YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DIŞMERKEZ BASINÇ KUVVETİ ETKİSİNDEKİ KİRİŞLERİN HAREKETLİ HARMONİK YÜK ALTINDAKİ DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

İnşaat Yük. Müh. Mesut ŞİMŞEK

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 29 Ocak 2008
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG (İTÜ)
: Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER (YTÜ)
: Prof. Dr. Hasan ENGİN (İTÜ)
: Doç Dr. İrfan COŞKUN (YTÜ)

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

A	Kiriş kesit alanı
A_n	Zaman bağımlı genelleştirimiş koordinatlar
A_{xx}	Uzama rijitliği
A_{xz}	Kayma rijitliği
a_0	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_1	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_2	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_3	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_4	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_5	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_6	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
a_7	Newmark- β yönteminde kullanılan bir katsayı
B_n	Zaman bağımlı genelleştirimiş koordinatlar
b	Kesit genişliği
C	Sönüm matrisi
C_n	Zaman bağımlı genelleştirimiş koordinatlar
c	Birim adım fonksiyonu
c_b	Eğilmede viskoz sönüm sabiti
c_s	Kaymada viskoz sönüm sabiti
D	Statik yer değiştirme
D_{xx}	Eğilme rijitliği
D_{xz}	Yüksek mertebeden bir kesit rijitliği
E	Elastisite modülü
E_k	Maddesel noktanın kinetik enerjisi
E_p	Maddesel noktanın potansiyel enerjisi
e	Dışmerkez basınç kuvvetinin dışmerkezliği
F	Yük vektörü
$\hat{F}$	Etkili yük vektörü
F_c	Konservatif kuvvetler

F_{nc} Konservatif olmayan kuvvetler

F_{xx} Yüksek mertebeden bir kesit rijitliği

F_{xz} Yüksek mertebeden bir kesit rijitliği

G Kayma modülü

H_{xx} Yüksek mertebeden bir kesit rijitliği

h Kesit yüksekliği

I Kesit atalet momenti

I_A Kiriş kesiti ile ilgili bir atalet büyüklüğü

I_D Kiriş kesiti ile ilgili bir atalet büyüklüğü

I_F Kiriş kesiti ile ilgili bir atalet büyüklüğü

I_H Kiriş kesiti ile ilgili bir atalet büyüklüğü

i Zaman adımı

J Problemin fonksiyoneli

J^* Problemin Lagrangian fonksiyoneli

K Rijitlik matrisi

KDO Doğrusal olmayan rijitlik matrisi

$\hat{K}$ Etkili rijitlik matrisi

$\hat{K}_T$ Teğet rijitlik matrisi

K^G Geometrik rijitlik matrisi

K^{S1} Lagrange çarpanlarından elde edilen bir matris

K^{S2} Lagrange çarpanlarından elde edilen bir matris

K^{S3} Lagrange çarpanlarından elde edilen bir matris

K^{S4} Lagrange çarpanlarından elde edilen bir matris

K_e Kirişin kinetik enerjisi

k_s Kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısı

L Kiriş açıklığı

M Kütle matrisi

M_T Dışmerkez basınç kuvvetinin kesit ağırlık merkezine taşınması sonucu elde edilen uç momentleri

N Terim sayısı

N_{xx} Normal kuvvet

$P(t)$	Hareketli harmonik yük
P_0	Hareketli yükün genliği
Q_D	Genelleştirilmiş sönüm kuvveti
q	Genelleştirimiş koordinatlar
R	Artıklar vektörü
R_D	Sönüm fonksiyonu
S	Boyutsuz zaman parametresi
s	iterasyon numarası
T	Dışmerkez basınç kuvveti
t	Zaman
t_g	Hareketli yükün kiriş üzerine geldiği an
$t_ç$	Hareketli yükün kirişi terk ettiği an
t_P	Hareketli yükün kiriş üzerinde kaldığı süre
U_i	Şekil değiştirme enerjisi
U_d	Dış kuvvetlerin potansiyeli
u	x ekseni doğrultusundaki yer değiştirme
$\bar{u}$	x ekseni doğrultusundaki boyutsuz yer değiştirme
u_0	kiriş ekseni üzerindeki bir noktanın boyuna yer değiştirmesi
V	Hacim elemanı
v	y ekseni doğrultusundaki yer değiştirme
v_x	Kiriş üzerindeki bir noktanın hızının x bileşeni
v_z	Kiriş üzerindeki bir noktanın hızının z bileşeni
W_{nc}	Konservatif olmayan kuvvetlerin işi
w	z ekseni doğrultusundaki yer değiştirme
$\bar{w}$	z ekseni doğrultusundaki boyutsuz yer değiştirme
w_0	kiriş ekseni üzerindeki bir noktanın düşey yer değiştirmesi
$x_P(t)$	Hareketli yükün konumu
x	x ekseni
y	y ekseni
z	z ekseni
α_1	Lagrange çarpanı

α_2	Lagrange çarpanı
α_3	Lagrange çarpanı
β	RBKT'de u yer değiştirmesi içinde tanımlanan bir büyüklük
χ	Newmark-β yöntemindeki bir sabit
ε	Boyuna şekil değiştirme
$\dot{\varepsilon}$	Boyuna şekil değiştirme hızı
γ	Kayma şekil değiştirmesi
$\dot{\gamma}$	Kayma şekil değiştirmesi hızı
η	Rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen sönüm katsayısı
η_b	Eğilme için rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen sönüm katsayısı
η_s	Kayma için rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen sönüm katsayısı
κ	Boyutsuz bir büyüklük
λ	Boyutsuz frekans parametresi
μ	Boyutsuz bir büyüklük
ν	Poisson oranı
θ_T	Boyutsuz eksenel yük parametresi
ϑ	Newmark-β yöntemindeki bir sabit
ρ	Kirişin birim hacim kütlesi
σ	Normal gerilme
σ_{xx}	x ekseni doğrultusundaki normal gerilme
τ	Kayma gerilmesi
τ_{xz}	(x-z) düzlemindeki kayma gerilmesi
Ω	Hareketli yükün zorlama frekansı
ω	Serbest titreşim frekansları
ζ_{tol}	Kıyaslama parametresi
ψ	Kesit dönmeleri

KISALTMA LİSTESİ

EBKT	Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi
EBBT	Euler-Bernoulli Beam Theory
TKT	Timoshenko Kiriş Teorisi
TBT	Timoshenko Beam Theory
RBKT	Reddy-Bickford Kiriş Teorisi
RBBT	Reddy-Bickford Beam Theory

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesinden tamamlanma aşamasına kadar geçen uzun çalışma sürecinde her türlü destek ve ilgisini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Görüşlerinden istifade ettiğim değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG ve Sayın Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER'e teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde sağladıkları maddi ve manevi destek ile her zaman yanımda hissettiğim aileme en içten şükranlarımı sunarım.

DIŞMERKEZ BASINÇ KUVVETİ ETKİSİNDEKİ KİRİŞLERİN HAREKETLİ HARMONİK YÜK ALTINDAKİ DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada hareketli harmonik yük ve dışmerkez basınç kuvveti etkisindeki basit mesnetli bir kirişin doğrusal ve doğrusal olmayan titreşimleri Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EBKT), Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ve Reddy-Bickford kiriş teorisi (RBKT) çerçevesinde sayısal olarak incelenmiştir. Problemin doğrusal olmayan çözümünde sadece geometrik doğrusal olmayan etkiler dikkate alınmıştır. Kiriş malzemesi için doğrusal Kelvin-Voigt modeli kullanılmıştır. Kirişin yer değiştirmelerini ve kesit dönmelerini ifade eden bilinmeyen fonksiyonlar zaman ve uzay bağımlı koordinatlara çarpım şeklinde ayrılmıştır. Doğrusal ve doğrusal olmayan her iki çözümde de bilinmeyen yer değiştirme ve dönme fonksiyonlarında uzay bağımlı koordinatlar için polinomlar seçilmiştir. Mesnet şartları Lagrange çarpanları ile sağlatılarak, problemin Lagrangian fonksiyoneli oluşturulmuştur. Hareket denklemleri Lagrange denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Elde edilen zamana bağlı diferansiyel denklem takımı Newmark-β yöntemiyle çözülerek, herhangi bir anda kirişe ait ivme, hız ve yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Doğrusal olmayan analizlerde hareket denklemlerinin çözümünde Newmark-β yöntemiyle birlikte Picard (Direkt iterasyon) ve Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemleri kullanılmıştır. Bu çalışmadaki sonuçların doğruluğu, burada elde edilen sonuçların, daha önce yayınlanmış ve bu çalışmadaki sonuçların özel durumlarına karşı gelen sonuçlarla karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir. Yakınsama çalışmaları yapılmıştır. Doğrusal durum için serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Bu çalışmada, kayma şekil değiştirmeleri, hareketli harmonik yükün hızı, frekansı, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti ve dışmerkezliği ile malzeme sönümünün kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bunlara ek olarak problemin geometrik doğrusal olmayan çözümünde, büyük yer değiştirmelerin etkisi etraflıca araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kirişler, öngerilmeli kirişler, dinamik analiz, doğrusal olmayan tireşimler, hareketli yük, harmonik yük, dışmerkezlik, Lagrange denklemi.

ANALYSIS OF BEHAVIOUR OF BEAMS SUBJECTED TO AN ECCENTRIC COMPRESSIVE FORCE UNDER EFFECT OF A MOVING HARMONIC LOAD

ABSTRACT

In this study, linear and non-linear vibrations of a simply-supported beam subjected to an eccentric compressive load and a moving harmonic load are investigated numerically in the framework of the Euler-Bernoulli beam theory (EBBT), Timoshenko beam theory (TBT) and Reddy-Bickford beam theory (RBBT). In the non-linear solution of the problem, only the geometrically non-linear effects are taken into account. Kelvin-Voigt model is utilized for the material of the beam. The unknown functions which represent the displacements of the beam and the rotations of the cross-section are separated into time-dependent and space-dependent coordinates. In the linear and the non-linear solutions, polynomials are chosen for the space-dependent coordinates of the displacements of the beam and the rotations of the cross-section. Lagrangian functional of the problem is obtained by satisfying the constraint conditions of supports with Lagrange multipliers. Equations of motion are derived by using Lagrange's equations. By solving the time-dependent system of differential equations, the displacements, velocities and accelerations of the beam are calculated for any time. In the non-linear analysis, Newmark-β method is used in conjunction with the Picard (direct iteration) and Newton-Raphson method for solving the equations of motion. The validity of the obtained results in this study is demonstrated by comparing them with the previously published results which are the special cases of the investigated problem. Convergence studies are performed. Free vibration analyses are made for the linear case. In this study, the effects of the shear deformation, the velocity and the excitation frequency of the moving harmonic load, the magnitude and the eccentricity of the eccentric compressive load and the damping of the material of beam are investigated in detail. In addition to these, in the non-linear solution of the problem, the effect of the large transverse displacements is examined in detail.

Keywords: Beams, prestressed beams, dynamic analysis, nonlinear vibration, moving load, harmonic load, eccentricity, Lagrange equation.

1. GİRİŞ

1.1 Tezin Önemi

Köprüler, viyadükler, demiryolları ve benzeri gibi mühendislik yapıları hareketli yükler etkisinde olup, bu tip sistemlerin inşasında öngerilmeli kirişler sıkça kullanılmaktadır. Özellikle, büyük açıklıklı köprülerde öngerme veya artgerme teknikleri kullanılarak kesitte oluşan çekme gerilmelerinin büyük ölçüde azaltılması ve hatta yok edilmesi yoluyla köprü kiriş elemanları daha etkin bir şekilde kullanılabilmektedir. Bu bakımdan dışmerkez basınç kuvveti etkisindeki kirişlerin hareketli yükler altındaki davranışlarının iyi bilinmesi ve anlaşılması bu tür sistemlerin tasarımı için çok önemlidir. Bu bağlamda kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimleri uzun yıllardan beri önemli bir araştırma konusu olmuştur. Kirişlerin hareketli yükler altındaki davranışı birçok araştırmacı tarafından incelenmiş olup, literatürde bu konuyla ilgili çok çeşitli çalışmalar mevcuttur. Ancak, yapılan literatür taramalarında hem dışmerkez basınç kuvveti, hem de hareketli harmonik yükler etkisindeki kirişlerin dinamik davranışının ilk olarak Kocatürk ve Şimşek (2006a) tarafından Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde, yine Kocatürk ve Şimşek (2006b) tarafından Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde detaylı olarak incelendiği görülmüştür. Ayrıca, Şimşek ve Kocatürk (2007b) aynı problemi yüksek mertebeden bir kiriş teorisi (Reddy-Bickford kiriş teorisi) kullanarak çözmüştür. Sözü edilen bu çalışmalarda yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu ve gerilmelerle şekil değiştirmelerin orantılı olduğu kabul edilmiş, yani ele alınan problem hem geometrik hem de fiziksel açıdan doğrusal (lineer) olarak çözülmüştür. Ancak bilindiği gibi, rezonans veya büyük şiddetteki yüklerin etkimesi durumunda yer değiştirmeler oldukça büyük değerler alabilmektedir. Bu gibi durumlarda doğrusal kiriş teorileri gerçekçi sonuçlar verememektedir. Bu sebeple geometrik doğrusal olmayan (non-lineer) etkileri de dikkate alan kiriş teorilerinin kullanılma gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Yapılan literatür taramaları sonucunda, hareketli yükler etkisindeki öngerilmeli kirişlerin doğrusal olmayan dinamik analizi ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu sebeple, bu tez çalışmasının hem hareketli yük problemleri hem de öngerilmeli kirişler ile ilgili literatüre katkı yapacağı düşünülmektedir.

