 \\ &= 0 & x &\geq 19 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
\mu_B(x) &= 0, & x &\leq 3 \\
&= \frac{x}{2} - \frac{3}{2}, & 3 &\leq x \leq 5 \\
&= -\frac{x}{5} + \frac{10}{5}, & 5 &\leq x \leq 10 \\
&= 0 & x &\geq 10
\end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.17) 'yi kullanarak ,

$$\alpha = \alpha_1^{(\alpha)} / 7 - 1$$

$$\alpha = \alpha_2^{(\alpha)} / 5 + 19/5$$

yazabiliriz. Buradan ,

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [7\alpha + 7, -5\alpha + 19] \tag{2.19}$$

yazabiliriz. (2.18) ' den

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} / 2 - 3/2$$

$$\alpha = -b_2^{(\alpha)} / 5 + 10/5$$

Ve

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 3, -5\alpha + 10] \tag{2.20}$$

yazabiliriz

$$\begin{aligned}
A_\alpha - B_\alpha &= [7\alpha + 7, -5\alpha + 19] (-) [2\alpha + 3, -5\alpha + 10] \\
&= [7\alpha + 7 - (-5\alpha + 10), -5\alpha + 19 - (2\alpha + 3)] = [12\alpha - 3, -7\alpha + 16]
\end{aligned}$$

.

Eğer ,

$$a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)} = 12\alpha - 3$$

$$a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} = -7\alpha + 16$$

olarak tanımlanırsa ;

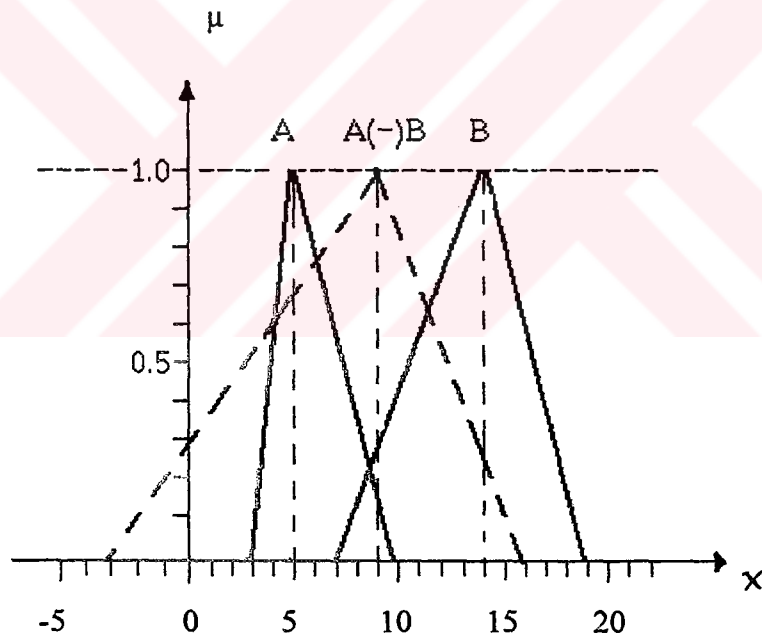
$$\mu_{A-B}(x) = 0, \quad x \leq -3$$

$$= \frac{x}{12} + \frac{3}{12}, \quad -3 \leq x \leq 9$$

$$= -\frac{x}{7} + \frac{16}{7}, \quad 9 \leq x \leq 16$$

$$= 0 \quad x \geq 16$$

elde edilir .



Şekil 2.10 İki bulanık sayının farkı.

Örnek 2.4 Z ' de , iki bulanık sayının farkıyla ilgili bir örnek ele alırsak:

A =	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	0	0.1	0.3	0.7	0.9	1.0	0.5	0

	-2	-1	0	1	2	3	4
B =	0	0.1	0.6	1.0	0.8	0.3	0

(2.16) eşitliğini kullanarak aşağıdaki değerleri elde ederiz :

$$\mu_{A(\cdot)B}(-7) = (0 \wedge 0) = 0$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(-6) = (0 \wedge 0.3) \vee (0.1 \wedge 0) = 0$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(-5) = (0 \wedge 0.8) \vee (0.1 \wedge 0.3) \vee (0.3 \wedge 0) = 0.1$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(-4) = (0 \wedge 1) \vee (0.1 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.7 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(-3) = (0 \wedge 0.6) \vee (0.1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.8) \vee (0.7 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(-2) = (0 \wedge 0.1) \vee (0.1 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0) = 0.7$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(-1) = (0 \wedge 0) \vee (0.1 \wedge 0.1) \vee (0.3 \wedge 0.6) \vee (0.7 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0) = 0.8$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(0) = (0.1 \wedge 0) \vee (0.3 \wedge 0.1) \vee (0.7 \wedge 0.6) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.5 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 0) = 0.9$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(1) = (0.3 \wedge 0) \vee (0.7 \wedge 0.1) \vee (0.9 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 0.8) = 1$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(2) = (0.7 \wedge 0) \vee (0.9 \wedge 0.1) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (0.5 \wedge 0.8) = 0.6$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(3) = (0.9 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0.1) \vee (0.5 \wedge 0.6) = 0.5$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(4) = (1 \wedge 0) \vee (0.5 \wedge 0.1) = 0.1$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(5) = (0.5 \wedge 0) = 0$$

2.4 Bulanık Sayılarda Çarpma

R^+ 'de A ve B gibi iki bulanık sayıyı ele alırsak, α tahmin seviyesi için;

$$A_{\alpha}(\cdot)B_{\alpha} = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](\cdot)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}] \quad (2.21)$$

yazabiliriz. Çarpma işlemi için diğer bir tanım:

$$\forall x, y, z \in R^+ :$$

$$\mu_{A(.)B} = \bigvee_{z=x.y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (2.22)$$

Örnek 2.5

Bu örnekte de iki üçgen bulanık sayının çarpımı ele alınacaktır.

$$\forall x \in R^+ :$$

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0, & x &\leq 2 \\ &= x - 2, & 2 &\leq x \leq 3 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}, & 3 &\leq x \leq 5 \\ &= 0 & x &\geq 5 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\forall x \in R^+ :$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0, & x &\leq 3 \\ &= \frac{x}{2} - \frac{3}{2}, & 3 &\leq x \leq 5 \\ &= -x + 6, & 5 &\leq x \leq 6 \\ &= 0 & x &\geq 6 \end{aligned} \quad (2.24)$$

α seviyesi için (2.23) ' ü kullanarak şu eşitlikler yazılabilir:

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 2 \quad \text{ve} \quad \alpha = -a_2^{(\alpha)} + 5/2 \quad \text{buradan,}$$

$$A_\alpha = [\alpha + 2, -2\alpha + 5]$$

elde edilir.

(2.24) ' ü kullanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} / 2 - 3 / 2 , \quad \alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6 \text{ buradan ,}$$

$$B_\alpha = [2\alpha + 3, -\alpha + 6] \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} A_\alpha(.)B_\alpha &= [(\alpha + 2).(2\alpha + 3), (-2\alpha + 5)(-\alpha + 6)] \\ &= [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30] \end{aligned}$$

Buradan ,

$$2\alpha^2 + 7\alpha + 6 - x = 0 \quad (2.25)$$

ve

$$2\alpha^2 - 17\alpha + 30 - x = 0 \quad (2.26)$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklemin $[0, 1]$ aralığında , iki kökü vardır.

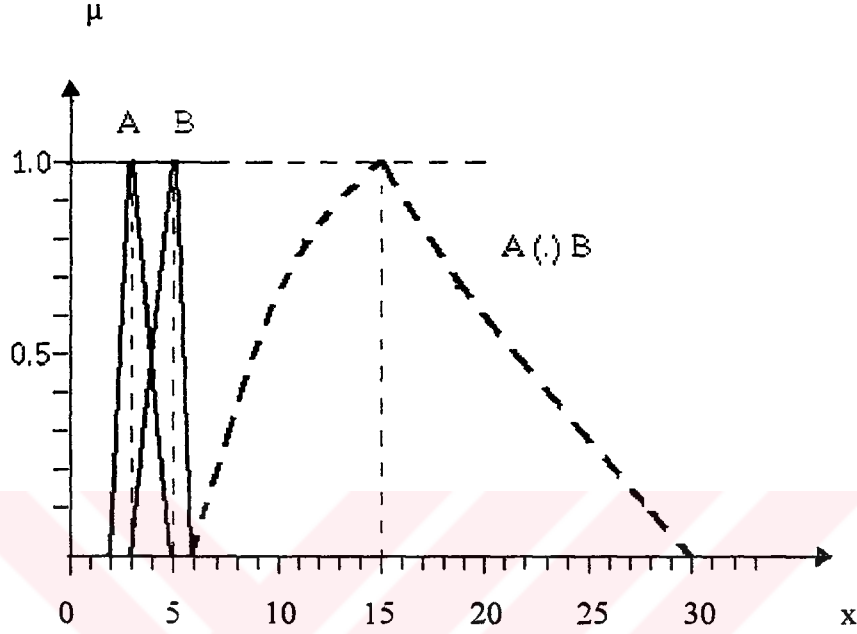
$$(2.25)' \text{ den } \alpha = \frac{(-7 + \sqrt{1 + 8x})}{4} \text{ ve } (2.26)' \text{ dan } \alpha = \frac{17 - \sqrt{49 + 8x}}{4} \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ :$$

$$\begin{aligned} \mu_{A(.)B}(x) &= 0, & x &\leq 6 \\ &= \frac{(-7 + \sqrt{1 + 8x})}{4}, & 6 &\leq x \leq 15 \\ &= \frac{17 - \sqrt{49 + 8x}}{4}, & 15 &\leq x \leq 30 \\ &= 0, & x &\geq 30 \end{aligned}$$

Şekil 2.11 de görüldüğü gibi ; A ve B sayıları, bulanık üçgen sayı olduğu halde, $A(.)B$ sonucu üçgen biçiminde değildir.



Şekil 2.11 İki bulanık sayının çarpımı.

Örnek 2.6

Bu örnekte N 'deki iki bulanık sayının çarpımı ele alınacak.

A =	2	3	4	5	6
	0	0.4	1	0.7	0

(2.27)

B =	2	3	4	5	6	7
	0	0.1	0.8	1	0.3	0

(2.28)

Çarpma işlemi yapılırken. (2.22) 'ye göre ; önce z 'nin $\mu=1$ için değeri hesaplanır. Bu değer, maximum değerın solundan sağına geçerken, z 'nin hangi değerde olduğunu gösterir. Tablo (2.27) ve (2.28) 'den $\mu=1$ değeri, (4,5) sayı ikilisi için sağlanır. Yani ,

$$\mu_{A(.)B}(z) = \mu(x.y=20) = \mu(4.5) = 1. \text{ olur.}$$

20 'ye kadarki değerler, $\mu=1$ 'in solunda ; 20 'den sonraki değerler $\mu=1$ 'in sağında yer alır .

Ayrıca, $\mu(x.y)$ değerleri hesaplanırken ;

1. $x.y \leq z$ olduğu zaman, (2.22) 'ye göre, z 'nin solundaki tüm sayı çiftleri işleme katılır.

2. Eğer $x.y \geq z$ ise, o zaman (2.22) 'ye göre z 'nin sağındaki tüm sayı çiftleri hesaba katılır.

$$\mu(9) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} = 0.1$$

$$\mu(10) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} = 0.1$$

$$\mu(11) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} = 0.1$$

$$\mu(12) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} = 0.4$$

$$\mu(13) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} = 0.4$$

$$\mu(14) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} = 0.4$$

$$\mu(15) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5 \times 3} = 0.4$$

$$\mu(16) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5 \times 3}$$

$$\vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4 \times 4} = 0.8$$

$$\begin{aligned}\mu(17) &= \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3 \times 5} \vee \\ &\quad \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4 \times 4} = 0.8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(18) &= \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3 \times 5} \vee \\ &\quad \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4 \times 4} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.3)}^{3 \times 6} = 0.8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(19) &= \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3 \times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.1)}^{4 \times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3 \times 5} \vee \\ &\quad \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4 \times 4} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.3)}^{3 \times 6} = 0.8\end{aligned}$$

$$\mu(20) = 1$$

$$\mu(21) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4 \times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5 \times 6} = 0.7$$

$$\mu(22) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4 \times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5 \times 6} = 0.7$$

$$\mu(23) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4 \times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5 \times 6} = 0.7$$

$$\mu(24) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4 \times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5 \times 6} = 0.7$$

$$\mu(25) = \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5 \times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5 \times 6} = 0.7$$

$$\mu(26) = \mu(27) = \mu(28) = \mu(29) = \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5 \times 6} = 0.3$$

$$\mu(z > 30) = 0$$

$A(.)B$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	0	0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.8	0.8	0.8	0.8

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0

2.5 Bulanık Sayılarda Bölme

R^+ 'da iki bulanık sayının bölümü şu şekilde tanımlanır :

$$A(:)B = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right] (:)\left[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} \right] = \left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}}, \frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}} \right], \quad b_2^{(\alpha)} > 0, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

veya

$\forall x, y, z \in R^+$:

$$\mu_{A(:)B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

Bölme işlemi, çarpmanın tersidir. Ayrıca, B_α 'nın tersi ;

$$B_\alpha^{-1} = \left[\frac{1}{b_2^{(\alpha)}}, \frac{1}{b_1^{(\alpha)}} \right], \quad b_2^{(\alpha)} > 0, \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad (2.29)$$

dir. Bölmede değişme, birleşme özelliği yoktur.

