T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİVELMAN AĞINDA KABA HATALI ÖLÇÜLERİN DENK UZAY YAKLAŞIMI İLE BELİRLENMESİ

UTKAN MUSTAFA DURDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HARİTA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
GEOMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. ŞERİF HEKİMOĞLU

İSTANBUL, 2013

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİVELMAN AĞINDA KABA HATALI ÖLÇÜLERİN DENK UZAY YAKLAŞIMI İLE BELİRLENMESİ

Utkan Mustafa DURDAĞ tarafından hazırlanan tez çalışması ……….. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Harita Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Şerif HEKİMOĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Şerif HEKİMOĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Rahmi Nurhan ÇELİK

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. Bahattin ERDOĞAN

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında standart denk uzay ve en uygun denk vektör yaklaşımının doğrusal regresyonda ve nivelman ağında güvenilirliğinin araştırılması amaçlanmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde ve tez konumun seçiminde bana yön gösteren, değerli bilgi ve birikimlerinden yararlandığım tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Şerif Hekimoğlu'na teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, çalışmalarımın gerçekleşmesinde büyük rolü olan, yazılım ve donanım konusunda desteğini ve değerli bilgisini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Bahattin Erdoğan'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2013

Utkan Mustafa DURDAĞ

İÇİNDEKİLER

sayfa

SİMGE LİSTESİ

A	Katsayılar matrisi
A^+	Pozitif tanımlı katsayılar matrisi
b	Kaba hata vektörü
$\hat{b}$	Kaba hatanın maksimum olasılık kestirimi
C_{ll}	Ölçülerin kovaryans matrisi
D	Kaba hata etki matrisi
DF_D	Kaba hata belirleme karar fonksiyonu
DF_{I_j}	Kaba hata ayrıştırma karar fonksiyonu
E	Normal dağılımlı hata etki matrisi
f	Serbestlik derecesi
G	Koşul denklemleri katsayılar matrisi
I	Birim matris
$J_i(v)$	Performans kriteri oranı
m	Ölçü kümesi
m_i	İyi ölçü kümesi
N	Normal denklem katsayılar matrisi
n	Ölçü sayısı
P	Ağırlık matrisi
Q_{ll}	Ölçülerin ağırlık katsayıları matrisi
Q_{xx}	Bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi
S	Katsayılar matrisinin tam tekil değer ayrışımından elde edilen köşegen matrisi
$\hat{S}$	Katsayılar matrisinin indirgenmiş tekil değer ayrışımında elde edilen köşegen matrisi
s_0	Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması
T	Eşik değer
u	Bilinmeyen sayısı
U	Katsayılar matrisinin tam tekil değer ayrışımından elde edilen ortogonal matris
$\hat{U}$	Katsayılar matrisinin indirgenmiş tekil değer ayrışımından elde edilen ortogonal matris
V	Denk uzay matrisi
V_{svd}	Katsayılar matrisinin tekil değer ayrışımından elde edilen ortogonal matris
W	Redündans matrisi
v	Düzeltme vektörü

v_0	Kaba hataya duyarlı en uygun denk vektör
x	Bilinmeyenler vektörü
y	Gözlem vektörü
$\hat{x}$	Kestirilmiş bilinmeyenler vektörü
$\hat{y}$	Kestirilmiş gözlem vektörü
p	Denk eşitliklerin düzeltme vektörü
p_0	Standartlaştırılmış düzeltme vektörü
σ_0^2	Önsel varyans
σ	Bir ölçünün standart sapması
σ_i	Katsayılar matrisinin tekil değerleri
μ	Beklenen değer
λ	Logaritmik olasılık oranı
δm	Kaba hatalı değer
Δ	Kaba hata genliğinin genişliği
Δ_j	Olasılık fonksiyonu
ε	Normal dağılımlı hata vektörü
Ξ	Kovaryans matrisi

KISALTMA LİSTESİ

EKK	En Küçük Kareler
FDI	Fault Detection and Isolation
GLT	Generalized Likelihood Test
MSR	Mean Success Rate
OBO	Ortalama Başarı Oranı
SVD	Singular Value Decomposition

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

NİVELMAN AĞINDA KABA HATALI ÖLÇÜLERİN DENK UZAY YAKLAŞIMI İLE BELİRLENMESİ

Utkan Mustafa DURDAĞ

Harita Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Şerif HEKİMOĞLU

Jeodezide olduğu gibi birçok mühendislik dalında da uyuşumsuz ölçülerin parametre kestirimi üzerinde önemli ölçüde etkisi olduğu iyi bilinmektedir. Jeodezide kaba hatalı ölçülerin belirlenmesi için klasik uyuşumsuz ölçü testleri ve robust yöntemler önerilmektedir.

Denk uzay yaklaşımı model tabanlı kaba hata belirleme ve ayrıştırma tekniğidir. Bu çalışmada; denk uzay yaklaşımının doğrusal regresyona ve jeodezik nivelman ağına uygulanabilirliği ele alınmıştır. Bu amaçla, doğrusal regresyonda bir model ve jeodezik ağlardan nivelman ağı yapay olarak üretilmiştir. Yaklaşımların ortalama başarı oranları (OBO) farklı anlamlılık düzeyleri için Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Matris ayrıştırma yöntemlerinden; katsayılar matrisinin tekil değer ayrışımı ve katsayılar matrisinin QR ayrışımı, standart denk uzay ve en uygun denk vektör yaklaşımında kullanılan Potter algoritmasına alternatif olarak kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Denk uzay, uyuşumsuz ölçülerin (kaba hataların) belirlenmesi, jeodezik nirengi ağı, güvenilirlik.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

FAULT DETECTION AND ISOLATION USING PARITY SPACE APPROACH IN LEVELING NETWORKS

Utkan Mustafa DURDAĞ

Department of Geomatics Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Şerif HEKİMOĞLU

It is well known that faults have a significant effect on parameter estimation in geodesy as well as many other engineering disciplines. In geodesy Tests for outlier and robust methods are used to detect outliers.

The parity space approach is a model-based fault detection and isolation (FDI) technique. In this study; the applicability of the parity space approach to the linear regression and leveling network is tackled. For this aim; the linear regression model and leveling network have been simulated. The mean success rates (MSR) of approaches are obtained by using Monte Carlo simulation technique. Singular value and QR decomposition of the coefficient matrix are used among the matrix decomposition methods as an alternative way to the Potter algorithm used in standard parity space and optimal parity vector approaches.

Keywords: Parity space, outlier detection, fault detection, geodetic leveling network, reliability.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Günümüzde havacılık, elektronik ve endüstriyel birçok mühendislik dalına ait uzay aracı, uçak, kimyasal tesisler ve nükleer tesisler gibi kompleks sistemlerde kaba hataların (sensor signal) belirlenebilirliği önemli bir konudur [1]. 1970'lerden bu yana model-tabanlı kaba hata belirleme teknikleri kayda değer şekilde gelişme göstermiştir [2]. Uyuşumsuz ölçülerin (kaba hataların) belirlenmesi ve ayrıştırılması metotları birçok yazar tarafından araştırılmış ve önerilmiştir. İlk olarak, Potter denk uzay yaklaşımını önermiştir [3]. Ray denk uzay yaklaşımı tasarımını düzenlemiştir [4]. Denk uzay yaklaşımı, genellikle fazla sayıda sensör bulunan sistemlerde kaba hatanın (fault) tespiti ve yerelleştirilmesinde (isolation) kullanılmaktadır [5]. Genelleştirilmiş olasılık oran testi (GLT) yaklaşımı Daly tarafından uygulanmıştır [6]. En uygun denk vektör yaklaşımı Jin ve Zhang tarafından kullanılmış ve önerilmiştir [7].

Ölçülen büyüklüklerin ve bunlardan türetilen bilgilerin kalitesini belirlemek büyük önem taşımaktadır. Kalite deyince ölçülmüş olan büyüklüklerin ve bunlardan türetilen bilgilerin standart sapması ve güvenirliği anlaşılır [8]. Bilinmeyen parametrelerinin kestirilmesinden önce kaba hataların belirlenmesi ve ayrıştırılması gerekmektedir. Ölçülerin kaba hata içerip içermediği geleneksel olarak uyuşumsuz ölçü testleri ile belirlenir [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. Günümüzde uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde klasik yaklaşım yanında robust kestirim yöntemleri de tercih edilir [17], [18], [19], [20]. Klasik uyuşumsuz ölçü testleri ve iteratif robust yöntemler en küçük kareler (EKK) kestirimini kullanmaktadır. Jeodezide yüksek kalitede ağ elde etmek için ölçülerin yüksek güvenilirlikte belirlenebilmesi gerekmektedir. Uyuşumsuz ölçüleri belirleme yöntemlerinin kapasitesi Hekimoğlu ve Koch tarafından ortalama başarı oranı (OBO) ile verilmiştir [21].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı; denk uzay ve en uygun denk vektör yaklaşımlarını doğrusal regresyona ve nivelman ağına uygulayarak kaba hatalı ölçünün tespit edilebilirliğini ve bu yaklaşımların güvenilirliğini araştırmaktır. Bu amaç doğrultusunda Potter [3] tarafından önerilen denk uzay yaklaşımı algoritmasının sahip olduğu istatistiksel yaklaşımın yanı sıra cebirsel temeller incelenecektir. Matris ayrıştırma (decomposition) yönteminin kullanıldığı bu algoritmayı anlayabilmek ve doğrusal eşitliklerin çözümündeki rolünü geometrik açıdan anlamak için ortogonal ayrıştırma teoremi ve tekil değer ayrıştırması (singular value decomposition) konuları araştırılacaktır. Koch [14] tarafından ve Niemeier [8] tarafından gösterilen bu geometrik yaklaşım klasik matematiksel yaklaşımdan farklı bir EKK bakış açısı sunmaktadır. EKK yaklaşımına dayanan Baarda (data snooping) yönteminin [9] sonuçları yukarıda bahsi geçen yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Denk uzay yaklaşımları; istatistiksel kavramların yanında cebirsel kavramlar da içerdiği için doğrusal cebire ait bazı temel kavramlar ikinci bölümde gözden geçirilecektir. Standart denk uzay yaklaşımı olarak da adlandırılan GLT yaklaşımı üçüncü bölümün konusu olarak ele alınacaktır. Dördüncü bölümde en uygun denk vektör yaklaşımı ve kriterlerinden bahsedilecektir. Jeodezik ağlardaki güvenilirlik analizi ve Baarda yöntemi konusu beşinci bölümde sunulacaktır. Altıncı bölümde sayısal uygulamaya yönelik yöntemlerin OBO değerlerinin hesaplanması ve karşılaştırılması, son bölümde sonuçların yorumlanması ve önerilerden söz edilecektir.

1.3 Hipotez

Kontrol, elektrik, havacılık ve uzay mühendisliği gibi birçok mühendislik dalında oluşturulan sistemlerdeki hataların ortaya çıkarılması amacıyla, standart denk uzay ve en uygun denk vektör yaklaşımları uygulanmaktadır. Harita mühendisliğindeki jeodezik ağların yapısı kontrol mühendisliğinde tasarlanan sistemlerin yapısına benzerlik gösterdiği için bu yöntemlerin jeodezik ağlarda uyuşumsuz ölçü araştırmasında kullanılması başarılı sonuçlar verecektir. Ayrıca denk uzay yaklaşımlarının temelini oluşturan Potter algoritmasında kullanılan ayrıştırma yönteminin yerine alternatif olarak farklı ayrıştırma tekniklerinin kullanılması daha hızlı, basit ve doğru sonuçlar elde etmemizi sağlayan sonuçlar verecektir.

BÖLÜM 2

CEBİRSEL TEMELLER

EKK yönteminin geometrik yaklaşımı doğrusal cebire ait bazı temel kavramlara dayanmaktadır. Bundan dolayı lineer cebire ait bazı yaklaşımlar giriş bölümünde belirtilen yöntemlerin matematiksel ve geometrik çözümlemelerinin yorumlanabilmesi için önemlidir. Doğrusal cebir, doğrusal eşitliklerin doğasını anlamayı sağlamakta, fazla tanımlı (ölçü sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu) ve tutarsız denklem sistemlerini çözmek için yöntemler sunmaktadır.

Bu bölümde ölçü sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu denklem sistemlerinin çözümüne yardımcı olan matris ayrıştırmaları ve bu ayrıştırma yöntemlerinin geometrik yorumlanmasında yardımcı olacak vektör uzaylar ve alt uzaylara iz düşüm kavramlarından bahsedilecektir.

2.1 Doğrusal Denklem Sistemleri

Birçok alanda kullanılan doğrusal denklem sistemleri, dengeleme problemlerinin de çözülmesinde kullanılmaktadır. Aşağıdaki doğrusal denklemler n ölçü sayısı u bilinmeyen sayısı olmak üzere verilmektedir;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1u}x_u = y_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2u}x_u = y_2$$

…………………… (2.1)

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nu}x_u = y_u$$

Bu denklem sisteminin matris biçiminde gösterimi;

$$Ax = y \tag{2.2}$$

şeklindedir. Burada A katsayılar matrisi $n \times u$ boyutunda, y gözlem vektörü $n \times 1$ boyutunda ve x bilinmeyenler vektörü $u \times 1$ boyutundadır. Denklem sistemi y değerlerine göre; homojen denklem sistemi ($y = 0$ için) veya homojen olmayan denklem sistemi ($y \neq 0$ için) olarak adlandırılmaktadır. A katsayılar matrisi ile sistemin sağ tarafındaki y gözlem vektörünün ortak bir matriste gösterilmesi ile genişletilmiş matris $[A \mid y]$ elde edilir [22].

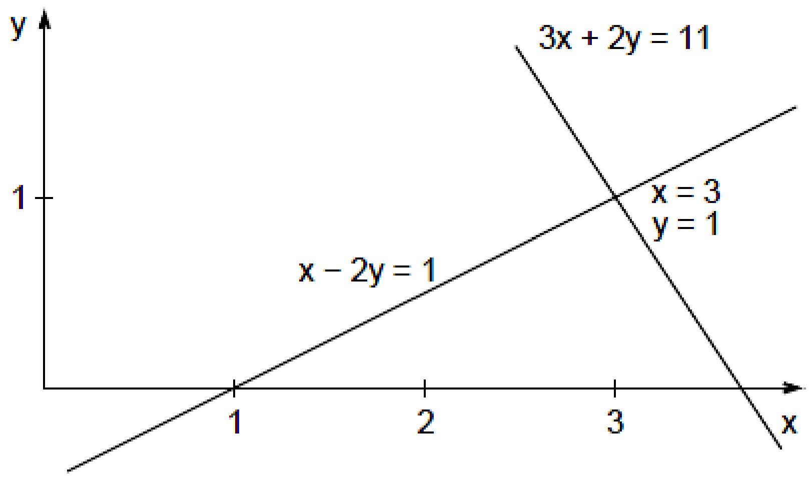
Doğrusal sistem çözümsüz olabildiği gibi tek çözümlü veya birçok çözümlü de olabilir. Eğer sistem çözümsüz ise tutarsız, en az bir çözümü varsa tutarlı olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca, tam ranklı doğrusal sistemler için üç ihtimal vardır;

- Tek tanımlı sistem $(u = n)$
- Eksik-tanımlı sistem $(n < u)$
- Fazla-tanımlı sistem $(n > u)$.

Bu durumların her biri ya tutarlı ya da tutarsızdır.

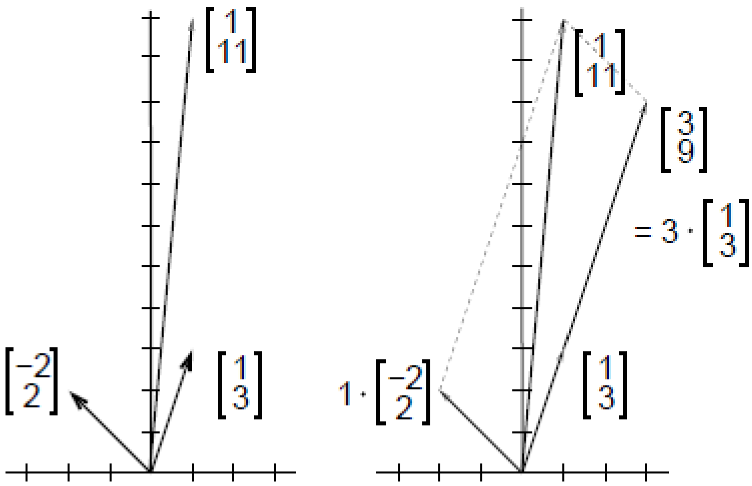
Doğrusal sistemlerden elde ettiğimiz genişletilmiş matrisin sütun ve satırını iki boyutlu grafik düzlemde görselleştirmek için matrisin sütun ve satırına sırasıyla sütun görüntüsü ve satır görüntüsü ismi verilmektedir. Örneğin; Şekil 2.1'de genişletilmiş matrisin iki satırının (n tane), iki boyutlu (u tane) düzlemdeki görünümü gösterilmektedir. Genelleştirme yapılarak; genişletilmiş matrisin n adet satırının R^u'daki görselleştirilmesi ile satır görüntüsü elde edilmektedir diyebiliriz. Eğer çoklu düzlemler bir ortak kesişim noktasına sahipse doğrusal sistem sadece tek çözümlüdür [23].