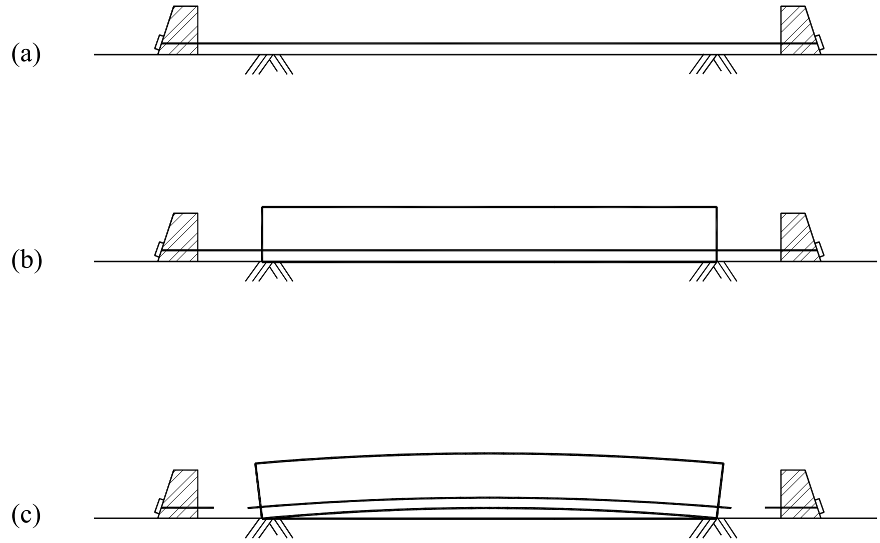
Öngerilme, betona dış yükler altında çekme gerilmelerine karşıt yönde önceden istenen düzeyde basınç verme olarak tanımlanır (Şener, 2006). Basınç gerilmeleri ile orantılı olarak elemandaki taşınabilir yükler de artmaktadır. Öngerilmenin uygulamada, ahşap fıçı elemanlarına içindeki sıvı nedeni ile oluşacak çekme gerilmelerine karşı koyacak metal çemberler ya da halat ile önceden basınç verilmesi, bisiklet jantına teller yardımı ile öngerilme vererek dış etkileri karşılama gibi sayısız örnekleri vardır (Şener, 2006).

Öngerilmeli eleman, verilen basıncın büyüklüğü ile orantılı olarak tam öngerilmeli veya betonarme eleman gibi iki sınır davranış gösterir. Betonarme ve öngerilmeli beton arasındaki ana fark; betonarmede, beton ve çelik birleşerek kullanılırken, öngerilmede ise, yüksek dayanımlı çelik gerilerek yüksek dayanımlı betona basınç verilir. Başlangıçta sünek kabloda çekme, gevrek betonda basınç olur. Böylece kullanım yükleri altında çatlama ve yer değiştirmeler kontrol edildiği gibi yüksek dayanımlı malzemenin kullanım üstünlüklerinden yararlanılır. Kesit küçük ve hafiftir. Sabit yükün hareketli yüke oranı azaldığı için açıklıklar artar. Öngerilmeli elemanda tarafsız eksen, kesit dışında olup tüm kesit basınç gerilmesi altındadır (Şener, 2006).

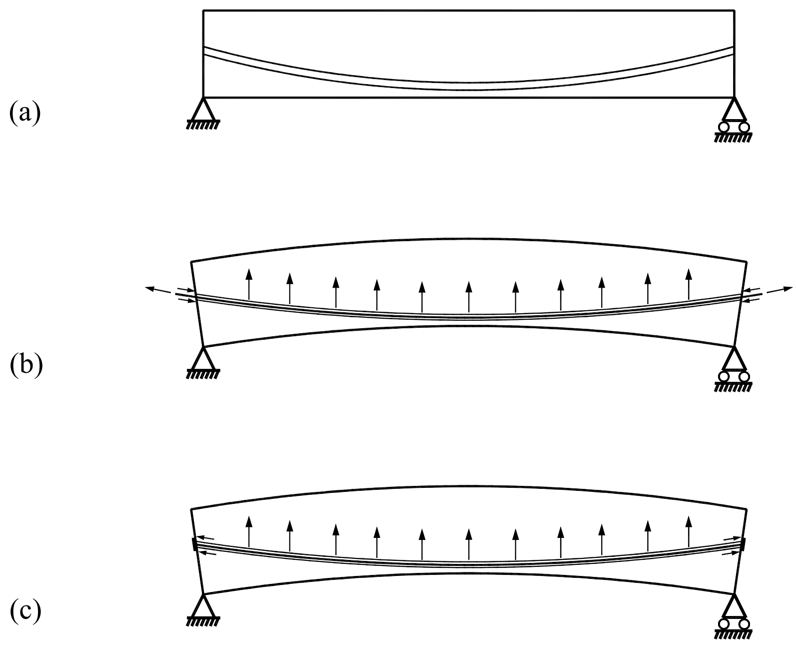
Öngerilmeli beton, betonarmenin yetersiz kaldığı durumlarda kullanılan yapı malzeme ve uygulamasıdır. Bu uygulama özellikle Amerika, Batı Avrupa ve Japonya’da gelişip yaygınlaşarak toplam yapı üretiminde payı gittikçe artmaktadır. Günümüzde öngerilmeli beton, değişik yapı türleri için kullanılmaktadır. Dünyada öngerilmeli beton; köprülerde, yüksek binalarda, silolarda, nükleer hücrelerde, TV vericilerinin konduğu kulelerde, spor salonlarının çatılarını örtmekte kullanılmaktadır. Yurdumuzda ise otoyol köprü kirişleri ile döşemeleri öngerilmeli beton ile yapılmaktadır (Şener, 2006). Öngerilme kuvveti pratikte iki şekilde uygulanabilir (Celasun ve Polat, 1974):

i) Çelik öngerilme donatılarının gerilmesi işi beton dökümünden önce yapılır. Beton sertleşip öngörülen mukavemeti kazandıktan sonra germe donatısı dış dayançlarından kurtarılır; bu şekilde kısalmak için serbest kalan germe donatısı beton elemanı sıkarak ona bir dış eksenel basınç kuvveti uygular. Donatının gerilmesi beton dökümünden önce yapıldığı için, bu metoda “öngerme (pre-tensioning)” metodu denir (Şekil 1.1).

ii) Çelik çubukların germe işi, kiriş elemanının betonu dökülüp yeterli mukavemet kazandıktan sonra yapılır. Bu amaçla beton elemanın içinde çelik tellerin geçirilmesi için, tasarlanan bir yörünge boyunca kılıf denilen özel aderanslı borular yardımıyla delikler bırakılır. Bu şekilde kablonun yörüngesi istenilen şekilde ayarlanabilir. Kılıfla beton arasındaki aderans, kılıfın özel yapısı sebebiyle oldukça iyidir. Germe donatıları gerildikten sonra kılıfla donatı arasında kalan boşluklara enjeksiyon harcı pompalanır. Böylece, öngerilme donatıları ile betonun beraber çalışması sağlanır. Bu metotta germe işi sonradan yapıldığı için, bu yönteme “artgerme (post-tensioning)” denir (Şekil 1.2).

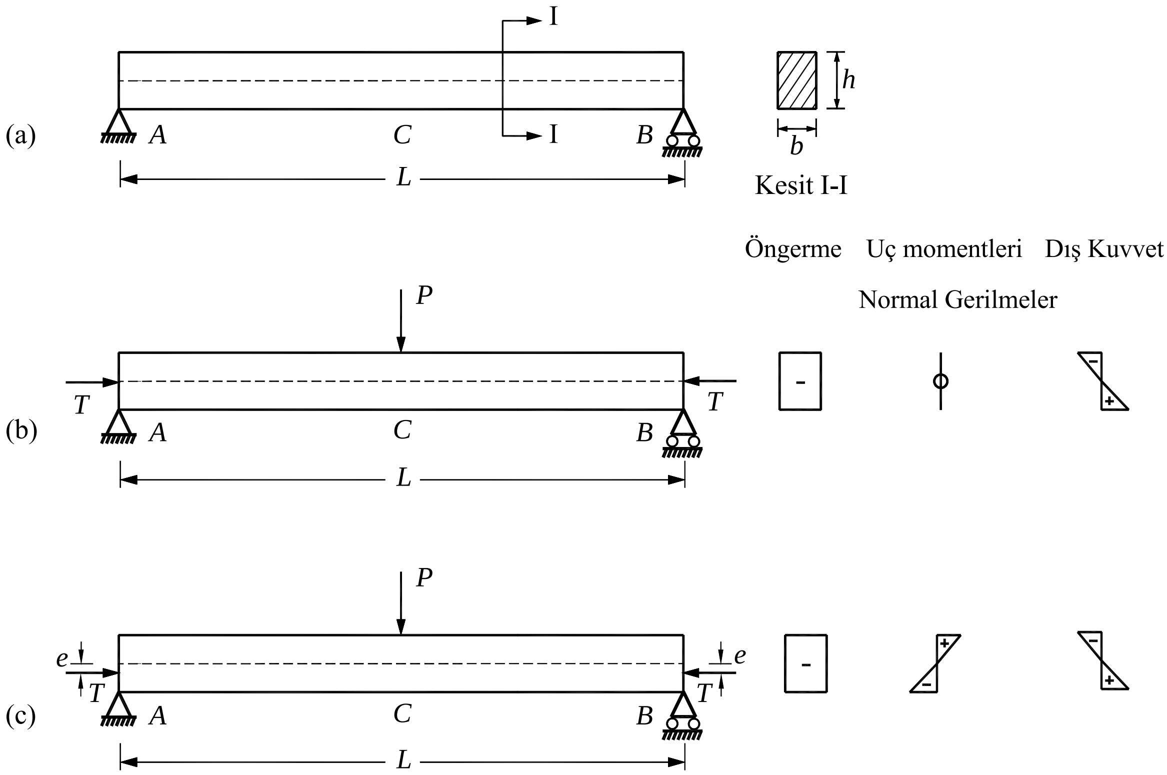


Şekil 1.1 Öngerme metodu, a) öngerilme donatısının gerilmesi, b) kiriş betonunun dökülmesi, c) öngerilme donatısının kesilerek öngerme kuvvetinin kirişe aktarılması (Gilbert ve Mickleborough, 1990'dan uyarlanmıştır).



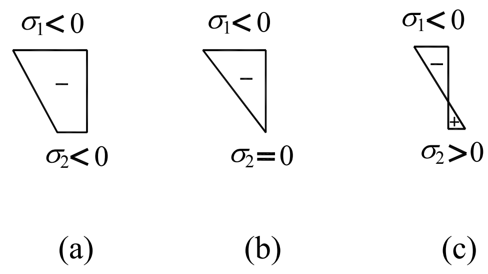
Şekil 1.2 Artgerme metodu, a) kiriş betonunun dökülerek içinde boşluk bırakılması, b) germe kablolarının yüklenmesi, c) enjeksiyon harcının pompalanması ve eksenel basınç kuvvetinin kirişe aktarılması (Gilbert ve Mickleborough, 1990'dan uyarlanmıştır).

Öngerme veya artgerme metotlarının temel felsefesi, kesitte dış yüklerden dolayı oluşan çekme gerilmelerinin büyük ölçüde azaltılması hatta yok edilmesi yoluyla kiriş elemanlarının daha etkin bir şekilde kullanılmasıdır. Bu davranışı kısaca açıklayabilmek için Şekil 1.3'deki açıklığı L, kesit genişliği b, kesit yüksekliği h olan, ortasından tekil bir P kuvveti ile yüklü bir basit kiriş göz önüne alınsın. Şekil 1.3b'de eksenel basınç kuvveti (öngerme kuvveti) kirişe ekseninden etki ederken, Şekil 1.3c'den görüldüğü gibi belli bir e dışmerkezliği ile etkimektedir.



Şekil 1.3 a) Kiriş geometrisi, b) eksenel basınç kuvveti ($e = 0$), c) dışmerkez basınç kuvveti ve tekil bir P kuvveti etkisindeki basit bir kirişin açıklık ortasındaki C kesitinde normal gerilme dağılışı.

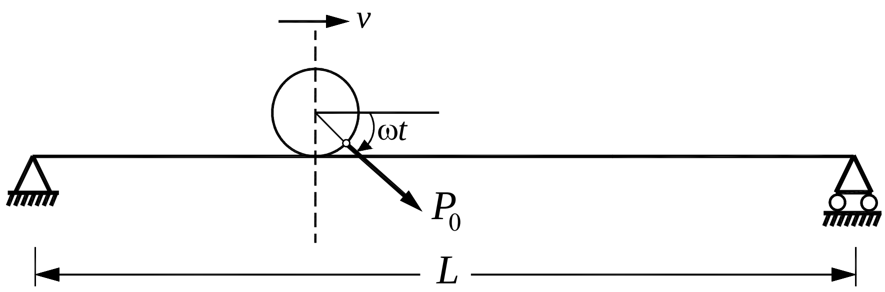
Mukavemet derslerinden bilindiği gibi, bir kesitte normal gerilmeye sebep olacak basit mukavemet halleri, Şekil 1.3'den de görüldüğü gibi eksenel normal kuvvet ve basit eğilmedir. Eğer her iki kesit tesiri aynı anda oluşursa, kesitte yine normal gerilme ortaya çıkar ama artık bu bir bileşik mukavemet halidir (Omurtag, 2005). Eksenel normal kuvvet durumunda gerilme dağılışı düzgün olduğu halde, eğilmede gerilmeler çekme ve basınç olmak üzere iki işaretlidir. Şekil 1.3'ün sağ tarafında, sırasıyla, eksenel basınç kuvveti (öngerme kuvveti) T, eksenel normal kuvvetin kesit ağırlık merkezine taşınması sonucu elde edilen $M_T = T \cdot e$ değerindeki uç momentleri ve dış yük P'den dolayı açıklık ortasındaki C noktasında normal gerilme dağılışı gösterilmiştir. Bu durumda kesitteki toplam gerilme dağılışı, yukarıda sözü edilen üç durumdaki normal gerilmelerin süperpozisyonulya elde edilir. Burada, eksenel basınç kuvveti T ve dışmerkezlik e'nin alacağı değerlere göre kesitte üç farklı gerilme dağılışı olabilir (Şekil 1.4).



Şekil 1.4 Kesitte oluşabilecek toplam normal gerilme durumları

Şekil 1.4a'dan görüldüğü gibi kesitte tek işaretli gerilme olup, kesit tamamen basınca çalışmaktadır. Şekil 1.4b'de kesitte tek işaretli gerilme dağılışı olur, ancak burada $\sigma_2 = 0$ dır. Şekil 1.4c'de ise kesitte gerilme dağılışı çekme ve basınç gibi iki işaretli olur.

Hızlı tren hatları, köprüler ve viyadükler gibi birçok inşaat mühendisliği uygulamasında sıkça kullanılan öngerilmeli kirişler, araç trafiği sebebiyle hareketli yüklere maruz kalmaktadırlar. Eğer, yürüyen aksamının balans ayarı bozuk olan bir araç veya lokomotifin hareketi durumunda ise hareketli yükler periyodik (harmonik) zorlama karakteri de kazanmaktadır (Şekil 1.5). Zorlama frekansının değerine göre, rezonans gibi durumlarda, kirişlerde oldukça büyük yer değiştirmeler oluşabilmektedir.



Şekil 1.5 Hareketli harmonik yük etkisindeki bir basit kiriş.