Örnek 2.7

Bu örnekte iki üçgen bulanık sayının bölme işlemi ele alınacaktır.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0, & x &\leq 18 \\ &= \frac{x}{4} - \frac{18}{4}, & 18 \leq x \leq 22 \\ &= -\frac{x}{11} + 3, & 22 \leq x \leq 33 \\ &= 0 & x &\geq 33 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0, & x &\leq 5 \\ &= x - 5, & 5 \leq x \leq 6 \\ &= -\frac{x}{2} + 4, & 6 \leq x \leq 8 \\ &= 0 & x &\geq 8 \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.30) 'dan $\alpha = a_1^{(\alpha)} / 4 - 18/4$ ve $\alpha = -a_2^{(\alpha)} / 11 + 3$ yazılır. Buradan,

$A_\alpha = [4\alpha + 18, -11\alpha + 33]$ elde edilir.

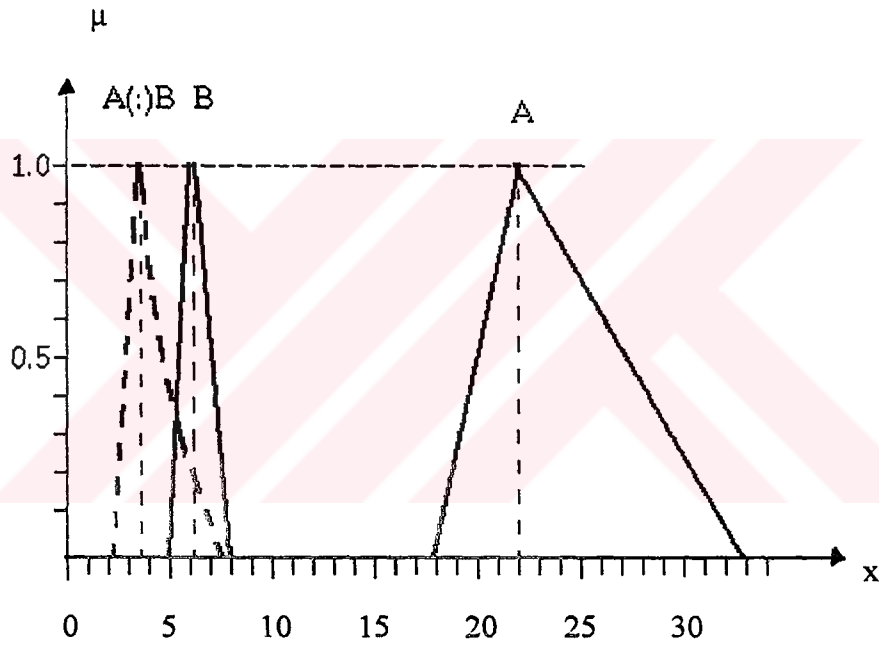
(2.31) 'den $\alpha = b_1^{(\alpha)} - 5$ ve $\alpha = -b_2^{(\alpha)} / 2 + 4$ ve

$B_\alpha = [\alpha + 5, -2\alpha + 8]$ olur.

$$A_\alpha(:)B_\alpha = [4\alpha + 18, -11\alpha + 33] (:) [\alpha + 5, -2\alpha + 8] = \left(\frac{4\alpha + 18}{-2\alpha + 8}, \frac{-11\alpha + 33}{\alpha + 5} \right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}:$

$$\begin{aligned} \mu_{A(\cdot)B}(x) &= 0, & x &\leq \frac{9}{4} \\ &= \frac{8x - 18}{2x + 4}, & \frac{9}{4} &\leq x \leq \frac{11}{3} \\ &= \frac{-5x + 33}{x + 11}, & \frac{11}{3} &\leq x \leq \frac{33}{5} \\ &= 0, & x &\geq \frac{33}{5} \end{aligned}$$



Şekil 2.12 İki bulanık sayının bölümü.

2.6 L-R. Dubois ve Prade Bulanık Sayılar

Referans olarak şu fonksiyon ele alınır:

$$\forall x' \in \mathbb{R}; \Phi \in [0, 1]$$

$$\Phi(x') = F_L(x')$$

$$= 1$$

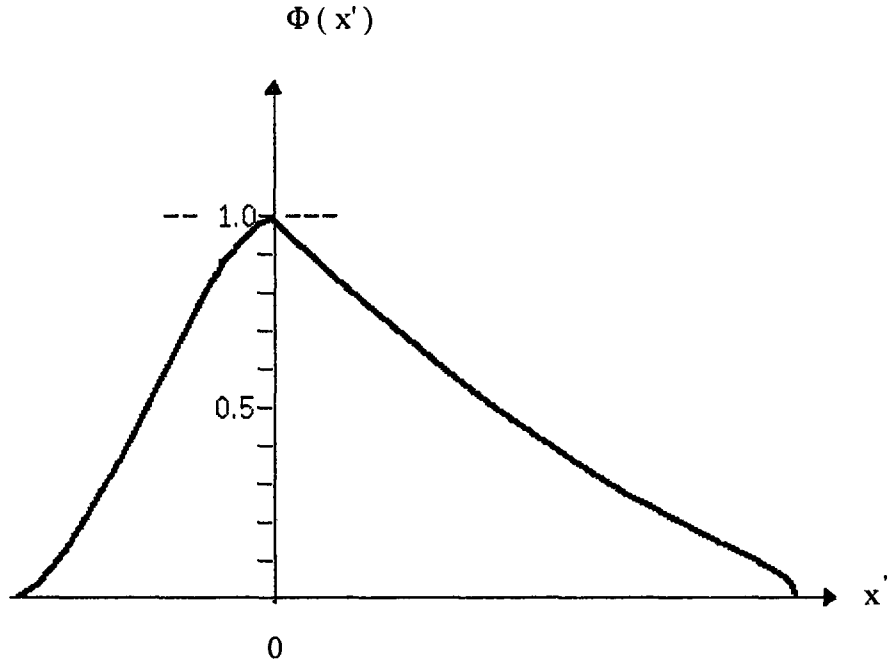
$$= F_R(x')$$

$$-\infty < x' < 0$$

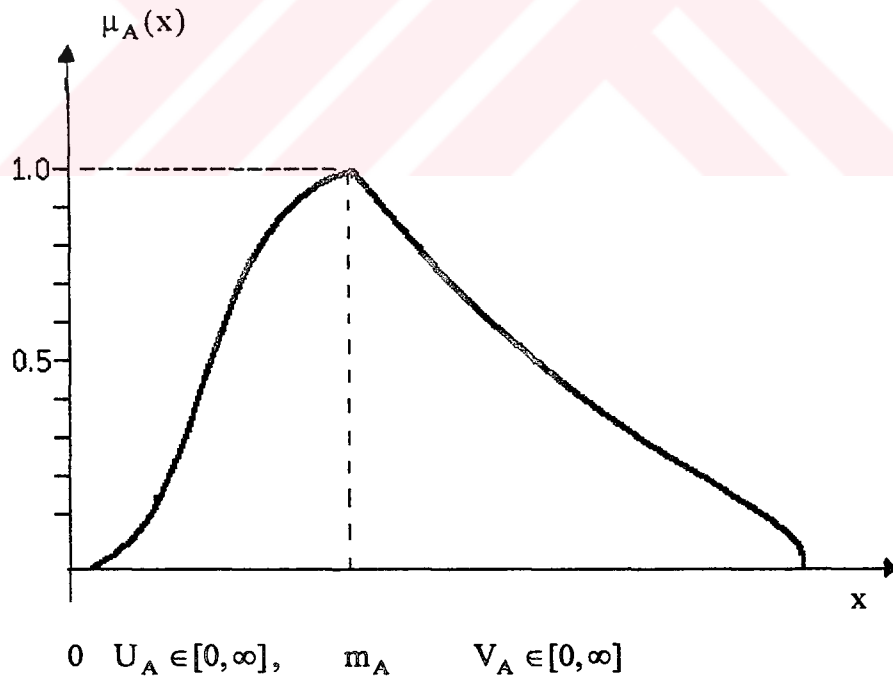
$$x' = 0$$

$$0 < x' < \infty$$

(2.32)



Şekil 2.13 Konveks ve normal L-R bulanık fonksiyon $\Phi(x')$.



Şekil 2.14 $\Phi(x)$ ' in F_L genişlemesi ve F_R daralması.

$\Phi(x')$, bir normal konveks fonksiyon ve bir bulanık sayıdır. $F_L(x')$ monoton artan, $F_R(x')$ monoton azalandır. $F_L(x')$ ve $F_R(x')$ 'in simetrik olması gerekmez. Şekil 2.13 'de $\Phi(x')$ fonksiyonu gösterilmektedir.

$\forall x \in R$ ve $u_A > 0$, $v_A > 0$:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= F_L(x - m_A) / u_A & -\infty < x < m_A \\ &= 1 & x = m_A \\ &= F_R(x - m_A) / v_A & m_A < x < \infty\end{aligned}$$

$m_A < 0$ için sola öteleme ve $m_A > 0$ için sağa öteleme olur. Eğer $u_A < 1$ ve $v_A < 1$ ise büzülme; $u_A > 1$ ve $v_A > 1$ ise genişleme olur. Şekil 2.14 'de $\Phi(x)$ ' in F_L genişlemesi ve F_R büzülmesi gösterilmektedir.

Semisimetrik(Yarı-simetrik) L-R Bulanık Sayılar

Yarisimetrik bulanık sayılar, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\forall x' \in R$:

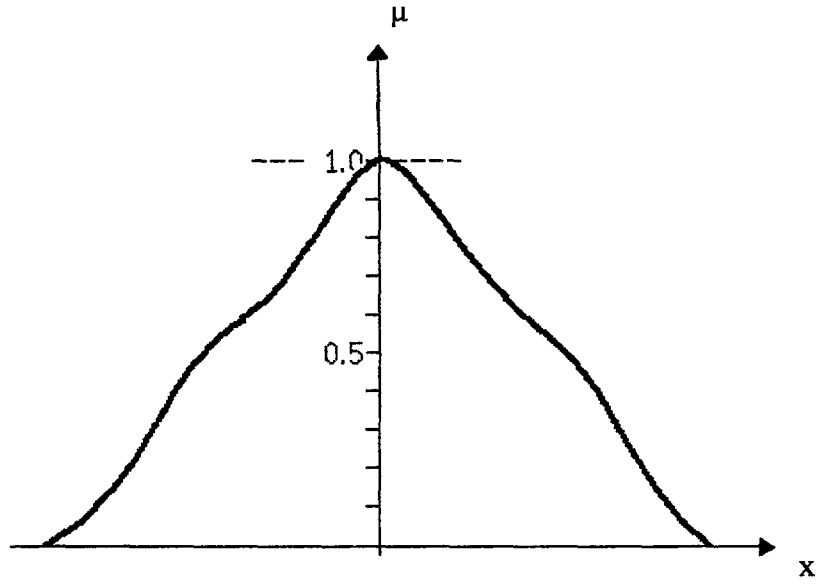
$$\begin{aligned}F_L(x') &= F_R(-x') \\ F_L(0) &= F_R(0) = 1\end{aligned} \tag{2.33}$$

daha genel olarak:

$\forall x \in R$:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= F_L((x - m_A) / u_A) & -\infty < x < m_A \\ &= 1 & x = m_A \\ &= F_L((-x + m_A) / v_A) & m_A < x < \infty\end{aligned}$$

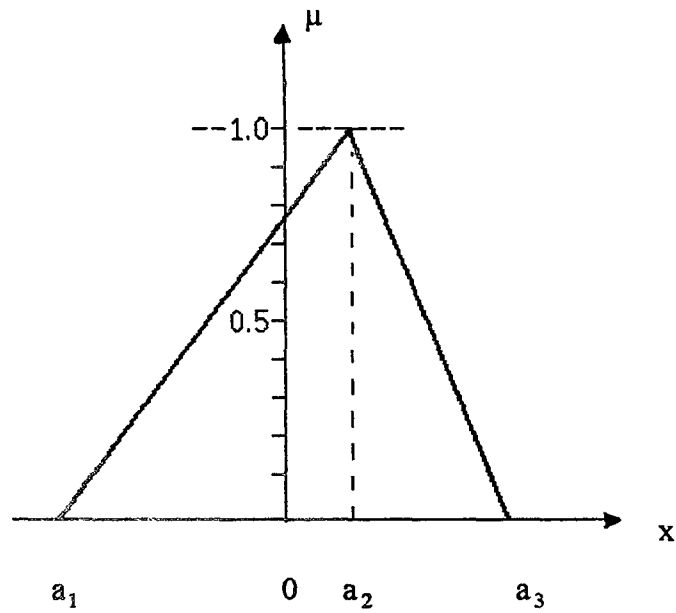
şeklinde ifade edilir. Şekil 2.15 'de bir yarı-simetrik bulanık sayı gösterilmektedir.