Şekil 2.2'de sütun görünümü; genişletilmiş matrisin her bir sütununa ait, diğer bir deyişle (2.2) eşitliğinin sütunlarına ait gösterimdir [22]. Aslında bu gösterim sütun veya satır vektörlerine ait matrisin vektörel görüntüsü olarak da nitelendirilebilir. Şekil 2.1'deki satır görünümünde bir doğrusal sistemi yuvarlama hataları veya basamak kaybının neden olduğu küçük değişimlere karşı çok veya az duyarlı olabilir. Bu değişim doğrusal sistemin kötü koşullu olmasına neden olmaktadır. Şekil 2.3'te katsayılar matrisinin veya bir 2×2'lik doğrusal sistemin sağ tarafının küçük değişiminin sistemin çözümü üzerine etkisi gösterilmektedir. Doğrusal sistemin geometrisi çözüme belirgin şekilde etki etmektedir. Bu hassas etki doğrusal sistemin doğasında olup hiçbir sayısal aldatmaca ile üstesinden gelinememektedir [24]. Böyle küçük değişimlerin çözümde büyük değişimler oluşturduğu bir sistem kötü koşullu, oluşturmadığı durum ise iyi koşullu olarak adlandırılmaktadır [23].

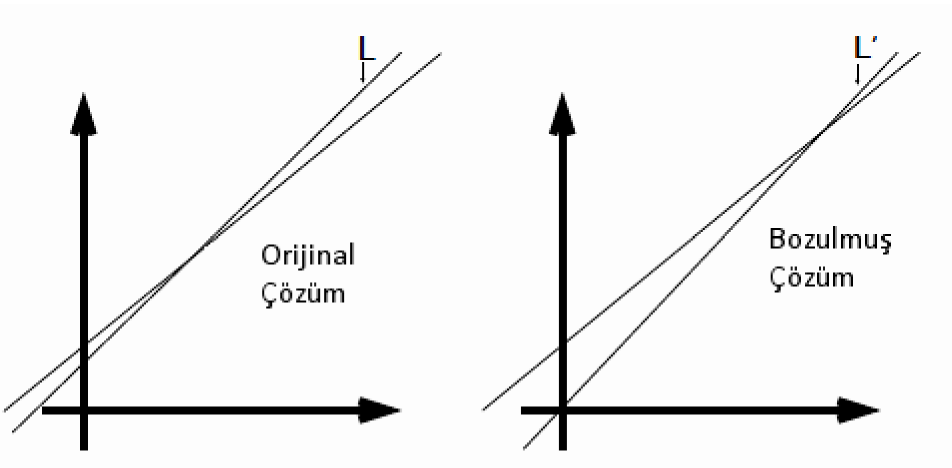


Şekil 2.1 Bir 2×2'lik doğrusal sistemin satır görünümü [23]

Şekil 2.1'de gösterilen 3x+2y=11 ve x-2y=1 doğrusal denklemlerinin satır görünümü gösterilmiştir. Aynı zamanda x=3 ve y=1 bilinmeyen vektörü elemanları da gösterilmiştir. 3x+2y=11 ve x-2y=1 doğrusal denklemleri için aşağıda Şekil 2.2'de sağ tarafta bulunan sütun vektörlerinin yanında skaler çarpım ile gösterilen değerler x=3 ve y=1 bilinmeyenlerdir.



Şekil 2.2 Bir 2 × 2'lik doğrusal sistemin sütun görünümü [23]



Şekil 2.3 Kötü koşullu 2 × 2'lik doğrusal sistem [24]

2.2 Vektör Uzaylar

Sütun görünümünün R^2 veya R^3'ten R^n'e genelleştirilmesi vektör uzaylar teoresinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Genel vektör uzayı kavramı hakkında tanım ve özellikler aşağıda sunulmaktadır.

Tanım 2.1 Aşağıdaki özelliklerde bulunan vektör toplama ve skaler çarpma işlemleri sağladığında $\mathcal{V}$ kümesi $\mathcal{F}$ üzerinde vektör uzayı olarak adlandırılmaktadır. $\mathcal{F}$ skaler değerleri temsil etmekte ve gerçek sayılar aralığındadır [24].

a. Her x,y ∈ $\mathcal{V}$ için x+y ∈ $\mathcal{V}$'dir. Bu özellik vektör toplama işleminde kapalılık özelliği olarak adlandırılmaktadır.

b. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathcal{V}$ için $(\mathrm{x}+\mathrm{y})+\mathrm{z}=\mathrm{x}+(\mathrm{y}+\mathrm{z})$'dir.

c. Her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{V}$ için $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\mathrm{y}+\mathrm{x}$'dir.

d. Her $\mathrm{x} \in \mathcal{V}$ için $0 \in \mathcal{V}$ iken $\mathrm{x}+0=\mathrm{x}$'dir.

e. Her $\mathrm{x} \in \mathcal{V}$ için bir $(-\mathrm{x}) \in \mathcal{V}$ bulunmakta ve $\mathrm{x}+(-\mathrm{x})=0$'dır.

f. Her $\alpha \in \mathcal{F}$ ve $\mathrm{x} \in \mathcal{V}$ için $\alpha\mathrm{x} \in \mathcal{V}$'dir. Bu özellik skaler çarpımlar işleminde kapalılık özelliği olarak adlandırılmaktadır.

g. Bütün $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ve her $\mathrm{x} \in \mathcal{V}$ için $(\alpha\beta)\mathrm{x}=\alpha(\beta\mathrm{x})$'dir.

h. Her $\alpha \in \mathcal{F}$ ve bütün $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{V}$ için $\alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\alpha\mathrm{x}+\alpha\mathrm{y}$'dir.

i. Bütün $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ve her $\mathrm{x} \in \mathcal{V}$ için $(\alpha+\beta)\mathrm{x}=\alpha\mathrm{x}+\beta\mathrm{x}$'dir.

j. Her $x \in \mathcal{V}$ için $1x=x$'dir.

Tanım 2.1'de özelliklerde bulunan a ve f maddelerindeki kapalılık özelliğini yerine getiren bir $\mathcal{V}$ vektör uzayının alt kümesi $\mathcal{V}$'nin alt uzayı olarak nitelendirilmektedir. Orijin boyunca her vektör ve bu vektörlerin doğrusal birleşimi bir alt uzay oluşturmaktadır. Sıfır vektörü bilinen alt uzay olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca tüm vektör uzayı kendisinin alt uzayıdır.

İki alt uzay başka bir alt uzay oluşturmak için toplanabilir. Yani;

$$\mathcal{X}+\mathcal{Y}=\{x+y \mid x \in \mathcal{X} \text{ } ve \text{ } y \in \mathcal{Y}\} \tag{2.3}$$

$\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ uzayları $\mathcal{V}$'nin alt uzaylarını simgelemektedir. Bunların toplamı ($\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ olarak ifade edilen) da yine $\mathcal{V}$'nin bir alt uzayıdır [23].

2.2.1 Bir Matrisin Dört Alt Uzayı

$n \times u$ boyutunda herhangi bir A matrisi ile $u \times 1$ boyutundaki x vektörü çarpılarak elde edilen Ax sonucu ile R^n'nin bir alt uzayı elde edilmiştir (A'nın $R(A)$ görüntü kümesi olarak da bilinmektedir). Ax bir matris vektör çarpımı olup, A matrisinin sütunlarının doğrusal bileşimleridir. Bu da A matrisinin sütunlarının birleşiminden oluşan bir Ax sütun uzayıdır [23].

. (2.5)

Aynı şekilde, matrisinin satırlarının birleşimi ile oluşan uzay (örn; veya matrisinin sütunlarının birleşiminden oluşan uzay) ’nın satır uzayı olarak adlandırılmaktadır [23].

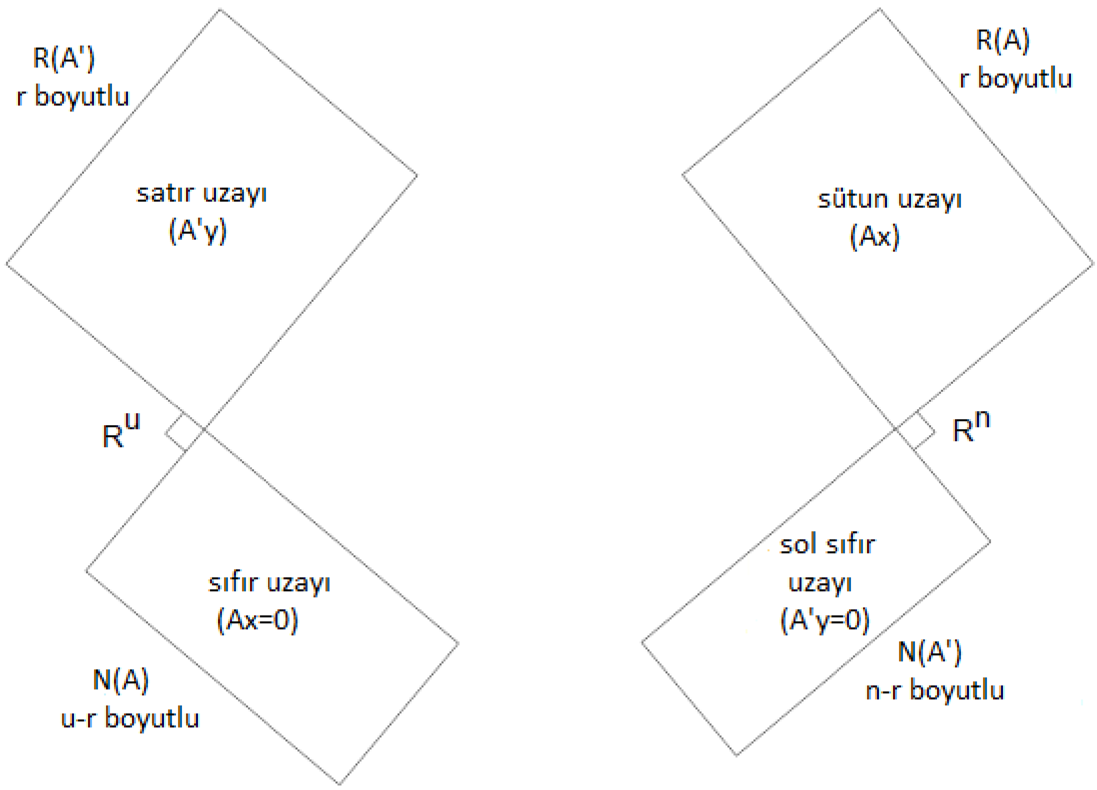
. (2.6)

Satır ve sütun uzaylarına ek olarak bir matrisi iki farklı vektör uzaya daha sahiptir. homojen sisteminin çözüm olasılıkları kümesi, boyutundaki matrisi için ’nın sağ sıfır uzayını oluşturmaktadır:

. (2.7)

matrisinin vektör uzay kümeleri aşağıdaki eşitlikte gösterilen ’nın sol sıfır uzayı ile tamamlanır [23].

. (2.8)



Şekil 2.4 boyutlu matrisinin dört alt uzayı [22]

2.3 Ortogonallik ve EKK

Fazla tanımlı ($n > u$) doğrusal sistemlerin çözümünde kullanılan yöntemleri geometrik açıdan anlamak için vektör uzaylar, vektörlerin ortogonalliği ve izdüşümleri kavramları ele alınması gerekmektedir. Koch tarafından [14] te geometrik yaklaşım gösterilmektedir.

2.3.1 İç Çarpımlar, Normlar ve Bir Vektör Uzayın Metriği

Tanım 2.2 u ve v gibi iki vektörün iç çarpımı, nokta çarpımı veya skaler çarpımı aşağıdaki eşitlikteki gibi açıklanmaktadır [25]:

$$u^T v = u \cdot v = [u_1 u_2 \cdots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \tag{2.9}$$

Yukarıdaki eşitlikte R^n uzayındaki iki vektör arasındaki açının (θ) hesabı için aşağıdaki eşitlik kullanılmaktadır [23]:

$$cos\theta = \frac{u^T \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}. \tag{2.10}$$

Eğer R^n uzayındaki herhangi iki vektörün iç çarpımı sıfıra eşit ise bu iki vektör ortogonaldir (diktir). Bir vektör, iç çarpım veya skaler çarpımda kullanıldığında bu vektör; çarpım sonucunun iç çarpım uzayıdır. (2.10) eşitliğinde bulunan $\|\cdot\|$ matematiksel sembol norm operatörünü temsil etmektedir. Norm operatörü Vanicek ve Krakiwsky tarafından [26] da bir vektör uzayının iki elemanı a, b arasındaki uzaklığın $\rho(a, b)$ ölçülmesinde kullanılmıştır. Herhangi vektör uzayda mesafe veya ölçüyü hesaplamak için birçok farklı formül kullanılabilir. Bir u vektörü için en yaygın norm (uzunluk) hesaplama yöntemi olan öklidyen norm veya 2-norm aşağıda bulunan (2.11) eşitliğindeki gibi tanımlanmıştır [23]:

$$\|u\| = \sqrt{u^T \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}. \tag{2.11}$$

Normların farklı tipleri ve genel özellikleri Meyer tarafından [24] de gösterilmektedir.

2.3.1.1 Ortogonal Tümleyenler

Eğer bir u vektörü R^n'nin bir alt uzayı olan W'deki her vektöre ortogonal ise, u vektörü W alt uzayına ortogonaldir. W alt uzayına ortogonal olan u vektör kümesi W'nin ortogonal tümleyeni olarak adlandırılmakta ve $W^{\perp}$ ile simgelenmektedir [22]. Bu düşünceyle; bir A matrisinin $N(A)$ sıfır uzayı, A'nın satır uzayının ortogonal tümleyenidir. Aynı şekilde; A^T matrisinin sıfır uzayı A'nın sütun uzayının ortogonal tümleyenidir [23]. Formül olarak sırasıyla şöyle verilir:

$$(Row\ A)^{\perp} = Nul\ A, \tag{2.12}$$

$$(Col\ A)^{\perp} = Nul\ A^T. \tag{2.13}$$

Bir A matrisine ait dört alt uzayın ortogonalliği Şekil 2.4'te gösterilmektedir.

2.3.1.2 Ortogonal İzdüşümler

R^n uzayında bir y vektörünün iki vektörün toplamlarına ayrıştırılması;

$$y = \hat{y} + z \tag{2.14}$$

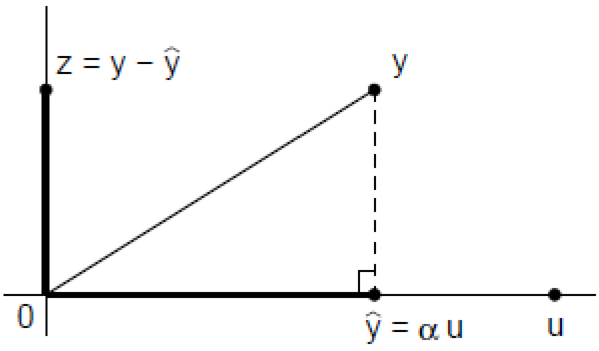
eşitliği göz önüne alındığında. Şekil 2.5'te $\hat{y}$ vektörü, sıfırdan farklı u vektörünün α katıdır. z ise u'ya ortogonal bir vektördür. Şekil 2.5'te R^2 düzleminde y'nin sıfırdan farklı u ve z vektörleri üzerine ortogonal izdüşümü ile vektörel bir ayrıştırma işlemi gerçekleşir. $\hat{y}$ vektörü Lay tarafından [27] de aşağıdaki eşitlikteki gibi elde edilmektedir:

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u. \tag{2.15}$$

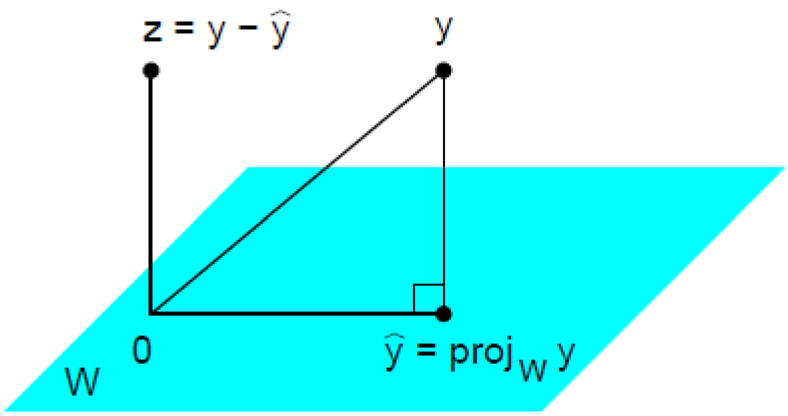
Burada $\hat{y}$ vektörü y'nin u üzerine ortogonal izdüşümüdür. Ayrıca z vektörü de:

$$z = y - \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u. \tag{2.16}$$

eşitliği ile elde edilmektedir. Burada z vektörü y'nin bileşeni olan u'ya ortogonaldir [23].



