

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

34800

DOĞRUSAL (REGLE) YÜZEYLERİN
EĞRİSEL ASİMPTOTİKLERİ

Arş. Gör. Filiz KANBAY

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Füsün URAS

İSTANBUL, 1994

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR

ÖZET

SUMMARY

1.	GİRİŞ	1
2.	BİR DOĞRUSAL YÜZEYİ BELİRLEYECEK OLAN YENİ ÜÇ FONKSİYON	4
3.	BİR DOĞRUSAL YÜZEYDE EĞRİSEL ASİMPTOTİK AİLESİNİN GEODEZİK EĞRİLİĞİ.....	8
3.1.	Eğrisel asimptotik ailesinin geodezik eğriliğinin (γ) hesaplanması	8
3.2.	γ 'nın sabit olduğu yüzeylerle ilgili teorem.....	12
3.3.	Kuvadriklerin tanım koşullarının elde edilmesi ve kuvadriklerin tanım koşullarındaki sabitlerin eksen uzunlukları cinsinden ifadesi.....	15
3.3.1.	Bir parçalı hiperboloid hali	15
3.3.2.	Hiperbolik paraboloid hali	21
4.	BİR UZAY EĞRİSİNİN FRENET ÜÇYÜZLÜSÜNE KATI OLARAK BAĞLI BİR DOĞRU İLE DOĞURULAN DOĞRUSAL YÜZEYLER	26
4.1.	Söz konusu doğrusal yüzeye ait büyüklüklerin (β , σ , D) adı geçen uzay eğrisinin eğrilik ve burulması cinsinden hesabı.....	26
4.2. a-b.	Çeşitli özellikler.....	29
4.2. c.	Doğrusal helikoidler	30
	SONUÇ	31
	KAYNAKLAR.....	32
	ÖZGEÇMİŞ	

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda benden yardımını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın hocam Doç. Dr. Füsün URAS'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezimi titizlikle yazan Hasan YÜCEL'e teşekkür ederim.

Filiz Kanbay
Haziran, 1994

ÖZET

Bu çalışmada üç boyutlu öklid uzayında analitik varsaydığımız doğrusal yüzeylerin özellikle eğrisel asimptotiklerinin geodezik eğrilikleri ile ilgilenilmektedir. Bilindiği gibi genel bir doğrusal yüzey, genel olarak doğrultman eğrinin v parametresine bağlı olan $\beta(v)$, $\sigma(v)$, $D(v)$ gibi üç fonksiyon tarafından belirlenmektedir. Çalışmamızda önce bu üç fonksiyon yerine genel bir doğrusal yüzeyin kartezyen denklemlerini belirtmeyi de sağlayan yeni üç fonksiyon tanımlanmış ve bunların β , σ , D cinsinden ifadeleri verilmiştir.

Daha sonra genel bir doğrusal yüzeyde eğrisel asimptotik ailesinin geodezik eğriliği β , σ , D cinsinden hesaplanmıştır. Bu ifadeden hareketle geodezik eğriliğin sabit olma koşulları araştırılmıştır. Sonuçta gerçek hiçbir doğrusal yüzeyde bu geodezik eğriliğin sıfırdan farklı bir sabite eşit olmayacağı ispat edilmiştir. Geodezik eğriliğin sıfır olması halinde ise yüzeyimiz kuvadriğe indirgenecektir. Buna göre bulduğumuz geodezik eğrilik ifadesinden bir doğrusal yüzeyin kuvadrik olması koşullarını elde etmek mümkün olmuştur. Bu koşullarda geçen sabitlerin, reel doğuranlı kuvadrikler olan bir parçalı hiperboloid ve hiperbolik paraboloid halleri için ayrı ayrı olmak üzere, eksen uzunlukları cinsinden ifadeleri elde edilmiştir.

Son olarak bir uzay eğrisinin Frenet üçyüzlüsüne katı olarak bağlı bir doğru ile doğrulan çeşitli doğrusal yüzeyle söz konusu edilmiştir.

SUMMARY

In this study we have dealt with geodesic curvature of curvilinear asymptotic of rectilinear surfaces, which we consider analytic in three dimensional Euclidean space. As it is well known a general rectilinear surface is determined by three functions $\beta(v)$, $\sigma(v)$, $D(v)$ which depend on v parameter of directrix curve. In our study instead of these three functions new three functions are determined to find cartesian equation of a general rectilinear surface and their representations are given in terms of β , σ , D .

The geodesic curvature of curvilinear asymptotic family of a general rectilinear surface is found in terms of β , σ , D and subsequently the conditions are inspected for geodesic curvature to become constant. Finally it is proved that geodesic curvature can not be equal any constant other than zero. In case of the geodesic curvature be zero our surface will be reduced to quadratic.

The conditions for a rectilinear surface to become quadratic are obtained by means of the equation of geodesic curvature, and the constants which are mentioned in these conditions are expressed in terms of the lengths of axis of a hyperbolic paraboloid and hyperboloid of one sheet. Consequently; various rectilinear surfaces, which are generated by a straight-line depending on Frenet moving threeheadral of a space curve, are examined.

1.GİRİŞ:

Bir doğrusal yüzeyin, bir doğrultman eğri ve doğuranların doğrultu birim vektörünün verilmesi ile belirleneceğini biliyoruz. Bir noktadan doğuranların doğrultu birim vektörlerine çizilen paralellerin oluşturduğu koniye yüzeyin doğrultman konisi denir. Bu koninin doğuranların doğrultu birim vektörlerinin küresel göstergesi olan bir birim küresel eğri ile tamamen belirlenebileceği apaçıktır.

Doğrultman eğrisi $\vec{r}(v)$ olan bir doğrusal yüzeyin doğuranlarının birim vektörüne de $\vec{T}(v)$ dersek denklemi:

$$\vec{X}(u, v) = \vec{r}(v) + u\vec{T}(v) \quad (1)$$

şeklinde olacaktır. Yüzeysel bir bakışla:

$\vec{r}(v)$ eğrisinin $[x(v), y(v), z(v)]$ koordinatları ve $\vec{T}(v)$ vektörünün de

$$[\cos \alpha_1(v) \sin \alpha_2(v); \sin \alpha_1(v) \sin \alpha_2(v); \cos \alpha_2(v)]$$

koordinatlarında adı geçen $\alpha_1(v), \alpha_2(v)$ fonksiyonları olmak üzere genel bir doğrusal yüzeyin, aynı bir değişkenin (v) fonksiyonları olan beş tane bir değişkenli keyfi fonksiyona bağlı olacağı gibi yanlış bir kanıya varabiliriz.