Şekil 2.15 Bir yarısimetrik L – R bulanık sayı.

2.7 Üçgen Bulanık Sayılar

Üçgen bulanık sayılar, yarısimetrik bulanık sayıların özel bir durumudur. Şekil 2.16 'da gösterilmektedir.



Şekil 2.16 Bir üçgen bulanık sayı $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Bulanık üçgen sayılar genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$\forall x, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 & x &\leq a_1 \\ &= (x - a_1) / (a_2 - a_1) & a_1 &\leq x \leq a_2 \\ &= (a_3 - x) / (a_3 - a_2) & a_2 &\leq x \leq a_3 \\ &= 0 & x &\geq a_3 \end{aligned}$$

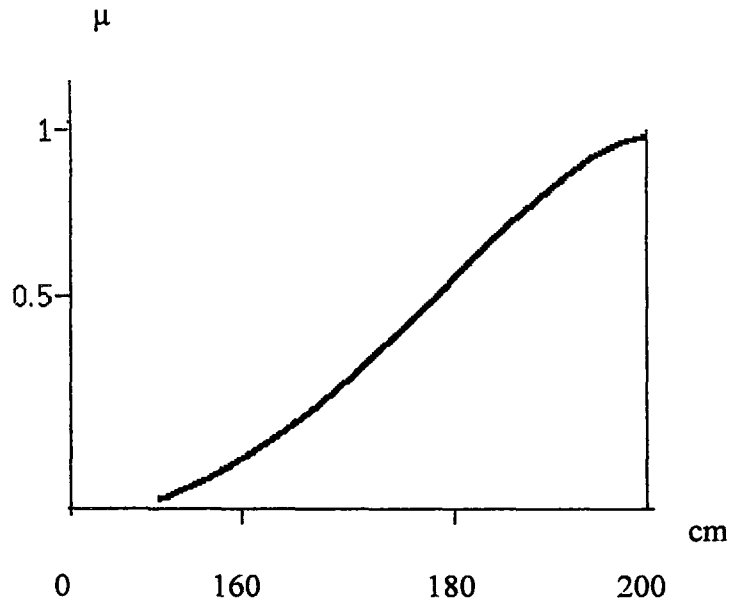


3. BULANIK KÜMELER

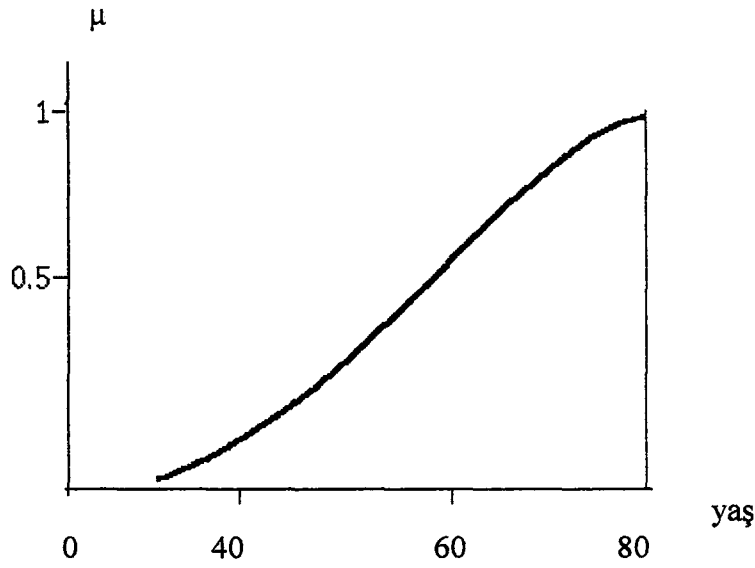
3.1 Giriş

Birçok doğal dil belirsizlik ve çeşitlilik anlamları içermektedir. Nesnelere ait sıfatlar yeterince kesin değildir ve anlam genişliği bakımından belirsizdirler. Örneğin “uzun insan” dediğimizde, kimin uzun yada kısa olduğuna kesinlikle karar veremeyiz. “yaşlı insan” nitelemesindeki belirsizlik, yaşlı sıfatından gelmektedir. Uzun ve yaşlı nitelemesi, uzunluk ve yaşlılık miktarından anlaşılmaktadır. Eğer soyut kelimeleri(belirsiz, bulanık, şüpheli, kuşkulu) kullanmazsak, sıfatlar genelde miktar içerirler. Mühendislikte özellikle çeşitli nesnelerin durumları tanımlanırken, miktar belirtilir.

$X[\text{cm}]$, 40 cm – 200 cm arasındaki boy miktarını gösteren bir dizi olsun. $X[\text{cm}]$ dizisinin her elemanı derecelendirilirse: $0 \leq \mu \leq 1$ olmak üzere, dizinin her bir elemanı, derece μ ’ye karşılık gelir. Şekil 3.1’de yatay eksendeki değerler boy miktarlarını, düşey eksendeki değerler ise, μ ($0 \leq \mu \leq 1$) değerlerini gösterir. Bu şekil, boy miktarındaki belirsizliğin grafiğidir. Şekil 3.2’de ise yaşlılıkla ilgili belirsizliğin grafiği ifade edilmektedir. Bu grafikte, yatay eksen yaş miktarını; düşey eksen herhangibir kişiye ait yaşlılık derecesini gösterir.



Şekil 3.1 Boy grafiği



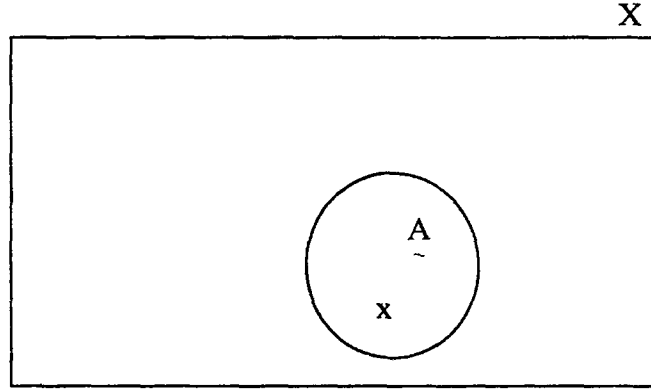
Şekil 3.2. Yaşlılık grafiği.

Bulanık küme teorisinde temel ifadeler:

X	evrensel küme
E	X 'in alt kümesi
$\emptyset$	boş küme
$\{0,1\}$	0 ve 1 kümesi
$[0,1]$	0 ve 1 aralığındaki reel sayılar
X_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$a \wedge b = \min(a,b)$	a ve b 'nin minimum değeri
$a \vee b = \max(a,b)$	a ve b 'nin maximum değeri

3.2 Bulanık Kümeler

Şekil 3.3 'de, X kümesinin bulanık alt kümesi temsili olarak gösterilmiştir. Bulanık küme teorisi, X 'in alt kümesindeki $x \in X$ 'in derecesini tanımlar. μ üyelik fonksiyonudur ve $[0,1]$ aralığında değerler alır. $\mu_A(x)$, $x \in X$ 'in A kümesi tarafından kapsanma derecesini gösterir.



Şekil 3.3 Bulanık altküme $\tilde{A}$

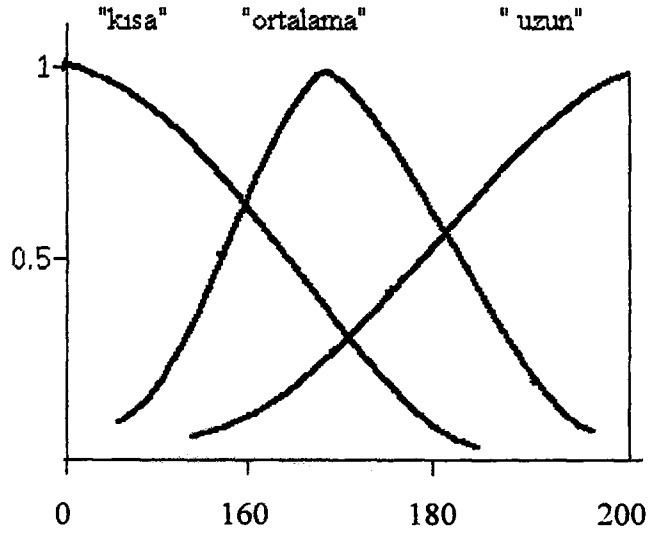
Bulanık Küme

$\mu: X \rightarrow [0,1]$ tanımlı μ fonksiyonu $\tilde{A}$ 'nın üyelik fonksiyonudur ve $\tilde{A}$, X 'in bir bulanık alt kümesidir.

Bir bulanık küme genellikle X 'in alt kümesinde tanımlıdır. Tanımdan da anlaşılacağı gibi, bulanık kümesi $[0,1]$ aralığı ile eşleşmektedir. μ fonksiyonu $\tilde{A}$ 'daki belirsizliği niceler. Şekil 3.1'deki bulanık kümenin üyelik fonksiyonu, 140 cm – 200 cm arasındaki uzunluklardan oluşan boy kümesini temsil eder. Aynı şekilde şekil 3.2'deki bulanık kümenin üyelik fonksiyonu, 20-80 arası yaşlılık grubunu temsil eder.

Bulanık kümenin üyelik fonksiyonları, sadece uzunluğa göre düşünülmezse; kısalık ve ortalama terimleri ile ifade edilirse, Şekil 3.4'deki gibi ifade edilir. Bu şekilde yatay eksen X kümesidir. X , bulanık kümenin destek kümesi olarak adlandırılır. Yatay eksen, üyelik fonksiyonudur. Ortalama boya göre çizilmiş ortadaki eğriye göre düşünen bir kimse, 150 cm – 170 cm arasında değişen boylar için çeşitli subjektif sonuçlara varabilir. Bulanık küme standart kümeye karşılık, subjektif görünür.

Bulanık küme normal küme sembolünün altına “~” işareti konularak belirtilir. Bulanık küme, standart kümenin bir genişlemesidir. Bulanıklık teorisinde, standart küme bulanık kümenin ender seçeneklerinden biridir. Bu nedenle $\tilde{A}$ bulanık kümesi, bazen A kümesinin yerini almaktadır. Bulanık kümeyle standart kümeyi ayırmak için; standart küme crisp (kesin) veya bulanık-olmayan küme olarak belirtilir.



Şekil 3.4 Kısalık, ortalama ve uzunluğa göre boy grafiği.

E standart kümesi, X 'in bir alt kümesi olmak üzere,

$$X_E(x) = \begin{cases} 1; & x \in E \\ 0; & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $X_E(x)$ 'e, E 'nin karakteristik yada üyelik fonksiyonu denir.

Eğer $x \in E \Rightarrow$ derece $X_E(x) = 1$,

Eğer $x \notin E \Rightarrow$ derece $X_E(x) = 0$ olur.

3.3 Bulanık Kümede Temel işlemler

Birleşme

Bulanık kümede üyelik fonksiyon tanımlı olduğundan, A ve B kümelerinin birleşimi

$A \cup B$ dir. Ve birleşimin üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x). \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Örnek 3.1

$X = \{ \text{Ahmet, Zeynep, Fatma, Ali, Can} \}$ kümesi verilmiş olsun. A , “tembel öğrencilerin” Alt kümesi ve B , “uzun öğrencilerin” alt kümesi olsun.

$$\underline{A} = 0.6/\text{Ahmet} + 0.4/\text{Zeynep} + 0.5/\text{Fatma} + 0.7/\text{Ali} + 0.2/\text{Can}$$

$$\underline{B} = 0.3/\text{Ahmet} + 0.7/\text{Zeynep} + 0.4/\text{Fatma} + 0.8/\text{Ali} + 0.5/\text{Can}$$

$\underline{A}$ ve $\underline{B}$ ’nin birleşimi:

$\underline{A} \cup \underline{B} = 0.6/\text{Ahmet} + 0.7/\text{Zeynep} + 0.5/\text{Fatma} + 0.8/\text{Ali} + 0.5/\text{Can}$ kümesidir. Bu küme “tembel” veya “uzun” öğrencilerin fuzzy(bulanık) alt kümesidir.

Kesişim

$\underline{A}$ ve $\underline{B}$ bulanık kümelerin kesişimi; $\underline{A} \cap \underline{B}$ dir. $\underline{A} \cap \underline{B}$ ’nin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(x) \quad (3.2)$$

Örnek 3.1’e göre, “tembel” ve “uzun” öğrencilerin bulanık alt kümesi:

$$\underline{A} \cap \underline{B} = 0.3/\text{Ahmet} + 0.4/\text{Zeynep} + 0.4/\text{Fatma} + 0.7/\text{Ali} + 0.2/\text{Can} \quad \text{kümesidir.}$$

Tümleme

$\underline{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni, $\overline{\underline{A}}$ dır. $\overline{\underline{A}}$ ’nın üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{\overline{\underline{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underline{A}}(x) \quad (3.3)$$

dir.