1.2 Tezin Kapsamı

Bu çalışmada, dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisi altındaki basit mesnetli bir kirişin dinamik davranışı, Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EBKT), Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ve yüksek mertebe kiriş teorilerinden biri olan Reddy-Bickford kiriş teorisi (RBKT) çerçevesinde hem geometrik doğrusal (lineer) hem de geometrik doğrusal olmayan (non-lineer) sınırlar içerisinde incelenmiştir. Problemin geometrik doğrusal çözümünde yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabul edilerek geometrik doğrusal olmayan etkiler ihmal edilmiştir. Ele alınan problemin geometrik doğrusal olmayan çözümünde ise literatürde von-Kármán etkisi olarak bilinen büyük düşey yer değiştirmelerin etkisi dikkate alınmıştır. Her iki durumda da gerilmelerle şekil değiştirme ve şekil değiştirme hızlarının orantılı olduğu (doğrusal Kelvin-Voigt modeli), yani problemin fiziksel açıdan da doğrusal olduğu kabul edilmiştir. Kiriş malzemesi için doğrusal Kelvin-Voigt modeli kullanılmış olup, kirişin rijitliği ile orantılı viskoz iç sönüm dikkate alınmıştır. Ayrıca, problemin doğrusal çözümünde her üç kiriş teorisi için sönümsüz serbest titreşim analizi yapılmıştır. Elden edilen sonuçlar, daha önce yayınlanmış ve bu çalışmanın özel durumuna karşı gelen çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

1.3 Tezin Hedefi

Tezin hedefi, dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisindeki bir kirişin dinamik davranışını geometrik doğrusal ve geometrik doğrusal olmayan sınırlar içinde detaylı olarak inceleyerek literatüre bu konuda katkı sağlamaktır.

1.4 Tezin Amaçları

Tezin hedefine ulaşmak için aşağıdaki amaçlar belirlenmiştir:

1. Ele alınan problemin küçük şekil değiştirme, küçük düşey yer değiştirme ve doğrusal malzeme özelliği kabulleriyle geometrik doğrusal sınırlar içerisinde formüle edilmesi.
2. Büyük düşey yer değiştirmelerin etkisini dikkate alarak, problemin geometrik açıdan doğrusal olmayan etkileri içerecek şekilde yeniden formüle edilmesi.
3. Göz önüne alınan kirişin zaman tanım alanında geometrik doğrusal ve geometrik doğrusal olmayan dinamik analizleri ile geometrik doğrusal durum için sönümsüz serbest titreşim analizlerini yapabilen bilgisayar programlarının geliştirilmesi.
4. Geliştirilen programlar vasıtasıyla elde edilen sonuçların, daha önce bu konunun özel durumlarına karşı gelen çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanması.
5. Ele alınan kirişin dinamik davranışına etki eden faktörlerin detaylı olarak incelenmesi.

1.5 Tezin Yöntemi

Bu tez çalışması için kullanılan yöntem yukarıdaki her bir amacı sistematik olarak vurgulayan görevler olarak aşağıda açıklanmıştır.

Görev 1: Ele alınan problemin küçük şekil değiştirme, küçük düşey yer değiştirme ve doğrusal malzeme özelliği kabulleriyle fiziksel ve geometrik doğrusal sınırlar içerisinde formüle edilmesi

Problem enerji yaklaşımıyla formüle edilerek Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EBKT), Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ve Reddy-Bickford kiriş teorisi (RBKT) çerçevesinde sayısal olarak incelenmiştir. Bunun için probleme ait, herhangi bir t anında, şekil değiştirme enerjisi (iç potansiyel enerji), kinetik enerji ve dış kuvvetlerin (dışmerkez basınç kuvvetinin, hareketli harmonik yükün) potansiyel enerji ifadeleri elde edilmiştir. Kirişe etkiyen dışmerkez basınç kuvveti kesitin ağırlık merkezine bir kuvvet ve kuvvet çifti olarak taşınmıştır. Mesnet şartları Lagrange çarpanları formülasyonu yardımıyla sağlatılarak, problemin Lagrangian fonksiyoneli elde edilmiştir. Kiriş malzemesi için doğrusal Kelvin-Voigt modeli kullanılmıştır. Rijitlikle orantılı viskoz sönümü (Rayleigh sönümü) verecek şekilde sönüm fonksiyonları tarif edilmiştir. Kirişin düşey yer değiştirmelerini ve kesit dönmelerini (TKT ve RBKT için) ifade eden çözüm fonksiyonları zaman ve uzay bağımlı koordinatlara çarpım şeklinde ayrılmıştır. Yer değiştirme ve dönme fonksiyonlarının oluşturulmasında uzay bağımlı koordinatlar için polinomlar seçilmiştir. Elde edilen Lagrangian fonksiyoneline Lagrange denklemleri uygulanarak zamana bağlı, sönümlü, doğrusal diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Sistemdeki sönüm, daha önce tanımlanmış olan sönüm fonksiyonlarından elde edilen genelleştirilmiş sönüm kuvvetleri yardımıyla hareket denklemlerine dâhil edilmiştir. Elde edilen zamana bağlı diferansiyel denklem takımı direkt integrasyon yöntemlerinden biri olan Newmark-β (Newmark, 1959) yöntemiyle çözülerek, herhangi bir t anı için, herhangi bir noktanın ivmesi, hızı ve yer değiştirmesi hesaplanmıştır. Ayrıca, serbest titreşim özelliklerinin belirlenebilmesi amacıyla, her üç kiriş teorisi için sönümsüz serbest titreşim analizi yapılmıştır.

Görev 2: Büyük düşey yer değiştirmelerin etkisini dikkate alarak, problemin geometrik açıdan doğrusal olmayan etkileri içerecek şekilde yeniden formüle edilmesi

Çalışmanın bu kısmında, büyük düşey yer değiştirme, orta derecede dönme ve küçük şekil değiştirme kabullerine dayanan von-Kármán şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak, ele alınan problem EBKT, TKT ve RBKT çerçevesinde yeniden formüle edilmiştir. Malzeme davranışının doğrusal Kelvin-Voigt modeline uyduğu kabul edilmiştir. Daha önce de yapıldığı gibi herhangi bir t anı için iç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi çıkarılmıştır. Mesnet şartları Lagrange çarpanları ile sağlatılarak, problemin Lagrangian fonksiyoneli elde edilmiştir. Yer değiştirme fonksiyonları zaman ve uzay bağımlı koordinatlara çarpım şeklinde ayrılmıştır. Burada da uzay bağımlı koordinatlar için polinomlar seçilmiştir. Rijitlikle orantılı viskoz sönüm öngörülmüştür. Problemin fonksiyoneline Lagrange denklemleri uygulandığında zamana bağlı, doğrusal olmayan diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem takımı zaman tanım alanında Newmark-β yöntemi ile birlikte ardışık yaklaşım yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Burada doğrusal sistemlerden farklı olarak her bir t anında doğrusal olmayan denklem takımı çözülmüştür. Bu amaçla, ardışık yaklaşım yöntemi olarak hem Picard (direkt iterasyon) hem de Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır.

Görev 3: Göz önüne alınan kirişin zaman tanım alanında geometrik doğrusal ve doğrusal olmayan dinamik analizini yapabilen bilgisayar programlarının geliştirilmesi

MATLAB programlama dilinde problemin geometrik doğrusal ve doğrusal olmayan dinamik analizlerini zaman tanım alanında yapabilen programlar hazırlanmıştır. Programlara tam olarak hâkim olabilmek için, MATLAB programa dilinin kütüphanesinde hazır olan fonksiyonlar kullanılmamıştır. Örneğin, sistem matrislerinin elemanlarının hesabı için Gauss kareleme yöntemi, Newmark-β yöntemi, direkt iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleri için ayrı ayrı algoritmalar oluşturulmuştur. MATLAB programı grafik işleme yeteneğiyle verileri işleme ve değerlendirmede büyük kolaylık sağladığı için tercih edilmiştir. Ancak, bunun yanında, MATLAB programlama dilinin diğer programlama dillerine (FORTRAN, C++ vb.) kıyasla sonuç elde ederken daha çok süre gerektirdiğini hatırlatmak faydalı olacaktır.

Görev 4: Geliştirilen programlar vasıtasıyla elde edilen sonuçların, daha önce bu konunun özel durumlarına karşı gelen çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanması

Bu çalışmadaki sonuçların doğruluğu, burada elde edilen sonuçların daha önce yayınlanmış ve bu çalışmadaki sonuçların özel durumlarına karşı gelen sonuçlarla karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir. Ayrıca, Newmark-β yöntemindeki zaman adımı sayısı ve yer değiştirme fonksiyonlarında farklı terim sayıları için yakınsama çalışmaları yapılmıştır.

Görev 5: Ele alınan kirişin dinamik davranışına etki eden faktörlerin detaylı olarak incelenmesi

Bu çalışmada, kayma şekil değiştirmeleri (kiriş kesit yüksekliği/ kiriş açıklığı oranı), hareketli harmonik yükün hızı, frekansı, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti ve dışmerkezliği ile malzeme sönümünün kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiş, gerekli tablo ve şekiller elde edilmiştir. Bunlara ilave olarak problemin geometrik doğrusal olmayan çözümünde, büyük yer değiştirmelerin etkisi etraflıca araştırılmıştır. Doğrusal ve doğrusal olmayan analizler sonucunda elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

1.6 Önceki Çalışmalar

Hareketli yükler etkisi altındaki kirişlerin dinamik davranışını inceleyen başlıca çalışmalara izleyen bölümlerde değinilmiştir.

1.6.1 Problemin Geometrik Doğrusal Çözümüne İlişkin Önceki Çalışmalar

Kirişlerin hareketli yükler altındaki doğrusal davranışı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu konuda daha önce yapılmış olan başlıca çalışmalar kullandıkları kiriş teorilerine göre sınıflandırılarak ayrı başlıklar altında verilmiştir.

1.6.1.1 EBKT Çerçevesinde Yapılmış Olan Önceki Çalışmalar

Timoshenko ve Young (1955)'in hareketli harmonik yük etkisi altındaki basit mesnetli bir kirişin yer değiştirme cevabını analitik olarak elde ettiği çalışma, bu konudaki ilk çalışmalardan sayılabilir. Bu çalışmada sönüm etkileri ihmal edilerek, hareketli yükün altındaki dinamik yer değiştirmeler verilmiştir.

Fryba (1972) tarafından yazılan eser hareketli yük problemleri ile ilgili en kapsamlı çalışma olarak göze çarpmaktadır. Fryba (1972) hazırladığı eserde değişik sınır koşullarına sahip tek açıklıklı kirişler, sürekli kirişler, değişken kesitli kirişler, elastik zemine oturan sonsuz uzunluktaki kirişler ve plaklar, basit mesnetli plaklar ve üç boyutlu elastik yarı düzlem gibi sistemlerin hareketli yükler altındaki dinamik davranışını analitik olarak incelemiştir. Fryba (1972) analitik çözümler yaparken integral dönüşüm tekniklerinden yararlanmıştır. Bu eserde sabit şiddetli ve şiddeti harmonik olarak değişen yükler yanında çok serbestlik dereceli bir ve iki akslı hareketli sistemler de göz önüne alınmıştır.

Hino vd. (1984) değişken kesitli betonarme bir köprünün hareketli bir araç yükü altındaki dinamik yer değiştirmelerini Galerkin sonlu elemanlar ve Wilson-θ yöntemlerini kullanarak elde etmiştir. Hareketli araç sabit hızla hareket eden bir serbestlik dereceli yay-kütle sistemi olarak modellenmiştir.

Lin ve Trethewey (1990) tarafından hareketli sabit bir yük, bir ve iki akslı çok serbestlik dereceli hareketli sistemler etkisindeki kiriş problemleri için sonlu eleman formülasyonu verilmiştir. Burada elde edilen zamana bağlı hareket denklemleri Runge-Kutta integrasyon yöntemiyle çözülerek, kirişe ve hareketli sistemlere ait dinamik cevaplar elde edilmiştir.

Lee (1994) Hamilton prensibini ve ön görülen modları (assumed modes) kullanarak şiddeti sabit olan hareketli bir yüke maruz basit mesnetli, tek ve çok açıklıklı kirişlerin dinamik davranışını sayısal olarak incelemiştir. Bu çalışmada, mesnet koşulları doğrusal elastik çökme yaylarının yay sabitleri uygun değerlerde seçilerek sağlanmıştır. Hareketli yük altındaki boyutsuz yer değiştirmeler hareketli yükün hızının ve elastik yay sabitlerinin değişik değerleri için verilmiştir. Sayısal integraller dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi yardımıyla yapılmıştır.

Henchi vd. (1997) sürekli kirişlerin hareketli katar (konvoy) yükleri altındaki dinamik davranışını incelemek için, sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde yeni bir kesin dinamik rijitlik matrisi (exact dynamic stiffness matrix) önermiştir.

Delgado ve dos Santos RC (1997) hızlı tren etkisi altındaki bir demiryolu köprüsünün dinamik davranışını sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir. Bu çalışmada ilk yaklaşım olarak tren ardışık hareketli kuvvetler olarak modellenmiştir. İkinci yaklaşımda ise tren, köprü ile hareketli kütleler arasındaki etkileşim dikkate alınarak, hareketli kütleler olarak modellenmiştir.

Law vd. (1997) bir köprü gövdesi ile hareketli bir yük arasındaki düşey etkileşim kuvvetine ait çözümü hem analitik olarak elde etmiş, hem de bu çözümü deneysel çalışmalarla doğrulamıştır. Köprü gövdesi basit mesnetli bir Euler-Bernoulli kirişi olarak modellenmiştir. Ayrıca, bu çalışmada hareketli yük etkisi altındaki kirişin farklı noktalarında eğilme momentleri ve kirişe ait düşey ivmeler ölçülerek, düşey hareketli yük belirlenmeye çalışılmıştır.

Yang vd. (1997) basit mesnetli bir kirişin titreşimlerini hızlı bir tren etkisi altında incelemiştir. İlk yaklaşımda hızlı tren, her bir vagonun aksından kirişe etkiyen hareketli yük katarı olarak modellenmiş ve bu durumda analitik çözüm yapılmıştır. İkinci yaklaşımda hareketli yüklerin kütleleri ve diğer atalet etkileri (Coriolis etkisi gibi) dikkate alınarak sayısal çözüm yapılmıştır. Bu çalışmada, kiriş açıklığının hareketli yükler arasında mesafeye oranının, hareketli yükün hızının, hareketli kütlelerin atalet etkileri ve kirişin sönümünün dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir.

Zheng vd. (1998) Hamilton prensibi yanında modifiye edilmiş kiriş titreşim fonksiyonlarını (modified beam vibration functions) kullanarak hareketli yükler etkisindeki değişken kesitli sürekli kirişlerin dinamik davranışını incelemiştir. Modifiye edilmiş kiriş titreşim fonksiyonları, tek açıklıklı basit mesnetli bir kirişin titreşim modlarıyla, kenar ve ara mesnetlerde düşey yer değiştirmelerin sıfır olması şartını sağlayan kübik ifadelerin süperpozisyonuyla elde edilmiştir. Bu çalışmada hareket denklemleri Wilson-θ yöntemiyle çözülmüştür.