Gerçekten: önce v parametresi uygun seçilebilir. [yani amaca uygun olarak v yerine $f(v)$ alınabilir. Geometrik olarak hiçbir değişiklik olmaz ancak hesaplar kolaylaşır.] Bundan başka $\vec{r}(v)$ doğrultman eğrisinin yüzeye değişmez şekilde bağlı olmaması nedeniyle aynı bir doğrusal yüzey için çok çeşitli şekillerde özel seçilebileceği düşünülürse bu fonksiyon sayısının daha az olacağı

hemen görülür: Yakından incelemeler bu sayının 3 olacağını göstermiştir. Bu 3 fonksiyonun seçimi çeşitli amaçlar için çeşitli olabilir. Örneğin bir doğrusal yüzey ile ilgili problemlerin genel olarak incelenmesi $\beta(v), \sigma(v), D(v)$ adı verilen 3 fonksiyon ile yapılabilir. Bu fonksiyonların geometrik anlamları ise şöyledir: $\beta(v)$ doğuranların dağılma parametresi $\sigma(v)$ yüzeyin boğaz çizgisinin u apsisi [Boğaz çizgisinin denklemi $u = \sigma(v)$] ve D de doğrultman koniyi belirtecek olan birim küresel eğrinin belirmesini sağlamaya yeter bir fonksiyon.

Doğal olarak yüzeyin 1. ve 2. form katsayıları bu 3 fonksiyon cinsinden ifade edilmişlerdir. Ancak bekleneneği gibi bu işlemler sırasında doğrultman eğri ve (v) parametresi üzerine, yukarıda sözünü ettiğimiz ve yüzeyi etkilemeyen bir takım hipotezler yapılmıştır. Gerçekten doğrultman eğrinin, doğuranların dik yörüngeleri ailesinden bir eğri olduğu varsayılmıştır ki bunun yüzeyi etkilemeyeceği ve daima hem de sonsuz şekilde olanaklı olacağı apaçıktır. v parametresi olarak da $\bar{T}(v)$ birim küresel eğrinin, yani doğrultman koniyi belirten eğrinin, yay uzunluğu alınmıştır. Buna göre:

$$\left(\frac{d\bar{T}(v)}{dv}\right)^2 = 1 \quad (\bar{T}'^2 = 1) \quad \bar{T} \cdot \bar{r}' = 0 \quad \left(\bar{r}' = \frac{d\bar{r}(v)}{dv} = \frac{d\bar{r}(v)}{ds} \cdot \frac{ds}{dv} = \bar{t} \cdot s'\right) \quad (2)$$

$(s, \bar{r}(v))$ doğrultman eğrinin yayı) yazılabilecektir. O halde (2) hipotezleri kullanılarak (1) den yüzey büyüklükleri hesaplanabilecektir. Bu sırada, yukarıda sözünü ettiğimiz β, σ, D fonksiyonlarının $\bar{r}(v)$ ve $\bar{T}(v)$ cinsinden

$$\bar{r}'(v) \cdot \bar{T}(v) = -\sigma(v), \quad \bar{r}'^2(v) = \left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \beta^2 + \sigma^2, \quad D = (\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'') \quad \left(= \frac{\bar{r}' \cdot \bar{T}''}{\beta}\right) \quad (3)$$

şeklinde ifade edilebilecekleri de gösterilmiştir(*). Bu 3 fonksiyonun doğrusal yüzeylerin incelenmesinde oynadığı olumlu rol çeşitli problemler üzerinde izlenmiştir. Ancak bir doğrusal yüzeyin bu 3 fonksiyon ile verilmiş olması halinde (1) deki denkleminin nasıl yazılabileceği sorusu üzerinde durulmamıştır.

Burada önce bu soru üzerinde duracağız.



*) Doç. Dr. Füsün URAS Diferansiyel Geometri Dersleri II

2. BİR DOĞRUSAL YÜZEYİ BELİRLEYECEK OLAN YENİ ÜÇ FONKSİYON:

v parametresi olarak yine $\bar{T}(v)$ birim küresel eğrinin yay uzunluğunu alıyoruz. $\left(\bar{T}^2(v) = 1\right)$ $\bar{r}(v)$ doğrultman eğrisinin elemanlarını

$$[s, \kappa, \tau, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}]$$

ile göstereceğiz (2) ye göre

$$\bar{r}'(v) \cdot \bar{T}(v) = 0$$

olduğu için

$$\bar{T}(v) = \bar{n} \cos \varphi(v) + \bar{b} \sin \varphi(v) \quad (4)$$

yazılabilir. [Doğrultman eğrinin normal düzlemi içindeki bir birim vektör]
Buradan $\bar{T}(v)$

$$\bar{T}'(v) = -\bar{t} \kappa' \cos \varphi - \bar{n}(\varphi' + \tau') \sin \varphi + \bar{b}(\varphi' + \tau') \cos \varphi \quad (5)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Şimdi (2) deki $\bar{T}^2 = 1$ koşulunu sağlamak için $\theta(v)$ fonksiyonunu

$$\cos \theta = \kappa' \cos \varphi, \quad \sin \theta = \tau' + \varphi' \quad (6)$$

bağıntıları ile tanımladığımızı varsayabiliriz. (6) bağıntılarının, $\cos \varphi \neq 0$ koşulu ile,

$$s' = \frac{\cos \theta}{\kappa \cos \varphi}, \quad \tau = \frac{\kappa \cos \varphi}{\cos \theta} (\sin \theta - \varphi') \quad (6')$$

şeklinde de yazılabileceği açıktır. (3) den (4) ve (5) kullanılarak önce σ ve β fonksiyonları

$$\sigma = \frac{\cos^2 \theta}{\kappa \cos \varphi}, \quad \beta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\kappa \cos \varphi}, \quad \left(s' = \frac{\beta}{\sin \theta} = \frac{\sigma}{\cos \theta}; \quad \frac{\beta}{\sigma} = \operatorname{tg} \theta, \quad s'^2 = \beta^2 + \sigma^2 \right) \quad (7)$$

şeklinde ifade edilir. D ye gelince: (5) den

$$\begin{aligned} \bar{T}''(v) = & \bar{l} \left(\theta + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \sin \theta - \bar{n} \left(\theta \cos \theta \sin \varphi + \sin^2 \theta \cos \varphi + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \varphi} \right) + \\ & + \bar{b} (\theta \cos \theta \cos \varphi - \sin^2 \theta \sin \varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

olarak hesaplanır ve D nin (3) deki değeri için (4,5) den

$$D = (\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'') = \theta + \operatorname{tg} \varphi \cos \theta \quad (9)$$

sonucu elde edilir.

(7) ve (9) dan $(\theta, \varphi, \kappa)$ fonksiyonları cinsinden ifade edilmiş olan β, σ, D fonksiyonlarının bu değerleri ve $\bar{r}(v)$ eğrisi için yazılmış olan (6') sonuçları ile (3) denklemlerinin sağlanmakta olduğu da gerçekleştirilebilir. O halde doğrusal

yüzeyimizi belirtecek olan üç fonksiyon olarak κ, θ, φ yi alabiliriz. Böylece eski β, σ, D fonksiyonlarını bunlar cinsinden ifade edebileceğimiz gibi (6') den $\bar{r}(\nu)$ doğrultman eğrimizin τ burulmasını da belirtebiliriz. O halde $(\kappa, \theta, \varphi)$ fonksiyonları ile doğal denklemleri belirli olan $\bar{r}(\nu)$ eğrisinin kartezyen denklemlerini en azından teorik olarak hesaplayabiliriz. Doğrultman koniyi belirtecek olan $\bar{T}(\nu)$ birim küresel eğrinin doğal denklemleri de $\kappa^2 = 1 + D^2$, $\tau = \frac{D'}{1 + D^2}$ olarak bilindiğine göre bu eğrinin kartezyen denklemleri de en azından teorik olarak bulunabilecektir.