Denklik Bağıntısı

$$\forall x \in X ; \quad \underline{A} = \underline{B} \quad \leftrightarrow \mu_{\underline{A}}(x) = \mu_{\underline{B}}(x). \quad (3.4)$$

Kapsama Bağıntısı

$$\forall x \in X ; \quad \underline{A} \subset \underline{B} \quad \leftrightarrow \mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(x). \quad (3.5)$$

Çift Tersinir Kuralı

$$\overline{\underline{\overline{A}}} = \underline{A} \quad (3.6)$$

De Morgan Kuralı

$$\overline{\underline{A} \cup \underline{B}} = \underline{\overline{A}} \cap \underline{\overline{B}} \quad (3.7)$$

$$\overline{\underline{A} \cap \underline{B}} = \underline{\overline{A}} \cup \underline{\overline{B}} \quad (3.8)$$

Standart(klasik) kümelerden farklı olarak aşağıdaki iki özellik, bulanık kümeler için geçerlidir:

$$\underline{A} \cup \underline{\overline{A}} \neq X \quad (3.9)$$

$$\underline{A} \cap \underline{\overline{A}} \neq \emptyset \quad (3.10)$$

herbir x değeri için, X ve $\emptyset$ 'nin üyelik fonksiyonlarının değeri aşağıdaki gibidir:

$$\mu_X(x) = 1 \quad (3.11)$$

$$\mu_{\emptyset}(x) = 0 \quad (3.12)$$

Cebirsel Toplam

$$A \boxplus B \leftrightarrow \mu_{A \boxplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (3.13)$$

Cebirsel Çarpım

$$A \cdot B \leftrightarrow \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (3.14)$$

Sınırsal Toplam

$$A \oplus B \leftrightarrow \mu_{A \oplus B}(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x)) \wedge 1 \quad (3.15)$$

Sınırsal fark

$$A \ominus B \leftrightarrow \mu_{A \ominus B}(x) = (\mu_A(x) - \mu_B(x)) \vee 0 \quad (3.16)$$

3.4 λ Tümleyeni

$$\overline{A}^\lambda \leftrightarrow \mu_{\overline{A}^\lambda}(x) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda \mu_A(x)} ; \quad -1 < \lambda < \infty \quad (3.17)$$

De Morgan Kuralı, cebirsel toplam, cebirsel fark, tümleyene uygulanırsa:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad (3.18)$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \quad (3.19)$$

eşitlikleri elde edilir. λ tümleyeni, De Morgan Kuralı ile ifade edilirse:

$$\left(\overline{A \cup B} \right)^\lambda = \overline{A}^\lambda \cap \overline{B}^\lambda \quad (3.20)$$

$$\left(\overline{A \cap B} \right)^\lambda = \overline{A}^\lambda \cup \overline{B}^\lambda \quad (3.21)$$

ve çift tersinir kuralı λ tümleyenine uygulanırsa,

$$\overline{(\overline{A}^\lambda)^\lambda} = A \quad (3.22)$$

elde edilir.

λ , tümleme derecesini veren bir parametredir. Eğer $\lambda = 0$ olursa, A^λ adi tümleyen olur. Ve $\lambda = -1$ 'e yaklaşırsa: A^λ , evrensel küme X 'e yaklaşır. $\lambda \rightarrow \infty$ yaklaşırsa; $\overline{A}^\lambda$, boş kümeye yaklaşır.

Üyelik fonksiyon bulanık kümeyi ifade etmekte kullanılır, fakat destek kümesi sonlu bir küme ise,

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

o zaman X ' in A bulanık alt kümesi şu şekilde ifade edilir:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i \triangleq \mu_A(x_1) / x_1 + \mu_A(x_2) / x_2 + \dots + \mu_A(x_n) / x_n \quad (3.23)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ destek kümesinin elemanları ve $\mu_A(x_i)$ 'ler ($i=1, \dots, n$) derecelerdir. $+$ sembolü, veya anlamındadır. Örnek olarak,

$$a / x_1 + b / x_1 = a \vee b / x_1$$

eşitliği verilebilir.

Örnek 3.2

Bulanık küme olarak adlandırabileceğimiz 1' den 10' a kadar tamsayıların değer kümesi içindeki büyük sayılar A kümesi olsun. B kümesi ise bu tamsayı değer kümesinde ortadaki sayılar olsun. $A \cup B$ 'yi bulalım.

$$A = 0.2 / 5 + 0.4 / 6 + 0.7 / 7 + 0.9 / 8 + 1 / 9 + 1 / 10$$

$$B = 0.4 / 3 + 0.8 / 4 + 1 / 5 + 0.8 / 6 + 0.4 / 7$$

$$\begin{aligned}
A \cup B &= (0.2/5 + 0.4/6 + 0.7/7 + 0.9/8 + 1/9 + 1/10) \\
&\quad + (0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7) \\
&= 0.4/3 + 0.8/4 + 0.2 \vee 1/5 + 0.4 \vee 0.8/6 + 0.7 \vee 0.4/7 + 0.9/8 + 1/9 + 1/10 \\
&= 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.7/7 + 0.9/8 + 1/9 + 1/10
\end{aligned}$$

Eğer destek kümesi sonsuz olursa, bulanık alt küme A aşağıdaki gibi yazılır:

$$A = \int_x \mu_A(x) / x \quad (3.24)$$

Bu yöntemle göre; birleşim, kesişim ve tümlenme ifadelerini yazabiliriz.

$$A \cup B = \int_x (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) / x \quad (3.25)$$

$$A \cap B = \int_x (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) / x \quad (3.26)$$

$$\bar{A} = \int_x (1 - \mu_A(x)) / x \quad (3.27)$$

Normal Bulanık Küme

Bulanık kümede üyelik fonksiyonun derecesi 1 ise normaldir denir.

$$A \text{ "normal" } \text{ ise } \Leftrightarrow \max_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \quad (3.28)$$

Bulanık Kümelerinin Doğrudan Çarpımı

$A \subset X$ ve $B \subset Y$ olduğu zaman $A \times B$, $X \times Y$ 'nin alt kümesi olur. Aşağıdaki özellik, A ve B'nin doğrudan çarpımı olarak kabul edilir.

$$A \times B \leftrightarrow \mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad (3.29)$$

3.5 Konveks Bulanık Kümeler

Konvekslik özelliği, reel N boyutlu Euclidean uzayındaki bir evrensel X kümesinin bulanık kümelerine genelleştirilebilir.

Tanım: A bulanık kümesi konveks $\Leftrightarrow A$ kümesinin α keseni konvektir.

A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], \quad (3.30)$$

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min [\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

olmasıdır. Şekil 3.4’ deki bulanık kümeler konvektir.

3.6 Destek Kümesi

Bulanık bir A kümesinin desteği, X ’ in kesin alt kümesidir,

$$\text{supp } A = \{x | \mu_A(x) > 0, x \in X\} \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilir.

3.7 α Kesenleri

Bulanık alt kümeye ait bir $x \in X$ ’ in üyelik değerinin bir $\alpha \in [0,1]$ derecesinden büyük olmasını isteyebiliriz. α – keseni A_α , A ’nın olağan bir alt kümesidir. Ve

$$A_\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlanır. Kuvvetli(güçlü) α – keseni $A_{\bar{\alpha}}$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{ x \in X, \mu_A(x) > \alpha \} \quad (3.33)$$

Bir bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu, α -kesenlerinin üyelik fonksiyonu olarak ifade edilirse;

$$\mu_{A_{\alpha}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_{\alpha} \\ 0 & x \notin A_{\alpha} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, \mu_{A_{\alpha}}(x)] \quad (3.34)$$

eşitliği yazılır.

3.8 Uzanım Prensibi

f , X 'ten Y 'ye bir gönderim ve A X 'in bir bulanık alt kümesi,

$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + \dots + \mu_n / x_n$, A 'nın f altındaki görüntüsü,

$f(A) = f(\mu_1 / x_1 + \dots + \mu_n / x_n) \equiv \mu_1 / f(x_1) + \dots + \mu_n / f(x_n)$ dir.

f n -li fonksiyonu, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ kartezyen çarpımından Y evrenine bir gönderim,

yani, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $A_1, A_2, \dots, A_n$ kümeleri,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ deki n tane bulanık küme, $\{\mu_{A_i}(x_i)\}_{i=1}^n$ ler üyelik fonksiyonu

olduğu zaman, uzanım prensibi, n tane bulanık kümeden $\{A_i\}_{i=1}^n$, Y 'de bir F bulanık kümesinin tümevarımına neden olur. Ve şu şekilde ifade edilir:

$$\mu_F(y) = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ y = f(x_1, \dots, x_n)}} \min [\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)], \quad (3.35)$$

$$\text{Eğer } f^{-1}(y) = \emptyset \Rightarrow \mu_F(y) = 0$$

Örnek 3.3

$*$, Y 'deki $X_1 \times X_2$ in değerleri ile tanımlı ikili işlem olsun. Ve A_1 ve A_2 , X_1 ve X_2 'nin bulanık alt kümeleri :

$$A_1 = \mu_{A_{11}} / x_{11} + \dots + \mu_{A_{1n}} / x_{1n} \quad \text{ve} \quad A_2 = \mu_{A_{21}} / x_{21} + \dots + \mu_{A_{2n}} / x_{2n}$$

$*$ işlemi aşağıdaki tanımla, X_1 ve X_2 nin bulanık alt kümelerine genişletilmiş olabilir:

$$A_1 * A_2 = \left(\sum_i \mu_{A_{1i}} / x_{1i} \right) * \left(\sum_j \mu_{A_{2j}} / x_{2j} \right) = \sum_{i,j} (\mu_{A_{1i}} \wedge \mu_{A_{2j}}) / (x_{1i} * x_{2j})$$

$$X_1 = X_2 = 1 + 2 + \dots + 7 \quad \text{ve}$$

$A_1 = 2$ 'nin ve $A_2 = 4$ 'ün yaklaşık değerler kümesi olsun.

$$A_1 = 0.6 / 1 + 1 / 2 + 0.8 / 3, \quad A_2 = 0.8 / 3 + 1 / 4 + 0.7 / 5$$

A_1 ve A_2 nin aritmetik çarpımı :

$$\begin{aligned} A_1 * A_2 &= (0.6 / 1 + 1 / 2 + 0.7 / 3) \times (0.8 / 3 + 1 / 4 + 0.7 / 5) \\ &= 0.6 / 3 + 0.6 / 4 + 0.6 / 5 + 0.8 / 6 + 1 / 8 + 0.7 / 10 + 0.7 / 9 \\ &= 0.7 / 12 + 0.7 / 15. \end{aligned}$$

Örnek 3.4

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $A = 0.8/3 + 1/5 + 0.6/6$, $B = 0.7/3 + 1/4 + 0.5/6$

olsun. Aşağıdaki bulanık küme işlemlerini yapalım:

$$A \cup B = 0.8/3 + 1/4 + 1/5 + 0.6/6,$$

$$A \cap B = 0.7/3 + 0.5/6 ;$$

$$\bar{A} = 1/1 + 1/2 + 0.2/3 + 1/4 + 0.4/6 + 1/7,$$

$$AB = 0.56/3 + 0.3/6,$$

$$A^2 = 0.64/3 + 1/5 + 0.36/6;$$

$$0.5A = 0.4/3 + 0.5/5 + 0.3/6;$$

$$A \oplus B = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6,$$

$$A \ominus B = 0.1/3 + 1/5 + 0.1/6$$

Örnek 3.5

Bu örnekte üyelik fonksiyonları verilen A ve B'nin cebirsel çarpımını bulalım.

$$\mu_A(x) = 0.5/0.2 + 1/0.4 + 0.8/0.6$$

$$\mu_B(x) = 1/0.2 + 0.9/0.4 + 0.4/0.6$$

$$\mu_A(x) \cdot \mu_B(x) = \frac{1 \wedge 0.5}{0.2 \times 0.2} + \frac{1 \wedge 1}{0.2 \times 0.4} + \frac{1 \wedge 0.8}{0.2 \times 0.6} + \frac{0.9 \wedge 0.5}{0.4 \times 0.2} + \frac{0.9 \wedge 1}{0.4 \times 0.4} + \frac{0.9 \wedge 0.8}{0.4 \times 0.6}$$

$$= \frac{0.4 \wedge 0.5}{0.6 \times 0.2} + \frac{0.4 \wedge 1}{0.6 \times 0.4} + \frac{0.4 \wedge 0.8}{0.6 \times 0.6}$$

$$= 0.05/0.04 + 1/0.08 + 0.8/0.12 + 0.9/0.16 + 0.8/0.24 + 0.4/0.36$$

4. BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

4.1 Giriş

“Matematiksel programlama” terimi burada, yöneylem araştırmasında olduğu gibi, yani ;

maximum $f(x)$

$$g_i(x) = 0; \quad i = 1, \dots, m \quad (4.1)$$

tipindeki modellerin çözümünde algoritmik bir yaklaşım olarak yorumlanacaktır.