Foda ve Abduljabbar (1998) dinamik Green fonksiyonları yaklaşımını kullanarak hareketli bir kütle etkisindeki basit mesnetli bir kirişin orta noktasındaki yer değiştirmelerini, hareketli yükün ve kütle oranının (hareketli cismin kütlesi / kirişin kütlesi) farklı değerleri için grafikler halinde vermiştir.

Cheung vd. (1999) modifiye edilmiş kiriş titreşim fonksiyonlarını kullanarak değişken kesitli sürekli kirişlerin hareketli araç yükleri altındaki dinamik davranışını enerji yaklaşımıyla sayısal olarak incelemiştir. Hareketli araç yükü yay-kütle-sönüm mekanizmasından oluşan iki serbestlik dereceli bir sistem olarak modellenmiştir. Ele alınan problem, hareketli araç yüklerinin kirişe ardışık olarak etkidiği düşünülerek, tren hareketi problemine genişletilmiştir.

Li ve Su (1999) hızlı tren etkisindeki bir demiryolu köprüsünün dinamik cevaplarını incelemiştir. Bu çalışmada hızlı tren için, ardışık hareketli yük ve kirişle araç arasındaki etkileşimi dikkate alan çok serbestlik dereceli bir araç gibi iki farklı model kullanılmıştır. Bu çalışmada, kiriş açıklığının hareketli yükün hızına oranının, hareketli yük sayısının, araç gövde uzunluğunun araç hızına oranının ve sönüm oranının kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Ichikawa vd. (2000) sürekli bir kirişin sabit hızla hareket eden hareketli bir kütle altındaki dinamik davranışını modal analiz yöntemiyle incelemiştir. Bu çalışmada, hareketli kütlenin her an kirişle temas halinde olduğu kabul edilmiştir. Kütle oranının (hareketli cismin kütlesinin kirişin birinci açıklığının kütlesine oranı) ve hareketli kütlenin hızının kirişin dinamik yer değiştirmeleri ve dinamik büyütme faktörü üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Hareketli yük etkisindeki bir kirişe ait yönetici diferansiyel denklem Abu-Hilal ve Zibdeh (2000) tarafından analitik olarak çözülerek, farklı sınır koşullarına sahip homojen ve izotrop kirişlerin dinamik yer değiştirmeleri elde edilmiştir. Hareketli yükün hızı sabit, düzgün azalan ve düzgün artan şekilde göz önüne alınmıştır. Sistemde kirişin kütle ve rijitliği ile orantılı olan sönüm etkileri dikkate alınmıştır. Bu çalışmada, sınır koşullarının, hareketli yükün hareketinin tipi ve iç sönümün kirişlerin dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir.

Abu-Hilal ve Mohsen (2000) farklı sınır koşullarına sahip tek açıklıklı izotrop kirişlerin hareketli harmonik yük altındaki davranışlarını analitik olarak incelemiştir. Hareketli yükün farklı tiplerdeki hareketi dikkate alınmıştır. Farklı sınır koşullarının, hareketli harmonik yükün hızının ve zorlama frekansının, göz önüne alınan kirişlerin dinamik yer değiştirmeleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Chan vd. (2000) mevcut bir öngerilmeli betonarme köprüde saha ölçümleri sonucu elde ettikleri dinamik moment verilerini kullanarak, titreşime neden olan hareketli yükleri belirlemeye çalışmıştır. Saha ölçümleri, göz önüne alınan köprü trafiğe açıkken ve trafiğe kapatılmış durumdayken gerçekleştirilmiştir. Analizler zaman tanım alanında yapılmıştır. Köprünün hem trafiğe kapatılması hem de kullanıma açık olması durumları için, hareketli yükler kabul edilebilir doğrulukta elde edilmiştir.

Chan ve Yung (2000) öngerilme etkisini de dikkate alarak, ölçülen şekil değiştirmelerden hareketle parabolik öngerme kablosuna sahip bir kirişe etkiyen düşey hareketli yükleri tespit etmeye çalışmıştır. Orta büyüklükteki, iki akslı bir kamyon iki kuvvetten oluşan bir kuvvet seti olarak olarak modellenmiştir. Problemin çözümünde sonlu elemanlar yönteminden faydalanılmıştır.

Zhu ve Law (2001) hareketli tekil yük ve dört serbestlik dereceli hareketli bir araç etkisindeki tek açıklıklı ve iki açıklıklı kirişlerin dinamik davranışını modal analiz yöntemiyle incelemiştir. Deneysel olarak elde edilen verilerden hareketli tekil yük belirlenmeye çalışılmış ve elde edilen yüklerin hatalı olmasına neden olan deneysel verilerin ayıklanması üzerinde durulmuştur.

Savin (2001) zayıf sönümlü ve farklı mesnet koşullarına sahip kirişlerin ardışık hareketli yükler etkisi altında dinamik davranışını incelemiştir. Bu çalışmada, kirişlere ait dinamik yer değiştirmeler ve dinamik büyütme faktörleri için analitik ifadeler elde edilmiştir.

Sun (2001) hareketli çizgisel yük etkisi altındaki elastik zemine oturan bir kiriş problemini Green fonksiyonlarını ve Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak çözmüştür. Kapalı çözümü elde edebilmek için Rezidü ve karmaşık fonksiyonlar teorilerinden faydalanmıştır.

Sun (2002) viskoelastik zemine oturan ve hareketli tekil bir yüke maruz bir kirişin dinamik yer değiştirmelerini, Green fonksiyonlarını ve Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak analitik olarak elde etmiştir.

Michaltsos (2002), hızının şiddeti sabit ve değişken olan hareketli yükler etkisindeki basit mesnetli elastik bir kirişin dinamik cevaplarını analitik olarak elde etmiştir. Bu çalışmada, hareketli tekil yük ve hareketli araç yükü gibi farklı yük tipleri dikkate alınmıştır.

Dugush ve Eisenberger (2002) modal analiz ve direkt integrasyon yöntemini kullanarak, değişken kesitli sürekli kirişlerin hareketli yükler altındaki davranışını incelemiştir. Göz önüne alınan kirişlerin mod şekilleri ve frekansları kesin olarak elde edilmiş ve elde edilen bu büyüklükler kullanılarak hareketli yük problemine ait sonuçlar da kesin olarak elde edilmiştir.

Greco ve Santini (2002) karmaşık (kompleks) mod süperpozisyonu yöntemi yardımıyla hareketli tekil bir yük etkisindeki basit mesnetli ve her iki ucundan dönel (rotational) viskoz sönümleyicilerle bağlanmış bir kirişin dinamik analizini yapmıştır. Sönümleyicilerin kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkisini inceleyebilmek için parametrik çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca, bu çalışmada elde edilen sonuçlar klasik modal analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Esmailzadeh ve Jalili (2003) iki ve altı serbestlik dereceli hareketli araçlar ile basit mesnetli bir kiriş arasındaki dinamik etkileşim problemini enerji yaklaşımıyla formüle ederek ve Lagrange denklemlerini kullanarak sayısal olarak incelemiştir.

Kim ve Roesset (2003) elastik zemine oturan, sonsuz uzunlukta ve hareketli harmonik yük etkisindeki bir kirişin dinamik davranışını Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak incelemiştir. Kirişin oturduğu zeminde frekans bağımlı, doğrusal histerik sönüm olduğu varsayılmıştır. Hareketli tekil (noktasal) yük kabulü yerine, hareketli yükün belli bir uzunluğa yayılmış olduğu kabul edilmiştir. Ele alınan problem Fourier dönüşüm tekniği yardımıyla çözülmüştür. Hareketli yükün hızının, zorlama frekansının, kiriş iç sönümünün ve yayılı yükün etkime uzunluğunun kirişin dinamik yer değiştirmeleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Ju ve Lin (2004) üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemini kullanarak, hızlı bir tren sebebiyle demiryolu altyapısında (zeminde) oluşan titreşimleri ve bu titreşimlerin çevre üzerindeki etkilerini incelemiştir. Raylar her bir düğüm noktasında altı serbestlik derecesi olan iki düğüm noktalı sonlu elemanlarla, hareketli araç bir serbestlik dereceli yay-kütle-sönüm elemanından oluşan bir sistem ve zemin ise sekiz düğüm noktalı üç boyutlu sonlu elemanlarla modellenmiştir. Zemine iletilen titreşim etkilerini azaltmak için demiryolu hattı civarında zemin iyileştirilmesi ve demiryolu hattı ile zemin arasına betonarme döşeme yapılması gibi iki çözüm önerilmiştir.

Law vd. (2004) hareketli yarım araç (half vehicle model) modeli etkisi altındaki basit mesnetli bir kirişte, deneysel olarak ölçülen şekil değiştirmeleri kullanarak aracın her iki aks yükünü sonlu elemanlar yöntemiyle elde etme amaçlı yeni bir yöntem önermiştir. Sayısal ve deneysel çalışmalar sonucunda önerilen yöntemin oldukça etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

Cojocaru vd. (2004) hareketli elastik bir kiriş etkisindeki yine bir elastik kirişin titreşimlerini Galerkin yöntemini kullanarak incelemiştir. Hareketli kiriş üstünde hareket ettiği ana kirişe rijit ara bağlarla bağlanmıştır. Böylece, her iki kirişin temas noktalarında eşit yer değiştirme yaptığı kabul edilmiştir.

Yang vd. (2004) tek serbestlik dereceli bir yay-kütle sistemi ile modellenmiş hareketli bir araç etkisindeki bir kirişin birinci doğal periyodunu, araca ait dinamik cevapları (özellikle aracın düşey ivmelerini) kullanarak tespit edebilmek için hem analitik çözüme hem de sonlu elemanlar yöntemine dayalı bir algoritma önermiştir.

Kocatürk ve Şimşek (2004) Lagrange denklemlerini kullanarak sürekli kirişlerin hareketli harmonik bir yük altındaki yer değiştirmelerini hareketli yükün ve zorlama frekansının farklı değerleri için hesaplamıştır.

Xia ve Zhang (2005) mevcut bir demiryolu köprüsü ile hızlı bir tren arasındaki dinamik etkileşim problemini hem sayısal hem de deneysel olarak incelemiştir. Sayısal çözümlerde sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Her bir tren vagonu yirmi yedi serbestlik dereceli olarak modellenmiştir. Bu çalışmada, demiryolu köprüsünün ve hızlı trenin dinamik cevapları sayısal olarak hesaplanmış ve bu değerler mevcut bir hızlı tren köprüsünde ölçülen değerlerle karşılaştırılmıştır. Hesaplanan değerlerle ölçülen değerlerin karşılaştırılması sonucunda kurulan modelin kabul edilebilir hassasiyette çözüm verdiği görülmüştür.

Michaltsos vd. (2005) modal analiz yöntemini kullanarak sabit şiddetli hareketli yük etkisi altındaki basit mesnetli, açık kesitli simetrik bir çelik kirişin burulmalı eğilme titreşimlerini incelemiştir. Bu çalışmada, hareketli yük kirişe dışmerkez etkidiği için kiriş eğilmenin yanında burulma etkisi altında da kalmaktadır.

Lou (2005) sonlu elemanlar yöntemini kullanarak hareketli araç yükü etkisindeki bir köprü ve demiryolu sisteminin dinamik cevaplarını analiz etmiştir. Kiriş gövdesi basit mesnetli bir kiriş, raylar ise sonlu uzunlukta bir kiriş ve hareketli araç ise iki akstan oluşan toplam dört serbestlik dereceli yay-kütle-sönüm mekanizması olarak modellenmiştir. Raylar sürekli viskoelastik şekilde modellenmiş altyapı elemanlarıyla alttaki köprü gövdesine oturmaktadır. Enerji tabanlı sonlu elemanlar yardımıyla elde edilen hareket denklemi Newmark-β yöntemiyle çözülerek, sisteme ait çeşitli dinamik cevaplar (kirişe ait yer değiştirmeler, düşey ivmeler, araca ait ivmeler, etkileşim kuvveti gibi) elde edilmiştir.

Law ve Lu (2005) sabit bir noktadan etkiyen zamana bağlı bir yük etkisindeki Euler-Bernoulli kirişi için, ölçülen yer değiştirme ve şekil değiştirmeleri kullanarak, zaman tanım alanında öngerme kuvvetini tespit etmeye yönelik bir çalışma yapmıştır.

Law ve Zhu (2005) değişken kesitli sürekli kirişlerin hareketli bir araç yükü etkisindeki dinamik davranışını, kirişle araç arasındaki etkileşimi dikkate alarak incelemiştir. Hareketli araç iki akslı ve toplam yedi serbestlik dereceli olarak modellenmiş, aracın frenleme etkisi dikkate alınmış ve kirişin üst yüzey profilinin periyodik olarak değiştiği göz önüne alınmıştır. Bir ve iki açıklıklı kirişler için deneysel çalışmalar yapılmış ve deneylerden elde edilen sonuçlar sayısal sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Kocatürk ve Şimşek (2006a) dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik bir yük etkisindeki basit mesnetli bir kirişin dinamik davranışını ayrıntılı olarak incelemiştir.

Pinkaew (2006) iki serbestlik dereceli bir araç etkisindeki basit mesnetli kirişte, kirişin üst yüzeyindeki değişimi dikkate alarak ve deneysel olarak ölçülen şekil değiştirmeleri kullanarak aracın her iki aks yükünü sonlu elemanlar yöntemiyle elde etmeye çalışmıştır.

Chang vd. (2006), ara mafsala sahip iki ucu ankastre ve elastik zemine oturan bir Euler-Bernoulli kirişinin hareketli bir kütle-yay-sönüm sistemi altında altındaki dinamik davranışını Galerkin ve modal analiz yöntemlerini kullanarak incelemiştir. Bu çalışmada, hareketli sistemin kütlesi, sönümü, rijitliği ve hızı gibi parametrelerin rastgele değiştiği kabul edilmiştir. Elde edilen zamana bağlı, girişimli ve rastgele katsayılı diferansiyel denklemler ortalama değer perturbasyon (mean-value perturbation technique) tekniği ile çözülmüştür.

Martinez-Castro vd. (2006) sabit ve değişken kesitli sürekli kirişlerin hareketli tekil bir yük etkisindeki titreşimleri için yarı analitik bir yöntem önermiştir. Bu amaçla ele alınan kiriş klasik sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Bir elemanda iki düğüm noktası, her düğüm noktasında bir düşey yer değiştirme bir de dönme olmak üzere iki serbestlik derecesi alınmıştır. Daha sonra göz önüne alınan kirişin titreşim frekansları ve mod şekilleri yaklaşık olarak elde edilmiştir. Eşdeğer modal yükler daha önce hesaplanan mod şekilleri cinsinden analitik olarak ifade edilmiştir. Böylece zamana bağlı olarak elde edilen modal denklem sistemi analitik olarak çözülmüştür.