Burada doğal denklemleri bilinen bir uzay eğrisinin kartezyen denklemlerinin nasıl bulunacağı ile ilgili sonucu da hatırlatmak istiyoruz. Eğrilik ve burulması s yay uzunluğu cinsinden $\kappa(s)$, $\tau(s)$ fonksiyonları ile verilmiş olan bir uzay eğrisini göz önüne alalım.

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{i}{2} \tau(s) - i\kappa(s)f(s) - \frac{i}{2} \tau(s)f^2(s) \quad (i^2 = -1) \quad (10)$$

Riccati diferansiel denkleminin genel çözümünün, α keyfi sabiti cinsinden

$$f(s) = \frac{ap(s) + q(s)}{ah(s) + k(s)} \quad (11)$$

şeklinde ifade edildiğini varsayalım. Buna göre eğrinin kartezyen denklemleri

$$x = \int \frac{(p^2 - h^2) - (q^2 - k^2)}{2(pk - qh)} ds; y = i \int \frac{(p^2 - h^2) + (q^2 - k^2)}{2(pk - qh)} ds; z = \int \frac{hk - pq}{pk - qh} ds \quad (12)$$

şeklindedir.

Artık $(\kappa, \varphi, \theta)$ fonksiyonları ile verildiğini varsaydığımız yüzeyimizin büyüklüklerini bu fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz :

$$\bar{X}(u, v) = \bar{r}(v) + u\bar{T}(v), \quad \bar{X}_u = \bar{T}, \quad \bar{X}_v = \frac{\cos \theta}{\kappa \cos \varphi} \bar{i} + u\bar{T} \quad (13)$$

den önce

$$E = 1, F = 0, G = u^2 - \frac{2u \cos^2 \theta}{\kappa \cos \varphi} + \frac{\cos^2 \theta}{\kappa^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left[\bar{i} u \sin \theta - \bar{n} \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\kappa \cos \varphi} (u \kappa \cos \varphi - 1) + \bar{b} \frac{\cos \theta}{\kappa} (u \kappa \cos \varphi - 1) \right] \quad (14)$$

bulunur. Sonra da

$$L = 0; M = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\kappa \cos \varphi};$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{G}} \left\{ (\theta + \cos \theta \tan \varphi) u^2 - \left(\frac{\theta}{\kappa \cos \varphi} + \frac{\sin \theta \cos (\kappa \cos \varphi)'}{\kappa^2 \cos^2 \varphi} + 2 \frac{\cos^3 \theta \sin \varphi}{\kappa \cos^2 \varphi} \right) u + \frac{\cos^3 \theta \sin \varphi}{\kappa^2 \cos^3 \varphi} \right\} \quad (15)$$

elde edilir.

3. BİR DOĞRUSAL YÜZEYDE EĞRİSEL ASİMPOTOTİK AİLESİNİN GEODEZİK EĞRİLİĞİ:

Yineleyelim ki, doğrusal yüzeylerin genel incelenmesinde en uygun fonksiyonlar β, σ, D fonksiyonlarıdır. Yüzey özelliklerini belirtmede hiç de önemli olmayan yüzeyin parametrik denklemleri sadece yüzeyin görünüşü hakkında bir fikir vermek için yararlıdır. Gerçekten bu görüntüleri bilgisayar aracılığı ile elde etmek için ya da bir uygulama alanında yüzeyden yararlanmak söz konusu ise yüzeyin denklemlerine gereksinim vardır. Kaldı ki söz konusu fonksiyonlar aracılığı ile (7,9) kullanılarak yüzeyin denklemlerini belirtmeyi sağlayacak olan κ, φ, θ fonksiyonlarını da belirtebiliriz.

O halde incelememizi β, σ, D fonksiyonları ile yapmayı sürdüreceğiz.

3.1

Bir yüzeyin asimptotik çizgilerinin burulması hakkında geçerli olan Enneper teoremine göre asimptotik çizgilerin burulması için, κ yüzeyin Gauss eğriliğini göstermek üzere, $\tau = \mp \sqrt{-\kappa}$ bağıntısı geçerlidir. Doğal olarak asimptotik çizgilerin reel olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\kappa \leq 0$ olduğu için bu bağıntı anlamlıdır.

Yüzeyimiz doğrusal bir yüzey ise bir asimptotik aile doğuranlardan ibaret olacağı için ve doğrunun burulması da tanımsız olduğundan bu bağıntı sadece eğrisel asimptotik çizgiler ailesi için anlamlıdır. Öte yandan asimptotik çizgiler için normal eğrilik sıfır olduğundan bunların geodezik eğrilikleri kendi eğriliklerine eşittir. O halde burada eğrisel asimptotik çizgiler ailesi için eğrilik

fonksiyonu hesaplamış olacağız. (Doğrusal asimptotik aile için bunun sıfır olduğunu biliyoruz.) Bu amaçla doğrusal yüzeyler için geçerli olan

$$E = 1, F = 0, G = (u - \sigma)^2 + \beta^2 \quad (\omega = g, \beta \neq 0)$$

$$N = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\bar{r}' \cdot \bar{T}''}{\beta} [(u - \sigma)^2 + \beta^2] + \beta'(u - \sigma) + \beta\sigma' \right\} \quad M = -\frac{\beta}{\omega}, \quad L = 0$$

büyükliklerini kullanacağız. Buna göre eğrisel asimptotik çizgiler ailesinin diferansiel denklemi

$$-\frac{2\beta}{g} du + N dv = 0, \quad \left(g = \sqrt{G} = \sqrt{(u - \sigma)^2 + \beta^2} \right) \quad (16)$$

ya da

$$n = D[(u - \sigma)^2 + \beta^2] + \beta'(u - \sigma) + \beta\sigma'; \quad \left(N = \frac{n}{g} \right) \quad (17)$$

olmak üzere (16) dan

$$V' = \frac{dv}{du} = \frac{2\beta}{n} \quad (18)$$

dır. Kısalık için

$$u - \sigma = \alpha \quad (\alpha_u = 1, \alpha_v = -\sigma') \quad (19)$$

dersek:

$$n_u = 2D\alpha + \beta'; \quad n_v = D'\alpha^2 + (\beta'' - 2D\sigma')\alpha + D'\beta^2 + 2\beta\beta'D + \beta\sigma'' \quad (19')$$

olacaktır. Eğrisel asimptotik çizgiler ailesinin geodezik eğriliğini (yani eğrinin kendi eğriliğini) γ ile gösterirsek

$$\gamma = \frac{\omega}{ds^3} \{ d^2 v du - d^2 u dv + (22) du^3 + [2(32) - (21)] du^2 dv - (41) dv^3 + [(42) - 2(31)] du dv^2 \} \quad (20)$$

dir. Asimptotik çizgimizin denkleminin $v = v(u)$ şeklinde, u parametresine göre verildiğini varsayabileceğimiz doğaldır. Buna göre, (18) ve $du^2 = 0$ geçerli olacak ve

$$v'' = \frac{d^2 v}{du^2} = -\frac{2\beta n_u}{n^2} + 4 \left(\frac{\beta}{n} \right)_v \frac{\beta}{n} \quad (21)$$

yazılabilecektir. O halde (20) den

$$\frac{\gamma}{g} (1 + Gv^2)^{\frac{1}{2}} = 4 \frac{\beta}{n} \left(\frac{\beta}{n} \right)_v - \frac{2\beta n_u}{n^2} + (22) + [2(32) - (21)] \frac{2\beta}{n} - (41) \frac{8\beta^3}{n^3} + [(42) - 2(31)] \frac{4\beta^2}{n^2} \quad (22)$$

elde ederiz.