$f(x)$, amaç fonksiyonunun matematiksel karakterine ve $g_i(x)$ kısıtlarına bağlı olarak matematiksel programlama algoritmalarının bir çok çeşidi vardır. Örneğin; lineer programlama, quadratik programlama, kesirli programlama, konveks programlama gibi.

Biz ,

$$c, x \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A \in R^{m \times n}$$

$$\text{maximum } f(x) = z = c^T X$$

$$\text{kısıtlar : } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

(4.2)

şeklinde ifade edilen , en basit ve sık kullanılan tip olan lineer programlamayı kullanacağız.

Bu modelde, A nın katsayılarının ve b ve c 'lerin reel sayılar olduğu, ayrıca " $\leq$ " klasik anlamda kullanıldığı ve “maximum” ifadesinin de kesin şart olduğu varsayılacaktır. Buda, herhangi bir tek kısıtın aykırılığının, çözümü uygun kılmadığı ve bütün kısıtların eşit öneme sahip olduğunu ifade eder.

LP kararının bulanık ortamda oluştuğunu farzederek, (4.2)' nin mümkün düzenlemelerinin sayısı tamamıyla mevcuttur. İlki, karar verici amaç fonksiyon maximum veya minimum olmasına ihtiyaç duymayabilir. Karar verici, kesin olarak tanımlanamayan bazı istek seviyelerine erişmek isteyebilir. Yani, karar verici, şu andaki fiyat durumunu da düzenleyebilir. İkinci olarak kısıtlar belirsiz olabilir; $\leq$ işareti tamamıyla matematiksel anlamda olmayabilir, eğer kısıtlar istek seviyelerini

gösteriyorsa daha küçük aykırılıklar tamamen kabul edilebilir. Örneğin, kısıtlar kesin bir kısıtla yaklaşılamayan duyuşal ihtiyaçları ifade edebilir (tat, koku, renk, v.s). Elbette, b veya c vektörlerinin veya A matrisinin katsayıları bulanık karektere sahiptir.

Sonuçta, kısıtların rolü, herhangi bir miktar ile herhangi bir tek kısıtın aykırılığının, çözümünü imkansız kılan klasik lineer programlama probleminkinden farklı olabilir. Karar verici farklı sınırlamaların küçük aykırılıklarını kabul edebilir. Bulanık lineer programlama bütün belirsizliklerin sadece bir yönünü temsil eder.

Bulanık çerçevede lineer programlamanın yeni bir modelini geliştirmeden önce, klasik lineer programlamaya karşıt olarak bulanık lineer programlama modeli için tek bir model tanımlı olamaz, ancak, varsayımlara veya gerçek durumun modellenmesine bağlı olan birçok varyasyon mümkündür.

Temel olarak, modelin iki "ailesi" tartışılabilir. Birincisi, Belman ve Zadeh'in "bulanık ortamda karar" (1970) tanımının uygulanabildiği, özel bir karar verme ortamı için "bulanık matematiksel programlamayı" yorumlar. Diğerisi ise, belli varsayımlar altında bulanık olarak model (4.2)'nin bileşenlerini göz önüne alır. Örneğin, A , b veya c 'de kesin katsayıların yerini bulanık sayıların aldığı ve daha sonra sonuçlanan matematiksel problemi çözen bulanık kümelerin tiplerini gözönüne alır. Uygulamalardaki deneyimlerden karar verici, amaçlar için arzu edilen seviyelerin tahmin edilmesi veya bulanık kısıtların belirlenmesinin A , b veya c ler için bulanık sayıların belirlenmesinden çok daha kolay bulduğunu görür. Bu nedenle önce ilk yaklaşımı ve daha sonra diğer yaklaşımları ayrıntılı bir şekilde vereceğiz.

4.2 Bulanık Matematiksel Programlama

4.2.1 Simetrik Lineer Programlama

Yukarıda belirtildiği gibi, Bulanık LP, bir bulanık ortamda bir kararın özel bir durumu olarak gözönüne alınır. Bu durumda esas Belman ve Zadeh (1970) tarafından önerilen tanımdır.

Tanım 4.1

X alternatiflerinin bir uzayında, $\tilde{C}$ bir bulanık kısıt ve $\tilde{G}$ bir bulanık amaç'ın verildiği varsayılın. O zaman, $\tilde{G}$ ve $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ ve $\tilde{C}$ 'nin arakesitiyle sonuçlanan bir bulanık küme olan $\tilde{D}$ kararını verir. $\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$ dir.

Ayrıca, $\mu_{\tilde{D}} = \min \{ \mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}} \}$ dir.

Daha genel olarak, $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n$ n tane amaç ve $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m$ m tane kısıta sahip olduğunu farzedelim. O halde, $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n$ n tane amaç ve verilen $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m$ kısıtların kesişimi kararı oluşturur. Yani,

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \dots \cap \tilde{C}_m \text{ dir.}$$

Ve

$$\mu_{\tilde{D}} = \{ \mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, \dots, \mu_{\tilde{G}_n}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, \dots, \mu_{\tilde{C}_m} \} = \min \{ \mu_{\tilde{G}_i}, \mu_{\tilde{C}_j} \} = \min \{ \mu_i \}$$

dir. Bu tanım aşağıdakileri ifade eder :

1. Modelde amaçlar ve kısıtların “ve” bağlantısı, “mantıksal ve” ye karşılık gelir.
2. Mantıksal “ve”, kümelerin teorik kesişimine karşılık gelir.
3. Bulanık kümelerin arakesiti olasılık anlamda min-operatör ile tanımlanır.

Bu aşamada, bu varsayımları kabul edeceğiz. Bu modelin en önemli bir özelliği simetrik olmasıdır, gerçekten bu durum amaçlar ve kısıtlar arasında tartışılmaz. Bu özellik diğer yazarlarca yeterli görünmez(Asai , 1975). Bununla beraber, biz bunun karar vericinin real davranışını oldukça iyi modellediğini görmekteyiz.

Eğer karar vericinin model (4.2) yi mümkün olduğunca iyi başarmak istediği amaç fonksiyonu z 'nin, arzu edilen bir seviyesini kurmak ve bu modelin kısıtlarının biraz ihlal edilebileceğini varsayarsak, o zaman model (4.2) şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
c^T X &\geq z \\
Ax &\leq b \\
x &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$\leq$ işareti, $\leq$ 'nin bulanık versiyonu ve küçük ve eşit anlamındadır. $\geq$ işareti, $\geq$ 'nin bulanık versiyonu ve büyük veya eşit anlamındadır. (4.2) deki amaç fonksiyon minimizasyon amaç olarak ve z üst sınır olarak düşünülmeli.

(4.3) amaç fonksiyon ve kısıtlamalara göre tamamen simetriktir. Ve

$(^c A) = B$ ve $(^z b) = d$ olursa (4.3) şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
Bx &\leq d \\
x &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) deki (m+1) satırın her biri bulanık küme tarafından ifade edilmekte ve üyelik fonksiyonlar $\mu_i(x)$ lerdir.

(4.4) deki bulanık küme kararının üyelik fonksiyonu

$$\mu_D(X) = \min_i \{\mu_i(X)\} \tag{4.5}$$

dir. $\mu_i(x)$, $B_i x \leq d_i$ bulanık eşitsizliğini sağlayan x' in derecesi olarak yorumlanacaktır.

Karar vericinin bir bulanık küme ile değil, mümkün nonlineer programlama problemi olan

$$\max_{x \geq 0} \min_i \{\mu_i(x)\} = \max_{x \geq 0} \mu_D(x) \tag{4.6}$$

nın çözümü olan (4.5) ile “maximum çözümü” olarak önerebildiğimiz kesin “optimal” çözüm ile ilgilendiği varsayılın.

Şimdi $\mu_i(x)$ üyelik fonksiyonunu belirlemeliyiz. $\mu_i(x)$, kısıtlar güçlü olarak ihlal edilmişse 0, eğer çok iyi bir şekilde sağlanmışsa 1 dir. Ve $\mu_i(x)$, 0 ile 1 arasında monoton olarak artar. Yani,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & B_i x \leq d_i \\ \in [0,1] & \text{eğer } d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & B_i x > d_i + p_i \end{cases} \quad i=1, \dots, m+1 \quad (4.7)$$

En basit tip olan üyelik fonksiyonunu kullanarak, p_i “tölerans aralığı” üzerinde lineer olarak arttığını varsayalım.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & B_i x \leq d_i \\ 1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} & \text{eğer } d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & B_i x > d_i + p_i \end{cases} \quad i=1, \dots, m \quad (4.8)$$

P_i ler amaç fonksiyon ve kısıtlamaların kabul edilmiş ihlallerinin sabitleri olarak isteye bağlı olarak seçilirler. (4.8), (4.6) 'da yerine konursa ve Zimmerman[1976] tarafından yapılan düzenlemeler ve eklemeler sonucu aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\max \min \left(1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} \right) \quad (4.9)$$

λ , (4.5) denkleminde uygun gelen bir değişken olmak üzere;

$$\begin{aligned} \text{maximum } & \lambda \\ & \lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i \quad i=1, \dots, m+1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

(λ, x_0) vektörü (4.10) 'un optimal çözümü ise, model (4.2) 'nin (4.8)'deki farzedilen üyelik fonksiyonunun maximum çözümü (4.6) daki x_0 dir.

Buradaki maximum çözüm, model (4.4) den, birden fazla değişken ve kısıtlamalarla normal LP deki çözümlerle bulunur. Bu yaklaşım yöntemi etkin bir yöntemdir.

(4.9) ve (4.10) modelleri düzenlenirse; üyelik fonksiyonlar şu şekilde tanımlanır. t_i değişkenleri, kısıtlamaların ihlal edilen derecelerinin ölçümleri olmak üzere,

$0 \leq t_i \leq p_i$, $i=1, \dots, m+1$ dir. Ve üyelik fonksiyon,

$$\mu_i(x) = 1 - \frac{t_i}{p_i} \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir. model;

maximum λ

$$\lambda p_i + t_i \leq p_i \quad i=1, \dots, m+1$$

$$Bx_i - t_i \leq d_i$$

$$t_i \leq p_i$$

$$x, t \geq 0$$

(4.12)

şeklinde olur.

Bu model, $t_i \leq p_i$ kısıtlamalarının kümesi gerçekten fazlalık olmakla birlikte, (4.10) modelinin daha geniş bir ifadesidir. Bu modelin bazı avantajları vardır.

Önemli avantajı, bulanık olmayan problemlerin formülasyonuna benzetilmesi; gerçekten karar verici, matematiksel nedenlerden dolayı tam bir formülasyona zorlanmamaktadır, hatta bulanık terimleri ile ifade edilen bir problem dahi olsa. Üyelik fonksiyonlar $[d_i, d_i + p]$ aralığında monoton artan veya azalandır.

Dikkate alınan kısıtlamaların eş önemli klasik tahminleri gevşetilirse; üyelik fonksiyonların eğimine, kısıtlamaların önem veya ağırlığı karar verir. Eğimler p_i ' ler-

den saptanır. P_i küçüldükçe kısıtlamaların önemi büyür. $P_i = 0$ ise kısıtlama kesin olur, ihlal söz konusu olmaz.

Amaç fonksiyon ile beraber kısıtlamalar bulanıklıkda hesaba katılır. Bazı kısıtlamalar kesin ise, $Dx \leq b$, bu kısıtlamalar kolaylıkla (4.11) ve (4.12) formüllerine eklenebilir. Ve böylece (4.13) elde edilir:

maximum λ

$$\begin{aligned} \lambda p_i + B_i x &\leq d_i + p_i \\ Dx &\leq b \\ x, \lambda &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2.2 Bulanık Kısıtlamalar ve Kesin Amaç Fonksiyonlar ile Lineer Programlama

Farzedilen amaç fonksiyon verilen z tarafından ayarlanabilir ve sonra bulanık küme gibi formüle edilebilir, elde edilen sonuç simetrik model formülasyonundadır. Bununla birlikte doğal yöntemde z 'yi bulmaya gereksinim olmayabilir. Burada simetrik model, Zadeh'in "maximize edilmiş küme" uzmanlık uygulaması ile, amaç fonksiyona kazandırılabilir:

Tanım 4.2 (Werners, 1984)

$f: X \rightarrow R^1$ 'e tanımlı amaç fonksiyon, $\tilde{R}$ = olası bulanık bölgesi, $S(\tilde{R}) = \tilde{R}$ 'nin desteği ve $R_1 = \alpha$ için $\tilde{R}$ 'nin α seviyesinde kesenidir. Amaç'ın üyelik fonksiyonu $\tilde{R}$ uzayında çözüm vermekte ve şu şekilde tanımlanır;

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \leq \sup_{R_1} f \\ \frac{f(x) - \sup_{R_1} f}{\sup_{S(\tilde{R})} f - \sup_{R_1} f} & \text{eğer } \sup_{R_1} f < f(x) < \sup_{S(\tilde{R})} f \\ 1 & \sup_{S(\tilde{R})} f \leq f(x) \end{cases}$$

üyelik fonksiyonun fonksiyonel uzaydaki ifadesi;

$$\mu_{\tilde{G}}(r) := \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(r)} \mu_{\tilde{G}}(x) & \Leftrightarrow r \in R, f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{öteki durumlar için} \end{cases} \quad (13.a)$$

dir. Bu bulanık kümeden bulanık kümelere tanımlı çözüm aralıkları (4.10) veya (4.12)'ye uygulanan simetrik modeli vermektedir. Eğer (4.2) tanımını özel LP yapısına uygularsak daha kolay anlaşılır:

(4.3)'e kesin kısıtlamaların kümesi eklenerek, $Dx \leq b$ ve amaç fonksiyon maximum $f(x)$ yapılırsa model,

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & f(x) = c^T x \\ & \left. \begin{aligned} Ax &\leq b \\ Dx &\leq b' \\ x &\geq 0 \end{aligned} \right\} \tilde{R} \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilir.