Şekil 2.5 Ortogonal bileşenlere ayrıştırma (R^2 boyutunda) [23]



Şekil 2.6 Ortogonal bileşenlere ayrıştırma (R^n boyutunda) [23]

2.3.1.3 Ortogonal Ayrıştırma Teoremi

Ortogonal izdüşümler, R^n boyutunda ortogonal ayrıştırma teoremi olarak genelleştirilebilmektedir [27]. Ortogonal ayrıştırma teoremi Tanım 2.3'te açıklanmaktadır.

Tanım 2.3 Bir R^n uzayında W alt uzay olsun. Her y için R^n uzayında aşağıda gösterilen eşitlik yazılabilmektedir:

$$y = \hat{y} + z. \tag{2.17}$$

Burada $\hat{y}$ vektörü W uzayında, z ise $W^{\perp}$ (W uzayına dik olan düzlemi ifade etmektedir) uzayındadır. Bir $\{u_1, \cdots, u_p\}$ vektör kümesi W uzayının ortogonal düzlemi ise $\hat{y}$ vektörü;

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \cdots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p, \tag{2.18}$$

ve z vektörü;

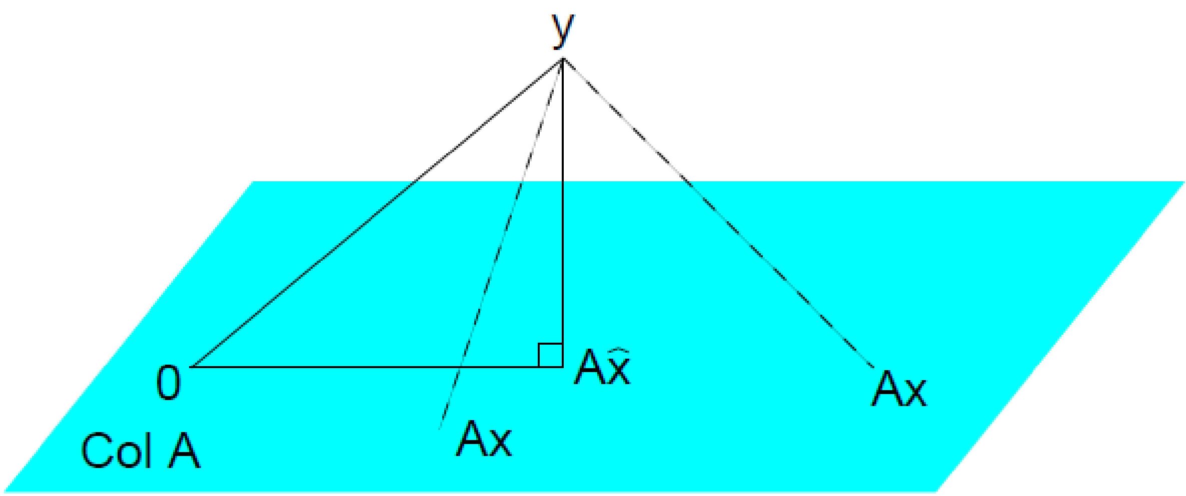
$$z = y - \hat{y} \tag{2.19}$$

eşitlikleri ile bulunur. W düzlemini oluşturan u vektörlerinin 1'den p'ye kadar her biri tek boyutlu bir alt uzayı temsil eder. (2.18) eşitliğinde 1'den p'ye kadar her bir işlem terimi y vektörünün tek boyutlu bir alt uzaya izdüşümüdür. Buradaki tek boyutlu alt uzay W uzay düzleminde u vektörlerinden her birini temsil etmektedir. Şekil 2.6'da görüldüğü gibi y vektörünün W uzayına ortogonal izdüşümü olan $\hat{y}$, y vektörünün birbirine ortogonal olan tek boyutlu alt uzaylar üzerine izdüşümlerinin toplamıdır [23].

2.3.2 EKK Prensibi

Fazla-tanımlı sistemler için $Ax = y$ doğrusal eşitliğinde y gözlem vektörü, A katsayılar matrisinin $R(A)$ sütun uzayının dışına doğru yayılmaktadır. Bu eşitlik $R(A)$ uzayında ve y vektörüne minumum uzunlukta bir vektör bulunarak çözümlenebilmektedir. Bu yaklaşım Meyer tarafından [24] te en yakın nokta teoremi olarak adlandırılmıştır. Yani; bir y vektörünün A katsayılar matrisinin $R(A)$ sütun uzayı üzerine ortogonal izdüşümü $\hat{y}$ vektörüdür. $\hat{y}$ vektörü $\|y - Ax\|$ uzunluğunu minumum yapan değeridir. Sonuç olarak, EKK problemi en küçük uzunluktaki vektörün $v = y - Ax$ (düzeltme vektörü) elde edilmesini sağlayan bir x bulmaktır. Şekil 2.7'de y'nin $col(A)$ üzerine izdüşümü $\hat{y}$ vektörüdür. Ayrıca $\hat{x}$ vektörü $Ax = y$ eşitliğinin EKK çözümünü ifade etmektedir. Böylelikle, $\hat{x}$ vektörü A katsayılar matrisinin sütunlarından oluşmuş bir düzleme göre $\hat{y}$ vektörünün koordinatlarını temsil eder [23].

$$A\hat{x} = \hat{y} \tag{2.20}$$



Şekil 2.7 En küçük kareler ilkesi

2.3.2.1 Normal Eşitliklere Dayalı En Küçük Kareler Çözümleri

Strang [22] de vektör uzaya dayalı en küçük kareler yaklaşımını göstermiştir. Bu yaklaşım ile aşağıda gösterilen normal eşitlikler elde edilir:

$$y - \hat{y} = y - A\hat{x}. \tag{2.21}$$

A'nın sütun uzayı (2.21) eşitliğine ortogonal olduğundan;

$$A^T(y - A\hat{x}) = 0$$

$$A^T y - A^T A\hat{x} = 0$$

$$A^T A\hat{x} = A^T y \tag{2.22}$$

elde edilir. Özellikle kötü koşullu sistemlerde A matrisindeki herhangi bir elemanda hata bulunması $A^T A$ matrisine hatanın karesi olarak yansır. Böylece, normal eşitliklerin çözümü yuvarlatma hataları ve basamak kayıplarına karşı oldukça duyarlı hale gelmektedir. Bu yüzden, normal eşitliklerin hesaplanmasında $A^T A$ eşitliğinden kaçınılması gerekir. Fazla-tanımlı doğrusal eşitliklerin EKK mantığında çözümünde matris ayrıştırma yöntemleri kullanılabilir. Örneğin; A katsayılar matrisinin QR-ayrıştırması veya tekil değer ayrıştırması [23].

2.4 Tekil Değer Ayrışımı

Doğrusal cebirde doğrusal sistemleri çarpanlara ayırmayı sağlayan matris ayrıştırma konusu önemli bir yaklaşımdır. Matrisler ayrıştırılarak özel niteliklere sahip matrisler elde edilebilir.

Lay [27] te tekil değer ayrışımının doğrusal cebir uygulamalarında kullanılan en kullanışlı matris ayrıştırması olduğundan bahsetmektedir.

Tanım 2.4 Rankı r olan her bir $A \in R^u$ için, ortogonal matrisler $U_{n\times n}$, $V_{svd_{u\times u}}$ve bir köşegen matris $S_{r\times r} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$ bulunmaktadır:

$$A = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times u} V_{svd}^T. \tag{2.23}$$

Burada $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$'dır. Bu σ_i değerleri A matrisinin sıfırdan farklı tekil değerleri (singular values) olarak adlandırılmaktadır. (2.23) eşitliğindeki çarpanlara ayırma; A matrisinin tekil değer ayrıştırması olarak adlandırılır. Aynı zamanda U ve V_{svd} matrislerindeki sütunlar, sırasıyla A'nın sol ve sağ tekil vektörleri olarak isimlendirilir. Eğer $r < p = min\{n, u\}$ ise A matrisi ek olarak $p - r$ tane daha sıfır tekil değere sahip olmaktadır [23].

Trefethen tarafından [25] te tekil değer ayrışımının matematiksel yaklaşım yerine geometrik yaklaşım kullanarak türetilmesi gösterilmektedir.

2.4.1.1 İndirgenmiş Tekil Değer Ayrışımı

Herhangi $n \times u$ boyutundaki A matrisinde R^u'dan R^n'e doğrusal dönüşüm gerçekleştirilebilir. Yani; A matrisi R^u'da S birim küresini R^n'de AS çoklu elipsi üzerine izdüşürür. R^n'deki çoklu elips R^n'deki bir birim kürenin gerilmesi ile elde edilebilmektedir. Bu işlem birim vektörler $u_1, \cdots, u_n \in R^n$ ile ifade edilen ortogonal doğrultulardaki $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ (bunlardan bazıları sıfır olabilir) değişkenler ile elde edilmektedir. $\sigma_i u_i$ çoklu elipsin başlıca yarı eksenleri olarak adlandırılır. Şekil 2.8'de sağ tarafta bulunan çarpanlar A'nın tekil değerlerini $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ belirtmektedir. Bu çarpanlar aynı zamanda AS çoklu elipsinin u adet yarı ekseninin uzunluğudur. AS çoklu elipsin yarı eksenlerindeki u birim vektörleri A'nın sol tekil vektörleri olarak tanımlanmıştır. Şekil 2.8'de sol tarafta u tane birim uzunluktaki v_i sağ tekil vektörleri gösterilmektedir. Bu vektörler AS uzayına ait önceki durumun yarı eksenlerine karşılık gelir. Matematiksel olarak A matrisinin v_i sağ tekil vektörler üzerinde etkisi $1 \leq j \leq u$ için aşağıdaki gibidir [23]:

$$Av_j = \sigma_j u_j. \tag{2.24}$$

Bu eşitlik matris notasyonu ile aşağıdaki gibi gösterilir;

$$AV_{svd} = \widehat{U}\hat{S}. \tag{2.25}$$

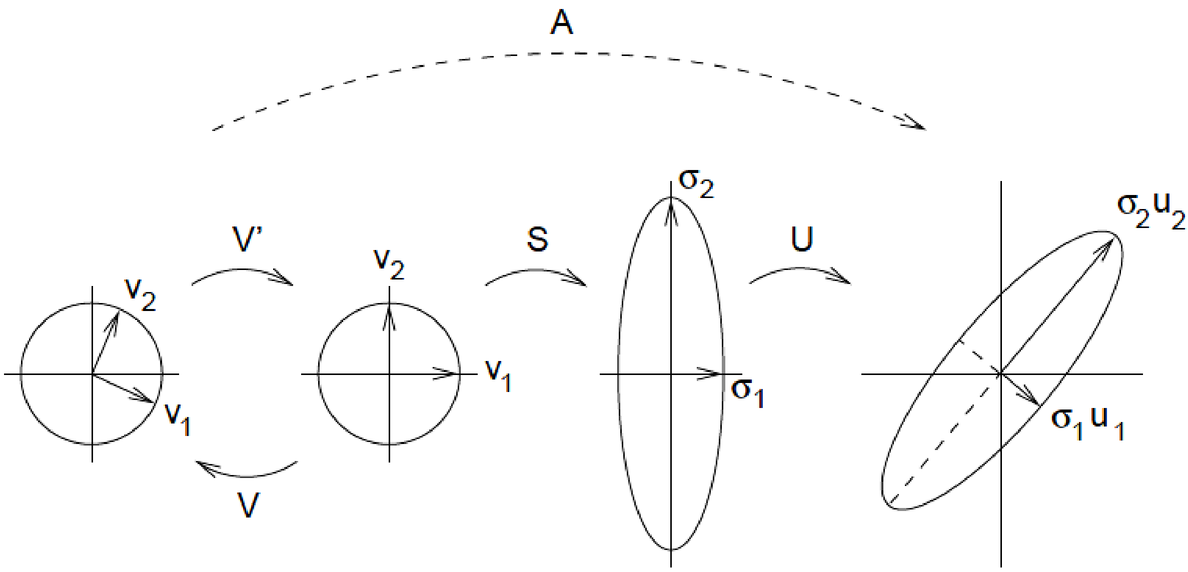
Burada $\hat{S}$ matrisi köşegenleri pozitif reel tekil değerler olan $u \times u$ boyutunda bir köşegen matristir. $\widehat{U}$ ise ortonormal sütunları olan $n \times u$ boyutunda bir matris. Birbirine dik (ortogonal) olan ve birim uzunluğa sahip vektörler ortonormal vektörler olarak adlandırılır. V_{svd} matrisi de ortonormal sütunlara sahip $u \times u$ boyutunda bir matristir. V_{svd} matrisi karesel ve ortonormal olduğundan tersi transpozesine eşit olmaktadır:

$$V_{svd}^{-1} = V_{svd}^{T}. \tag{2.26}$$

Yukarıdaki eşitlik (2.25) eşitliğinde yerine konulduğunda (2.27) eşitliği elde edilmektedir:

$$A = \widehat{U}\hat{S}V_{svd}^{T}. \tag{2.27}$$

Yukarıda gösterilen (2.27) eşitliğindeki çarpanlara ayırma işlemi A matrisinin indirgenmiş tekil değer ayrışımı olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca bu yöntem A'nın standart tam tekil değer ayrışımı için temel oluşturur [23].



Şekil 2.8 A matrisi ile doğrusal dönüşüm ve A'nın tekil değer ayrıştırması [23].

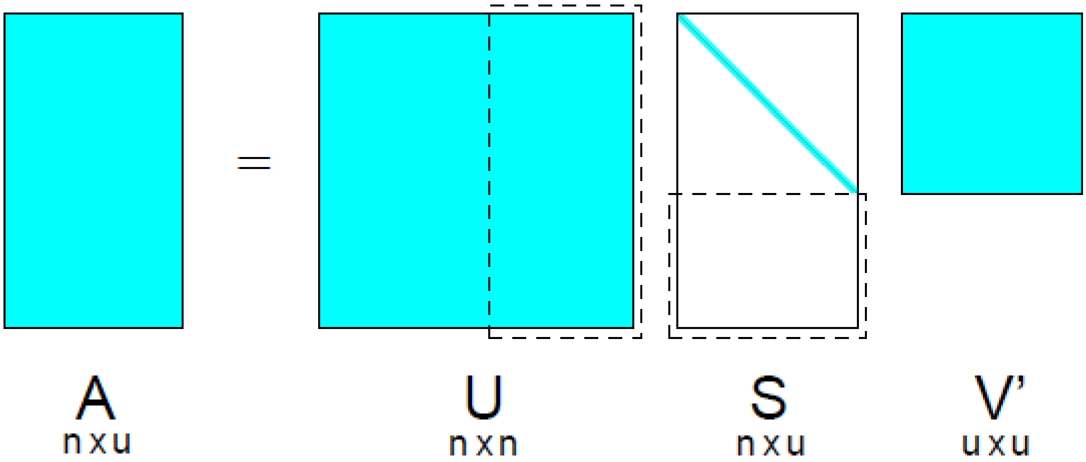
2.4.1.2 Tam Tekil Değer Ayrışımı

Fazla-tanımlı $(n > u)$ sistemler için, $\widehat{U}$ matrisinin sütunları R^n uzayında sadece u adet ortonormal vektör içermektedir. Bu da R^n uzayını tam kapsayan bir düzlem oluşturamaz. $\widehat{U}$ matrisini $n \times n$ boyutunda ortonormal bir U matrisine genişletmek için $n - u$ tane vektör eklenmelidir. Bu vektörler Gram-Schmidt yaklaşımı kullanılarak oluşturulabilir. Bu yöntemle U matrisinin sütunları R^n uzayını tam kapsayabilir [22].