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \alpha^2 + \beta^2 \quad (23)$$

olduğundan, christoffel sembollerinde yerine konularak

$$(21) = (22) = (31) = 0, \quad (32) = \frac{G_u}{2G}, \quad (41) = \frac{GG_u}{2G}, \quad (42) = \frac{G_v}{2G} \quad (24)$$

değerleri bulunacaktır. Bu değerler yerlerine konursa önce

$$\frac{\gamma}{gn^3}(n^2 + 4\beta^2 G)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\beta(\beta' n - \beta n_v)}{n^3} - \frac{2\beta n_u}{n^2} + \frac{4\beta G_u}{2nG} + \frac{8\beta^3 GG_u}{2Gn^3} + \frac{4\beta^2 G_v}{2Gn^2}$$

sonra da (17), (19), (19'), (23) kullanılarak

$$\gamma(n^2 + 4\beta^2 G)^{\frac{3}{2}} = 4\beta g(\beta' n - \beta n_v) - 2\beta g n n_u + 2\beta \frac{G_u}{g} n^2 + 4\beta^3 g G_u + \frac{2\beta^2 n G_v}{g}$$

ve iki yanın g ile çarpılması ve sağ yanın α ya göre düzenlenmesi sonucunda γ yı verecek olan eşitliği

$$\begin{aligned} \gamma g(n^2 + 4\beta^2 G)^{\frac{3}{2}} &= 2\beta(3\beta' D - 2D' \beta)\alpha^4 + \\ &+ 2\beta[3\beta'^2 - 2\beta\beta' + 4\beta(\beta + D\sigma')]\alpha^3 + \\ &+ 2\beta^2[2\beta(\beta' D - 2D' \beta) + 3\beta'\sigma' - 2\beta\sigma'']\alpha^2 + \\ &+ 2\beta^3[3\beta'^2 + 4\beta D\sigma' + 4\beta^2 - 2\beta\beta']\alpha + \\ &+ 2\beta^4[3\beta'\sigma' - D\beta\beta' - 2\beta\sigma'' - 2\beta^2 D'] \end{aligned} \quad (25)$$

şeklinde elde ederiz.

3.2

Doğal olarak (25) eşitliği, gencl halde γ nın hesaplanması kullanılması için, τ burulmasının ifadesinde olduğu gibi, sade ve geometrik olarak ilginç değildir. Bununla birlikte bu eşitlik bazı önemli sonuçların elde edilmesini sağladığı için ilginçtir. Gerçekten; Eğrisel asimptotik çizgiler ailesinin burulmasının sabit olduğu bir doğrusal yüzeyin var olabilmesi, Enneper teoremine göre, yüzeyin K Gauss eğrilığının sabit olması ile olanaklıdır. Oysa biliyoruz ki sabit Gauss eğrilikli bir doğrusal yüzey, ancak bu sabit değerin sıfır olması ile elde edilen açılabilir yüzey özel halinde elde edilir . Oysa bu halde her iki asimptotik aile doğuranlar üzerinde çakıştığı için yüzey bir eğrisel asimptotik çizgiler ailesi içermez. Yani eğrisel bir asimptotik çizgiler ailesi içeren, yani bozulmamış bir doğrusal yüzeyde bu ailenin burulması sabit olmaz. Şimdi γ nın (25) deki değerinin kullanarak bu sonucun eğrilik içinde tamamen paralel bir şekilde geçerli olduğunu kanıtlayacağız. Bu amaçla γ nın sabit olduğu doğrusal yüzeyleri araştıralım.

O halde (25) de $\gamma = sbl.$ varsayılacaktır. Buna göre γ sabitinin ve β, σ, D fonksiyonlarının, (25) eşitliği $\alpha (= u - \sigma)$ ya göre özdeş olarak sağlanacak şekilde seçilebilmelerinin gerekeceği doğaldır. Çünkü (25) eşitliği yüzeyin her noktasında geçerli olacağına göre u nun ve bu yüzden α nın (ve v nin) belirli bir ıralıktaki her değeri için gerçekleşmektedir. Bu ise $\gamma = sbl.$ ve β, σ, D fonksiyonları da sadece v parametresine bağlı birer değişkenli fonksiyonlar olduğundan (25) in α ya göre özdeş olarak sağlanması halinde olanaklıdır. (25) e sol yandaki kökten kurtulmak için iki yanın karesinin alındığı düşünülürse

yalnız sol yanda gelecek olan α nın 14. kuvvetinin katsayısı $(\gamma^2 D^6)$ olarak elde edilecektir.

O halde $\gamma \neq 0$ varsayılırsa $D = 0$ olmak zorundadır. $D = 0$ için ise (α^8) li terim yerine sadece sol yandan gelecek ve katsayısı da $\gamma^2(\beta'^2 + 4\beta^2)^3$ olarak bulunacaktır.

O halde $\beta \neq 0$ yani yüzeyimiz açılabilir yüzey değilse $\gamma = 0$ elde edilecektir. Böylece şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem: Açılabilir olmayan bir doğrusal yüzeyde eğrisel asimptotik çizgilerin eğriliği sabit ise bu sabit sıfır olmak zorundadır.

Bu teoremden sonra, doğal olarak, $\gamma = 0$ olan ve açılabilir yüzey olmayan doğrusal yüzeylerin, var olup olmadığının araştırılması gerekmektedir.

Hemen görüleceği gibi $\gamma = 0$ olacağından 2.asimptotik çizgiler ailesi de (hem asimptotik hem geodezik) doğrulardan oluşacak ve yüzey açılabilir olmadığından bu aile doğuranlar ailesinden farklı olacaktır. O halde yüzeyimiz iki kat doğrusal ve dolayısıyla kuvadrik olacaktır. Böylece bir doğrusal yüzeyin kuvadrik olması koşullarını (25) de $\gamma = 0$ koyarak elde etmiş olacağız. Gerçekten (25) de sol yan sıfır olduğundan sağ yanın α ya göre özdeş olarak sıfır yazılması ile açılabilir yüzey olmayan kuvadriklerin tanım koşulları ($\beta \neq 0$)

$$\begin{aligned} 3\beta D - 2D'\beta &= 0 \\ 4\beta\beta'D - 3\beta\sigma + 2\beta\sigma' &= 0 \\ 4\beta\sigma'D + 3\beta'^2 + 4\beta^2 - 2\beta\beta'' &= 0 \quad (\beta \neq 0) \end{aligned} \tag{26}$$

şeklinde elde edilir.