Bulanık kısıtlamalar (4.8)'e göre tanımlanırsa, bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow A_i x \leq b_i \\ \frac{b_i + p_i - A_i x}{p_i} & \Leftrightarrow b_i < A_i x \leq b_i + p_i \\ 0 & \Leftrightarrow A_i x > b_i + p_i \end{cases} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Bulanık kümede tanımlı üyelik fonksiyon, (4.2)'den faydalanılarak kolayca tanımlanabilir :

$$\begin{aligned}
 \text{maximum} \quad & f(x) = c^T x \\
 & Ax \leq b \\
 & Dx \leq b' \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Bu modelin optimal çözümü: $f_1 = \sup_{(R^1)} f(c^T x)_{\text{opt}}$ dir.

$$\begin{aligned}
 \text{maximum} \quad & f(x) = c^T x \\
 & Ax \leq b + p \\
 & Dx \leq b' \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Model (4.17)' nin optimal çözümü: $f_0 = \sup_{s(\tilde{R})} (c^T x)_{\text{opt}}$ dır.

Ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1 & f_0 \leq c^T x \\ \frac{c^T x - f_1}{f_0 - f_1} & \text{eğer } f_1 < c^T x < f_0 \\ 0 & c^T x \leq f_1 \end{cases} \tag{4.18}$$

şeklindedir.

Model (4.14)' e denk olarak

maximum λ

$$\lambda(f_0 - f_1) - c^T x \leq -f_1$$

$$\lambda p + Ax \leq b + p$$

$$Dx \leq b'$$

$$\lambda \leq 1$$

$$x, \lambda \geq 0$$

(4.19)

modeli yazılır.

Örnek 4.1

$$\text{maximum } z = 2x_1 + 2x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$5x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kısıtlamaların “tölerans aralıkları” $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$. Ve f_0 ve f_1 sırasıyla 7 ve 16 olarak alınıp; Buna göre model (4.19), probleme uygulanırsa:

maximum λ

$$9\lambda - 2x_1 - x_2 \leq -7$$

$$6\lambda + x_1 \leq 9$$

$$4\lambda + x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2\lambda + 5x_1 + x_2 \leq 5$$

$$\lambda \leq 1$$

$$\lambda, x_1, x_2 \geq 0$$

problemde, $x_1^0 = 5.84$, $x_2^0 = 0$, $\lambda_0 = 0.52$ çıkar.

Bazı araştırmacılar, bulanık karar kümesini hesaplarken “simetrik yaklaşım” kullanmayı önerir. Amaç fonksiyonun optimal değerlerini, çözüm aralığının her α seviyesi için hesaplarlar. Kararın üyelik fonksiyonunu, α ’ların yerini tutan, amaç fonksiyonunun kendi optimal değerleri tanımlar (Orlovski, 1977).

Bu yöntem, diğer yazarların önerdiği model (4.4) ve kesin çözümü olmayan (4.6) bulanık karar kümesidir. Parametrik lineer problem, (Chanas, 1983) tarafından çözülmüştür. Hatta, bu yaklaşım iki boyutta etkileyici sonuçlar vermekte olup, biraz şüpheli bir yaklaşım olmakla beraber, karar verici bunu gerçek büyüklük problemlerinde kullanmaktadır.

4.2.3 İlaveler

Şimdiye kadar sırasıyla iki büyük tahmin, etkin bir şekilde çözülebilen standart LP modeli ile denk bir modele ulaşmaktadır:

1. Bulanık üyelik fonksiyonların tüm bulanık kümeleriyle ilgili olduğu farzedilir.
2. Bulanık kümelerin toplamı için kullanılan minumum – operatörü’ ün uygunluğu kabul edilir.

Bu iki varsayımın gevşemesi karışıklığa yol açar, bunlar farklı olarak katı bağımlı gevşeme tipidir:

1. Lineer olmayan üyelik fonksiyonlar:

lineer üyelik fonksiyonlar, şimdiye kadar, tanımlı iki noktanın tespiti için; yani, istenen aşağı ve yukarı seviye veya tolerans aralığının iki sınırı için kullanılırdı. En aşıkâr(açık) yöntem, lineer olmayan üyelik fonksiyonlara, parçalı lineer fonksiyonlar ile yaklaşmaktır. Bazı bilimadamları (Hannan, 1981 ; Nakamura, 1985) bu yaklaşımı kullanmışlar ve kesin eş problemin sonucunun standart LP problemi olduğunu göstermişlerdir.

Bu problem, (4.10) modelinden oldukça büyüktür. Çünkü, genelde bir kısıtlama, herbir parça lineer yaklaşımın toplamından oluşacaktır. Özellikle, üyelik fonksiyonu bir çeşit yararlı fonksiyonsa, tamamıyla S-biçimindeki fonksiyonlar önerilmektedir.

Örneğin, Leberling [1981] iki parametrelili fonksiyonu önermiştir:

$a, b, \delta \geq$ için,

$$\mu_H(x) = \frac{1}{2} \frac{\exp\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\delta\right] - \exp\left[-\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\delta\right]}{\exp\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\delta\right] + \exp\left[-\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\delta\right]}$$

şeklindedir.

Bu hiperbolik fonksiyonun özellikleri şunlardır:

$\mu_H(x)$, monoton artandır.

$x = \frac{a+b}{2}$ olduğunda, $\mu_H(x) = \frac{1}{2}$ dir.

$\mu_H(x)$, $\left[-\infty, \frac{(a+b)}{2}\right]$ de tamamıyla konveks, $\left[\frac{(a+b)}{2}, +\infty\right]$ da tamamıyla konkavdır.

$\forall x \in \mathbb{R} := 0 < \mu_H(x) < 1$ ve $\mu_H(x)$, asimtot $f(x) = 0$ ve $f(x) = 1$ 'e yaklaşır.

Leberling, bir LP $a = \underline{c}$ (z 'nin alt sınırı) ve $b = \bar{c}$ 'nin (amaç fonksiyonun üst sınırı) $z = cx$ bulanık amaç fonksiyonu için istenen alt ve üst seviyeleri seçmeyi gösterir ve tek amaç ve kısıtlardan oluşan kesin eş problemde, bu bulanık amacı, bir hiperbolik fonksiyon ile temsil etme,

minumum λ

$$\lambda - \frac{1}{2} \frac{e^{Z'(x)} - e^{-Z'(x)}}{e^{Z'(x)} + e^{-Z'(x)}} \leq \frac{1}{2} \quad (4.20)$$

$$Dx \leq b'$$

$$x, \lambda \geq 0$$

şeklindedir. Ve $Z'(x) = \left(\sum_j c_j x_j - \frac{1}{2} (\bar{c} + \underline{c}) \right) \delta$ dir. Her ek bulanık amaç veya kısıt, buradaki exponansiyelin bir satırıdır.

$x_{n+1} = \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$ için, (4.20) lineer bir model olarak ifade edilirse:

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & x_{n+1} \\ & \delta \sum_j c_j x_j - x_{n+1} \geq \frac{1}{2} \delta (\bar{c} + \underline{c}) \\ & D x \leq b' \\ & x_{n+1}, x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Bu lineer programlama modeli, mevcut simplex yöntem ile çözülür.

Yukarıdaki modeller ile lineer olmayan üyelik fonksiyonlar arasındaki denklik tesadüfî değildir. Bu bağıntı (Werners, 1984) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.1

$x^0 \in X \subset R^n$, $f_k: R^n \rightarrow R^1$ olması koşulu ile, $\{f_k\}$, ($k=1, \dots, K$) bir sonlu fonksiyon ailesi olsun. $\lambda, \lambda' \in R$ için, $g: R^1 \rightarrow R^1$ 'e tanımlı monoton artan fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki iki matematiksel programlama problemini kabul etmek gerekir.

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & \lambda \\ & \lambda \leq f_k(x) \quad k=1, \dots, K \\ & x \in X \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & \lambda' \\ & \lambda' \leq g(f_k(x)) \quad k=1, \dots, K \\ & x \in X \end{aligned} \tag{4.23}$$

$\exists \lambda^0 \in R$ için (λ^0, x^0) , (4.22) 'nin optimal çözümüdür ve $\exists \lambda'^0 \in R$ için (λ'^0, x'^0) , (4.23)' ün optimal çözümüdür.

Bir tamsayıli lineer olmayan üyelik fonksiyonların varlığı teorem 4.1' de kolayca görülür. Bazı iyimser yaklaşımlar, diğer toplam operatörler hakkında doğrulanmamakta.

Sözü edilen yaklaşımların hesaplama verimi; minumum operatörün bir büyük kullanım kapsamı, “mantıksal ve” veya bulanık kümelerin kesişim modeline dayanır; Aksiyom (Hamacher, 1978), deneysel (Thole, Zimmermann, Zsuno 1979; Zimmermann ve Zsuno 1980, 1983). Araştırmalar, karar modellerinde minumum operatörün genel kullanımı hakkında bazı şüpheler içermektedir. Bir tamsayıli serbest bağlam veya operatör bağımlı bağlam, ortalama zaman içinde önerilir (Zimmerman, 1990). Bu operatörlerin dezavantajı, kesin denk modellerin sonucunun lineer olmamasıdır (Zimmermann, 1978). Bu yaklaşımların hesaplama verimi azalır veya hatta kabul edilebilir zaman limitlerin içinde çözümsüz eş modeller sunar. Bununla birlikte, bu kuralda bazı istisnalar vardır.

Min – operatöre karşı itirazlardan biri; ne mantıksal “ve” ne de min – operatörün, bulanık kesişim kümelerindeki üyelik fonksiyonların derecelerinin artması anlamında dengeleyici olması, sonuç bulanık kümedeki tüm üyelik fonksiyonları etkilemeyebilir (Zimmermann ve Zsuno, 1980). Bu kusurun giderilmesinde iki doğal yöntem vardır:

1. Min – operatör mantıksal “ve” olarak, dengeleyici max operatör içerir “veya” olarak birleşirler. Önceki için, çarpım operatörü alternatif olarak kullanılabilir ve sonraki için cebirsel toplam kullanılabilir. Bu yaklaşım, “ve” ve “veya” arasında bir yerde olacak şekilde, “ve” ve “veya” birleşimi(toplamı) arasında fark ayrıcalık gözetmekten hareket eder.

2. “Ve” ve “veya” birleştiricileri arasındaki ayrım(fark) ve bağlayıcılar arasındaki belli bir dengeleme derecesini tanıtmaya bağlı kalmak.

Dengeleyici “ve”. Bazı uygulamalar gösteriyorki , max – operatör üzerinden min – operatör ' e eşlemede birleştirici(toplayıcı) ' nin kullanılması önemli olmaktadır. λ operatörü bağlayıcıdır (Zimmermann ve Zysno, 1980). Matematiksel programlama maçlar

içindir, bununla birlikte, düşük hesaplama verim dezavantajından yukarıda sözedilmişti. Deneysel uygunluk ve hesaplama verimi arasındaki kabul edilir uzlaşma, max - operatör ve min – operatör ' ün konvex birleşiminde görülür:

$$\mu_c(x) = \gamma \min_{i=1}^m \mu_i(x) + (1 - \gamma) \max_{i=1}^m \mu_i(x) \quad \gamma \in [0,1] \quad (4.24)$$

Maximize edilmiş kararı belirlemede

$$\max_{x \in X} \left(\gamma \min_{i=1}^m \{ \mu_i(x) \} + (1 - \gamma) \max_{i=1}^m \{ \mu_i(x) \} \right)$$

problemi çözülür. Veya

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & \gamma \lambda_1 + (1 - \gamma) \lambda_2 \\ & \lambda_1 \leq \mu_i(x) \quad i = 1, \dots, m \\ & \lambda_2 \leq \mu_i(x) \quad \text{en az bir } i \text{ için } i \in \{1, \dots, m\} \\ & x \in X \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \text{maximum} \quad & \gamma \lambda_1 + (1 - \gamma) \lambda_2 \\ & \lambda_1 \leq \mu_i(x) \quad i = 1, \dots, m \\ & \lambda_2 \leq \mu_i(x) + M \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m \gamma_i \leq m - 1 \\ & \gamma \in \{0, 1\}, M \text{ çok büyük bir reel sayı} \\ & x \in X \end{aligned} \quad (4.25)$$

çözülür.

(4.25) deki kısıtlamalar ve amaçların lineer üyelik fonksiyonlarının oluşturduğu karma tamsayı lineer programlama, uygun bulunan kodlarla çözülebilir.