(2.25) eşitliğinde gösterilen eşitliğe göre U matrisi boyutu arttığından $\hat{S}$ matrisi ile işleme girmesi boyut farkından dolayı mümkün değildir. (2.25) eşitliğinin sonucunun değişmeden kalması için genişlettiğimiz U matrisinin $n - u$ tane sütununu sıfır ile çarpmamız gerekmektedir. Bu nedenle $\hat{S}$ matrisine $n - u$ adet sıfır elemanlı satır vektörü eklenmelidir. Böyelece S matrisi $n \times u$ boyutuna ulaşır. V_{svd} matrisi aynı kalacağından, A'nın tam tekil değer ayrışımı aşağıda gösterilen (2.28) eşitliğindeki gibi olmaktadır [23]:

$$A = USV_{svd}^T. \tag{2.28}$$

Burada U matrisi A'nın sol tekil vektörlerini içeren $n \times n$ boyutunda bir ortonormal matris, S matrisi köşegenlerinde A'nın tekil değerlerini içeren $n \times u$ boyutunda bir matris, V_{svd} ise A'nın sağ tekil değerlerini içeren $u \times u$ boyutunda ortonormal bir matristir [23].



Şekil 2.9 $n \times u$ boyutundaki A matrisinin tekil değer ayrışımının grafiksel görüntülenmesi ($n > u$ için kesikli çizgiler indirgenmiş ve tam tekil değer ayrışımı arasındaki farkı göstermektedir).

2.4.1.3 Tekil Değer Ayrışımının Geometrik Açıklaması

Şekil 2.9'da A matrisinin ayrıştırılmasıyla elde edilen U, S ve V_{svd} matrisleri A matrisinin ortogonal ve ortonormal düzlemlere dönüşümünü temsil eder [22], [25]. Şekil 2.9'a göre şu tanımlamalar yapılabilir:

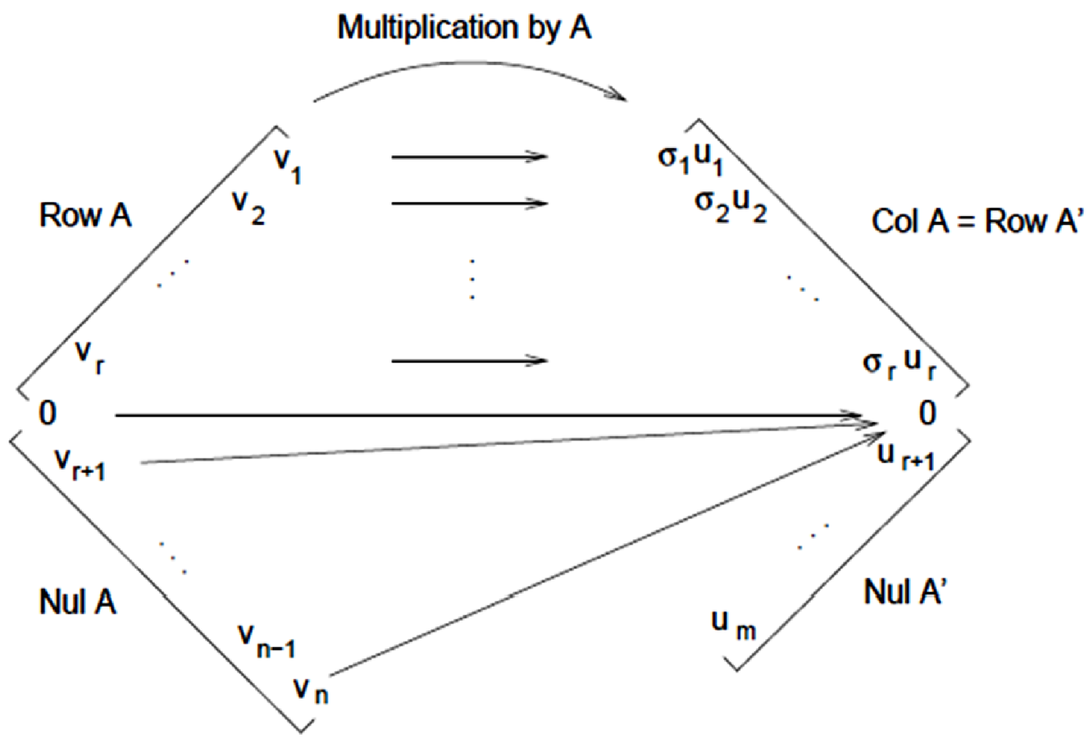
- V_{svd} birim kürenin biçimini değiştirmez ama R^u için yeni bir düzlem sunmakta (bu düzlem fonksiyonun tanım kümesidir),
- S birim küreden çoklu elipse iz düşmekte ve
- U çoklu (hiper) elipsin şeklini değiştirmeden döndürmektedir (görüntü kümesi uzayı olarak adlandırılmaktadır).

2.4.2 Tekil Değer Ayrışımı ve EKK Çözümleri

Bir matrisinin tam tekil değer ayrışımında dört temel alt uzay için yeni düzlemler belirlenir. Fazla-tanımlı doğrusal sistemlerde (ve rank için);

- ilk tane sol tekil vektörleri matrisinin sütun uzayı ( ) için bir ortonormal bir düzlem oluşturmakta ve,
- geriye kalan tane sol tekil vektörleri (’nin sıfır uzayı için ortonormal bir düzlem oluşturmaktadır.
- İlk tane sağ tekil vektörleri ’nın satır uzayı için bir ortonormal düzlem oluşturmakta ve,
- geriye kalan tane sağ tekil vektörler ’nın sıfır uzayı (için bir ortonormal düzlem vermektedir.

Dört düzlem arasındaki ilişki Şekil 2.10’da gösterilmektedir.



Şekil 2.10 Bir matrisin dört temel alt uzayı için A’nın tekil değer ayrışımı ile üretilen yeni düzlemler [23].

A’nın temel alt uzayları için yeni düzlemlerin bulunması A’nın köşegen formu S’ye dönüştürülmesi demektir. Böylece $Ax = y$ doğrusal sistemi düzlem değiştirme işlemleri kullanılarak standart düzlemden ortonormal düzleme dönüştürebilir. Doğrusal sistemin doğal forma dönüşmesi EKK problemlerin çözümünde önemli derecede kolaylık sağlayacaktır [28].

Düzlem değişimi; $y \in R^n$ vektörünün A’nın sol tekil vektörlerinin (U’nun sütunları) düzleminde yayılması ile ve $x \in R^u$ vektörünün A’nın sağ tekil vektörlerinin (V_{svd}’nin sütunları) düzleminde yayılması ile elde edilmektedir. Bu yayılmalar için vektörler;

$$\overline{y} = U^T y \tag{2.29}$$

$$\overline{x} = V_{svd}^T x \tag{2.30}$$

şeklindedir.

$A = USV_{svd}^T$ eşitliği kullanılarak, $Ax = y$ ilişkisi $\overline{y}$ ve $\overline{x}$ cinsinden şu şekilde ifade edilebilir [23];

$$y = Ax \Leftrightarrow U^T y = U^T Ax = U^T USV_{svd}^T x \Leftrightarrow \overline{y} = S\overline{x}. \tag{2.31}$$

2.4.2.1 Genel İnvers

$n \times u$ boyutundaki A matrisinin ($n > u$ ve $rank\ A = r$) sol tekil ve sağ tekil vektörleri aşağıdaki gibi düzenlendiğinde;

$U = [U_r\ U_{n-r}]$, ile $U_r = [u_1 \dots u_r]$ ve

$V_{svd} = \left[V_{svd_r}\ V_{svd_{u-r}}\right]$, ile $V_{svd_r} = [v_1 \dots v_r]$,

A matrisinin genel inversi veya Moore-Penrose inversi aşağıda gösterilen (2.32) eşitliği ile elde edilebilir:

$$A^+ = V_{svd_r} S_r^{-1} U_r^T = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} \cdot v_i \cdot u_i^T. \tag{2.32}$$

Bu eşitlik bir kare matrisin tam ranklı olması $(n = u = r)$ durumunda genel matris tersine (A^{-1}) eşit olmaktadır [22]. A’nın genel inversi A matrisinin tekil değer ayrışımından sonra tekil değerlerinin evirilmesiyle (tersine çevrilmesiyle) hesaplanabilmektedir. Geometrik olarak A^+(örneğin; R^n’den R^u’ya dönüşümü gibi) A’nın ters dönüşümünü göstermektedir [23].

2.4.2.2 Tekil Değer Ayrışımı ile EKK Çözümü

Yalancı ters kullanılarak, fazla-tanımlı doğrusal sistem, $Ax = y$, EKK mantığında aşağıdaki gibi çözülebilir:

$$\hat{x} = A^{+}y = V_{svd_r} S_r^{-1} U_r^T y. \tag{2.33}$$

Yukarıdaki eşitliği sol taraftan A matrisi ile çarparsak ve bu A matrisi yerine (2.28)'deki eşitliği koyarsak;

$$A\hat{x} = \left(U_r S_r {V_{svd_r}}^T\right)\left(V_{svd_r} S_r^{-1} U_r^T y\right)$$

$$A\hat{x} = U_r S_r S_r^{-1} U_r^T y$$

$$A\hat{x} = U_r U_r^T y \tag{2.34}$$

eşitliği elde edilir. Burada V_{svd_r} ortonormal olduğundan ${V_{svd_r}}^T V_{svd_r} = I_r$'dir.

$U_r U_r^T y$ eşitliği y vektörünün A'nın sütun uzayına ortogonal izdüşümü yani $\hat{y}$'dir. Burada $\hat{x}$ değeri $Ax = y$'nin EKK çözümüdür [27]. Genellikle, bir doğrusal sistemin çözümü için genel invers kullanılması ile en küçük norm (uzunluk) çözümü elde edilmektedir [24].

BÖLÜM 3

STANDART DENK UZAY YAKLAŞIMI

Standart denk uzay yaklaşımı, uyuşumsuz ölçü belirlenmesi ve yerelleştirilmesine ait (FDI) bir yöntemdir. Standart denk uzay yaklaşımında GLT kullanılmaktadır. Bu bölümde bu yaklaşıma altlık oluşturan bazı temel eşitlikler ve olasılık (likelihood) fonksiyonundan bahsedilmektedir.

3.1 Denk Eşitlikler

Herhangi n boyutlu m ölçü kümesi düşünelim;

$$m = AX + \varepsilon. \tag{3.1}$$

Burada $X \in R^u$ (u bilinmeyen sayısı olmak üzere u×1 boyutunda) bilinmeyen vektörüdür, A katsayılar matrisi (n×u) boyutunda, $m \in R^n$ (n ölçü sayısı olmak üzere n×1 boyutunda) ölçü vektörü, ε ise n×1 boyutlu sıfır beklenen değerli ve σ^2 varyanslı Gauss dağılımında normal dağılımlı hata vektörü ve Ξ kovaryans matrisi, σ bir ölçünün standart sapması ve I_n $n \times n$ boyutlu birim matristir. Eşik değer belirlemek için ε hata vektörü aşağıda gösterilen (3.2) eşitliğindeki normal dağılıma sahiptir;

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n). \tag{3.2}$$

Kovaryans matrisi ise aşağıdaki gibidir:

$$\Xi = \sigma^2 I_n. \tag{3.3}$$

Kaba hatanın da eklenmesiyle gözlem eşitliği aşağıdaki biçime sahip olmaktadır;

$$m = AX + b + \varepsilon. \tag{3.4}$$

Burada $b = (b_1, \dots, b_n)$ kaba hata vektörüdür.

Kaba hatalı ölçüleri belirlemek için m ölçü vektörünün fonksiyonu x bilinmeyenler vektöründen bağımsız olarak tanımlanmıştır:

$$VA = 0. \tag{3.5}$$

Denk eşitliklerin düzeltmeleri olarak tanımlanan p vektörü aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\rho = Vm. \tag{3.6}$$

Buna göre (3.1)'deki eşitliği (3.6)'da yerine koyar ve (3.5) eşitliği dikkate alınırsa;

$\rho = V(Ax + \varepsilon)$ yani;

$$\rho = V\varepsilon \tag{3.7}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik kaba hatanın bulunmadığı durum için geçerlidir.

Kaba hatanın bulunduğu durumda ise (3.4)'deki eşitliği (3.6)'da yerine koyulduğunda;

$\rho = V(Ax + \varepsilon + b)$ yani;

$$\rho = V(\varepsilon + b) = V\varepsilon + Vb \tag{3.8}$$

elde edilir.

Kaba hata tespiti ve yerelleştirilmesi p vektörünün kaba hata barındırdığı ve barındırmadığı durumlardaki karakter farkının tespitine bağlı olmaktadır [29].

3.2 V Matrisinin Belirlenmesi

V matrisinin belirlenmesinde kullanılan en popüler metot Potter algoritmasıdır. Bunun yanı sıra V matrisini belirlerken kullandığımız yöntemler aşağıda belirtilmiştir:

- Tekil değer ayrışımı (SVD)
- QR ayrışımı

Ortogonal ayrıştırma teoremi ve tekil değer ayrışımından 2. Bölümde bahsedilmiştir. Bu bölümde sadece Potter algoritmasından bahsedilecektir.

3.2.1 Potter Algoritması

Potter algoritması ortogonal denk uzay (orthogonal parity space) kavramının geliştirilmesi ile ortaya çıkmaktadır. Dikey denk uzay kavramı;

$$K = (A^T A)^{-1} A^T \tag{3.9}$$

olmak üzere (3.7)'de gösterilen V matrisi üst veya alt üçgensel matris olup pozitif köşegen elemanlara sahiptir. Aynı zamanda;

$$V^T V = I - AK = W \tag{3.10}$$

eşitliğinden aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır [3]:

$$VV^T = KA = I, \tag{3.11}$$

$$VA = KV^T = 0. \tag{3.12}$$

Yukarıda gösterilen W matrisi;

$$W = I - A(A^T A)^{-1} A^T = I - H = R \tag{3.13}$$

redündans matristir.

Potter algoritmasında W matrisinden V matrisine ulaşmak için karekök formülleri kullanılmaktadır:

$$V_{11}^2 = W_{11}, \tag{3.14}$$

$j < i$ için;

$$V_{ij} = 0, \tag{3.15}$$

$j = 2, \cdots, n$ için;

$$V_{1j} = W_{1j}/V_{11}, \tag{3.16}$$

$i = 2, \cdots, n - u$ için;

$$V_{ii}^2 = W_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} V_{ki}^2, \tag{3.17}$$

$i = 2, \cdots, n - u$ ve $j = 2, \cdots, n$ için;

$$V_{ij} = (W_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} V_{ki} V_{kj})/V_{ii} \tag{3.18}$$

V matrisinin elde edilmesi için basit bir tek değişkenli durumu ele alalım:

$A^T = [1\ 1\ 1]$ katsayılar matrisi veriliyor.

$$K = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{3}[1\ 1\ 1] \tag{3.19}$$

$$AK = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

hesaplanabilir. Daha sonra;

$$W = I - AK = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

bulunur.

Potter algoritması uygulanırsa;

$V_{11} = \sqrt{W_{11}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, V_{12} = \frac{W_{12}}{V_{11}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}, V_{13} = \frac{W_{13}}{V_{11}} = \frac{-1}{\sqrt{6}},$

$V_{21} = 0, V_{22} = \sqrt{W_{22} - V_{12}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, V_{23} = \frac{W_{23} - V_{12}V_{13}}{V_{22}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere

$V = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ elde edilir.

Ayrıca matris ayrıştırma yöntemlerinden olan tekil değer ayrışımı ve QR ayrışımı kullanılarak V matrisi elde edilmektedir. Redündans matrisi (W) simetrik olduğundan QR ayrıştırması ile ayrıştırıldığında elde edilen R ve Q matrisi birbirinin transpozesi olup bu matrislere ait satır veya sütun matristen atılacağı için hangi matrisin kullanılacağı fark etmez. Diğer taraftan redündans matrisi tekil değer ayrıştırması ile ayrıştırılırsa elde edilen U ve V_{svd} matrisleri aynıdır ve birisi kullanılır. Potter'in önerdiği matrise ulaşmak için U veya Q matrisinin transpozesini alıp eksi ile çarptıktan sonra bilinmeyen sayısı kadar sütunun silinmesi işlemleri yapılır.

Katsayılar matrisinin QR ayrıştırmasında Q matrisi, tekil değer ayrıştırmasında ise U matrisi kullanılır. Bu iki matris aynıdır. Nivelman ağı uygulamasında eğer tüm iz yöntemi kullanılacaksa u. sütundan n. sütuna kadar matris alınır veya zorlamasız klasik dengeleme yapılacaksa $u+1$. sütundan n. sütuna kadar matris alınarak hesaplamalara devam edilir. Katsayılar matrisinin ayrıştırılması ile elde edilen bu matrisler W matrisinin ayrıştırılması ile elde edilen denk uzay matrislerinden farklıdır.

3.3 Genelleştirilmiş Olasılık Testi

Genelleştirilmiş olasılık testi uyuşumsuz ölçünün bulunmasında ve yerelleştirilmesinde yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir [6].