Bu koşulların daha önce kuvaridik yüzeyler için bulunmuş olan tanım koşulları ile tamamen aynı olduğu da görülmektedir^(*) . $\beta \neq 0$ olan merkezli kuvaridikler için $D \neq 0$ olduğundan, buradan gerekli integral işlemleri sonucunda

$$\begin{aligned} D &= c_0 \beta^3, \quad \sigma' = -2c_0 \beta^2 (\beta + c_1), \\ \beta^2 &= -4c_0^2 \beta^6 - 8c_1 c_0^2 \beta^4 + c_2 \beta^3 - 4\beta^2 \\ (c_0, c_1, c_2 &= sbt, \quad c_0 \neq 0) \end{aligned} \quad (27)$$

Paraboloidler için de $D = 0$ yazarak ve integral alarak:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{c_0}{\cos^2(v + b_0)} \quad (b_0 = 0 \text{ alınabilir}), \\ \sigma' &= c_1 \beta^3, \quad D = 0 \quad (b_0, c_0, c_1 = sbt, \quad c_0 \neq 0) \end{aligned} \quad (28)$$

bulunacaktır.

^(*) Doç. Dr. Füsün URAS

Diferansiyel Geometri Dersleri II ,[2.218]

3.3.

(27) ve (28) de geçen sabitlerin söz konusu kuvadriklerin eksen uzunlukları cinsinden olan değerlerini elde etmek ve böylece sonuçların doğruluğunu da kanıtlamak amacı ile gerçel doğuranlı kuvadrikler olan bir parçalı hiperboloid ile hiperbolik paraboloidi ele alacağız.

3.3.1. Oxyz dik eksenlerinde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (29)$$

denklemi ile verilen bir parçalı hiperboloidi göz önüne alalım. Bu yüzeyin bir parametrik denklem takımını şöyle elde edebiliriz.

Doğrultman eğri olarak $z = 0$ elipsini alabiliriz. Bu elipsin parametrik denklemleri olarak

$$\vec{r}(\xi): [x = a \cos \xi, y = b \sin \xi, z = 0] \quad (30)$$

yazılabilir. Doğuranların $\vec{T}$ doğrultu birim vektörünü de

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{\lambda}{b} y - \frac{z}{c} = \lambda \\ \frac{\lambda}{a} x - \frac{y}{b} + \frac{\lambda}{c} z = 1 \end{array} \right] \quad (31)$$

yazarak önce doğruların (30) elipsini kesmesi koşulundan

$$\lambda = \frac{1 + \sin \xi}{\cos \xi} \quad (32)$$

bulunur. Sonra da doğuranların doğrultusu olarak

$$(a \sin \xi, -b \cos \xi, -c) \quad (33)$$

elde ederiz.

Kısalık için

$$p^2 = a^2 \sin^2 \xi + b^2 \cos^2 \xi + c^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 - b^2) \sin^2 \xi \quad (34)$$

dersek $\bar{T}(\xi)$ doğrultu birim vektörünü

$$\bar{T}(\xi) = \frac{1}{p} (a \sin \xi, -b \cos \xi, -c),$$

$$\bar{T}'(\xi) = \frac{1}{p^3} [a(b^2 + c^2) \cos \xi, b(a^2 + c^2) \sin \xi, c(a^2 - b^2) \sin \xi \cos \xi],$$

$$\bar{T}'^2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 \sin^2 \xi + a^2 c^2 \cos^2 \xi}{p^4},$$

$$\begin{aligned} \bar{T}''(\xi) = & -\frac{1}{p^5} \{ a(b^2 + c^2) [p^2 + 3(a^2 - b^2) \cos^2 \xi] \sin \xi, \\ & b(a^2 + c^2) [-p^2 + 3(a^2 - b^2) \sin^2 \xi] \cos \xi, \\ & c(a^2 - b^2) [p^2 (\sin^2 \xi - \cos^2 \xi) + 3(a^2 - b^2) \sin^2 \xi \cos^2 \xi] \} \end{aligned} \quad (35)$$

olarak elde ederiz. Böylece (29) kuvadriğinin bir parametrik denklem takımı

$$\bar{X}(\xi, \eta) = \bar{r}(\xi) + \eta \bar{T}(\xi) \quad (36)$$

şeklinde yazılabilir.

Ancak buradaki ξ, η parametreleri (1) de adı geçen u, v parametreleri ile aynı değildir. O halde önce aradaki ilişkiyi belirtmemiz gerekir. (1) denkleminde

doğuranlar $v = sbt$ ile (36) da ise $\xi = sbt$ ile belirli ve $\left(\frac{d\bar{T}}{dv}\right)^2 = 1$ olduğundan $v = s(\xi)$

$$s'(\xi) = \frac{dv}{d\xi} = \sqrt{\bar{T}'^2(\xi)} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 \sin^2 \xi + a^2 c^2 \cos^2 \xi}}{p^2} \quad (37)$$

olmak zorundadır.

Ayrıca yukarıda $\bar{X}_u = \bar{T}(v)$, (36) da ise $\bar{X}_\eta = \bar{T}(\xi)$ olup $\bar{X}_u^2 = \bar{X}_\eta^2 (= 1)$ olduğundan u ile η arasında

$$u = \eta + \varphi(\xi) \quad (38)$$

şeklinde bir bağıntı olacaktır. (37) ve (38) 'e göre genel bir S fonksiyonu için geçerli olan

$$S_\xi = S_u u'(\xi) + S_v s'(\xi)$$

$$S_\eta = S_u u_\eta + S_v v_\eta \rightarrow S_\eta = S_u$$

türetme formülleri kullanılarak (36) dan önce

$$\begin{aligned}\bar{X}_\xi &= \bar{r}'(\xi) + \eta \bar{T}'(\xi) = \varphi'(\xi) \bar{X}_u + s'(\xi) \bar{X}_v, \\ \bar{X}_\eta &= \bar{T}(\xi) = \bar{X}_u\end{aligned}\quad (39)$$

yazılır.

$\bar{X}_u^2 = 1$, $\bar{X}_v^2 = (u - \sigma)^2 + \beta^2$, $\bar{X}_u \cdot \bar{X}_v = 0$ olduğunu bildiğimize göre önce (39)₁ de iki yan $\bar{X}_u$ ile skaler çarpılarak

$$\varphi' = \frac{c^2 - p^2}{p} \quad (40)$$

bulunur. Sonra da iki yan $\bar{X}_v$ ile çarpılıp u ya göre özdeşlik yazılırsa (37) de kullanılarak

$$\begin{aligned}\sigma &= \varphi + \frac{c^2(a^2 - b^2)p \sin \xi \cos \xi}{a^2 b^2 + b^2 c^2 \sin^2 \xi + a^2 c^2 \cos^2 \xi}; \\ \beta^2 &= \frac{(abc)^2 p^4}{[a^2 b^2 + b^2 c^2 \sin^2 \xi + a^2 c^2 \cos^2 \xi]^2} \\ &\left(a^2 b^2 + b^2 c^2 \sin^2 \xi + a^2 c^2 \cos^2 \xi = \underbrace{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}_{A^2} - c^2 p^2 \right)\end{aligned}\quad (41)$$

elde ederiz.