“ve” - toplama(birleştirme) ve “veya” – toplama(birleştirme) arasındaki ayrım aşağıdaki tanımlarla ifade edilir:

Tanım 4.3 (Werners, 1984)

$\mu_i(x)$ 'ler bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları olmak üzere, bulanık ve(ve) anlamında birleştirilmişlerdir. Bulanık sonuç kümesinin üyelik fonksiyonu

$\gamma \in [0,1]$ için

$$\mu_{\text{ve}}(x) = \gamma \cdot \min_{i=1}^m \mu_i(x) + (1-\gamma) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_i(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4 (Werners, 1984)

$\mu_i(x)$ 'ler veya(veya) anlamında birleştirilen bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları. Bulanık sonuç kümesinin üyelik fonksiyonları

$\gamma \in [0,1]$ için

$$\mu_{\text{veya}}(x) = \gamma \cdot \max_{i=1}^m \mu_i(x) + (1-\gamma) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_i(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bağlayıcılar, birleşmeli ve tümevarımsal değil, fakat değişmeli, idempotent(eşgüçlü), tamamıyla herbir bileşende monoton artan, sürekli ve denkleştiricidir (Werners, 1984). Bunlar yararlı ve kabul edilebilir özelliklerdir.

Tanım 4.3 ' deki birleştirme operatörünü, model (4.4) ' de kullanırsak, denk model

$$\begin{aligned}
& \text{maximum} \quad \lambda + (1-\gamma) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \lambda_i \\
& \lambda + \lambda_i \leq \mu_i(x) \quad i = 1, \dots, m \\
& D x \leq d \\
& \lambda, \lambda_i, x \geq 0 \\
& 0 \leq \mu_i(x) \leq 1
\end{aligned} \tag{4.26}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $(\lambda^0, \lambda_i^0, x^0)$, (4.26) 'nın çözümü ise, o zaman x^0 da (4.3) 'ün maximize edilmiş çözümüdür. Eğer $\mu_i(x)$ 'ler lineer olursa, (4.26) standart lineer programlama problemi olur.

Şu ana kadar referans alınan modeli, “standart LP” modelinden ayırdık. Seçilen bağımlı operatör ve operatör kullanıldığında, eş model lineer veya lineer olmayan program modeline dönüşür. Açık ki, diğer referans modelleri, referans modelleri olarak alınabilir. Örneğin; Sayısal Programlama (Zimmermann ve Pollatschek, 1984; Ignizio, 1983), Kesirli Programlama (Luhandjula, 1984), Lineer Olmayan Programlama (Sakawa, 1989), Stokastik ve bulanık programlama arasındaki bağıntılar ve olabilir tamamlamalar araştırılmaktadır (Buckley, 1990; Dubois 1986).

4.3 Bulanık Parametrelerle Bulanık Matematiksel Programlama

Temel yaklaşım bölüm 4.2' de formüle edilen eş modeldir. Eğer matematiksel Programlama modellerinin elementleri bulanıklaştırılmış başka çeşit ise, daha büyük yaklaşım algoritmasının farklılığı mevcut değildir.

Ramık ve Rimanek (1985),

$$\begin{aligned}
& \text{maximum} \quad f(x) \\
& \tilde{a}_{i1} x_1 \oplus \tilde{a}_{i2} x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{a}_{in} x_n \leq \tilde{b}_i \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{4.27}$$

problemini ortaya koymuştur.

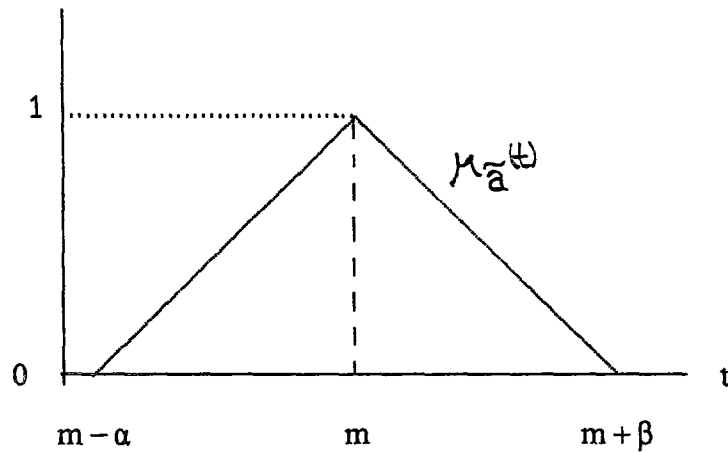
$\tilde{a}_{ij}$ ve $\tilde{b}_i$, L-R ifadesinde farzedilen bulanık sayılardır. $\oplus$, genişletilmiş toplamı gösterir. $\tilde{a} = (m, n, \alpha, \beta)_{L-R}$ ve $\tilde{b} = (p, q, \gamma, \delta)_{L-R}$ sayıları için, $a \leq b$ koşulu ile aşağıdaki 4 eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \sup \{ u; R(u) = R(0) = 1 \}, & \delta_R &= \inf \{ n; R(n) = \lim_{s \rightarrow \infty} R(s) \} \\ \varepsilon_L &= \sup \{ u; L(u) = L(0) = 1 \}, & \delta_L &= \inf \{ n; L(n) = \lim_{s \rightarrow \infty} L(s) \} \end{aligned}$$

olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} \varepsilon_L (\gamma - \alpha) &\leq p - m, & \delta_L (\gamma - \alpha) &\leq p - m \\ \varepsilon_R (\beta - \delta) &\leq q - n, & \delta_R (\beta - \delta) &\leq q - n \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitsizlikler yazılabilir. $\tilde{a} = (m, m, \alpha, \beta)_{L-L}$ simetrik bulanık sayısı şekil 4.1'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1 Bulanık üçgen sayı $\tilde{a} = (m, m, \alpha, \beta)_{L-L}$

(4.28) düzenlenirse (4.29) elde edilir:

$$\varepsilon_L |\alpha - \gamma| \leq p - m, \quad \delta_L |\alpha - \gamma| \leq p - m \quad (4.29)$$

$$\tilde{a}_{i1} x_1 \oplus \dots \oplus \tilde{a}_{in} x_n = \left(\sum_j m_{ij} x_j, \sum_j n_{ij} x_j, \sum_j \alpha_{ij} x_j, \sum_j \beta_{ij} x_j \right) \quad (4.30)$$

(4.29) ' a göre aşağıdakiler yazılabilir:

$$-\left(p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right) \leq \varepsilon_L \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \gamma_i \right) \leq p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j$$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j - p_i \leq \varepsilon_L \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \gamma_i \right)$$

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} - \varepsilon_L \alpha_{ij}) x_j \leq p_i - \varepsilon_L \gamma_i \quad (4.31a)$$

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} + \varepsilon_L \alpha_{ij}) x_j \leq p_i + \varepsilon_L \gamma_i \quad (4.31b)$$

$$-\left(p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right) \leq \delta_L \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \gamma_i \right) \leq p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j$$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j - p_i \leq \delta_L \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \gamma_i \right)$$

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} - \delta_L \alpha_{ij}) x_j \leq p_i - \delta_L \gamma_i \quad (4.31c)$$

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} + \delta_L \alpha_{ij}) x_j \leq p_i + \delta_L \gamma_i \quad (4.31d)$$

(4.28) ' den faydalanarak:

$$\varepsilon_R \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j - \delta_i \right) \leq q_i - \sum_{j=1}^n n_{ij} x_j$$

$$\delta_R \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j - \delta_i \right) \leq q_i - \sum_{j=1}^n n_{ij} x_j$$

yazılabilir. Buradan ,

$$\sum_{j=1}^n (\varepsilon_R \beta_{ij} + n_{ij}) x_j \leq \varepsilon_R \delta_i + q_i \quad (4.31e)$$

$$\sum_{j=1}^n (\delta_R \beta_{ij} + n_{ij}) x_j \leq \delta_R \delta_i + q_i \quad (4.31f)$$

yazılır.

(4.31) , kesin amaç fonksiyonla birlikte, bir kesin lineer eşitsizlik sistemidir ve herhangi bir klasik LP yöntemiyle çözülebilir. (4.31) deki kısıtlamalar negatif değildir. (4.28), bulanık eşitsizlik bağıntısının özel bir yorumudur. Diğer araştırmacılar, farklı iki yorum daha sunmakta olup, bu yöntemlerde sonuçlar az farklılık göstermektedir.

Örnek 4.2 (Ramik, Rimanek)

Aşağıdaki bulanık lineer programlama problemi, bulanık kısıtlamalarla birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} \text{maximum } z &= 5x_1 + 4x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ (4, 4, 2, 1)_{L-L} x_1 \oplus (5, 5, 3, 1)_{L-L} x_2 &\leq (24, 24, 5, 8)_{L-L} \\ (4, 4, 1, 2)_{L-L} x_1 \oplus (1, 1, 0.5, 1)_{L-L} x_2 &\leq (12, 12, 6, 3)_{L-L} \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir.

Burada $L: [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ ' da tanımlı ve $u \geq 0$ için $L(u) = \max \{ 0, 1 - u \}$ dur.

$\varepsilon_L = 0$, $\delta_L = 1$ ve $\varepsilon_R = 0$, $\delta_R = 1$ alınıp; (4.31a), (4.31c), (4.31f) formülleri uygulanırsa, (4.33) eşitsizlik sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
 & 4x_1 + 5x_2 \leq 24 \\
 & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\
 & 3x_1 + 0.5x_2 \leq 6 \\
 & 5x_1 + 6x_2 \leq 32 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 15
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Bu lineer programlama problemini simplex yöntemle çözelim.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 \\
 & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 24 \\
 & 4x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 19 \\
 & 3x_1 + 0.5x_2 + x_6 = 6 \\
 & 5x_1 + 6x_2 + x_7 = 32 \\
 & 6x_1 + 2x_2 + x_8 = 15 \\
 & x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq 8)
 \end{aligned}$$

Çizelge 4.1 Örnek 4.2 'nin çözümü

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	$\sum c = 9$	
			4	5	0	0	0	0	0	0		
(j)	c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	Kont- rol	Oran
(3)	0	24	4	5	1	0	0	0	0	0	34	6
(4)	0	12	4	1	0	1	0	0	0	0	18	3
(5)	0	19	2	2	0	0	1	0	0	0	24	19/2
(6)	0	6	3*	1/2	0	0	0	1	0	0	21/2	2
(7)	0	32	5	6	0	0	0	0	1	0	44	32/5
(8)	0	15	6	2	0	0	0	0	0	1	24	15/6
$z_k - c_k$		$z_0 = 0$	-5 ↑	-4	0	0	0	0	0	0	-9	

Çizelge 4.2 Örnek 4.2 'nin çözümü

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	$\sum c = 9$	
			4	5	0	0	0	0	0	0		
(j)	c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	Kont- rol	Oran
(3)	0	16	0	13/3	1	0	0	-4/3	0	0	20	48/13
(4)	0	4	0	1/3	0	1	0	-4/3	0	0	4	12
(5)	0	15	0	5/3	0	0	1	-2/3	0	0	17	9
(1)	5	2	1	1/6	0	0	0	1/3	0	0	21/6	12
(7)	0	22	0	31/6	0	0	0	-5/3	1	0	159/6	132/31
(8)	0	3	0	1*	0	0	0	-2	0	1	3	3
$z_k - c_k$		$z_1 = 10$	0	-19/6 ↑	0	0	0	5/3	0	0	51/6	

Çizelge 4.3 Örnek 4.2 'nin çözümü.

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	$\sum c = 9$	
			4	5	0	0	0	0	0	0		
(j)	c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	Kont-rol	Oran
(3)	0	3	0	0	1	0	0	$22/3^*$	0	$-13/3$	7	$9/22$
(4)	0	3	0	0	0	1	0	$-2/3$	0	$-1/3$	3	/
(5)	0	10	0	0	0	0	1	$8/3$	0	$-5/3$	12	$30/8$
(1)	5	$3/2$	1	0	0	0	0	$2/3$	0	$-1/6$	3	$9/4$
(7)	0	$13/2$	0	0	0	0	0	$26/3$	1	$-31/6$	11	$3/4$
(2)	4	3	0	1	0	0	0	-2	0	1	3	/
$z_k - c_k$		$z_2 = 19.5$	0	0	0	0	0	$-14/3 \uparrow$	0	$19/6$	18	

Çizelge 4.4 Örnek 4.2 'nin çözümü.