Olasılık fonksiyonu (3.7)'de gösterilen kaba hatanın bulunmadığı eşitlik için aşağıdaki gibi bulunmaktadır;

$$L(\rho, 0) = a \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \rho^T \Xi^{-1} \rho\right), \tag{3.22}$$

burada;

$$\Xi = \sigma^2 V^T V, \tag{3.23}$$

$$a = (2\pi)^{-(n-u)/2} |\Xi|^{-1/2}, \tag{3.24}$$

olarak belirlenmiştir.

Olasılık fonksiyonu (3.8)'de gösterilen kaba hatanın bulunduğu eşitlik için ise aşağıdaki gibidir;

$$L(\rho, b) = a \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} (\rho - V^T b)^T \Xi^{-1} (\rho - V^T b)\right). \tag{3.25}$$

3.3.1 Kaba Hata Belirleme Karar Fonksiyonunun Olasılık Fonksiyonu ile Hesaplanması

Denk eşitlik düzeltmeleri olan ρ vektörü belirlendikten sonra, iki hipotez tespit edilmektedir. Bunlardan H_0 normal durum (H_0 hipotezi), H_1 (alternatif hipotez) ise kaba hatanın bulunduğu model olarak kabul edilmektedir. Kaba hatanın büyüklüğü ve işareti bilinmiyor kabul edilmektedir. Ölçümlerdeki rastgele hatalar arasında korelasyonun olmadığı farz edilerek, sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki gibi verilmektedir [6];

$$H_0: E(\rho) = 0 \quad E(\rho\rho') = V^T V \sigma^2, \tag{3.26}$$

$$H_1: E(\rho) = V^T b \neq 0 \quad E[(\rho - V^T b)(\rho - V^T b)^T] = V^T V \sigma^2. \tag{3.27}$$

Daha açık olarak bu iki hipotez şöyle de verilebilir;

$$H_0: b = 0$$
$$H_1: b \neq 0 \tag{3.28}$$

(3.21) eşitliğinde alternatif hipotez için μ beklenen değer eşitliğe konulduğunda;

$$H_1: E(\rho) = \mu \qquad E[(\rho - \mu)(\rho - \mu)^T] = V^T V \sigma^2 \tag{3.29}$$

oluşmaktadır. Burada μ değeri eksi veya artı değerler alabilir. Bu iki hipotez için logaritmik olasılık oranı aşağıdaki gibidir;

$$\lambda = \max_b \frac{L(\rho,b)}{L(\rho,0)} = \frac{\max_b L(\rho,b)}{L(\rho,0)} \tag{3.30}$$

$$\lambda = {}^1/_2 \, [\rho^T \Xi^{-1} \rho - (\rho - \mu)^T \Xi^{-1} (\rho - \mu)] \tag{3.31}$$

Burada μ değerinin olasılık kestirimi olan $\hat{\mu}$ aşağıdaki eşitliği maksimuma çıkarmaktadır:

$$[{}^{-1}/_2 \, (\rho - \mu)^T \Xi^{-1} (\rho - \mu)] \tag{3.32}$$

Yani,

$$\hat{\mu} = \rho \tag{3.33}$$

eşitliği (3.25)'te yerine konularak kaba hata belirleme karar fonksiyonu elde edilmiştir:

$$DF_D = 2 \ln \lambda = \rho^T \Xi^{-1} \rho. \tag{3.34}$$

3.3.2 Kaba Hata Yerelleştirme Karar Fonksiyonunun Olasılık Fonksiyonu ile Hesaplanması

Kaba hata belirleme karar fonksiyonunun bulunmasının ardından kaba hata ayrıştırma karar fonksiyonu belirlenmelidir. Daha önce bulunmuş olan denk eşitlik düzeltmelerinin, yani; ρ vektöründen n tane hipotez, test edilmek için oluşturulabilir. H_j: kaba hatanın j. ölçüde meydana gelmesi demektir $j = 1,2, \dots, n$'dir. Bu H_j hipotezi ölçü hataları arasında korelasyonun olmadığı tek boyutlu durumlarda şu biçimdedir [6]:

$$H_j: E[\rho] = v_j b, \qquad E[\rho\rho^T] = V^T V \sigma^2. \tag{3.35}$$

Burada v_j, V matrisinin j. sütunudur. ρ Gauss dağılımlı rastgele hataları içeren düzeltme vektörü olduğundan, buna bağlı olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\Delta_j = Kexp\left\{\frac{-1}{2}\left(\rho - v_j b\right)^T \Xi^{-1}\left(\rho - v_j b\right)\right\}. \tag{3.36}$$

Burada K sabit bir değerdir. Hata değeri b negatif veya pozitif değerler olabilir. b değerinin maksimum olasılık kestirimi $\hat{b}$:

$$\hat{b} = \frac{\rho^T \Xi^{-1} v_j}{v_j^T \Xi^{-1} v_j} \tag{3.37}$$

şeklinde olup logaritmik olasılık fonksiyonunda yerine konulursa ve sonuç basitleştirilirse, kaba hata yerelleştirme karar fonksiyonu j. hipoteze bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir;

$$DF_{I_j} = \frac{\left(\rho^T \Xi^{-1} \bar{v}_{\mathrm{j}}\right)^2}{\bar{v}_j^T \Xi^{-1} \bar{v}_{\mathrm{j}}} \tag{3.38}$$

Burada ($j = 1, \dots, n$ olmak üzere) n tane ölçü içinden hesaplanan değerler arasından bir kaba hatadan etkilenmiş değeri saptanmaktadır.

3.4 Standart Denk Uzay Yaklaşımında Global Uyuşumluluk Testi

Standart denk uzay yaklaşımında ölçü kümesinde kaba hatanın olup olmadığını belirlemek için global test uygulanmaktadır. Bölüm 3.3.1'de nasıl bulunduğu gösterilen (3.29) eşitliğindeki kaba hata belirleme karar fonksiyonu için belirlenen sınır değer T_D, $\chi^2(n-u)$ dağılımlı, $n-u$ serbestlik derecesine sahip ve değişik α anlamlılık düzeyi değerleri (0.05, 0.01, 0.001) için hesaplanmaktadır. Ölçü kümesinde kaba hata olup olmadığı ise aşağıdaki iki durumda yapılan karşılaştırmayla belirlenmektedir [7]:

- Eğer $DF_D > T_D$ ise kaba hata bulunmaktadır,
- Eğer $DF_D \leq T_D$ ise kaba hata bulunmamaktadır.

Kaba hatanın var olduğu birinci durum meydana gelmişse yerelleştirme adımına geçilebilmektedir.

3.5 Standart Denk Uzay Yaklaşımında Yerelleştirme

Ölçü kümesinde kaba hatanın bulunduğu durumda kaba hatanın yerelleştirilmesi için diğer bir deyişle yerinin (hangi ölçüde bulunduğunun) tespiti için yerelleştirme yapılmaktadır. (3.32)'de bulunan kaba hata yerelleştirme karar fonksiyonunda $\bar{v}_{\mathrm{j}}$

değerini bulmak için $\bar{V}^T = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n]$ matrisi ele alınmalıdır. Burada $\bar{v}$ vektörü V matrisinin j. sütun vektörüdür. Kaba hata ayrıştırma karar fonksiyonunun elde edilmesinden sonra kaba hatanın hangi ölçüde olup olmadığına şöyle karar verilir; eğer $DF_{I_k} = \max_j DF_{I_j}$ eşitliği n tane ölçü arasında en büyüğü ise, k. ölçü kaba hata içermektedir [7].

BÖLÜM 4

EN UYGUN DENK VEKTÖR YAKLAŞIMI

Kaba hatanın belirlenmesi ve yerelleştirme konusunda denk vektör testi yeni bir yaklaşım olarak önerilebilir. İlk olarak kaba hata kestirimi için yeni bir performans kriteri önerilmiş ve bu kriter matris hesaplamalarının kullanılmasıyla elde edilmiştir. Hesaplanan kriter sayesinde, denk eşitlik tespit etmek istediğimiz kaba hata barındıran ölçüye daha duyarlı iken, diğer ölçü hatalarına ve normal dağılımlı hatalara karşı daha duyarsızdır [7].

Bu bölümde en uygun denk vektör yaklaşımının matematiksel modelinden, optimizasyon kriterlerinden, en uygun denk vektörün nasıl belirlendiğinden söz edilecektir.

4.1 Matematiksel Model

Standart denk uzay yaklaşımında kullanılan (3.1) eşitliğindeki modele göre daha genel bir model aşağıdaki eşitlikte verilmektedir:

$$m = AX + Db + E\varepsilon. \tag{4.1}$$

Burada b ve ε (3.1) ve (3.4) eşitliklerindeki ifadeler ile aynı anlama gelmekte, D ve E sırasıyla kaba hata etki matrisi ve normal dağılımlı hata etki matrisi olup birim matrislerdir. Denk eşitlik ise;

$$\rho = v_0^T m = v_0^T Db + v_0^T E\varepsilon \tag{4.2}$$

şeklindedir. Burada v_0 kaba hataya duyarlı olan ve önerilen en uygun denk vektördür. En uygun denk vektörün belirlenmesi ve optimizasyon kriterlerinden bahsedilecektir. Genelleştirme göz önünde bulundurularak v_0 vektörünün $i.$ ölçüye ait kaba hataya duyarlı, diğer ölçü hatalarına duyarsız olduğu düşünülmektedir [7]. Kaba hatanın bulunmadığı durumda, yani; $b = 0$ durumunda;

$$\rho = v_0^T E\varepsilon \sim N(0, \sigma^2. \|v_0^T E\|^2) \tag{4.3}$$

düzeltme vektörü bulunmakta ve şu eşitlikle standartlaştırma işlemi yapılmaktadır:

$$\rho_0 \mathrel{\widehat{=}} \frac{\rho}{\sigma \|v_0^T E\|} \sim N(0,1). \tag{4.4}$$

Kaba hatanın meydana geldiği durumda, yani; $b \neq 0$ durumunda ise normal dağılım şu şekildedir;

$$\rho \sim N(v_0^T Db, \sigma^2 \cdot \|v_0^T E\|^2). \tag{4.5}$$

4.2 En Uygun Denk Vektör Yaklaşımında Uyuşumluluk Testi

v_0 vektörü $i.$ ölçüdeki kaba hatayı tespit etmek için belirlenmiş en uygun denk vektör olduğuna göre, kaba hatanın oluşup oluşmadığı aşağıdaki iki durumda yapılan kıyaslama ile tespit edilmektedir [7];

- Eğer $|\rho_0| \leq u{\alpha/_2}$ ise $i.$ ölçüde herhangi bir kaba hata oluşmamıştır,
- Eğer $|\rho_0| > u{\alpha/_2}$ ise $i.$ ölçüde kaba hata bulunmaktadır.

Burada $u{\alpha/_2}$ standart normal dağılımlı olarak belirlenmiş ve değişik α anlamlılık düzeyi değerleri için (0.05, 0.01, 0.001) hesaplanan bir eşik (sınır) değerdir.

4.3 Optimizasyon Kriteri

Bu bölümde optimizasyon kriterlerinden bahsedilmektedir. En uygun denk vektörün belirlenmesi sonraki bölümde ele alınacaktır.

Genelleştirme göz önünde bulundurularak sadece $i.$ ölçüdeki kaba hatanın bulunması durumu göz önüne alınmaktadır. Bu sebeple, $i.$ ölçüdeki kaba hataya en fazla duyarlılığa sahip, diğer ölçü hatalarına ise en az duyarlılığa sahip olması istenen bir v denk vektörü aramaya ihtiyacımız vardır. Aşağıda verilen ortogonallik koşulu ile;

$$v^T A = 0 \tag{4.6}$$

denk eşitlik, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\rho = v^T m = v^T D b + v^T E \varepsilon. \tag{4.7}$$

Burada ρ düzeltme vektörü X vektöründen bağımsız hale gelmektedir.

[29] da durum eşitliği ve [30] da gösterilen ölçü eşitliği göz önüne alınırsa, denk uzay modeline bağlı bir performans kriteri gösterilmiştir. Bu kriter iki karesel formun oranıdır. Ayrıca; en uygun denk vektörü araştırmak için (3.16)'daki koşul dikkate alınmamıştır [7]. Bu optimizasyon düşüncesi ışığında yeni bir performans kriteri verilmektedir. Bu performans kriteri iki karesel formun birbirine oranıdır. Bu oranda pay kısmı bulmak istediğimiz kaba hatalı ölçüye olan duyarlılığı, payda kısmı ise diğer ölçü hataları ve normal dağılımlı hata vektörü bileşenlerinin hepsine olan duyarlılığı göstermektedir. Böylelikle (3.16) eşitliğindeki koşul sağlanmaktadır [7]. Performans kriterine ait oran aşağıdaki gibi bulunmaktadır;

$$J_i(v) = \frac{\left(v^T D e_i\right)^2}{\left\|v^T E\right\|^2 + \sum_{j \neq i}\left(v^T D e_j\right)^2}. \tag{4.8}$$

Bu eşitlikten;

$$J_i(v) = \frac{\left(v^T D e_i\right)^2}{v^T\left(E E^T + \sum_{j \neq i} v^T D e_j e_j^T D^T\right) v} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu eşitlikte e_i, $n \times n$ boyutunda birim matrisin i. sütununu, $v^T D e_i$ ve $v^T D e_j$ ise ρ düzeltme değerlerinin sırasıyla i. ve j. ölçülerin hatalarına duyarlılıklarını göstermekte ve $\|v^T E\|$ ise düzeltme değerlerinin normal dağılımlı hatalarına olan duyarlılığını göstermektedir. Bu sebeple, performans kriteri şu şekilde tasarlanmaktadır;

$$\mathrm{Sup}_{\mathrm{v}}\ J_i(v) \tag{4.10}$$

$$v^T A = 0 \tag{4.11}$$

Böyle bir denk vektör en uygun denk vektör olarak adlandırılmaktadır [7]. Yani; (4.10) ve (4.11) eşitliklerindeki koşulların beraber sağlanması amaçlanıyor.

Ortogonallik şartını (3.5) eşitliğindeki gibi sağlayan V matrisinin bütün sütun vektörlerini içeren bir $S(V)$ denk uzay olsun. (4.6)'daki koşulu sağlaması şartıyla, v denk vektörü şu şekilde yazılabilir;

$$v = Vc. \tag{4.12}$$

Bu eşitlikte c vektörü $n-u$ boyutunda sıfırdan farklı bir vektördür. (4.9) eşitliğinde payda kısmı, (4.13) eşitliği dikkate alarak,

$$\sum_{j\neq i} De_j e_j^T D^T = DD^T - De_i e_i^T D^T \tag{4.13}$$

düzenlendiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$\mathrm{Sup}_{\mathrm{v}} J_i(v) = \mathrm{Sup}_{\mathrm{v}} \frac{\left(v^T De_i\right)^2}{v^T\left(EE^T + DD^T - De_i e_i^T D^T\right)v}. \tag{4.14}$$

Ayrıca (4.12) eşitliği (4.9) eşitliğinde yerine konulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$\mathrm{Sup}_{\mathrm{v}} J_i(v) = \mathrm{Sup}_{\mathrm{c}\neq 0} \frac{\left(c^T v^T De_i\right)^2}{c^T \cdot V^T\left(EE^T + DD^T - De_i e_i^T D^T\right)V \cdot c}. \tag{4.15}$$

Burada;

$$u^* = V^T De_i \tag{4.16}$$

eşitliği $n-u$ boyutlu bir vektör,

$$B = V^T(EE^T + DD^T - De_i e_i^T D^T)V \tag{4.17}$$

eşitliği ise $(n-u)\times(n-u)$ boyutunda simetrik matristir.

(4.16) ve (4.17) eşitlikleri (4.15) eşitliğinde yerine konulursa aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$\mathrm{Sup}_{\mathrm{v}} J_i(v) = \mathrm{Sup}_{\mathrm{c}\neq 0} \frac{({u^*}^T c)^2}{c^T Bc}. \tag{4.18}$$

En uygun vektörün geometrik anlamı basitçe şu şekilde açıklanabilmektedir. İlk olarak, en uygun denk vektör, R^n uzayının alt uzayı olan denk uzaya $S(V)$ ait olan (4.18)'deki performans kriterinin maksimuma çıkarılması ile elde edilmiştir. İkinci olarak, $v^T De_i$ ve $v^T De_j$ değerleri v'nin sırasıyla De_i ve De_j ile beraber iç çarpımlarıdır. (4.10) eşitliğini maksimuma çıkarmak için, v vektörünü öyle bir düzenlemek zorundayız ki, v ile De_i

arasındaki açı olabildiğince küçük ve v ile $De_j (j \neq i)$ arasındaki açı olabildiğince büyük olsun [7].

4.4 En Uygun Denk Vektörün Belirlenmesi

Bu bölümde i. ölçü hatasına karşı en fazla duyarlılığa sahip ve diğer ölçü hatalarına karşı en az duyarlılığa sahip i. en uygun denk vektörün çözümü anlatılmaktadır. (4.12) eşitliğindeki c koordinat vektörünü bulmak için (4.18) bulgusu en büyük değerine ulaştırılır ve buna ilişkin bazı sonuçlar gösterilmektedir [7].