$\sigma(\xi)$ fonksiyonu doğuranlar üzerindeki boğaz noktasının doğrultman eğriden başlayarak ölçülen apsis olduğu için ξ parametresine bağlı olduğu gibi doğrultman eğrinin seçimine de bağlıdır. Buna karşı $\beta(\xi)$ fonksiyonu -tanım gereği- doğrultman eğriden bağımsız olup sadece ξ parametresine bağlıdır. Bu nedenle β nın burada bulduğumuz değerini $\beta = \frac{1}{a^2}(\bar{t}, \bar{T}, \bar{T}')$ değerindeki v parametresinden ξ parametresine geçerek de elde edebiliriz. Gerçekten

$\bar{X}(u, v) = \bar{r}(v) + u\bar{T}(v)$ deki v parametresi doğrultman eğrinin s yay uzunluğudur. O halde

$$\frac{d\bar{r}}{d\xi} = \frac{d\bar{r}}{dv} \cdot \frac{dv}{d\xi} = \left(\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\xi} \right)$$

den

$$\left(\frac{ds}{d\xi} \right)^2 = \varepsilon \sqrt{\bar{r}'^2} = \varepsilon \sqrt{p^2 - c^2}$$

bulunur.

$$\bar{T}'^2(v) = a^2(v) \neq 0, \quad \bar{T}'(v) \cdot \bar{i}(v) = b(v), \quad \bar{T}(v) \cdot \bar{i}(v) = \cos \theta(v), \quad (0 \leq \theta < \pi)^{(*)}$$

$$\left(\frac{d\bar{T}}{ds} \right)^2 = a^2 = \left(\frac{d\bar{T}}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{ds} \right)^2$$

yazılacak ve böylece

$$a^2 = \frac{1}{s'^2} \bar{T}'^2 = \frac{A^2 - c^2 p^2}{s'^2 p^4}$$

bulunacaktır. Bu değer $\beta = \frac{1}{a^2}(\bar{i}, \bar{T}, \bar{T}')$ de konursa

(*) Doç. Dr. Füsün URAS

Diferansiyel Geometri Dersleri II ,[2.200]

$$\beta^2 = \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\bar{r}'}{s'}, \bar{T}, \frac{\bar{T}'}{s'} \right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\bar{T}^2} (\bar{r}', \bar{T}, \bar{T}') \right]^2 = \frac{(abc)^2 p^4}{(A^2 - c^2 p^2)^2}$$

bulunacaktır ki bu da yukarıdaki sonuçtan ibarettir.

$$\frac{d\bar{T}}{dv} = \bar{T}' = \frac{d\bar{T}}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dv} = \frac{d\xi}{dv} \cdot \bar{T}' = \frac{p^2}{\sqrt{A^2 - c^2 p^2}} \bar{T}';$$

$$\bar{T}'' = \frac{p^2}{\sqrt{A^2 - c^2 p^2}} \left[\left(\frac{p^2}{\sqrt{A^2 - c^2 p^2}} \right)' \bar{T}' + \frac{p^2 \bar{T}''}{\sqrt{A^2 - c^2 p^2}} \right]$$

olduğundan

$$D = (\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'') = \frac{p^6}{(A^2 - c^2 p^2)^{\frac{3}{2}}} (\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'') \quad (42)$$

olacaktır.

$\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}''$ nün (35) deki değerleri konursa

$$D = \frac{-abcp^3}{(A^2 - c^2 p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{abc}} \beta^2 \quad (42)'$$

bulunur. O halde (27) deki c_0 sabiti için

$$c_0 = \frac{-1}{\sqrt{abc}} \quad (43)$$

değerini elde ederiz. β nın (41) deki değeri ile (27)₃ karşılaştırılarak da [ya da (41) deki σ nın (27)₂ de konması ile]

$$c_1 = \frac{a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{2abc}, \quad c_2 = \frac{4}{abc}(a^2 + b^2 - c^2) \quad (44)$$

bulunur. Özel olarak $a^2 - b^2 = 0$ ise yani dönel bir parçalı hiperboloid söz konusu ise (34) e göre $p = sbt$ ve (41) ve (42)' ye göre de $\beta' = 0$, $\sigma'' = 0$, $D' = 0$ bulunur. Doğal olarak bu özel halde de (43) (44) değerleri (27) yi sağlar.

3.3.2 Şimdi de $Oxyz$ dik ekseninde

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (45)$$

denklemini ile verilen hiperbolik paraboloidi göz önüne alalım. Yukarıda yaptıklarımıza paralel olarak hareket edeceğiz. Doğrultman eğriyi örneğin $y = 0$ düzlemi üzerindeki $2Z = \frac{x^2}{a^2}$ parabolü olarak alalım. x apsisini eğrinin ξ parametresi olarak alırsak

$$\vec{r}(\xi) = \left(\xi, 0, \frac{\xi^2}{2a^2} \right) \quad (46)$$

olacaktır. $\vec{T}(\xi)$ yi belirtmek için (45) den

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2z}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \lambda \quad (47)$$

yazarsak $\lambda = \frac{\xi}{a}$ olacak ve $\bar{T}(\xi)$ için

$$\bar{T}(\xi) = \frac{1}{p}(a^2, ab, \xi); \quad p^2 = a^2(a^2 + b^2) + \xi^2; \quad (pp' = \xi) \quad (48)$$

bulunacaktır. Görülüyor ki $\bar{T}$ vektörleri dik doğrultusu $(b, -a, 0)$ olan düzleme paraleldir. (48) den

$$\bar{T}'(\xi) = \frac{1}{p^3}[-a^2\xi, -ab\xi, a^2(a^2 + b^2)]; \quad \left(\bar{T}'^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2)}{p^4} \right)$$

$$\bar{T}''(\xi) = -\frac{1}{p^5}\{a^2[a^2(a^2 + b^2) - 2\xi^2], ab[a^2(a^2 + b^2) - 2\xi^2], 3a^2(a^2 + b^2)\xi\} \quad (48')$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi her üç vektör de dik doğrultusu $(b, -a, 0)$ olan düzleme paralel olup $(\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'') = 0$ dır ve (42) gereğince $D = 0$ bulunur. Yüzeyin bir parametrik denklemini

$$\bar{X}(\xi, \eta) = \bar{r}\left(\xi, 0, \frac{\xi^2}{2a^2}\right) + \eta\bar{T}(\xi) \quad (49)$$

olarak elde ederiz. Burada da (37), (38) deki $v = s(\xi)$, $u = \eta + \phi(\xi)$ dönüşümünü

yaparsak $\bar{T}^* = \frac{d\bar{T}}{dv} = \frac{d\bar{T}}{d\xi} \cdot \frac{1}{s'(\xi)}$ den $\bar{T}^{*2} = 1$ olacağından

$$\frac{dv}{d\xi} = s'(\xi) = \sqrt{\bar{T}^{*2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{p^2} \quad (50)$$

bulunur.