Abu-Hilal (2006) sürekli viskoelastik bir tabakayla birbirine bağlanmış paralel iki elastik kirişten oluşan bir sistemin hareketli bir yük altındaki dinamik yer değiştirmelerini analitik olarak elde etmiştir. Bu çalışmada, her iki kirişe ait yönetici denklemleri girişimsiz hale getirebilmek için izleyen iki kısıtlama yapılmıştır: (i) her iki kiriş birbirinin ikizi olmalı, (ii) kirişlerin aynı tarafındaki sınır koşulları da birbirinin aynısı olmalıdır. Bu çalışmada hareketli yükün hızının ve kirişler arasındaki tabakanın sönüm ve rijitlik özelliklerinin kirişlerin dinamik cevapları üzerindeki etkisi ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Garinei (2006) hareketli harmonik bir yük etkisindeki basit mesnetli bir kirişe ait dinamik yer değiştirmeleri analitik olarak elde etmiştir. Bu çalışmada, literatürdeki bazı çalışmalarda hareketli yük için verilmiş olan ve en büyük yer değiştirmelere neden olan hareketli yük hızı olarak tanımlanan kritik hız kavramı üzerinde çalışılmış ve kritik hızın beklendiği gibi bir etkiye sahip olmadığı görülmüştür. Çünkü sayısal analizler sonucunda kritik hızdan farklı hızlarda çok daha büyük yer değiştirme değerleri elde edilmiştir. Ayrıca, hareketli harmonik yükün frekansının kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Lee vd. (2006) tren yükü etkisindeki bir monoray köprüsünün titreşimlerini sayısal ve deneysel olarak incelemiştir. Monoray trenindeki her bir araç on beş serbestlik dereceli bir dinamik sistem olarak modellenmiştir. Hareket denklemleri, üç boyutlu olarak ve monoray köprüsüyle trenin etkileşimi dikkate alınarak Lagrange denklemleri yardımıyla, sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde çıkarılmış ve Newmark-β yöntemiyle çözülmüştür. Sayısal analizlerden elde edilen sonuçlar, işletme yükleri altında sahada yapılan ölçümlerle karşılaştırılmıştır ve her iki sonuç arasında iyi bir korelasyon olduğu görülmüştür.

Bu vd. (2006) bir köprü üzerinde hareket eden bir aracın ölçülen dinamik cevaplarını kullanarak, köprü üzerinde hasar değerlendirilmesine olanak tanıyan bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu yaklaşım söz konusu köprüde, köprü trafiğe kapatılmadan, hasar meydana gelip gelmediğini tespit etmeye yarayan kullanışlı bir yöntemdir. Bu çalışmada, köprü basit mesnetli bir kirişle, araç ise üç veya beş serbestlik dereceli bir sistemle modellenmiştir. Hasar indeksi olarak isimlendirilen büyüklük kiriş elemanın eğilme rijitliğindeki azalmaya bağlı olarak tanımlanmıştır. Sayısal analizler sonucunda önerilen yaklaşımın etkili ve kararlı olduğu, elden edilen sonuçların da kabul edilebilir sınırlar içinde olduğu görülmüştür.

Ju ve Lin (2007) belli bir ivmeyle hızlanan ve yavaşlayan bir araç etkisindeki bir ve üç açıklıklı köprüler için bir sonlu eleman modeli önermiştir. Ayrıca, önerilen bu yöntemden elde edilen sonuçların doğruluğunu test etmek için ayrı bir yarı analitik çözüm yöntemi verilmiştir. Bu çalışmada, iki akslı ve yedi serbestlik dereceli bir araç modeli kullanılmış ve göz önüne alınan köprü gövdeleri düşey ayaklar üzerine oturacak şekilde modellenmiştir.

Wang vd. (2007) hareketli araç yükü etkisindeki bir demiryolu köprüsünün dinamik davranışını incelemiştir. Köprü ve demiryolu aralarında sürekli yayılı yay elemanlarının bulunduğu, birbirine paralel iki kirişle modellenmiştir. Hareketli araç sabit hızla hareket eden yayılı bir yük gibi düşünülmüştür. Birbiriyle girişimli olarak elde edilen hareket denklemleri, mod birleştirme yöntemi yardımıyla girişimsiz duruma getirildikten sonra yarı analitik olarak çözülmüştür.

Bani-Hani ve Alawneh (2007) öngerilmeli bir kirişte hareketli yükler sebebiyle oluşan titreşimlerin aktif kontrolü için, aktif öngerme kabloları kullanarak yeni bir yöntem önermiştir. Hareketli yük bir serbestlik dereceli yay-kütle-sönüm mekanizması olarak modellenmiştir. Önerilen yöntemin güvenirliği mevcut bir köprü üzerinde yapılan deneysel çalışmalarla test edilmiş ve önerilen kontrol mekanizmasının kirişin ve aracın dinamik cevaplarını önemli derecede azalttığı görülmüştür.

Majka ve Hartnett (2007) hızlı tren-köprü dinamik etkileşim problemi için sonlu elemanlar yöntemine dayalı etkin bir model önermiştir. Tren katarındaki her bir araç on beş serbestlik dereceli bir sistemle ve köprü ise iki düğüm noktalı ve her bir düğüm noktasında altı serbestlik derecesi olan kiriş sonlu elemanlarıyla modellenmiştir. Hareket denklemleri Newmark-β yöntemiyle çözülmüştür. Tren hızının, tren kütlesinin kiriş kütlesine oranı, tren katarındaki standart araç uzunluğunun kiriş açıklığına oranı ve sönüm özelliklerinin köprünün dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir.

Garinei ve Risitano (2007) birbirinden eşit uzaklıkta, şiddeti sabit veya zamanla değişen (harmonik) hareketli yükler etkisindeki basit mesnetli bir kirişin dinamik davranışını analitik olarak incelemiştir. Hareketli yükün hızının, frekansının ve faz farkının etkileri detaylı olarak incelenmiştir.

Yang vd. (2007) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan, çatlak içeren farklı sınır koşullarına sahip kirişlerin eksenel basınç kuvveti ile hareketli bir yük altındaki dinamik davranışını analitik olarak incelemiştir. Bu çalışmada, elastisite modülünün değişiminin, çatlak yeri ve sayısının, eksenel basınç kuvvetinin, hareketli yükün hızının ve sınır koşullarının kirişlerin dinamik davranışı üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

1.6.1.2 TKT Çerçevesinde Yapılmış Olan Önceki Çalışmalar

Wang vd. (1997) tarafından çok açıklıklı Timoshenko kirişlerinin dinamik davranışını incelemek için bir modal analiz yöntemi önerilmiş olup, bu çalışmada açıklık sayısının, dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmelerinin kirişin maksimum yer değiştirmeleri ve momentleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Lee (1998), Winkler tipi elastik zemine oturan basit mesnetli bir kirişin hareketli bir kütle ve hareketli kütleden kaynaklanan atalet etkilerini ihmal ederek eşdeğer hareketli yük altındaki dinamik davranışını Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. Bu çalışmada kullanılan yöntem, yine aynı yazar tarafından daha önce yapılmış olan çalışmadaki (Lee, 1994) yöntemle aynıdır. Bu çalışmada, hareketli kütlenin kiriş üzerindeki hareketi süresince, hareketli kütlenin kirişten ayrılıp ayrılmadığı kütle ile kiriş arasındaki etkileşim kuvveti incelenerek tespit edilmeye çalışılmıştır. Hareketli kütlenin çok yüksek hızlarında hareketli kütlenin kirişten ayrıldığı tespit edilmiştir.

Zhu ve Law (1999) hareketli yükler etkisindeki çok açıklıklı Timoshenko kirişlerinde ölçülen şekil değiştirmeleri veya yer değiştirmeleri kullanarak hareketli yükü belirlemeye yönelik, mod birleştirme yöntemi ve optimizasyon tekniğine dayalı bir yöntem önermiştir. Bu çalışmada, Hamilton ilkesi kullanılmış ve mesnet şartları rijitliği büyük olan çökme yaylarıyla sağlatılmıştır. Laboratuar çalışmaları da yapılmıştır. Hem sayısal hesaplamalar hem de deneysel çalışmalar sonucunda önerilen yöntemin hareketli yükleri tespit etmede oldukça etkili olduğu görülmüştür.

Law ve Zhu (2000) daha önce kendileri tarafından önerilmiş olan hareketli yükleri belirlemeye yönelik metodu (Zhu ve Law, 1999) yeni bir düzeltme işlemi (Tikhonov regularization technique) kullanarak geliştirmişlerdir. Hareketli yükleri tahmin etmek için önerilmiş olan bu yöntemin kullanım sınırları üzerinde çalışılmış ve elde edilen sonuçlardaki hata oranını azaltmak için bazı tavsiyelerde bulunulmuştur. Ayrıca, Euler Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine göre elden edilen sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır.

Chen vd. (2001) tarafından viskoelastik zemine oturan ve hareketli harmonik yüke maruz sonlu bir Timoshenko kirişi göz önüne alınarak, hareketli yükün kritik hızının ve rezonans frekansının kolaylıkla bulunabilmesi amacıyla, hareketli yükün hızının ve zorlama frekansının fonksiyonu olan bir dinamik rijitlik matrisi oluşturulmuştur.

Kim ve Cho (2006) Winkler tipi elastik zemine oturan sonsuz uzunlukta, eksenel basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisindeki bir Timoshenko kirişinin titreşim ve dinamik kararlılık analizini yapmıştır. Ele alınan probleme ait diferansiyel denklem sistemi Fourier dönüşüm tekniği kullanılarak analitik olarak çözülmüştür. Bu çalışmada, kayma şekil değiştirmeleri ve eksenel basınç kuvvetinin kirişin titreşim ve stabilitesini nasıl etkilediği araştırılmış, ayrıca, hareketli yükün hızı, hareketli yükün zorlama frekansı, kirişin kayma rijitliği ve sönümün etkileri detaylı olarak incelenmiştir.

Kocatürk ve Şimşek (2006b) dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisindeki bir kirişin dinamik davranışını sayısal olarak incelemiştir. Bu çalışmada, kayma şekil değiştirmelerinin, hareketli yükün hızı ve frekansının, dışmerkez basınç kuvvetinin ve kiriş iç sönümünün kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

1.6.1.3 RBKT Çerçevesinde Yapılmış Olan Önceki Çalışmalar

Kadivar ve Mohebpour (1998) hareketli yükler etkisindeki tabakalı kompozit ortotropik bir kirişin dinamik davranışını klasik sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir. Bu çalışmada, göz önüne alınan kirişin statik ve serbest titreşim analizine de yer verilmiştir. Hareketli harmonik yükün hızının, malzeme özelliklerinin ve tabakalardaki güçlendirici fiber elemanların farklı yönlenme açılarının dinamik büyütme faktörü üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Şimşek ve Kocatürk (2007b) öngerilmeli kirişlerin hareketli harmonik bir yük etkisindeki dinamik davranışını Lagrange denklemleri yardımıyla incelemiştir. Bu çalışmada, dışmerkez ve eksenel basınç kuvvetinin, hareketli yükün hızının, zorlama frekansının, kayma şekil değiştirmelerinin ve kiriş iç sönümünün dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir.

1.6.2 Problemin Geometrik Doğrusal Olmayan Çözümüne İlişkin Önceki Çalışmalar

Hareketli yükler etkisindeki kirişlerin doğrusal olmayan titreşimleri ile ilgili literatürde az sayıda çalışma vardır. İzleyen paragraflarda bu konuda yapılmış olan başlıca çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.

Hino vd. (1985) iki serbestlik dereceli yay-kütle-sönüm sisteminden oluşan hareketli yük etkisinde, değişken kesitli kirişlerin dinamik davranışını Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. Bu çalışmada, doğrusal moment-eğrilik ifadesi kullanılmış olup, doğrusal olmayan davranış kiriş orta düzlemindeki boyuna şekil değiştirmelerin (von-Kàrmàn şekil değiştirmeleri) neden olduğu doğrusal olmayan normal kuvvetten kaynaklanmaktadır.

Yoshimura vd. (1986) hareketli yük etkisindeki basit mesnetli elastik bir kirişin geometrik doğrusal olmayan (von-Kàrmàn tipi doğrusal olmayan davranış dikkate alınarak) titreşimlerini Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. Hareketli yük bir serbestlik dereceli yay-kütle-sönüm sistemiyle modellenmiş ve çözüm yöntemi olarak Galerkin ağırlıklı artıklar yöntemi kullanılmıştır.

Yoshimura (1988) hareketli yük etkisindeki değişken kesitli kirişlerin geometrik doğrusal olmayan rastgele titreşimlerini Euler Bernoulli kiriş teorisini kullanarak incelemiştir. Galerkin sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen doğrusal olmayan denklem takımı, artımsal yer değiştirme metodu kullanılarak doğrusallaştırılmış ve ardışık yaklaşım metodu kullanılarak çözülmüştür.

Chang ve Liu (1996) viskoelastik zemine oturan bir kirişin geometrik doğrusal olmayan rasgele titreşimlerini Galerkin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla, Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. Elde edilen denklem takımı artımsal yer değiştirme metodu yardımıyla doğrusallaştırılarak Newmark-β yöntemiyle çözülmüştür. Bu çalışmada, kiriş üst yüzey profilinin rasgele değiştiği ve hareketli yükün hem sabit hızla hem de ivmeli hareket ettiği kabul edilmiştir. Düşey yer değiştirmelerin standart sapması Monte Carlo benzetim tekniği kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca, kiriş orta noktasına ait yer değiştirmelerin dağılımı istatistiksel yöntemler kullanılarak belirlenmeye çalışılmıştır.

Xu vd. (1997) hareketli bir kütle etkisindeki sonlu bir elastik kirişin boyuna ve düşey titreşimlerini Hamilton prensibini kullanarak incelemiştir. Bu çalışmada, hem kiriş orta düzlemindeki şekil değiştirmelerden kaynaklanan doğrusal olmayan normal kuvvet hem de doğrusal olmayan moment-eğrilik ilişkisi göz önüne alınmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde elde edilen iki adet girişimli, doğrusal olmayan diferansiyel denklem Crank-Nicolson yöntemi ve bir perturbasyon tekniği kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmada, hareketli yük ve hareketli kütle problemleri arasındaki farklar araştırılmıştır.

Wang ve Chou (1998) birbirinden eşit uzaklıkta ve sabit hızla hareket eden iki hareketli yük etkisindeki bir Timoshenko kirişinin zati ağırlığını da dikkate alarak geometrik doğrusal olmayan titreşimini Galerkin yöntemiyle incelemiştir.