Teorem 4.1 Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

$x, y \in R^n$ olsun,

$$(x^T y)^2 \leq (x^T x)(y^T y) \qquad (4.19)$$

(4.19) eşitliğini kullanarak bir sonuç elde edilmektedir:

Eğer bir A matrisi pozitif tanımlı, ve $x, y \in R^n$ ise şu eşitlik elde edilmektedir [7]:

$$(x^T A y)^2 \leq (x^T A x)(y^T A y). \qquad (4.20)$$

Burada A matrisi pozitif tanımlı olduğundan;

$$A = B^T B \qquad (4.21)$$

yazılabilir. Tekil olmayan bir B matrisi bulunmaktadır. (4.19) eşitliğini ve

$$u^* = Bx, \qquad (4.21)$$

$$v = By \qquad (4.22)$$

eşitliklerini kullanarak (4.20) eşitliği elde edilmektedir [7].

Teorem 4.2 A matrisi pozitif tanımlı simetrik bir matris ve $x, u^* \in R^n$ olsun.

$$\mathrm{Sup}_{x \in R^n} \frac{({u^*}^T x)^2}{x^T A x} = {u^*}^T A^{-1} u^* \qquad (4.23)$$

Bu eşitliğin en büyük değeri, x^* aşağıdaki

$$x^* = k \cdot A^{-1} u^* \qquad (4.24)$$

değeri aldığı zaman elde edilmektedir. Burada k herhangi sıfır olmayan bir sayıdır. Eğer;

$$y = A^{-1}u^* \tag{4.25}$$

alındığında ve (4.20) eşitliğinde yerine konulursa (4.23) eşitliği elde edilmektedir.

(4.18) eşitliğindeki simetrik B matrisinin pozitif tanımlı olduğu varsayıldığında Teorem 4.2 ve (4.18) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir [7]:

$$\mathrm{Sup_v} J_i(v) = \mathrm{Sup}_{\mathrm{c}\neq 0} \frac{({u^*}^T c)^2}{c^T B c} = {u^*}^T B^{-1} u^*. \tag{4.26}$$

Bu eşitlik aşağıdaki eşitliğin oluşması durumunda elde edilebilmektedir:

$$c^* = k \cdot B^{-1} u^*. \tag{4.27}$$

Burada k sıfırdan farklı herhangi bir sayı iken, (4.27) eşitliğini (4.12) eşitliğinde yerine yazdığımızda (4.28) eşitliğinde gösterilen i. ölçüye en fazla duyarlılığa sahip en uygun denk vektör elde edilmektedir [7]:

$$v^* = Vc^* \tag{4.28}$$

Buna ilaveten, en uygun denk vektör kullanılarak hata tespiti ve ayrıştırılması sırasında, skaler düzeltmelerin standartlaştırılmaya ihtiyacı vardır. Denk vektörün büyüklüğü hata tespitini etkilememektedir [7]. Genelleştirme göz önünde bulundurularak, standartlaştırılmış en uygun denk vektör aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$v_0 = v^*/\|v^*\|. \tag{4.29}$$

Buradan elde edilen v_0 değeri i.ölçüde kaba hatanın bulunup bulunmadığının tespit edilmesinde kullanılmaktadır. Bu yöntem ile n tane standartlaştırılmış en uygun denk vektör v_i $(i = 1, \dots, n)$ elde edilmektedir [7].

4.5 En Uygun Denk Vektör Yaklaşımıyla Kaba Hata Tespiti

Bölüm 4.3 ve 4.4'de kullanılan yöntemler ile n ölçüye duyarlı n tane standartlaştırılmış en uygun denk vektör elde edilmektedir. Bu aşamadan sonra (4.2) eşitliğinden n adet düzeltme vektörü,

$$\rho_i = v_i^T m, \ i = 1, \dots, n \tag{4.30}$$

türetilmektedir. Genelleştirme göz önünde bulundurularak n tane düzeltme vektör değerleri (4.4) eşitliğindeki gibi standartlaştırılmaktadır. n tane standartlaştırılmış düzeltmeler arasından en büyük değer;

$$|\rho_k| = \max_i |\rho_i| \tag{4.31}$$

eşitliği ile belirlenmektedir [7].

Sınır değerin kaba hata tespitinde $T = u\alpha_{/2}$ seçildiği Bölüm 4.2'de gösterilmiştir. En büyük değere sahip olan k. ölçüde kaba hatanın bulunup bulunmadığına karar verme şu şekilde yapılmaktadır; eğer $\rho_k > T$ ise k. ölçüde kaba hata bulunmaktadır, eğer $\rho_k \leq T$ ise k. ölçüde herhangi bir kaba hata bulunmamaktadır.

BÖLÜM 5

JEODEZİK AĞLARDA GÜVENİLİRLİK ANALİZİ

5.1 Dengelemenin Matematiksel Modeli

İstatiksel anlamda ölçülen büyüklükler rastgele değişkenlerdir (kenarlar, doğrultular vb.). Parametre kestirimine ilişkin doğrusal modeller, ölçülerle bilinmeyen parametreleri (koordinatlar, yükseklik farkları) arasında yazılan doğrusal fonksiyonlar ya da denklemler biçiminde tanımlanır. Ölçülerin bilinmeyen parametrelere doğrusal bağımlılığı genel olarak fiziksel, matematiksel ya da geometrik ilişkilere göre doğrusallaştırma işlemi ile sağlanır [14]. Örneğin nivelman ağlarında yükseklik farkı ölçülerinin beklenen değerleri, kestirilmesi istenen nokta yüksekliklerinin doğrudan doğrusal fonksiyonlarıdır. Eğer, ölçüler ile bilinmeyenler arasında doğrusal olmayan fonksiyonlar varsa Taylor açınımı yardımıyla doğrusallaştırma işlemi yapılmaktadır [15].

Dengelemenin doğrusallaştırılmış fonksiyonel modeli olarak düzeltme denklemleri ve stokastik modeli şöyle verilir;

$$v = Ax - l, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{C_{ll}} = \sigma_0^2 \mathrm{Q_{ll}} = \sigma_0^2 \mathrm{P}^{-1}. \tag{5.2}$$

Fonksiyonel ve stokastik modellere birleşik olarak Gauss-Markoff modeli denmektedir. Düzeltme denklemleri dengelemenin fonksiyonel modelini, ölçülerin kovaryans matrisi ya da bundan dönüştürülen ağırlık matrisi de stokastik (rastgele) modelini oluşturmaktadır. Fonksiyonel model ve stokastik modele dengelemenin matematiksel modeli adı da verilmektedir [15].

(5.1) ve (5.2) eşitliklerinde l küçültülmüş ölçü vektörü, A katsayılar matrisi, x bilinmeyenler vektörü ve v ölçülere getirilecek düzeltmeler vektörü, σ^2 birim ağırlıklı ölçünün önsel (a priori) varyansı, C_{ll} ölçülerin kovaryans matrisi, P köşegen ağırlık matrisi.

EKK yöntemi $v^T Pv = minimum$ ilkesinin sağlanmasına dayanır. Normal denklemler şöyle verilir:

$$A^T PAx - A^T Pl = 0. \tag{5.3}$$

Bilinmeyenler vektörü $det(A^T PA) \neq 0$ kabul ediliğinde;

$$x = Q_{xx} A^T Pl \tag{5.4}$$

ile bulunur. Bilinmeyenlerin ağırlık katsayıları matrisi;

$$Q_{xx} = (A^T PA)^{-1} \tag{5.5}$$

olmaktadır. Düzeltmelerin ağırlık katsayıları matrisi:

$$Q_{vv} = P^{-1} - (AQ_{xx} A^T), \tag{5.6}$$

s_0 birim ağırlıklı ölçünün standart sapması:

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^T Pv}{f}}. \tag{5.7}$$

elde edilmektedir. Burada f $(n - u)$ serbestlik derecesini ifade etmektedir [14].

5.1.1 Matematiksel Modelin Homojenleştirilmesi

Ağırlıkları farklı ölçülere ilişkin Gauss-Markoff modelinin eşit ağırlıklı basit bir modele dönüşmesi için homojenleştirme işlemi yapılmaktadır. Buna göre, pozitif tanımlı olan P ağırlık matrisi Cholesky çarpanlara ayırma yöntemi ile D üst üçgensel matris olmak üzere;

$$P = D^T D \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilmektedir. Korelasyonlu doğrusal model;

$$\tilde{l} + \tilde{v} = \tilde{A}x \tag{5.9}$$

olarak ele alındığında;

$$A = D\tilde{A} \tag{5.10}$$

$$l = D\tilde{l} \tag{5.11}$$

$$v = D\tilde{v} \tag{5.12}$$

dönüşüm eşitlikleri ile;

$$l + v = Ax, \tag{5.13}$$

$$C_{ll} = \sigma_0^2 E \tag{5.14}$$

yazılabilir. Burada E birim matristir, yani; $P = E$ olur. Ölçüler arasında korelasyon yoksa dönüşüm eşitliklerinde D matrisi;

$$D = diag(\sqrt{P_1}, \sqrt{P_2}, \dots, \sqrt{P_n}) \tag{5.15}$$

şeklindedir. Buna göre $\tilde{l} + \tilde{v} = \tilde{A}x$ düzeltme denklemlerinin $D\tilde{l} + D\tilde{v} = D\tilde{A}x \Rightarrow l + v = Ax$ denklemlerine dönüştürülmesi her bir denklemin ilgili ölçü ağırlığının karekökü ile çarpılması anlamına gelmektedir. Bu işleme homojenleştirme adı verilmektedir [14].

5.2 Serbest Ağ Dengelemesi

Düşey kontrol ağlarında (nivelman ağları) yükseklik farkları ölçülür. Ölçüler, ilgili nivelman ağın bir yükseklik sisteminde tanımı için hiçbir bilgi içermez. Bir nivelman ağının en az bir noktasının yüksekliği bilinmiyorsa, ağın düşey konumu belirsizdir. Düşey yönde isteğe bağlı olarak ötelenebilir. Böyle ağlara serbest ağlar adı verilir [15].

Bir jeodezik ağın bir koordinat sisteminde tanımlanabilmesi için gerekli bilgilere, örneğin; tek boyutlu yükseklik ağında düşey yönde ötelemeye, datum parametreleri veya dış parametreler adı verilmektedir. Büyüklüklerin seçimi isteğe bağlı olduğundan bunlara serbest datum parametreleri de denmektedir [15].

Ağ dengelemesinde yeni noktalar ve duyarlıkları (precision) dengelemede sabit değerler olan datum parametrelerinden etkilenmektedirler. Dayalı dengelemede hatasız olarak alınan noktalardan uzaklaştıkça nokta konum hataları artmaktadır. Yani konum hataları ve düzeltmeler datum seçimine göre değişmektedir [15].

Uyuşumsuz ölçülerin araştırılmasında, düzeltmelerin datumdan bağımsız olabilmesi için jeodezik ağlar serbest ağ dengelemesi ile çözülür [15]. Böylece ağda nokta konum hataları bakımından homojen bir yapı oluşturulur.

Serbest ağlarda tüm noktaların koordinatları bilinmeyenlerdir. Normal denklem katsayılar matrisi tekil ve determinantı sıfıra eşittir. Rank bozukluğu ya da defekt sayısı serbest datum parametrelerinin sayısına eşittir. Dengelemenin çözümünde kullanılan serbest ağ dengeleme türleri şu şekildedir; datumun defekt sayısı kadar sabit koordinat ile tanımlandığı zorlamasız klasik dengeleme, datum tanımına tüm noktaların katıldığı tüm iz minimum yöntemine göre dengeleme ve datum tanımına noktlardan bir bölümünün katıldığı kısmi iz minumum yöntemine göre dengeleme. Bu dengeleme türleri birbirine dönüştürülebilmektedir. Nokta konumları ve duyarlılıkları datum tanımına bağlı olarak değişmesine karşın ağ geometrisi (dengeli ölçüler), sonsal varyans (s_0^2), dengeli ölçülerin ve fonksiyonların standart sapmaları değişmez [15].

5.2.1 Zorlamasız Klasik Dengeleme

Zorlamasız klasik dengeleme, normal denklem katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olduğu bilinen dengeleme türüdür. Tüm noktalar bilinmeyen olduğuna göre düzeltme denklemlerinde A katsayılar matrisinden defekt sayısı kadar sütun silinerek, bir başka ifade ile defekt sayısı kadar koordinat bilinmeyeni sabit kabul edilerek normal denklem katsayılar matrisinin düzenli (determinantı sıfırdan farklı) olması sağlanır. Sabit kabul edilen noktalardan uzaklaşıldığında nokta konum hatalarının artması bu dengeleme türünün olumsuz yanını oluşturmaktadır [15].

5.2.2 Tüm İz Minimum Yöntemine Göre Dengeleme

Tüm iz minimum çözümünde, tüm noktalar için en uygun konumlandırma sağlanır. Tüm noktaların bilinmeyen olduğu bu çözümde, küçültülmüş koordinat bilinmeyenleri vektörü (x_g) normu ve normal denklem katsayılar matrisinin tersi olan bilinmeyenlerin ağırlık katsayılar matrisinin (Q_g) izi minimumdur [15].

Dengelemenin fonksiyonel modeli; $v = Ax - l$ düzeltme denklemleri ve $G^T x_g = 0$ koşul denklemlerinden oluşur. Bu sistemin çözümü ile bilinmeyenlerin ağırlık katsayılar matrisi, yani; $Q_g = N^+$, N matrisinin Moore-Penrose tersi ya da yalancı tersi (pseudoinverse);

$$Q_g = N^+ = (N + GG^T)^{-1} - G(G^T GG^T G)^{-1} G^T \tag{5.16}$$

şeklinde bulunmaktadır. Buradan x_g koordinat bilinmeyenleri;

$$x_g = Q_g n \tag{5.17}$$

eşitliği ile elde edilmektedir. Bu çözümde ağın datumu G matrisiyle tanımlanmakta ve tüm noktalar datum tanımına katılmaktadır. Nokta sayısı p ve defekt sayısı d iken, koordinat bilinmeyenlerinin sayısı bir boyutlu ağlarda u=p, iki boyutlu ağlarda u=2p ve üç boyutlu ağlarda u=3p'dir. Bunun yanı sıra G matrisinin boyutları u×d'dir [15]. Örneğin nivelman ağı (bir boyutlu ağlar) için G^T matrisi;

$$G^T = \frac{1}{\sqrt{p}}[1\ 1 \ldots 1] \tag{5.18}$$

eşitliği ile bulunmaktadır.

5.3 Uyuşumsuz Ölçü Testi

Kaba hatalı ölçülerin belirlenebilmesi için çeşitli test yöntemleri geliştirilmiştir. Yöntemlerin temeli, değişik varyans faktörleri kullanılarak düzeltmelerin standartlaştırılmasıdır. Farklılık ise kullanılan değişik varyans faktörlerinden çıkar. Bunlardan Baarda test yönteminde (data snooping) önsel (a priori) varyans σ_0^2 kullanılır.

Düzeltmenin, standart sapmasına oranı ile standartlaştırılmış düzeltme elde edilir:

$$\bar{v}_i = |v_i| / s_{v_i}. \tag{5.19}$$

Yukarıdaki eşitlik kullanılarak Baarda test büyüklüğü şu şekilde bulunur:

$$\bar{v}_{i,B} = \frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}} \sim N(0,1). \tag{5.20}$$

Yukarıda gösterilen Baarda test büyüklüğü standart normal dağılımlıdır [14].

Tüm ölçüler kuşkulu görülür ve $\bar{v}_{max} = \max(\bar{v}_i; i = 1, 2, \ldots, n)$ ilgili dağılımın güven sınırından büyükse;

$$\bar{v}_{max,B} > u_{1-\alpha_0/2} \tag{5.21}$$

ilgili ölçünün uyuşumsuz olduğuna karar verilir. Hata kaynakları belirlenebilirse ölçü yeniden ölçülür. Aksi halde ölçüler arasından çıkarılır. Kalan ölçüler ile dengeleme ve test işlemleri kaba hatalı ölçü çıkmayıncaya kadar sürdürülür. Yukarıdaki eşitlikte $u_{1-\alpha_0/2}$ normal dağılıma ilişkin güven sınırlarıdır [15].

BÖLÜM 6

SAYISAL UYGULAMA

Bu bölümde standart denk uzay yaklaşımı, en uygun denk vektör yaklaşımı ve Baarda (Data Snooping) yöntemi ile kaba hata analizinin doğrusal regresyona ve nivelman ağına uygulanmasına yönelik uygulama adımlarından bahsedilmiştir. Bu iki yaklaşımda temel olarak Potter algoritması kullanılmasının yanı sıra katsayılar matrisinin tekil değer ayrışımı ve QR ayrışımı da kullanılmıştır.