$$\bar{X}_\xi = \phi'(\xi)\bar{X}_u + \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{p^2}\bar{X}_v, \quad \bar{X}_\eta = \bar{X}_u = \bar{T}(\xi) \quad (51)$$

olacağına göre ve

$$\bar{X}_u^2 = 1, \quad \bar{X}_u\bar{X}_v = 0, \quad \bar{X}_v^2 = (u - \sigma)^2 + \beta^2$$

olduğunu da bildiğimizden (47) den önce

$$\phi'(\xi) = \bar{T}' \cdot \bar{T} = \frac{p^2 - a^2b^2}{a^2p} \quad (52)$$

Bu değerle kullanılarak (51) den

$$\phi - \sigma = \frac{b^2 p \xi}{a^2(a^2 + b^2)}, \quad \beta = \frac{bp^2}{a(a^2 + b^2)} \quad (53)$$

elde edilecektir. (50) den integrasyonla

$$\operatorname{tg}(v+b_0) = \frac{\xi}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (b_0=0 \text{ alınabilir}) \quad (54)$$

bulunur. Bu değerle

$$p^2 = \frac{a^2(a^2+b^2)}{\cos^2(v+b_0)} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{ab}{\cos^2(v+b_0)}$$

bulunacaktır. Öte yandan (26) da paraboloidler için $D=0$ konarak

$$\beta = \frac{c_0}{\cos^2(v+b_0)}, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dv} = a_0\beta^{\frac{3}{2}}, \quad (D=0) \quad (55)$$

elde edilir. O halde buradaki c_0 sabitinin değerinin $c_0 = ab$ olduğu görülmüş olur. a_0 sabitine gelince

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{d\sigma}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dv} = \frac{p^2}{a\sqrt{a^2+b^2}} \left[\varphi' - \frac{b^2(p'\xi+p)}{a^2(a^2+b^2)} \right] \quad \text{den}$$

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{(a^2-b^2)p^3}{a^3(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2-b^2}{(ab)^{\frac{3}{2}}} \beta^{\frac{3}{2}}$$

bulunur ki bu da (55) deki a_0 sabitinin $a_0 = \frac{a^2-b^2}{(ab)^{\frac{3}{2}}}$ olduğunu gösterir. O halde

$a_0 = 0$ özel hali hiperbolik paraboloidde $z = sbt$ kesitlerinin ikizkenar hiperboller olması özel haline karşı gelir. Yani bu özel hiperbolik paraboloidlerde $\sigma' = 0$ yani $\sigma = sbt$ tir. Böylece $D=0$ olan doğrusal yüzeylere, minimal doğrusal

yüzeyler yani dik helikoidler dışında bir örnek olarak hiperbolik paraboloidler elde edilmiş olmaktadır. Bu bakımdan $D = 0$ olan doğrusal yüzeylere hiperbolik paraboloidlerin bir genelleştirilmiş gözü ile bakabiliriz.



4. BİR UZAY EĞRİSİNİN FRENET ÜÇYÜZLÜSÜNE KATI OLARAK BAĞLI BİR DOĞRU İLE DOĞRULAN DOĞRUSAL YÜZEYLER

4.1. $\vec{r}(v) \quad [\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}, \kappa, \tau]$ bir uzay eğrisi olduğuna göre doğrusal yüzeyimizi

$$\begin{aligned} \vec{X}(u, v) &= \vec{r}(v) + u\vec{T}(v), \quad \vec{T}(v) = A\vec{t} + B\vec{n} + C\vec{b} \\ (A, B, C &= s b t, \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1) \end{aligned} \quad (56)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu şekilde tanımlanan yüzeylerin en ilginç $B = C = 0$, $A = 1$ alınarak elde edilen $\vec{r}(v)$ nin teğetler yüzeyidir. Bu yüzeylerin koni ve silindir ile birlikte “açılabilir yüzeyler” dediğimiz Gauss eğriliği sıfır olan tüm yüzeyleri oluşturduğunu biliyoruz. (56) da v parametresini $\vec{r}(v)$ nin yay uzunluğu olarak alırsak

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{r}'(v), \quad \vec{T}'(v) = -B\kappa\vec{t} + (A\kappa - C\tau)\vec{n} + B\tau\vec{b}, \\ \vec{T}''(v) &= -[B\kappa' + \kappa(A\kappa - C\tau)]\vec{t} + [(A\kappa' - C\tau') - B(\kappa^2 + \tau^2)]\vec{n} + \\ &\quad + [B\tau' + \tau(A\kappa - C\tau)]\vec{b} \end{aligned} \quad (57)$$

yazılabilecektir. Buradan

$$a^2 = \vec{T}'^2 = B^2(\kappa^2 + \tau^2) + (A\kappa - C\tau)^2 = \kappa^2 + \tau^2 - (C\kappa + A\tau)^2, \quad (58)$$

$$b = \vec{T}'\vec{t} = -B\kappa$$

bulunacak ve $\sigma(v) = -\frac{b(v)}{a^2(v)}$, $\beta = \frac{1}{a^2}(\bar{t}, \bar{T}, \bar{T}')$ değerleri kullanılarak da

$$\sigma = \frac{B\kappa}{a^2}, \quad \beta = \frac{\tau(B^2 + C^2) - AC\kappa}{a^2} = \frac{\tau - A(C\kappa + A\tau)}{a^2} \quad (59)$$

elde edilecektir. D nin değerini bulabilmek için $\bar{T}(v)$ nin küresel tasvirinin s^0 yay uzunluğuna geçmemiz gerekecektir.

$$\frac{d\bar{T}}{ds^0} = \frac{d\bar{T}}{dv} \cdot \frac{dv}{ds^0} \Rightarrow \frac{ds^0}{dv} = a, \quad \left(\bar{T}^* = \frac{d\bar{T}}{ds^0} = \frac{\left(\frac{d\bar{T}}{dv}\right)}{a} = \frac{\bar{T}'(v)}{a} \right) \quad (60)$$

dır. Buna göre

$$\bar{T}^* = \frac{1}{a}[-B\kappa\bar{t} + (A\kappa - C\tau)\bar{n} + B\bar{t}b], \quad (61)$$

$$\bar{T}'' = \frac{1}{a^2} \left[\bar{T}'' - \frac{a'}{a} \bar{T}' \right]$$

olur. D yi $\kappa^2 = 1 + D^2$ ve $D = (\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'')$ den hesaplayabiliriz.

Gerçekten, bir yandan

$$1 + D^2 = \kappa^{02} = \bar{T}''^2 = \frac{1}{a^4} \left[\bar{T}'' - \frac{2a'}{a} \bar{T}'\bar{T}'' + a'^2 \right] = \frac{\bar{T}'' - a'^2}{a^4}, \quad (\bar{T}'\bar{T}'' = aa') \quad (62)$$

den, öte yandan da

$$D = (\bar{T}, \bar{T}^*, \bar{T}^{**}) = \frac{1}{a^3} (\bar{T}, \bar{T}', \bar{T}'') \quad (63)$$

den D yi hesaplayabiliriz.

$$\bar{T} \wedge \bar{T}' = \bar{u} + \kappa \bar{b} - (A \tau + C \kappa) \bar{T}$$

olduğundan (63) den

$$D = \frac{1}{a^3} [B(\kappa \tau' - \kappa' \tau) + (A \tau + C \kappa) a^2] \quad (64)$$

olarak bulunur. D nin bu değerinin (62) den bulunacak olanla aynı olması için

$$a^2 \bar{T}''^2 - (a \alpha')^2 \equiv a^6 + [B(\kappa \tau' - \kappa' \tau) + a^2 (a \tau + C \kappa)]^2$$

olması gerekir ki bunun doğruluğu a nın (58) deki değeri ile

$$\bar{T}''^2 = a^2 (\kappa^2 + \tau^2) + \kappa'^2 + \tau'^2 - (C \kappa' + A \tau')^2 + 2B(C \kappa + A \tau)(\kappa \tau' - \kappa' \tau)$$

değerinin yerine konması ile kolayca gerçekleştirilebilir. Böylece tanımlamış olduğumuz doğrusal yüzey için σ, β, D fonksiyonlarını [59 ve 64] da elde etmiş oluyoruz.