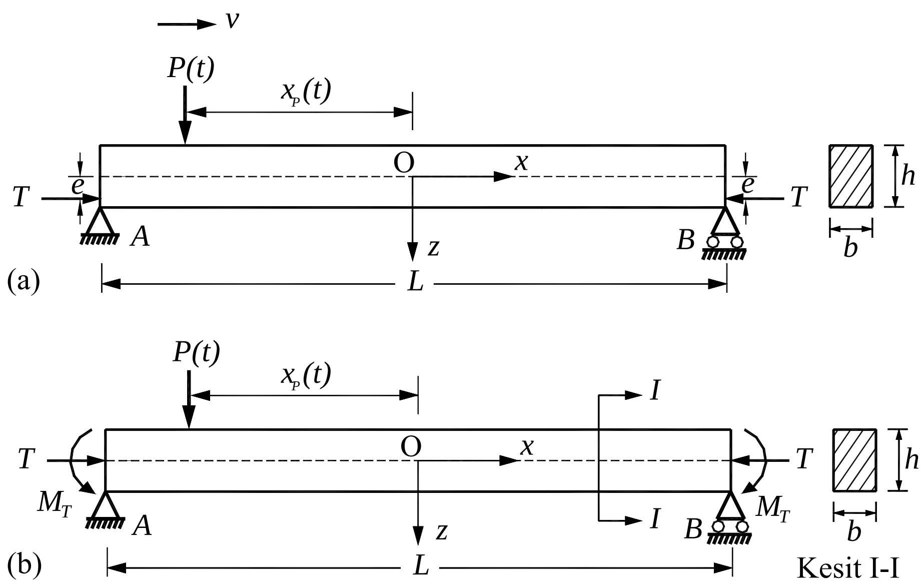
Wayou vd. (2004) hareketli yükler etkisindeki elastik kirişlerin geometrik doğrusal olmayan titreşimlerini Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde yarı analitik bir yöntemle incelemiştir. Hareketli yükün kütlesi ve dolayısıyla atalet etkileri dikkate alınarak elde edilen yer değiştirmeler, hareketli yük durumunda elde edilen yer değiştirmelerle karşılaştırılmıştır. Doğrusal olmayan durumdaki yer değiştirmeler, doğrusal serbest titreşimden elde edilen mod şekillerinin bir kombinasyonu olarak ifade edilmiş ve modal koordinatlarda elde edilen iki adet yönetici diferansiyel denklem perturbasyon tekniklerinden biri olan katlı ölçekler (multiple scales) metodu yardımıyla çözülmüştür. Kütle oranı, kiriş iç sönümü ve hareketli yükün hızının kirişin dinamik yer değiştirmeleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

2. GEOMETRİK DOĞRUSAL DURUM İÇİN KURAMSAL ÇALIŞMA

Bu bölümde ele alınan problemin formülasyonu hem geometrik hem de fiziksel açıdan doğrusal olarak yapılmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi ele alınan problem enerji yaklaşımıyla formüle edilerek sayısal olarak incelenmiştir. Bu amaçla kirişe ait enerji ifadeleri Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EBKT), Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ve Reddy-Bickford kiriş teorisi (RBKT) çerçevesinde ayrıntılı olarak çıkarılmıştır. Ancak bunlardan önce, çalışmanın teorik altyapısının oluşturulmasında gerekli olan bazı ön bilgiler verilmiştir.

2.1 Problemin Geometrisi

Dışmerkez basınç kuvveti ve sabit v hızıyla hareket eden bir harmonik yük etkisindeki basit mesnetli bir kiriş Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Şekil 2.1b'de gösterildiği gibi dışmerkez basınç kuvveti kesit ağırlık merkezine bir kuvvet ve bir kuvvet çifti olarak taşınmıştır.



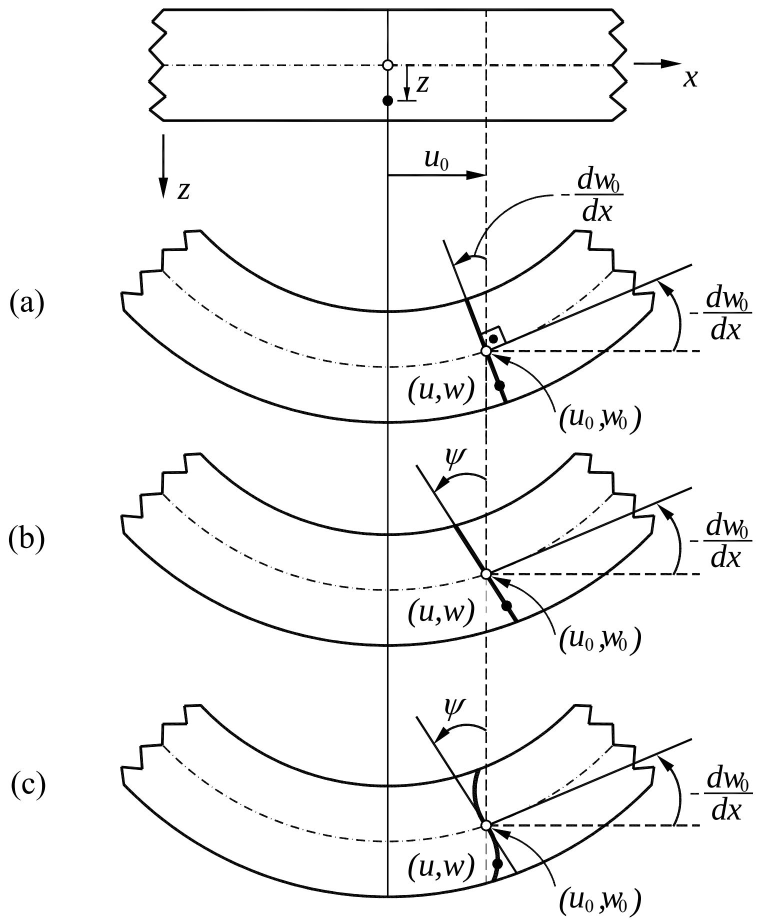
Şekil 2.1 a) Dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli yük etkisindeki bir kiriş, b) dışmerkez basınç kuvvetinin kesit ağırlık merkezine bir kuvvet ve kuvvet çifti olarak taşınması.

$\mathrm{O}(x, y, z)$ koordinat takımının başlangıç noktası kiriş orta noktasında seçilmiştir. Burada L kiriş açıklığı, b kesit genişliği, h kesit yüksekliği, $P(t)$ hareketli harmonik yük, $x_P(t)$ hareketli yükün konumu, T dışmerkez basınç kuvveti, e dışmerkez basınç kuvvetinin dışmerkezliği, M_T dışmerkez basınç kuvvetinin kesit ağırlık merkezine taşınması sonucu elde edilen uç momentleridir. Hareketli harmonik yük kirişe etkimeden önce kiriş hareketsiz olmakla beraber, dışmerkez basınç kuvveti sebebiyle negatif z ekseni yönünde başlangıç yer değiştirmesine sahiptir.

2.2 Kiriş Teorilerine Kısa Bir Bakış

Mühendislikte kolon, kiriş gibi çubuk elemanların analizinde kullanılan birkaç kiriş teorisi vardır. Bu teoriler tarihi gelişim sırasına göre, en temel kiriş teorisi olan Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EBKT), kayma şekil değiştirmelerini dikkate alan Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ve yine kayma şekil değiştirmelerini dikkate alan yüksek mertebeden bir teori olan Reddy-Bickford (RBKT veya Üçüncü mertebe kiriş teorisi) kiriş teorisi olarak sıralanabilir. Şekil 2.2'de söz konusu üç kiriş teorisine göre eğilmeden sonra bir kiriş kesitinin aldığı durum görülmektedir.

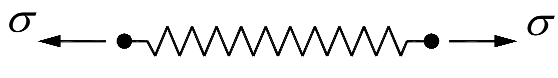
Bilindiği gibi EBKT, eğilmeden önce düzlem ve kiriş eksenine dik olan kesitlerin eğilmeden sonra yine düzlem ve kiriş eksenine dik kaldığını ifade eder (Şekil 2.2a), yani kayma şekil değiştirmelerinin etkisini ihmal etmiş olur. TKT ise EBKT'den farklı olarak eğilmeden önce düzlem ve tarafsız eksene dik olan kesitlerin eğilmeden sonra da düzlem olarak kaldığını, ancak kesitlerin artık kiriş eksenine dik olmadığını ve kesitlerin bir ψ açısı kadar döndüğünü kabul eder (Şekil 2.2b). Bu kabul vasıtasıyla kayma şekil değiştirmelerinin veya kayma gerilmelerinin kirişin eğilme davranışına katkısı göz önüne alınmış olur. Ancak, TKT'de eğilme sonrasında kesitlerin düzlem kaldığı varsayıldığından kayma açısı sabittir. Böylece, kayma gerilmesi dağılışı da kesit yüksekliği boyunca sabit olduğundan, ortaya çıkan hatayı düzeltmek için kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısına (shear correction factor) ihtiyaç duyulur. Cowper (1960) tarafından farklı kesit şekilleri için kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısı değerleri ayrıntılı olarak verilmiştir. RBKT, Reddy (1984a; 1984b) ve Bickford (1982) tarafından farklı zamanlarda dikdörtgen kesitli kirişler ve kare plaklar için önerilmiştir. Bu sebeple RBKT literatürde Reddy-Bickford kiriş teorisi olarak bilinmektedir. RBKT'de yer değiştirme dağılımı, kiriş kesiti yüksekliği boyunca, z koordinatının üçüncü dereceden bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Buna bağlı olarak, kayma gerilmeleri kesitin üst ve alt sınırlarında sıfır olacak şekilde ikinci dereceden (parabolik) bir dağılışa sahip olur ve kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısına (shear correction factor) gerek kalmaz. Ayrıca, bu teoride eğilmeden sonra kesitlerin dönmesinin yanında kesitlerin düzlem kaldığı kabulü de serbest bırakılarak kesitlerin çarpılması (warping) dikkate alınmış olur (Şekil 2.3c). Ancak, RBKT'nin kesit şekli dikdörtgenden farklı olan kirişlere uygulanamayacağını hatırlatmak faydalı olacaktır.



Şekil 2.2 Bir kirişin şekil değiştirme öncesi ve sonrasındaki durumu, (a) EBKT, (b) TKT, (c) RBKT (Wang vd., 2002'den uyarlanmıştır)

2.3 Doğrusal Viskoelastik Malzeme Modeli

Bütün ideal katı cisim tiplerinde zamanın etkisi göz önünde bulundurulmamıştır. Cisimlerin zamanla ilgili viskoelastik özelliklerini de ele alabilmek için bunlara sıvıya benzer bazı özellikler katmak gerekir. Aşağıda tarif edilecek doğrusal ideal cisim tipi sıvılarla elastik cisimlerin esas özelliklerinin birleştirilmesi ile elde edilir.

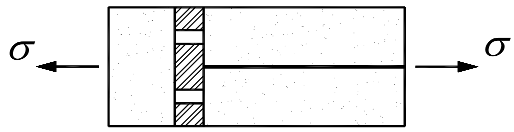


Şekil 2.3 Doğrusal Hooke cismini temsil eden yay modeli

Şekil 2.3'de doğrusal elastik bir yayla temsil edilebilen doğrusal Hooke cismi gösterilmiştir. Hooke cisminde zamanın etkisi yoktur. Doğrusal Hooke cismi için bünye denklemi izleyen şekilde yazılır:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{2.1}$$

Burada σ yaya etki eden gerilme, ε yayda oluşan şekil değiştirme, E yay sabiti veya elastisite modülü olarak adlandırılır.

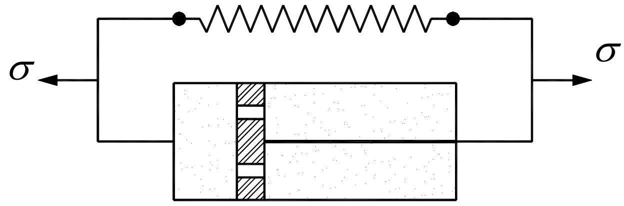


Şekil 2.4 Doğrusal Newton sıvısını karekterize eden yağ kutusu

Şekil 2.4'de ise doğrusal Newton sıvısını karekterize eden yağ kutusu gösterilmiştir. Doğrusal Newton sıvısını karakterize eden doğrusal yağ kutusunun (dashpot) içinde delikli pistonun hareket edebilmesi için, yağın pistondaki deliklerden diğer tarafa geçmesi gerekmekte ve bu da zaman gerektirmektedir. Piston yağın geçme hızı ile orantılı hareket eder ve pistona gelen direnç hız ile orantılıdır. Newton sıvısında zaman etkisi olmasına karşın elastik özellik yoktur. Doğrusal Newton sıvısının bünye denklemi aşağıda ifade edilmiştir:

$$\frac{\sigma}{c_b} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{2.2}$$

Burada c_b cisme bağlı bir sabit olup viskoz sönüm sabiti adını alır. Şimdi bu iki basit cisim modeli paralel olarak bağlansın. Şekil 2.5'de gösterilen, paralel bağlama sonucu oluşan yeni cisim modeli Kelvin ya da Kelvin-Voigt cismi adını alır.