6.1 Ortalama Başarı Oranı (OBO)

Kaba hata analizinin tespiti için kullanılan yaklaşımlardan denk uzay yöntemlerinin istatistiksel davranışlarının belirlenmesi ve güvenilirliklerinin araştırılması gerekmektedir. Aynı zamanda bu yaklaşımların EKK yaklaşımına dayalı Baarda yöntemi (Data Snooping) ile karşılaştırılması amaçlanmaktadır. Bu nedenle güvenilirlik araştırması için ortalama başarı oranı (the mean success rate) kavramı önerilmiştir [21]. Ortalama başarı oranını elde etmek için simülasyon tekniği (Monte-Carlo method) kullanılmaktadır. Simülasyonda uygulanan deney sayısı m, elde edilen başarılı sonuçların sayısı k olduğunda aşağıdaki oran;

$$OBO = k/m \tag{6.1}$$

ortalama başarı oranıdır.

6.2 Ölçülerin Elde Edilmesi

Çizelge 6.1 Doğrusal regresyon uygulamasında karakteristik özellikler

	Doğrusal Regresyon Modeli
Ölçü sayısı (n)	10
Bilinmeyen sayısı (u)	2
Serbestlik derecesi (f)	8

Çizelge 6.2 Jeodezik nivelman ağı uygulamasında karakteristik özellikler

	Nivelman Ağı
Ölçü sayısı (n)	17
Bilinmeyen sayısı (u)	8
Serbestlik derecesi (f)	10

6.2.1 İyi Ölçü Kümelerinin Elde Edilmesi

Beklenen değeri μ $(\mu = 0)$ ve standart sapması σ olan normal dağılmış rastgele hataların (ε_i), hatasız ölçülere eklenmesi ile (6.2) eşitliğindeki gibi iyi ölçü kümesi (m_i) elde edilmektedir [32]:

$$m_i = m_0 + \varepsilon_i, \tag{6.2}$$

$$\varepsilon \sim N(\mu = 0, \sigma^2). \tag{6.3}$$

6.2.2 Kaba Hatalı Ölçülerin Elde Edilmesi

Kaba hatalı ölçünün elde edilmesi için, rastgele seçilen uyuşumlu ölçüden normal dağılmış rastgele hata çıkarılarak düzgün (uniform) dağılımdan elde edilen δm değeri, m_0 ölçülerin gerçek değerine eklenmektedir. Eş olasılığa sahip bir dağılım olan sürekli düzgün dağılım, tekdüze veya oluşturduğu histogramdan dolayı diktörtgensel dağılım olarak da adlandırılır. Kirletilmiş bir m_i ölçüsü şöyle verilir:

$$\overline{m}_i = m_0 + \delta m. \tag{6.4}$$

Ölçülere istenen sayıda kaba hatalı değer (δm) eklenerek kaba hatalı ölçü veya ölçüler elde edilebilir.

Kaba hatalar, rastgele kaba hatalar ve ortak etkilenmiş kaba hatalar olarak iki ana gruba ayrılırlar [33]. Gerçekleştirilmiş çalışmalar, rastgele kaba hatalara ait ortalama başarı oranlarının, etkilenmiş kaba hatalara ait olanlardan daha büyük çıktığını [34] te göstermektedir. Bu çalışmada sadece rastgele kaba hatalara ait ortalama başarı oranları incelenmiştir.

6.2.2.1 Rastgele Kaba Hatalar

Ölçülerdeki kaba hatalar gelişigüzel ortaya çıkıyorsa bunlara rastgele kaba hatalar denir. Kaba hataların işaretleri ve genlikleri değişebilir [36].

Tek bir kaba hata için kaba hata bölgesinin aralığı $int(\sigma)$olsun.

$$int(\sigma) = 3\sigma < \delta m_k < 6\sigma, \tag{6.5}$$

$0 < t_1 \leq 1$ ve $0 < t_2 \leq 1$ olmak üzere;

$$\delta m(k) = sign(t_1)\delta m_k, \tag{6.6}$$

yazılabilir. Burada;

$$sign(t_1) = \begin{Bmatrix} + \, , \; t_1 > 0.5 \\ - \, , \; t_1 \leq 0.5 \end{Bmatrix} \tag{6.7}$$

$$\delta m_k = 3\sigma + t_1\Delta, \tag{6.8}$$

$$k = n_1 t_2, \tag{6.9}$$

$$\Delta = 6\sigma - 3\sigma = 3\sigma, \tag{6.10}$$

olarak tanımlanır ve ayrıca t_1 ve t_2 düzgün dağılımlı ve 0 ile 1 arasındadır. Δ ise kaba hata genliğinin $int(\sigma)$ genişliğidir. Küçük genlikli kaba hatalar 3σ ile 6σ aralığında, büyük genlikler ise 6σ ile 12σ aralığında alınmıştır. Yukarıdaki eşitliklerde "sign" ifadesi işaret fonksiyonudur. Büyük genlikli kaba hatalar için eşitlikler ise aşağıda verilmektedir [20]:

$$\delta m_k = 6\sigma + t_1\Delta, \tag{6.11}$$

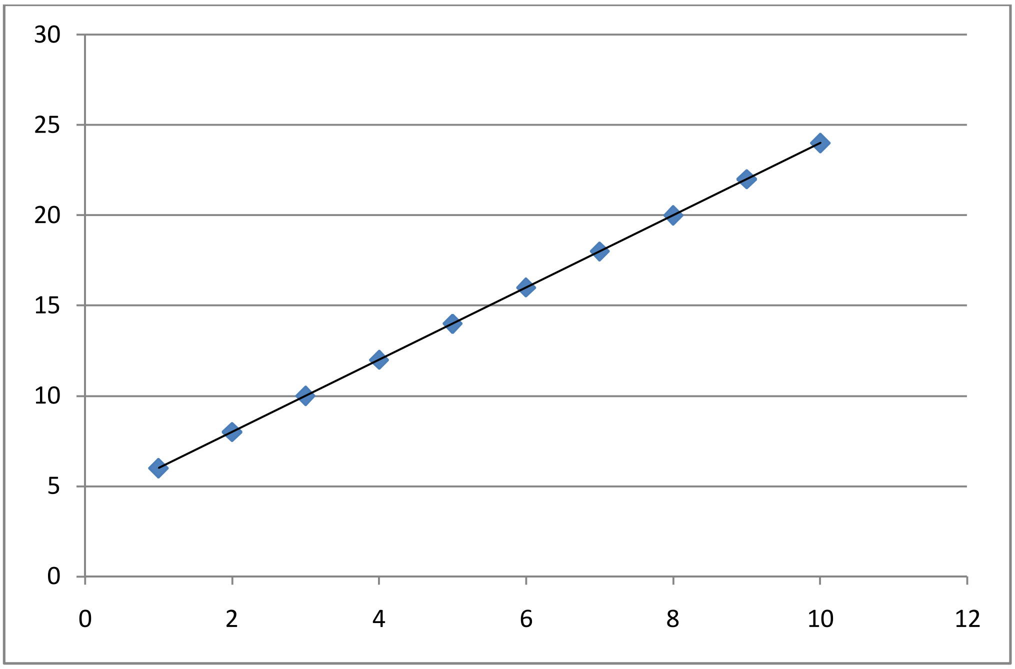
$$\Delta = 12\sigma - 6\sigma = 6\sigma. \tag{6.12}$$

Burada k değeri (6.9) eşitliğindeki gibi, t_1 ve t_2 değerleri de yine 0 ile 1 arasında düzgün dağılımlı olarak belirlenmektedir.

Birden fazla kaba hatalar için de yukarıdaki yaklaşım uygulanabilmektedir [35].

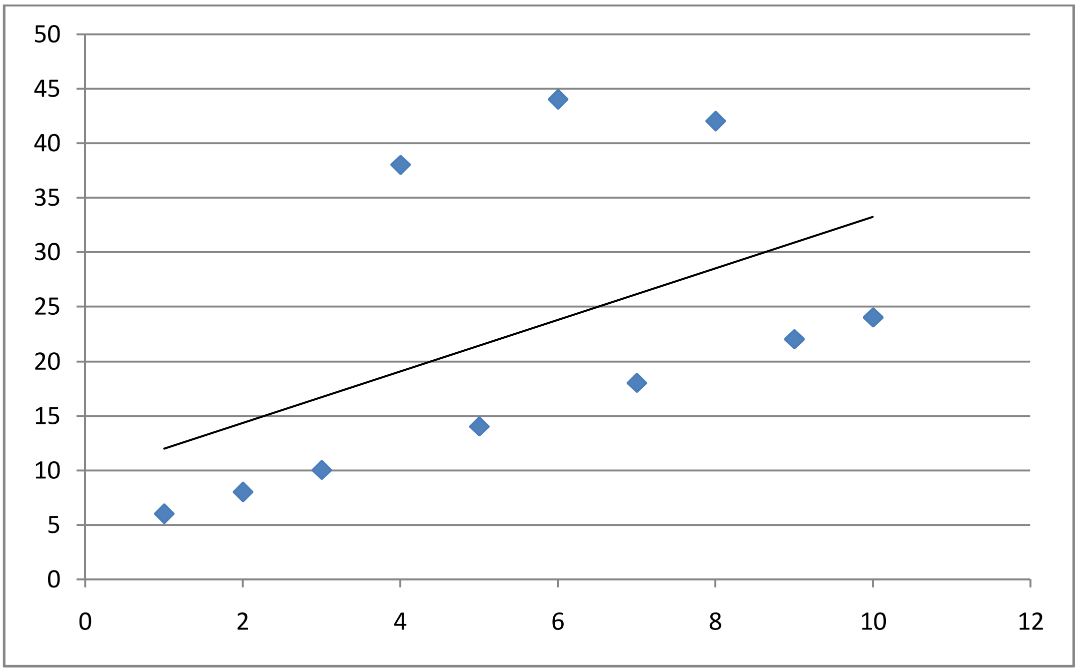
6.3 Doğrusal Regresyon

Bu bölümde asıl amaç iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin grafik ve doğrusal çizgi ile tanımlanmasıdır. Burada doğrusal çizgi regresyon çizgisi olmakla beraber bu çizgiye ait eşitlik de regresyon eşitliği olarak adlandırılmaktadır. Regresyon eşitliği x değişkeni (bağımsız değişken, kestirici değişken veya açıklayıcı değişken olarak adlandırılmakta) ve y değişkeni (bağımlı değişken veya tepki değişkeni olarak adlandırılmakta) arasında ilişkiyi ifade etmektedir. Tipik bir $y = ax + b$ doğrusal eşitliği (Şekil 6.1), $y = b_0 + b_1x$ şeklinde gösterildiğinde burada b_0, y ekseniyle kesişimi ve b_1 eğimi göstermektedir [37].



Şekil 6.1 Ölçü kümesinde kaba hatanın bulunmadığı durum

Şekil 6.1’de kaba hatanın bulunmadığı durum için gösterilen eğilim çizgisi ile Şekil 6.2’de kaba hatanın bulunduğu durumda gösterilen eğilim çizgisi farklılık gösterir. Kaba hatanın oluşmadığı durumlarda eğilim çizgisi beklenen şekilde oluşmaktadır.



Şekil 6.2 Ölçü kümesinde kaba hatalı ölçülerin bulunduğu durum

Kaba hatanın oluştuğu durumlarda ise bilinmeyenlerin kestirimi ve ölçülerin dengelenmesinden önce oluşan kaba hata veya hataların tespit edilmesi ve ayıklanması gerekmektedir (Şekil 6.2). Bundan dolayı doğrusal regresyon analizi kaba hata araştırmasını içermelidir.

6.4 Nivelman Ağının Yapay Olarak Üretilmesi

Yapay olarak bir nivelman ağı elde etmek için Şekil 6.3'te ölçü sayısı 17, bilinmeyen sayısı 8 ve serbestlik derecesi 10 olan ağ yapay olarak oluşturulmuştur. Çizelge 6.3'te gösterilen yükseklik değerleri nivelman ağı noktalarına ait olup bu yüksekliklerden yükseklik farkları hesaplanmıştır. Geçkiler 0.620 km ile 0.260 km arasında değişen birbirine yakın değerler olarak belirlenmiştir. Nivelman ağında $\sigma_i = \sigma_0/\sqrt{S}$ $(\sigma_0 = \frac{1mm}{\sqrt{1km}})$ alınmıştır.

Çizelge 6.3 Nivelman ağı hatasız nokta yükseklikleri

NN	$\mathrm{H_i}$ (m)
1	1051.215
2	1061.786
3	1040.982
4	1045.567
5	1050.963
6	1045.984
7	1035.897
8	1075.163

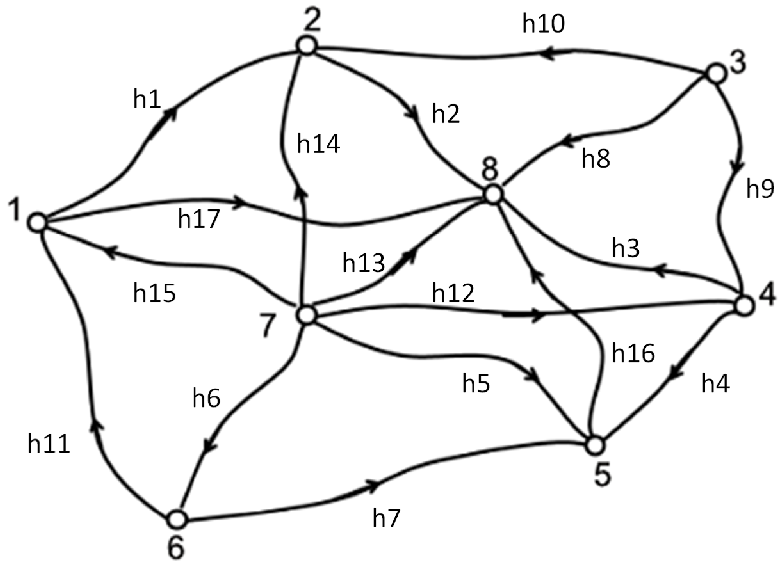
Yükseklik farkları (6.13) eşitliğiyle elde edildikten sonra, her bir hatasız yükseklik farkına normal dağılmış rastgele hatalar (6.14) eşitliğindeki gibi eklenerek yapay ölçüler $(\Delta\mathrm{h}'_{\mathrm{ik}})$ elde edilir:

$$\Delta\mathrm{h}_{\mathrm{ik}} = \mathrm{H_k} - \mathrm{H_i}, \tag{6.13}$$

$$\Delta\mathrm{h}'_{\mathrm{ik}} = \Delta\mathrm{h}_{\mathrm{ik}} + \mathrm{e}_{\Delta\mathrm{h}}. \tag{6.14}$$

Burada $\mathrm{e}_{\Delta\mathrm{h}}$ normal dağılmış rasgele gözlem hatalarıdır:

$$\mathrm{e}_{\Delta\mathrm{h}} \sim \mathrm{N}(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{\mathrm{S}} = 1\mathrm{mm}^2). \tag{6.15}$$



Şekil 6.3 Kullanılan yapay nivelman ağı

Uyuşumsuz ölçü ilgili uyuşumlu ölçüdeki normal dağılmış rastgele hata kaldırılıp yerine (6.16) eşitliğindeki gibi kaba hata getirilerek elde edilir:

$$. \tag{6.16}$$

6.5 Uygulama Sonuçları ve Değerlendirilmesi

Doğrusal regresyon modeli ve nivelman ağına ait ölçü sayıları, bilinmeyen sayıları ve serbestlik dereceleri Çizelge 6.1 ve 6.2'de gösterilmiştir. Elde edilen her bir örnek kümeye standart denk uzay yaklaşımı, en uygun denk vektör yaklaşımı ve Baarda yöntemi uygulanmıştır. Doğrusal regresyon ve nivelman ağı için 100'er tane yapay örnek küme üretilmiştir. Her bir örnek küme için 100 farklı kaba hatalı örnek küme oluşturulmuş ve böylece tane kirletilmiş örnek küme elde edilmiştir. Uygulamalarda kullanılan bütün yaklaşımların OBO'ları iteratif olarak hesaplanmıştır.