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	$\sum c = 9$	
			4	5	0	0	0	0	0	0		
(j)	c_j	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	Kont-rol	Oran
(6)	0	$9/22$	0	0	$3/22$	0	0	1	0	$-13/22$	$21/22$	
(4)	0	$36/11$	0	0	$7/11$	1	0	0	0	$-24/33$	$40/11$	
(5)	0	$98/11$	0	0	$-4/11$	0	1	0	0	$-1/11$	$104/11$	
(1)	5	$27/22$	1	0	$-1/11$	0	0	0	0	$5/22$	$26/11$	
(7)	0	$65/22$	0	0	$-13/11$	0	0	0	1	$-1/22$	$30/11$	
(2)	4	$42/11$	0	1	$3/11$	0	0	0	0	$-2/11$	$54/11$	
$z_k - c_k$		$z_3 = 21.40$	0	0	$7/11$	0	0	0	0	$9/22$	$247/11$	

Problemin optimal çözümü:

$$x_1 = 27/22 = 1.227, \quad x_2 = 42/11 = 3.81 \quad \text{ve} \quad z = 21.40 \quad (4.34)$$

4.4 Uygulamalar

Bulanık matematiksel programlama, teorik araştırmaların diğer alanlarına uygulanabil-diği gibi pratik uygulamalara da uygulanmaktadır.

4.4.1 Yöntemsel Uygulamalar

BMP 'de modellerin çoğunluğu simetri olması nedeniyle amaç fonksiyonların sayısı sorun olmaz. Klasik matematiksel programlamada, normalde tek amaç fonksiyon kabul edilebilir çözüm uzayı dizisi oluşturur. Eğer amaç fonksiyon birden fazla ise, çok amaçlı karar verici modeller veya "vektörel optimizasyon" modelleri uygulanır, normalde fazlasıyla hesaplama gerektirir. Bu yüzden BMP, tamamıyla çok kriter analizinin geniş kapsamına uygulanmaktadır.

Eğer amaç fonksiyon, model (4.4) de istenilen seviyede verildiğinde, ayarlanabilirse direkt kullanılabilir (Tanaka, 1985) veya bulanık parametreleriyle kullanılabilir. Eğer amaç fonksiyon, doğal olarak ayarlanamıyorsa, model (4.19) kullanılabilir. Hatta kısıtlamaların bulanık' dan ziyade, kesin kısıtlamalar olması olasıdır (Zimmermann, 1978).

Modern sistemler, çok amaçlı karar vericiler için genellikle etkileşimlidir. BMP bu karar verici aletlere uygulanmaktadır (Sakawa, 1990 ; Yano, 1989).

BMP 'nin ilginç uygulamalarından biri, Campo 'nun makalesidir (1989). Bu makalede toplam sıfır oyunlar matrisi, belirsiz sonuçlar ile düşünülmüştür. BMP deki yöntemsel ve gerçek uygulamalar, fonksiyonel problemlerin çözümünde önerilmiştir, fakat yeterince uygulanamamıştır. Bu tip uygulama Wiedey ve Zimmermann (Medya Seçim, 1978) tarafından tanımlanmış, ayrıca Locistik (Ernst, 1982), Bakım (Holtz ve Desonki, 1981), Üretim Planı (Hintz ve Zimmermann; 1989), Kesme Stok Problem (Nickels, 1990) gibi uygulamalar vardır.

4.4.2 Pratik Uygulamalar

Bulanık matematiksel programlamanın gerçek uygulamaları hala oldukça seyrek. Bu elbetteki BLP 'den kaynaklanmamaktadır. Tecrübeler gösteriyor ki, insanlar lineer programlamayı, tamamıyla kesme problemlerinde LP-modellerine uygulamakta ve bu modellerde belirsizliğe olanak sağlayan ihtiyacı görmezler. Daha önce, LP kullanmamış ve problemlerine uygun çözümler için yöntem arayan insanlar arasında, BLP 'nin kabulü daha yüksek görünmektedir.

Diğer bir sebep, literatürde ilgi çekici bir uygulama bulunmaması, ne yazık ki iyi uygulamalar, rekabetten dolayı ve eksiklikler, diğer açık sebeplerden dolayı yayınlanmamaktadır. BLP duyumsal kısıtlamalarla birlikte karışım problemlerine uygulanmakta (Çikolata , şampanya, boya karışımları). Boya uygulamaları (Zimmermann, 1986). Diğer uygulama, Locistik (Ernst, 1982). Ernst, konteynır gemilerinin zaman plan tayini için bulanık modeli önermiştir. Bu model dallanma ve sınırlamalarla çözülmüş ve konteynır gemilerindeki konteynırların, planlanması için bir modeldir ve sonunda LP modeli ile sonuçlanmaktadır.

Şimdi bu gerçek projeyi açıklayalım. Bu model gerçek ayarlamayla, yaklaşık 2000 kısıtlama ve 21000 değişkenden oluşur. Değişkenler yaklaşık olarak 500'e indirgenebilir. Bilgisayarlarda ele alınabilir. Bu modeli bir ders kitabında açıklamak mümkün değildir. Bu yüzden modelin içeriğini sözlü olarak ifade edeceğiz.

Sistem, uygun tasarı envanterinin amacı için, bir karar destek sisteminin çekirdeği, hareket ve konteyner elverişliliği, özellikle boş konteyner ve 15 limandan oluşmaktadır. Konteynerlar, yaklaşık 10 büyük konteynır gemisi ve 40 yön üzerinden bilinen zaman tarifesine göre taşınmaktadır. Limanlardaki konteynır alanları için talep bir yüksek stokastik(seçkisiz) alandır. Farklı limanlardaki boş konteynırlar için talep, bütün limanlardaki boş konteynırların büyük envanteri(sayım çizelgesi) ile karşılanabilir, yüksek envanterli maliyetler sebebiyle, veya bir yerden bir yere gönderme gerekliliği, yüksek gönderme maliyeti ve zaman gecikmesine neden olmaktadır.

Sistem, esas olarak hareketlerin optimal kontrolü ve boş konteynırların envanterleri , gemilerin kapasiteleri ve gemilerin önceden saptanmış zaman planı için uğraşmaktadır.

Bu problem büyük bir LP modeli olarak formüllendirilmiştir. Amaç fonksiyon, maximize edilmiş kâr (gemilerin konteynırlarla tam dolu hali) eksi hareket halindeki boş konteynırların, boş konteynır eksi envanter maliyetidir. Üretilmiş modeller ile geçmiş periyottaki data modelleri karşılaştırıldığında, gemiler sıklıkla spesifik maximum kapasiteden daha çok konteynır taşımıştır. Daha ileri araştırmalar, sonraki modelde olduğu gibi geminin kapasite kısıtlamalarının bulanıklaştırılmasına öncülük etmiştir.

(Ernst, 1982):

$$\begin{array}{ll}
 z = c^T x & \text{net maximize olmuş kar} \\
 Bx \leq b & \text{kesin kısıtlamalar kümesi} \\
 Ax \leq \tilde{d} & \text{uygun olmayan üretilmiş bir kesin küme formülasyonu} \\
 & \text{için kapasite kısıtlamalarının kümesi}
 \end{array}$$

Problemin çözümü:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximum } z = c^T x & \\
 Ax \leq \tilde{d} & \\
 Bx \leq b & \\
 x \geq 0 &
 \end{array} \tag{4.35}$$

Bu model (4.14) 'e benzemekte. (4.18) ' i kullanmaktan ziyade, bir kesin denk LP modeline ulaşmak için, aşağıdaki yaklaşım kullanılır: (4.11) ve (4.12) deki üyelik fonksiyonlar, şu kısıtlamalarla tanımlanmıştır:

$$\mu_i(t_i) = \frac{t_i}{p_i - d_i} \quad 0 \leq t_i \leq p_i - d_i, \quad i \in I,$$

Aşağıdaki LP modeli (4.35) ' e denk kesin model gibi kullanılır:

$$\begin{aligned}
 \text{maximum } z' &= c^T - \sum_{i \in I} s_i (p_i - b_i) \mu_i(t_i) \\
 Ax &\leq d + t \\
 Bx &\leq b \\
 t &\leq p - b \\
 x, t &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

s_i ' ler problem – bağımlı penaltı karekteri ile ölçüt faktörler.

(4.36) formülü, eğer problem – bağımlı penaltı terimleri s_i ' ler ise anlam kazanır, aynı zamanda ölçüt özelliğini gerektirir.

Sonraki tanımlar başarıyla uygulandığında: Kesin kısıtlamalar olan $Bx \leq b$ yerine, $Bx \leq .9b$ yazılırsa; arzu edilen güvenlik sebebiyle, %10 boş kalacak şekilde tam kapasite sağlanır. t tolerans değişkenleri olmak üzere aşağıdaki tanımlar yazılır:

$$\begin{aligned}
 Bx - t &\leq 0.9b \\
 t &\leq 0.1b
 \end{aligned}$$

Amaç fonksiyon:

$$\text{maximum } z = c^T x - s^T t$$

s şu şekilde tanımlanır:

s = taşınan bir dolu konteynırın ortalama kârı/ bir konteynerın varış ve kalkışı arasında geçen zaman periyotlarının ortalama sayısı

Bu tanımlama; sadece limanlarda taşıma için kullanılan dolu konteynırlar kazançlı olduğundan, gemilerin kapasiteleri % 90 ' dan fazla olduğu zamanlarda kullanılır. Bu karar vericilere çekici görünen bir hareket tarzıdır.

Örnek 4.3

Bir şirketin iki ürün ürettiğini farzedelim. P_1 ürününün birim başına kârı 0.40\$, P_2 ürününün birim başına kârı 0.30\$. Herbir P_1 ürününün birimi için gerekli çalışma saati, herbir P_2 ürününün iki katı kadardır. Bir günlük toplam kullanılabilir çalışma saati, en az 500 saat ve fazla mesai çalışması için yapılan özel düzenlemeler nedeniyle bir günlük toplam çalışma saati 600 saate uzayabiliyor. Mal stoku P_1 ve P_2 ürünlerinin en az 400 birimi için yeterli fakat önceki tecrübelerden bu miktar bir günde 500 birime kadar çıkabiliyor. Problemden, bir günde üretilen P_1 ve P_2 ürünlerinden kaçar birim üretildiği ve toplam maximum kâr hesaplanır.

x_1 ve x_2 bir günde üretilen P_1 ve P_2 ürünlerinin birimlerini gösterir. Bu bulanık lineer programlama problemi için gerekli formülleri yazarsak:
model genel olarak:

max z

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + p_i \quad (i \in N_m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in N_n)$$

şeklinde ifade edilir.

Amaç 'ın üyelik fonksiyonu (4.18)' e göre aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow z_0 \leq c x \\ \frac{c x - z_1}{z_0 - z_1} & \Leftarrow z_1 < c x < z_0 \\ 0 & \Leftarrow c x \leq z_1 \end{cases}$$

Problemin çözümü için, model (4.19) ' a göre aşağıdaki model yazılır:

$$\max \lambda$$

$$\lambda(z_0 - z_1) - c x \leq -z_1$$

$$\lambda p_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + p_i \quad (i \in N_m) \quad (4.37)$$

$$\lambda, x_j \geq 0 \quad (j \in N_n)$$

Bu problemin, bulanık lineer programlama modelini kurarsak;

$$\max z = 0.4 x_1 + 0.3 x_2 \quad (\text{kâr})$$

$$x_1 + x_2 \leq \mu_1 \quad (\text{madde})$$

$$2x_1 + x_2 \leq \mu_2 \quad (\text{çalışma saatleri})$$

model (4.15)'e göre $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ aşağıdaki gibidir:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow x \leq 400 \\ \frac{500-x}{100} & \Leftarrow 400 < x \leq 500 \\ 0 & \Leftarrow 500 < x \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow x \leq 500 \\ \frac{600-x}{100} & \Leftarrow 500 < x \leq 600 \\ 0 & \Leftarrow 600 < x \end{cases}$$

$$(p_1) \max z = 0.4 x_1 + 0.3 x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(4.38a)

$$\begin{aligned}
(p_2) \max \quad & z = 0.4 x_1 + 0.3 x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 500 \\
& 2 x_1 + x_2 \leq 600 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.38b}$$

(4.38a) 'ya göre $z_1 = 130$ ve (4.38b) 'ye göre $z_0 = 160$ çıkar. (37) 'ye göre; bulanık lineer programlama problemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
& 30\lambda - (0.4 x_1 + 0.3 x_2) \leq -130 \\
& 100\lambda + x_1 + x_2 \leq 500 \\
& 100\lambda + 2 x_1 + x_2 \leq 600 \\
& x_1, x_2, \lambda \geq 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Bu klasik optimizasyon problemi çözüldüğünde; maximum $\lambda = 0.5$ ve $\hat{x}_1 = 100$, $\hat{x}_2 = 350$ ve maximum kâr hesaplanırsa:

$$\hat{z} = 0.4 \hat{x}_1 + 0.3 \hat{x}_2 = 145$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Kaufman A. ve Gupta M. M., (1991), Introduction To Fuzzy Arithmetic Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold, New York.

Klir G. J. ve Folger T. A., Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, State University of New York.

Terano T., Asai K. ve Sugeno M., (1992), Fuzzy Theory and Its Applications, Academic Press, London.

Yager R. R. ve Zadeh L. A., (1992), An Introduction to Fuzzy Logic Applications In Intelligent Systems, Kluwer Academic Publishers Group, Norwel, Usa.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	20.02.1972	
Doğum yeri	Erzincan	
Lise	1986 – 1989	Üsküdar Halide Edip Adıvar Lisesi
Lisans	1992 - 1997	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1998 – 2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