Şekil 2.5 Doğrusal Kelvin-Voigt cismi

Doğrusal Kelvin-Voigt cisminin bünye denklemi izleyen şekilde yazılır (Flügge, 1967):

$$\sigma = \sigma^{e} + \sigma^{v} = E\,\varepsilon + c_b \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{2.3}$$

$$\sigma = E\,\varepsilon + c_b\,\dot{\varepsilon} \tag{2.4}$$

Burada, σ gerilmesi, elastik kuvvetlerden meydana gelen σ^e gerilmesi ile sönüm gibi korunumlu olmayan kuvvetlerden kaynaklanan σ^v gerilmesinin (damping stress) toplamı şeklinde ifade edilmektedir (Clough ve Penzien, 1993). ε değişkeninin üzerindeki nokta zamana göre türevi ifade etmekte ve $\dot{\varepsilon}$ büyüklüğüne şekil değiştirme hızı (strain rate) denilmektedir. c_b katsayısı elastisite modülü cinsinden izleyen şekilde ifade edilir ve birimi $\mathrm{N{\cdot}sn/m^2}$ dir.

$$c_b = E\eta_b \tag{2.5}$$

Burada η_b zaman boyutlu olup rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen bir sönüm katsayısıdır. Bu durumda gerilme ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$\sigma = E\varepsilon + E\eta_b\,\dot{\varepsilon} \tag{2.6}$$

$$\sigma^v = E\eta_b\,\dot{\varepsilon} \tag{2.7}$$

Buna benzer şekilde kayma gerilmeleri içinde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir (Flügge, 1967; Svensson, 2000)

$$\tau = \tau^e + \tau^v = G\gamma + c_s\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \tag{2.8}$$

$$\tau = G\gamma + c_s\,\dot{\gamma} \tag{2.9}$$

Burada τ kayma gerilmesi; γ kayma şekil değiştirmesi, $\dot{\gamma}$ kayma şekil değiştirmesi hızı, G kayma modülü olup c_s katsayısı ise kayma modülü cinsinden izleyen şekilde ifade edilir ve birimi $\mathrm{N{\cdot}sn/m^2}$.

$$c_s = G\eta_s \tag{2.10}$$

Burada η_s rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen bir sönüm katsayısıdır. Bu durumda kayma gerilmesi ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$\tau = G\gamma + G\eta_s\,\dot{\gamma} \tag{2.11}$$

$$\tau^v = G\eta_s\,\dot{\gamma} \tag{2.12}$$

Yukarıdaki açıklamalardan görüldüğü gibi doğrusal Kelvin-Voigt modelinde, gerilmeler şekil değiştirme ve şekil değiştirme hızlarına doğrusal olarak bağlıdır. Problemde hareket denklemleri enerji yaklaşımıyla elde edilirken, rijitlikle orantılı viskoz sönümü verecek biçimde tanımlanan sönüm fonksiyonu izleyen şekilde verilir:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_V \sigma^v \dot{\varepsilon}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_V \tau^v \dot{\gamma}\,\mathrm{d}V \tag{2.13}$$

Burada, $\mathrm{d}V$ hacim elemanıdır. Kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin hesaba katılmadığı EBKT'de, (2.13) ile verilen sönüm fonksiyonu ifadesinde kayma gerilmesiyle ilgili ikinci integral ifadesi sıfır olarak alınmalıdır.

2.4 Yer Değiştirme Alanları

Şekil 2.1'den görüleceği üzere sağ üçlü kartezyen koordinat sistemi $\mathrm{O}(x,y,z)$ kirişin orta noktasında tanımlanmıştı. x ekseni kiriş ekseni doğrultusunda, y ekseni kesit genişliği doğrultusunda ve z ekseni kesit yüksekliği doğrultusundadır. Kirişe etki eden tüm dış yükler ve $\mathrm{O}(x,y,z)$ eksenleri doğrultusunda (u,v,w) şeklinde tanımlanan yer değiştirme bileşenleri, x ve z koordinatlarının fonksiyonu şeklindedir. Bir başka deyişle, ele alınan kirişin (x,z) düzleminde şekil değiştirdiği (eğildiği) kabul edilmiştir. Bu kabulün doğal sonucu olarak y ekseni doğrultusundaki v yer değiştirme bileşeni sıfırdır.

2.4.1 EBKT İçin Yer Değiştirme Alanları

Şekil 2.2a'da EBKT'ye göre bir kiriş kesitinin eğilmeden sonraki durumu gösterilmiştir. Daha önceden de açıklandığı gibi EBKT eğilmeden önce tarafsız eksene dik olan düzlem kesitlerin eğilmeden sonra da tarafsız eksene dik ve düzlem kaldığını ifade eder. Bu durumda EBKT için yer değiştirme alanı izleyen şekildedir:

$$u^E(x,\,z,\,t) = u_0^E(x,\,t) - z\frac{\partial w_0^E(x,\,t)}{\partial x} \tag{2.14}$$

$$v^E(x,\,z,\,t) = 0 \tag{2.15}$$

$$w^E(x,\,z,\,t) = w_0^E(x,\,t) \tag{2.16}$$

Burada u^E, v^E, w^E kiriş düşey kesiti üzerinde tarafsız eksenden z mesafesi kadar uzaklıktaki bir noktanın, sırasıyla, x, y, z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmelerini, u_0^E

kiriş ekseni üzerindeki bir noktanın boyuna yer değiştirmesi, w_0^E ise düşey yer değiştirmesidir. Kiriş genişliği boyunca tüm noktaların aynı yer değiştirmeyi yaptığı kabulüyle, bundan sonra u_0^E değeri orta düzlemdeki bir noktanın uzaması, w_0^E değeri çökmesi olarak adlandırılacaktır. Değişkenlerin üzerindeki E üst indisi ise EBKT'yi temsil etmektedir.

2.4.2 TKT İçin Yer Değiştirme Alanları

TKT'ye göre eğilmeden önce düzlem ve tarafsız eksene dik olan kesitler eğilmeden sonra da düzlem kalırlar, fakat tarafsız eksene dik kalmayıp bir ψ açısı kadar dönerler (Şekil 2.2b). Yani kayma gerilmelerinin kirişin eğilmesine etkisi göz önüne alınmış olur. TKT'de kesitte sabit bir kayma şekil değiştirmesi (sabit kayma gerilmesi) dağılımı kabul edilir. Ancak, mukavemetten bilindiği gibi kesme kuvveti sebebiyle kesitte oluşan kayma gerilmesi dağılışı sabit değildir. Bu sebepten dolayı oluşan bu hatayı düzeltmek için TKT'de kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısı kullanılır. Bu durumda, TKT için yer değiştirme alanı izleyen şekildedir (Wang vd., 2000):

$$u^T\left(x,\, z,\, t\right) = u_0^T\left(x,\, t\right) + z\psi^T\left(x,\, t\right) \tag{2.17}$$

$$v^T\left(x,\, z,\, t\right) = 0 \tag{2.18}$$

$$w^T\left(x,\, z,\, t\right) = w_0^T\left(x,\, t\right) \tag{2.19}$$

Burada T üst indisi TKT'yi temsil etmekte olup, ψ^T kesitlerin y ekseni etrafında dönmesini göstermektedir.

2.4.3 RBKT İçin Yer Değiştirme Alanları

RBKT'ye göre bir kirişin eğilmeden sonraki durumu Şekil 2.2c'de gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi bu teoride eğilmeden önce düzlem olan ve tarafsız eksene dik olan kesitler eğilmeden sonra ne tarafsız eksene dik kalır ne de düzlem kalırlar. Yani, kiriş kesitleri ψ kadar dönerken çarpılmaya da uğrarlar. Bu teoriye göre kiriş kesitinin en üst ve en alt liflerinde sıfır olacak şekilde parabolik kayma şekil değiştirmesi (dolayısıyla parabolik kayma gerilmesi) dağılışı öngörülür. Böylece, bu teoride kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısına gereksinim kalmaz. Söz konusu teoriye göre yer değiştirme alanı izleyen şekilde verilmektedir (Wang vd., 2000; Reddy 1984a; 1984b):

$$u^R\left(x,\, z,\, t\right)=u_0^R\left(x,\, t\right)+z\psi^R\left(x,t\right)-\beta z^3\left(\psi^R\left(x,\, t\right)+\frac{\partial w_0^R\left(x,\, t\right)}{\partial x}\right) \tag{2.20}$$

$$v^R\,(x,\, z,\, t)=0 \tag{2.21}$$

$$w^R\left(x,\, z,\, t\right)=w_0^R\left(x,\, t\right) \tag{2.22}$$

Burada R üst indisi RBKT'yi temsil etmekte olup, $\beta=4/(3h^2)$ olarak tariflenmiştir.

2.5 Yer Değiştirme, Şekil Değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

Yer değiştirmelerle şekil değiştirmeler arasındaki kinematik bağıntıların ilgili bileşenlerinin, doğrusal olmayan terimlerin ihmal edilmesi ve eğilmenin $\left(x,z\right)$ düzleminde olduğunun dikkate alınmasıyla, izleyen şekilde olduğu bilinmektedir:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.23}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.24}$$

Burada, ε_{xx} x ekseni doğrultusundaki boyuna şekil değiştirme, γ_{xz} (x-z) düzlemindeki kayma şekil değiştirmesidir. Şekil değiştirmelerden gerilmelere geçilirken, gerilmelerle şekil değiştirmelerin ve şekil değiştirme hızlarının orantılı olduğu, yani malzeme davranışının doğrusal Kelvin-Voigt modeline uyduğu kabul edilmiştir. Bundan sonraki bölümde yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki bağıntılar her üç kiriş teorisi için ayrı başlıklar altında verilecektir.

2.5.1 EBKT İçin Yer Değiştirme, Şekil değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

(2.23) ve (2.24) ile verilen yer değiştirmelerle şekil değiştirmeler arasındaki kinematik bağıntılar kullanılırsa EBKT'ye göre şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u^E}{\partial x}=\frac{\partial u_0^E}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0^E}{\partial x^2} \tag{2.25}$$

$$\gamma_{xz}=0 \tag{2.26}$$

EBKT için gerilme-şekil değiştirme bağıntısı izleyen şekilde tanımlanır:

$$\sigma_{xx} = \sigma^{e}_{xx} + \sigma^{v}_{xx} = E\,\varepsilon_{xx} + E\,\eta_b\,\dot{\varepsilon}_{xx} = E\frac{\partial u_0^E}{\partial x} - E\,z\frac{\partial^2 w_0^E}{\partial x^2} + E\,\eta_b\frac{\partial \dot{u}_0^E}{\partial x} - E\,\eta_b\,z\frac{\partial^2 \dot{w}_0^E}{\partial x^2} \qquad (2.27)$$

$$\tau_{xz} = 0 \qquad (2.28)$$

Burada, σ_{xx} x doğrultusundaki normal gerilme, $\tau_{xz} = 0$ (EBKT'nin bir sonucu olarak; gerçekte $\tau_{xz} \neq 0$) $(x - z)$ düzlemindeki kayma gerilmesi ve E Young (Elastisite) modülüdür ve değişkenlerin üzerindeki nokta zamana göre türevi göstermektedir.

2.5.2 TKT İçin Yer Değiştirme, Şekil değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

Yer değiştirmelerle şekil değiştirmeler arasındaki kinematik bağıntılar ve gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bünye bağıntıları kullanılırsa, TKT'ye göre şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^T}{\partial x} = \frac{\partial u_0^T}{\partial x} + z\frac{\partial \psi^T}{\partial x} \qquad (2.29)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u^T}{\partial z} + \frac{\partial w^T}{\partial x} = \frac{\partial w_0^T}{\partial x} + \psi^T \qquad (2.30)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma^{e}_{xx} + \sigma^{v}_{xx} = E\,\varepsilon_{xx} + E\,\eta_b\dot{\varepsilon}_{xx} = E\frac{\partial u_0^T}{\partial x} + E\,z\frac{\partial \psi^T}{\partial x} + E\,\eta_b\frac{\partial \dot{u}_0^T}{\partial x} + E\,\eta_b z\frac{\partial \dot{\psi}^T}{\partial x} \qquad (2.31)$$

$$\tau_{xz} = \tau^{e}_{xz} + \tau^{v}_{xz} = k_s\,G\,\gamma_{xz} + k_s\,G\,\eta_s\,\dot{\gamma}_{xz} = k_s\,G\left(\frac{\partial w_0^T}{\partial x} + \psi^T\right) + k_s\,G\,\eta_s\left(\frac{\partial \dot{w}_0^T}{\partial x} + \dot{\psi}^T\right) \qquad (2.32)$$

Burada G kayma modülü ve k_s kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısıdır. k_s katsayısı kesit geometrisi ve malzeme özelliğine (Poisson oranına) bağlı olarak farklı değerler almaktadır (Cowper, 1966).

2.5.3 RBKT İçin Yer Değiştirme, Şekil değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

Bu teoriye göre şekil değiştirme ve gerilme ifadeleri TKT'ye benzer şekilde elde edilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^R}{\partial x} = \frac{\partial u_0^R}{\partial x} + z\frac{\partial \psi^R}{\partial x} - \beta z^3\left(\frac{\partial \psi^R}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0^R}{\partial x^2}\right) \qquad (2.33)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u^R}{\partial z} + \frac{\partial w^R}{\partial x} = \left(1 - 3\beta z^2\right)\left(\psi^R + \frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right) \tag{2.34}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^v = E\,\varepsilon_{xx} + E\,\eta_b\,\dot{\varepsilon}_{xx} = E\frac{\partial u_0^R}{\partial x} + E\,z\frac{\partial \psi^R}{\partial x} - E\beta z^3\left(\frac{\partial \psi^R}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0^R}{\partial x^2}\right) +$$

$$E\,\eta_b\frac{\partial \dot{u}_0^R}{\partial x} + E\,\eta_b\,z\frac{\partial \dot{\psi}^R}{\partial x} - E\,\eta_b\beta z^3\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R}{\partial x} + \frac{\partial^2 \dot{w}_0^R}{\partial x^2}\right) \tag{2.35}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e + \tau_{xz}^v = G\,\gamma_{xz} + G\,\eta_s\,\dot{\gamma}_{xz} = G\left(1 - 3\beta z^2\right)\left(\psi^R + \frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right) + G\,\eta_s\left(1 - 3\beta z^2\right)\left(\dot{\psi}^R + \frac{\partial \dot{w}_0^R}{\partial x}\right) \tag{2.36}$$

2.6 Şekil Değiştirme Enerjisi

Bir cisimde dış kuvvetlerin oluşturduğu iç kuvvetlerin, şekil değiştirme esnasında yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi veya iç kuvvetlerin işi denir. Dağılı iç kuvvetlere (gerilmelere) göre hesaplanan şekil değiştirme enerjisi, elastik cismin yalnız şekil değiştirmiş durumunu tarif eden büyüklüklere bağlı olup, çok defa elastik potansiyel enerji ya da iç potansiyel enerji adını alır. Klasik mekanikten de bilindiği üzere şekil değiştirme enerjisi

$$U_i = \frac{1}{2}\int_V \left[\sigma\right]\left[\varepsilon\right]\mathrm{d}V \tag{2.37}$$

şeklindedir. Burada $\left[\sigma\right]$ gerilme, $\left[\varepsilon\right]$ şekil değiştirme tansörü ve $\mathrm{d}V$ hacim elemanıdır.

2.6.1 EBKT İçin Şekil Değiştirme Enerjisi

(2.37) ile verilen şekil değiştirme enerjisi EBKT için, kartezyen koordinatlarda daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_i = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\int_A \sigma_{xx}^e\,\varepsilon_{xx}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}x \tag{2.38}$$

(2.25) ve (2.27) eşitlikleri (2.38) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir t anı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde elde edilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[A_{xx} \left(\frac{\partial u_0^E(x,t)}{\partial x} \right)^2 + D_{xx} \left(\frac{\partial^2 w_0^E(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \tag{2.39}$$

Burada

$$\left(A_{xx},\, D_{xx} \right) = \int_A \left(1,\, z^2 \right) E \;\mathrm{d}A \tag{2.40}$$

şeklinde tariflenen kesit rijitlikleri daha açık bir şekilde izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$A_{xx} = E\,b\,h = E\,A\,,\;\; D_{xx} = E\,\frac{b\,h^3}{12} = E\,I \tag{2.41}$$

(2.41) eşitliğinde I kesit atalet momenti, EA kirişin uzama rijitliği, EI kirişin eğilme rijitliği olarak bilinir.