6.5.1 Doğrusal Regresyona Ait Sonuçlar

6.5.1.1 Standart Denk Uzay Yaklaşımı Sonuçları ve Değerlendirilmesi

Çizelge 6.3 Standart denk uzay yaklaşımı OBO sonuçları

Kaba Hata Büyüklüğü	Ölçü Testi	α=0,05 (%)	α=0,01 (%)	α=0,001 (%)
3σ-6σ	Global Test	83,27	63,98	37,67
	Yerelleştirme	78,72	62,56	37,16
6σ-12σ	Global Test	100,00	99,97	99,55
	Yerelleştirme	97,02	99,96	99,54

Çizelge 6.3'de gösterilen OBO sonuçları $3\sigma - 6\sigma$ aralığında ve $6\sigma - 12\sigma$ aralığında bulunan kaba hatalara ait farklı anlam düzeyleri için bulunmuştur. Sonuçlar bir kaba hata için geçerlidir. Buradaki sonuçlar Potter algoritması kullanılarak elde edilen V denk uzay matrisiyle çözümlenmiştir. Bunun yanı sıra V denk uzay matrisinin elde edilmesinde; A katsayılar matrisinin tekil değer ayrışımı ve QR ayrışımı kullanılmıştır. Bu iki farklı yöntem ile elde edilen OBO sonuçları Çizelge 6.3'de bulunan sonuçlarla aynı çıkmıştır.

6.5.1.2 En Uygun Denk Vektör Yaklaşımı ve Baarda Yöntemi Sonuçları ve Değerlendirilmesi

Çizelge 6.4 En uygun denk vektör yaklaşımı ve Baarda yöntemi OBO sonuçları

Kaba Hata Büyüklüğü	α=0,05 (%)	α=0,01 (%)	α=0,001 (%)
3σ-6σ	66,38	85,38	75,97
6σ-12σ	67,08	90,74	99,06

Çizelge 6.4'de gösterilen OBO sonuçları doğrusal regresyonda $3\sigma - 6\sigma$ aralığında ve $6\sigma - 12\sigma$ aralığında bulunan kaba hatalara ait farklı anlamlılık düzeyleri için bulunmuştur. Sonuçlar bir kaba hata için geçerlidir. Buradaki sonuçlar Potter

algoritması kullanılarak elde edilen V denk uzay matrisiyle çözümlenmiştir. Bunun yanı sıra V matrisinin elde edilmesinde; katsayılar matrisinin tekil değer ayrıştırılması ve katsayılar matrisinin QR ayrıştırılması kullanılmıştır. Katsayılar matrisinin tekil değer ayrıştırılması ve katsayılar matrisinin QR ayrıştırılmasından elde edilen V matrisleri birbiriyle aynı olmasına rağmen Potter algoritmasından elde edilen V matrisi ile farklılık göstermektedir. Ayrıca Baarda yöntemi dahil adı geçen bütün yaklaşımlarda aynı düzeltme vektörleri elde edilmiştir. Çizelge 6.4'de bulunan OBO değerleri Potter algoritması, katsayılar matrisinin tekil değer ayrıştırması ve katsayılar matrisinin QR ayrıştırması için aynı sonuçları göstermektedir. Buna ilaveten; Baarda yöntemi (Data Snooping) doğrusal regresyonda uygulanmıştır. Yine Çizelge 6.4'de gösterilen OBO sonuçları Baarda yöntemi için de aynıdır. Böylece doğrusal regresyonda Baarda yöntemi ve en uygun vektör yaklaşımı aynı OBO'ya yani aynı kaba hata yakalama başarısına sahiptir.

6.5.2 Nivelman Ağına Ait Sonuçlar

Nivelman ağı uygulamasında bütün yaklaşımlar için zorlamasız ve tüm iz yöntemine göre dengeleme yapılmıştır. Çizelge 6.5'te tüm iz yöntemi için OBO sonuçları gösterilmiştir.

6.5.2.1 En Uygun Denk Vektör Yaklaşımı Sonuçları

Çizelge 6.5 Nivelman ağında en uygun denk vektör yaklaşımı ve Baarda yöntemi OBO sonuçları

Kullanılan Metot	Kaba Hata Büyüklüğü	Kaba Hata Sayısı	α=0,05 (%)	α=0,01 (%)	α=0,001 (%)
Potter Algoritması	3σ-6σ	1	49,1	66,3	56,2
		2	41,3	46,3	25,9
		3	29,6	25,2	8,8
	6σ-12σ	1	53,8	84,0	98,0
		2	51,7	78,6	89,8
		3	45,9	65,2	72,1
Tekil Değer Ayrıştırması	3σ-6σ	1	49,1	66,3	56,2
		2	41,3	46,3	25,9
		3	29,8	25,3	8,8
	6σ-12σ	1	53,8	84,0	98,0
		2	51,8	78,7	89,9
		3	46,4	65,8	72,7
QR Ayrıştırması	3σ-6σ	1	49,1	66,3	56,2
		2	41,4	46,3	25,9
		3	29,7	25,2	8,8
	6σ-12σ	1	53,8	84,0	98,0
		2	51,7	78,6	89,8
		3	46,1	65,4	72,3
Baarda Yöntemi	3σ-6σ	1	49,1	66,3	56,2
		2	41,2	46,3	25,9
		3	29,6	25,2	8,8
	6σ-12σ	1	53,8	84,0	98,0
		2	51,7	78,5	89,7
		3	46,0	65,1	72,0

Çizelge 6.5’te nivelman ağı için gösterilen OBO sonuçları $3\sigma - 6\sigma$ aralığında ve $6\sigma - 12\sigma$ aralığında bulunan kaba hatalara ait farklı anlamlılık düzeyleri için bulunmuştur. Sonuçlar bir, iki ve üç kaba hata için hesaplandı. Buradaki sonuçlar Potter algoritması kullanılarak elde edilen V denk uzay matrisiyle çözümlenmiştir. Bunun yanı sıra V matrisinin elde edilmesinde; katsayılar matrisinin tekil değer ayrışımı ve katsayılar matrisinin QR ayrışımı kullanılmıştır. Katsayılar matrisinin tekil değer ayrışımından ve QR ayrışımından elde edilen V matrisleri birbiriyle aynı olmasına rağmen Potter algoritmasından elde edilen V matrisi ile farklılık göstermektedir. Ayrıca, elde edilen düzeltme vektörleri Baarda yöntemi dahil bütün yaklaşımlar için aynı çıkmaktadır. Çizelge 6.5’te bulunan OBO değerleri Potter algoritması, katsayılar matrisinin tekil değer ayrıştırması ve katsayılar matrisinin QR ayrıştırması için aynı sonuçları göstermektedir. Buna ilaveten; Baarda yöntemi (Data Snooping) jeodezik nivelman ağına uygulanmıştır. Yine Çizelge 6.5’te gösterilen OBO sonuçları Baarda yöntemi için de aynıdır. Böylece jeodezik nivelman ağında da Baarda yöntemi ve en uygun vektör yaklaşımı aynı OBO’ya sahiptir.

BÖLÜM 7

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Doğrusal regresyon uygulamasına ait Çizelge 6.3 ve Çizelge 6.4'te gösterilen OBO sonuçları karşılaştırıldığında; küçük genlikli kaba hataların yakalanmasında en uygun denk vektör yaklaşımı standart denk uzay yaklaşımına göre, büyük genlikli kaba hataların yakalanmasında ise standart denk uzay yaklaşımı en uygun denk vektör yaklaşımına göre daha başarılıdır. Buna ilaveten; küçük genlikli kaba hataların yakalanmasında 0.01 anlamlılık düzeyi için yaklaşık olarak %20 oranında, 0.001 anlamlılık düzeyi için de yaklaşık olarak %40 oranında iyileşme oranı elde edilmiştir. Diğer taraftan 0.05 anlamlılık düzeyi için standart denk uzay yaklaşımı hem küçük genlikli hem de büyük genlikli kaba hataların yakalanmasında daha başarılıdır. Ayrıca Baarda yöntemi ile en uygun denk vektör yaklaşımının kaba hata yakalama başarı oranları aynıdır.

Doğrusal regresyonda elde edilen sonuca paralel olarak Çizelge 6.5'te gösterilen jeodezik nivelman uygulamasında da Baarda yönteminin kaba hata yakalama başarısı en uygun denk vektör yaklaşımı ile aynı başarıya sahiptir.

Diğer taraftan nivelman ağı uygulamasına ait Çizelge 6.5'te gösterildiği gibi en uygun denk vektör yaklaşımında kullanılan Potter algoritmasına alternatif olarak kullanılan katsayılar matrisinin tekil değer ayrıştırması ve QR ayrıştırması yöntemlerinde de aynı OBO yakalanmıştır. En uygun denk vektör yaklaşımı için Potter algoritmasına alternatif olarak katsayılar matrisinin tekil değer ayrıştırması veya QR ayrıştırmasının kullanılması işlem kolaylığı sağlamasının yanında sonuca daha hızlı ulaşmayı sağlamaktadır.

Nivelman ağı uygulamasında ölçülere ait ağırlık matrisi oluşturularak stokastik modele eklenmiş ve daha sonra model homojenleştirilmiştir.

Kullanılan yönteme göre V matrisi değişmektedir. V matrisini belirlerken silinecek satır veya sütunların kullanılan yönteme göre değiştiğine dikkat edilmesi gerekmektedir. Örneğin; zorlamasız klasik dengeleme yöntemini kullanırken tüm iz yöntemine göre bir sütun fazla silinmesi gerekmektedir.

Nivelman ağı uygulamasında tüm iz yöntemi ve zorlamasız klasik dengeleme yöntemi kullanılarak aynı oranda OBO elde edilmiştir.

Ayrıca kaba hata sayısı arttıkça yöntemlerin başarıları azalmakta, kaba hata genliği büyüdükçe ise yöntemlerin başarı oranları artmaktadır.

Nivelman ağı uygulamasında redündansı (fazla ölçü payı) en büyük ve en küçük olan iki ölçüye kaba hata eklenerek bu ölçülerdeki OBO'lar bulundu. Redündansı en küçük (0.44) olan altıncı ölçünün OBO'su en düşük (% 51.23), redündansı en büyük (0.74) olan on beşinci ölçünün ise OBO'su en büyük (%90.27) olarak bulunmuştur (Şekil 6.3). Bu durum ağ geometrisinin uyuşumsuz ölçü analizi üzerindeki etkisini ortaya koymaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Kim, H.K. vd., (2004). "Extended Parity Space Approach Considering Two-Faults", 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia, 879-884.

[2] Ding, X.S., (2008). Model-Based Fault Diagnosis Techniques: Design Schemes, Algorithms, and Tools, ISBN-13: 978-3540763031, 1. Baskı, Springer, Duisburg, Germany.

[3] Potter, J.E. ve Suman, M.C., (1977). "Thresholdless Redundancy Management with Arrays of Skewed Instruments", Integrity in Electronic Flight Control Systems", Nato Agardograph-224, 15: 1-25.

[4] Ray, A. ve Luck, R., (1991). "An Introduction to Sensor Signal Validation in Redundant Measurement Systems", IEEE Control Systems Magazine, 11(2): 44-49.

[5] Ray, A. ve Desai, M., (1986). "A Redundancy Management Procedure for Fault Detection and Isolation", J. Dynamic Systems, Measurement, and Control, September, 248-254.

[6] Daly, K.C. vd., (1979). "Generalized Likelihood Test for FDI in Redundant Sensor Configuration", Journal of Guidance and Control, 2(1): 9-17.

[7] Jin, H. ve Zhang, H.Y., (1999). "Optimal Parity Vector Sensitive to Designated Sensor Fault", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 35(4): 1122-1128.

[8] Niemeier, W., (2002). Ausgleichungsrechnung, Walter de Gruyter, Berlin.

[9] Baarda, W., (1968). "A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks", Netherlands Geodetic Comission, Delft, Netherlands, 2(5).

[10] Pope, A.J., (1976). "The Statistics of Residuals and the Outlier Detection of Outliers", NOAA, Technical Report, NOS 65, NGS 1, Rockville, MD.

[11] Aksoy, A., (1984). "Uyuşumsuz Ölçüler Testi", Harita Dergisi, 93.

[12] Ayan, T., (1992). "Uyuşumsuz Ölçüler Testi", Harita ve Kadastro Mühendisliği, 72.

[13] Öztürk, E. ve Şerbetçi, M., (1992). Dengeleme Hesabı III., KTÜ Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Trabzon.

[14] Koch, K. R., (1999). Parameter estimation and hypothesis testing in linear models, 2.Baskı, Springer-Verlag, Berlin.

[15] Demirel, H., (2005). Dengeleme Hesabı, ISBN: 975-461-375-3, YTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul.

[16] Hekimoğlu, Ş., (2005). "Kaba Hataların Belirlenmesindeki Sorunlar", Harita Dergisi, 5(3): 174-180.

[17] Huber, P.J., (1981). Robust Statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.

[18] Hampel, F. vd. (1986). Robust Statistics: The approach based on influence functions, John Wiley and Sons, New York.

[19] Yang, Y. vd. (2002). "Robust Estimator for Correlated Observations Based on Bifactor Equivalent Weights", Journal of Geodesy, 76(6-7): 353-358.

[20] Hekimoğlu, Ş. ve Erenoğlu, C.R., (2007). "Effect of Heteroscedasticity and Heterogeneousness on Outlier Detection for Geodetic Networks", Journal of Geodesy, 81(2): 137-148.

[21] Hekimoğlu, Ş. ve Koch, K.R., (1999). "How Can Reliability of the Robust Methods Be Measured?", Third Turkish-German Joint Geodetic Days, 1-4 June 1999, İstanbul, 1: 179-196.

[22] Strang, G., (2003). Introduction to Linear Algebra, ISBN-13: 978-0961408893, 3. Baskı, Wellesley Cambridge Press, Massachusetts.

[23] Vennebusch, M., (2008). Singular Value Decomposition and Cluster Analysis as Regression Diagnostics Tools in Geodetic VLBI, ISSN: 1864-1113, Schriftenreihe 3, Institut für Geodasie und Geoinformation, Bonn.

[24] Meyer, C., (2000). Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, ISBN: 0-89871-454-0, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

[25] Trefethen, L.N. ve Bau, D., (1997). Numerical Linear Algebra, ISBN: 0-89871-3617, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

[26] Vanicek, P. ve Krakiwsky, E., (1986). Geodesy: The Concepts, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.

[27] Lay, D.C., (2012). Linear Algebra and Its Applications,

ISBN13: 978-0-321-38517-8, 4. Baskı, Addison-Wesley, Boston.

[28] Strang, G. ve Borre, K., (1997). Linear Algebra, Geodesy and GPS, ISBN: 0-96140-8863, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley.

[29] Hall, S.R., (1980). Parity Vector Compensation for FDI, Yüksek Lisans Tezi, MIT Aeronautics ve Astronautics, Massachusetts.

[30] Zhang, H.Y. ve Patton, R.J., (1993). "Optimal Design of Robust Analytical Redundancy for Uncertain Systems", IEEE Region 10 Conference on Computer, Communication, Control and Power Engineering, Beijing.

[31] Zhang, H.Y. ve Yan, D., (1995). “Optimal Design of Robust Analytical Redundancy for Redundant Strapdown Inertial Navigation System”, Proceedings of IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Control in Aerospace, 14-16 Ağustos 1995, Beijing.

[32] Hekimoglu, Ş., (1983). “Normal Dağılımdan Sapmalar”, HKM Jeodezi, Jeoinformasyon Ve Arazi Yönetimi Dergisi, 45: 168-186.

[33] Hekimoğlu, Ş., (1997). “The Finite Sample Breakdown Points of the Conventional İterative Outlier Detection Procedures”, Journal of Surveying Eng. ASCE, 123(1): 15-31.

[34] Erenoğlu, R.C., (2003). Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Robust Yöntemlerle ve Uyuşumsuz Ölçü Testleriyle Belirlenmesi ve Birbirleriyle Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[35] Hekimoğlu Ş. ve Erenoğlu R.C., (2007). “Jeodezik ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Klasik Yaklaşım ve Robust Yöntemlerle Belirlenmesi”, HKM Jeodezi, Jeoinformasyon Ve Arazi Yönetimi Dergisi, 97: 3-14.

[36] Chatterjee, S., ve Hadi, A.S., (1988). Sensivity Analysis in Linear Regression, ISBN: 978-0-471-82216-5, John Wiley and Sons Inc., New York.

[37] Triola, M.F., (2003). Elementary Statistics, ISBN-13: 978-0201775709, 9. Baskı, Addison Wesley, Boston.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Utkan Mustafa DURDAĞ
Doğum Tarihi ve Yeri	: 14.08.1986 / Erzurum
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: umdurdag@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Harita Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	-
Lisans	Harita Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Erzurum Anadolu Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2011	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010	Akgün İnşaat	Harita Mühendisi

YAYINLARI

Bildiri

1. Hekimoğlu, Ş. ve Durdağ, U.M., Outlier Detection In Linear Regression Using Standart Parity Space Approach, European Geosciences Union General Assembly 2013, 7-12 Nisan, 2013, Viyana, Avusturya.

2. Durdağ, U. M. ve Batuk, F., Implementation of Campus Cultural Heritage Database With Support of The Photogrammetry, 23rd International CIPA Symposium, CIPA 2011, September 12 - 16, Prague, Czech Republic, 2011.