4.2. a) Bir açılabilir yüzey için $B = C = 0, A = 1$ olduğundan (59)

gereğince $\sigma = \beta = 0$ dır. (64) den de $D = \frac{\tau}{\kappa}$ bulunur. $\beta = 0$ olacağını zaten biliyoruz. $\sigma = 0$ olması ise yüzeyin boğaz çizgisinin $\vec{r}(v)$ doğrultman eğrimiz olduğunu kanıtlar. (Boğaz çizgisinin denklemi $u - \sigma = 0$ olup burada $u = 0$ dır yani $\vec{r}(v)$ boğaz çizgisidir.)

b) Açılabilir yüzeylerin bu özelliğine paralel olarak şu teoremi kanıtlayacağız.

Teorem: Doğuranları boğaz çizgisine dik olan doğrusal yüzeyler sadece bir uzay eğrisinin binormallerinin oluşturduğu doğrusal yüzeylerden ibarettir.

Gerçekten: Önce binormaller yüzeyinin bu özelliği sağladığı apaçıktır. Çünkü yukarıdaki sonuçlarda $A = B = 0, C = 1$ konursa $\sigma = 0, \vec{T} \cdot \vec{r}' = \vec{b} \cdot \vec{t} = 0$ bulunur ki bu doğrultman eğrinin boğaz çizgisi olduğunu ve doğuranları dik olarak kestiğini gösterir.

Şimdi asıl önemli olanı yani bu sonucun tersini göstereceğiz. $\vec{r}(v)$ olarak boğaz çizgisini alalım. O halde

$$\vec{t} \cdot \vec{T} = 0 \quad (65)$$

yazılabilecektir, (boğaz çizgisi doğuranlara dik) öte yandan $\vec{r}(v)$ boğaz çizgisi olduğundan $\sigma = 0$ yani $b = 0$ olacaktır. Bu ise

$$d\vec{r} \cdot d\vec{T} = 0 \quad \text{ya da} \quad \vec{t} \cdot \vec{T}' = 0 \quad (66)$$

olması demektir. (65) den

$$\bar{T} = \bar{n} \cos \varphi + \bar{b} \sin \varphi \quad (67)$$

$$\bar{T}' = [-\bar{n} \sin \varphi + \bar{b} \cos \varphi] \varphi' + (-\kappa \bar{t} + \tau \bar{b}) \cos \varphi - \bar{n} \tau \sin \varphi$$

yazabiliriz. (66) gereğince buradan

$$\bar{t} \cdot \bar{T}' = -\kappa \cos \varphi = 0 \quad (68)$$

bulunur. Buradan da (67) gereğince ($\kappa \neq 0$) $\bar{T} = \mp \bar{b}$ elde edilir ki bu da yüzeyimizin $\bar{r}(\nu)$ eğrisinin binormaller yüzeyi olduğunu gösterir.

c) Doğrusal helikoidler:

Tanım gereği doğrusal helikoidler, bir doğrunun helikoidal bir hareketi sonucu oluşan doğrusal yüzeylerdir. O halde en genel doğrusal helikoid (56) da $\bar{r}(\nu)$ eğrisinin bir dairesel helis ($\kappa, \tau = sbt$) olarak alınması ile elde edilir. Buna göre (58), (59), (64) gereğince $\sigma' = \beta' = D' = 0$ dır. $D' = 0$ olması doğrultman koninin dönel olması koşuludur. Bu sonucu yüzeyin oluşumundan da söyleyebilirdik. Gerçekten doğuranlar helikoidal hareket yaptığından, hareketin dönme eksenini ile sabit açı yapacaktır. Bu yüzden bir noktadan çizilen $\bar{T}(\nu)$ birim vektörlerinin ucu birim kürenin bir küçük çemberini çizecek dolayısıyla doğrultman koni dönel olacaktır.

Burada D sabitinin özel olarak sıfır olması çok iyi bilinen doğrusal minimal yüzeyler özel halini verir. Gerçekten bu halde $D = \beta' = \sigma' = 0$ koşulları elde edilir ki bunların doğrusal minimal yüzeyler için gerek ve yeter koşullar olduğunu biliyoruz.

SONUÇLAR

1) Genel bir doğrusal yüzeyi belirleyen β, σ, D gibi üç fonksiyon yerine yüzeyin denklemlerini elde etmeyi sağlayacak olan yeni üç fonksiyon tanımlanmış ve bunların β, σ, D cinsinden ifadeleri verilmiştir.

2) Genel bir doğrusal yüzeyde eğrisel asimptotun geodezik eğriliği yüzeyi belirten üç fonksiyon cinsinden hesaplanmıştır.

3) Gerçel bir doğrusal yüzeyde eğrisel asimptotun geodezik eğriliğinin sıfırdan farklı bir sabite eşit olamayacağı ispat edilmiştir.

4) Söz konusu geodezik eğriliğin sıfır olması halinde ise doğrusal yüzeyin kuvadriğe indirgeneceği bilindiğine göre bu bağıntıdan bir doğrusal yüzeyin kuvadrik olma koşulları yüzeyi belirleyen üç fonksiyon cinsinden elde edilmiştir.

5) Bu koşullarda geçen sabitler, reel doğuranlı kuvadrikler olan bir parçalı hiperboloidler ve hiperbolik paraboloidlerin eksen uzunlukları cinsinden ayrı ayrı ifade edilmişlerdir.

6) Koni ve silindirler dışındaki açılabilir yüzeylerin genel bir uzay eğrisinin teğetleri ile doğurulabileceği sonucundan hareketle, genel bir uzay eğrisinin Frenet üçyüzlüsüne katı olarak bağlı olan bir doğru ile oluşan regle yüzeyler alınmıştır.

7) (6) ile ilgili olarak “Doğuranları boğaz çizgisine dik olan doğrusal yüzeyler sadece bir uzay eğrisinin binormallerinin oluşturduğu doğrusal yüzeylerden ibarettir” teoremi de ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- I Doç. Dr. Füsün URAS Diferansiyel Geometri Dersleri II**
Y.T.Ü. Fen-Ed. Fakültesi yayını 1992
- II L.P. EINSENHART A Treatise on the Differential Geometry**
of curves and surfaces, Dover Pub.
New-York 1960

7.2. 1995 10.00 TİM KUDUR
KAYNAKLAR KUTUPHANESİ

ÖZGEÇMİŞ

Adı soyadı : Filiz Kanbay
Doğum tarihi : 26 Eylül 1971
Doğum yeri : İstanbul
İlk öğrenimi : İshakağa İlkokulu
Orta öğrenimi : Ziya Ünsel Ortaokulu, Kandilli Kız Lisesi
Yüksek öğrenimi : Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümü mezunu
Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi'nde araştırma görevlisi