2.6.2 TKT İçin Şekil Değiştirme Enerjisi

(2.37) ile verilen şekil değiştirme enerjisi TKT için, kartezyen koordinatlarda daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_A \left(\sigma_{xx}^e\, \varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^e\, \gamma_{xz} \right) \mathrm{d}A\, \mathrm{d}x \tag{2.42}$$

(2.29)-(2.32) eşitlikleri (2.42) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir t anı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde elde edilir:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[A_{xx} \left(\frac{\partial u_0^T(x,t)}{\partial x} \right)^2 + D_{xx} \left(\frac{\partial \psi^T(x,t)}{\partial x} \right)^2 + k_s\, A_{xz} \left(\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial x} + \psi^T(x,t) \right)^2 \right] \mathrm{d}x \tag{2.43}$$

Burada

$$A_{xz} = \int_A G\;\mathrm{d}A = G\,b\,h = G\,A\,. \tag{2.44}$$

2.6.3 RBKT İçin Şekil Değiştirme Enerjisi

RBKT için (2.33)-(2.36)'da elde edilen gerilme ve şekil değiştirmeler, şekil değiştirme enerjisinin (2.42) eşitliği ile verilen integral ifadesinde yerine yazılır ve gerekli integrasyonlar yapılırsa, RBKT için herhangi bir andaki şekil değiştirme enerjisinin ifadesi izleyen şekli alır:

$$U_i = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[A_{xx}\left(\frac{\partial u_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + D_{xx}\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2\beta F_{xx}\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2\beta F_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right) + 2\beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right) +$$

$$\beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + A_{xz}\left(\psi^R(x,t)\right)^2 - 6\beta D_{xz}\left(\psi^R(x,t)\right)^2 - 12\beta D_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\psi^R(x,t)\right) +$$

$$2A_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\psi^R(x,t)\right) + 9\beta^2 F_{xz}\left(\psi^R(x,t)\right)^2 + 18\beta^2 F_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\psi^R(x,t)\right) +$$

$$\left. 9\beta^2 F_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 6\beta D_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + A_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 \right] \mathrm{d}x \tag{2.45}$$

(2.45) eşitliğinde

$$\left(A_{xx},\, D_{xx},\, F_{xx},\, H_{xx}\right) = \int_A \left(1,\, z^2,\, z^4,\, z^6\right) E \,\mathrm{d}A \tag{2.46}$$

$$\left(A_{xz},\, D_{xz},\, F_{xz}\right) = \int_A \left(1,\, z^2,\, z^4\right) G \,\mathrm{d}A \tag{2.47}$$

şeklinde tanımlanan kesit rijitlikleri dikdörtgen bir kesit için daha açık olarak izleyen şekillerde yazılabilir:

$$D_{xx} = E\,\frac{b\,h^3}{12} = EI,\; F_{xx} = E\,\frac{b\,h^5}{80},\; H_{xx} = E\,\frac{b\,h^7}{448} \tag{2.48}$$

$$A_{xz} = G\,b\,h = GA,\; D_{xz} = G\,\frac{b\,h^3}{12} = GI,\; F_{xz} = G\,\frac{b\,h^5}{80} \tag{2.49}$$

2.7 Sönüm Fonksiyonu

Bu çalışmada malzeme modeli olarak doğrusal Kelvin-Voigt modeli kullanılmıştır. Enerji yaklaşımıyla hareket denklemlerinin elde edilmesinde, rijitlikle orantılı viskoz sönümü (Rayleigh sönümü) verecek şekilde tanımlanan sönüm fonksiyonu (2.13) eşitliği ile aşağıdaki şekilde ifade edilmişti:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_V \sigma^v \dot{\varepsilon}\, \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_V \tau^v \dot{\gamma}\, \mathrm{d}V \tag{2.50}$$

Böylece, bundan sonraki kısımda her üç kiriş teorisi için, (2.50) eşitliği kullanılarak elde edilen sönüm fonksiyonları verilmiştir.

2.7.1 EBKT İçin Sönüm Fonksiyonu

(2.50) eşitliği ile verilen sönüm fonksiyonu EBKT için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\int_A \sigma_{xx}^v \dot{\varepsilon}_{xx}\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}x \tag{2.51}$$

(2.25) ve (2.27) eşitlikleri (2.51) eşitliğinde yerlerine yazılır ve daha önce şekil değiştirme enerjisinin elde edilmesinde gerçekleştirilen matematiksel işlemler burada da yapılırsa, herhangi bir t anı için sönüm fonksiyonu izleyen şekilde elde edilir:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[\eta_b A_{xx}\left(\frac{\partial \dot{u}_0^E(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \eta_b D_{xx}\left(\frac{\partial^2 \dot{w}_0^E(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{2.52}$$

(2.52) eşitliğinde değişkenlerin üzerindeki nokta zamana göre türevi ifade etmektedir.

2.7.2 TKT İçin Sönüm Fonksiyonu

(2.50) eşitliği ile verilen sönüm fonksiyonu TKT için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\int_A \left(\sigma_{xx}^v \dot{\varepsilon}_{xx} + \tau_{xz}^v \dot{\gamma}_{xz}\right)\mathrm{d}A\, \mathrm{d}x \tag{2.53}$$

(2.29)-(2.32) eşitlikleri (2.53) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir t anı için sönüm fonksiyonu izleyen şekilde elde edilir:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[\eta_b A_{xx}\left(\frac{\partial \dot{u}_0^T(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \eta_b D_{xx}\left(\frac{\partial \dot{\psi}^T(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \eta_s k_s A_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^T(x,t)}{\partial x} + \dot{\psi}^T(x,t)\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{2.54}$$

2.7.3 RBKT İçin Sönüm Fonksiyonu

RBKT için (2.33)-(2.36)'da elde edilen gerilme ve şekil değiştirmeler, sönüm fonksiyonu ifadesinde yerine yazılır ve gerekli integrasyonlar yapılırsa, RBKT için herhangi bir andaki sönüm fonksiyonu izleyen şekli alır:

$$R_D = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[\eta_b A_{xx}\left(\frac{\partial \dot{u}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \eta_b D_{xx}\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2\eta_b \beta F_{xx}\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\eta_b \beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2\eta_b \beta F_{xx}\left(\frac{\partial^2 \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R(x,t)}{\partial x}\right) +$$

$$2\eta_b \beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial^2 \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R(x,t)}{\partial x}\right) + \eta_b \beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial^2 \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + \eta_s A_{xz}\left(\dot{\psi}^R(x,t)\right)^2 -$$

$$6\,\eta_s \beta D_{xz}\left(\dot{\psi}^R(x,t)\right)^2 - 12\eta_s \beta D_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\dot{\psi}^R(x,t)\right) + 9\eta_s \beta^2 F_{xz}\left(\dot{\psi}^R(x,t)\right)^2 +$$

$$2\eta_s A_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\dot{\psi}^R(x,t)\right) + 18\eta_s \beta^2 F_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\dot{\psi}^R(x,t)\right) +$$

$$\left. 9\eta_s \beta^2 F_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 6\eta_s \beta D_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \eta_s A_{xz}\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x \qquad (2.55)$$

2.8 Kinetik Enerji

Bir kiriş için kinetik enerji izleyen şekilde tanımlanabilir:

$$K_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\,(v_x^2 + v_z^2)\,\mathrm{d}V \qquad (2.56)$$

Burada ρ kirişin birim hacim kütlesi, v_x ve v_z, sırasıyla, kiriş üzerindeki bir noktanın hızının x (boyuna) ve z (düşey) bileşenleridir. v_x ve v_z hız bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$v_x = \frac{\partial u(x,\, z,\, t)}{\partial t} \qquad (2.57)$$

$$v_z = \frac{\partial w(x,\, z,\, t)}{\partial t} \qquad (2.58)$$

2.8.1 EBKT İçin Kinetik Enerji

EBKT için (2.14) ve (2.16) ile verilmiş olan yer değiştirme alanları (2.57) ve (2.58) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir noktanın hızının bileşenleri izleyen şekilde elde edilir:

$$v_x = \frac{\partial u^E(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0^E(x, t)}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w_0^E(x, t)}{\partial x \partial t} \tag{2.59}$$

$$v_z = \frac{\partial w^E(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial w_0^E(x, t)}{\partial t} \tag{2.60}$$

Elde edilen hızlar (2.56) eşitliği ile verilen kinetik enerji ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa, herhangi bir t anındaki kinetik enerji izleyen şekilde elde edilir:

$$K_e = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[I_A\left(\frac{\partial u_0^E(x, t)}{\partial t}\right)^2 + I_A\left(\frac{\partial w_0^E(x, t)}{\partial t}\right)^2 + I_D\left(\frac{\partial^2 w_0^E(x, t)}{\partial x \partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{2.61}$$

Burada

$$\left(I_A, I_D\right) = \int_A \left(1, z^2\right)\rho \, \mathrm{d}A \tag{2.62}$$

şeklinde tariflenen kesitle ilgili atalet büyüklükleri daha açık olarak izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$I_A = \rho b h = \rho A, \quad I_D = \rho \frac{b h^3}{12} = \rho I \tag{2.63}$$

2.8.2 TKT İçin Kinetik Enerji

TKT için hızlar aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$v_x = \frac{\partial u^T(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0^T(x, t)}{\partial t} + z\frac{\partial \psi^T(x, t)}{\partial t} \tag{2.64}$$

$$v_z = \frac{\partial w^T(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial w_0^T(x, t)}{\partial t} \tag{2.65}$$

(2.64) ve (2.65)’deki hızlar (2.56) kinetik enerji ifadesinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir t anındaki kinetik enerji izleyen şekilde elde edilir:

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[I_A \left(\frac{\partial u_0^T(x,t)}{\partial t} \right)^2 + I_A \left(\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial t} \right)^2 + I_D \left(\frac{\partial \psi^T(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \qquad (2.66)$$

2.8.3 RBKT İçin Kinetik Enerji

RBKT için (2.20) ve (2.21) ile verilmiş olan yer değiştirme alanları (2.57) ve (2.58) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir noktanın hızının bileşenleri izleyen şekilde elde edilir:

$$v_x = \frac{\partial u^R(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0^R(x,t)}{\partial t} + z \frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} - \beta z^3 \left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \qquad (2.67)$$

$$v_z = \frac{\partial w^R(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial t} \qquad (2.68)$$

Elde edilen hızlar (2.56) eşitliği ile verilen kinetik enerji ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa herhangi bir t anındaki kinetik enerji izleyen şekilde elde edilir:

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[I_A \left(\frac{\partial u_0^R(x,t)}{\partial t} \right)^2 + I_D \left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} \right)^2 - 2\beta I_F \left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \right.$$

$$\beta^2 I_H \left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} \right)^2 - 2\beta I_F \left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} \right) +$$

$$\left. 2\beta^2 I_H \left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial t} \right) + I_A \left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \beta^2 I_H \left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \qquad (2.69)$$

Burada

$$\left(I_A, I_D, I_F, I_H \right) = \int_A \left(1, z^2, z^4, z^6 \right) \rho \, \mathrm{d}A \qquad (2.70)$$

şeklinde tariflenen kesitle ilgili atalet büyüklükleri daha açık olarak izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$I_A = \rho b h = \rho A\,,\;\; I_D = \rho\,\frac{b h^3}{12} = \rho I\,,\;\;\; I_F = \rho\,\frac{b h^5}{80}\,,\;\; I_H = \rho\,\frac{b h^7}{448} \tag{2.71}$$

2.9 Dış Kuvvetlerin Potansiyeli

Dışmerkez basınç kuvvetinin kesitin ağırlık merkezine etkiyen bir kuvvet ve kuvvet çifti olarak taşınmasıyla birlikte, dış yüklere ait potansiyel ifadeleri aşağıda verilmiştir:

2.9.1 EBKT İçin Dış Kuvvetlerin Potansiyeli

Kirişe etkiyen hareketli harmonik yük, eksenel basınç kuvveti ve uç momentlerinin potansiyeli izleyen şekilde verilmektedir:

$$U_d = -P(t)\, w_0^E\left(x_P, t\right)\left[c\left(t - t_g\right) - c\left(t - t_ç\right)\right] - T\left[-u_0^E\left(x_B, t\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\partial w_0^E\left(x, t\right)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\right] +$$

$$M_T\,\frac{\partial w_0^E\left(x_A, t\right)}{\partial x} - M_T\,\frac{\partial w_0^E\left(x_B, t\right)}{\partial x} \tag{2.72}$$

$$c(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \\ 0, & 0 > t \end{cases} \tag{2.73}$$

$$P(t) = P\sin\left(\Omega t\right) \tag{2.74}$$

$$M_T = T \cdot e \tag{2.75}$$

olup, hareketli mesnetteki $u_0^E\left(x_B, t\right)$ yatay yer değiştirmesi negatif çıkacağından, negatif potansiyel elde etmek için $u_0^E\left(x_B, t\right)$ yer değiştirmesinin önüne eksi işareti konmuştur. Bilindiği gibi geometrik doğrusal analizde yatay $u_0\left(x,t\right)$ yer değiştirmesi ile düşey $w_0\left(x,t\right)$ yer değiştirmesi arasında etkileşim yoktur. T basınç kuvveti sabit olduğundan $u_0\left(x,t\right)$ de zamanla değişmez ve mukavemet derslerinden hatırlanacağı üzere $u_0\left(x,t\right) = -T\left(x + L/2\right)/EA$ olur. Burada basınç olan T şekiller üzerinde ve hesaplarda pozitif alınmıştır. Bu nedenle basınç kuvveti altında kısalma olduğunu ifade etmek için $T\left(x + L/2\right)/EA$ ifadesinin önüne eksi işareti konmuştur. Yatay ve düşey yer değiştirmeler arasında etkileşim olmadığından, eğilmeden dolayı sağ ucun zamana bağlı hareketi nedeniyle ortaya çıkan potansiyelin dikkate alınabilmesi için, sağ uçtaki yer değiştirme eğilmiş durumdaki kiriş boyu ile eğilmemiş durumdaki kiriş boyu arasındaki fark (2.72) eşitliğindeki $1/2\int_{-L/2}^{L/2}\left(\partial w_0^E\left(x,t\right)/\partial x\right)^2 \mathrm{d}x$ terimi vasıtasıyla hesaplarda dikkate alınmıştır. (2.72)-(2.75) eşitliklerinde $w_0^E\left(x_P,t\right)$ herhangi bir t anında hareketli harmonik yükün altındaki düşey yer değiştirme, $c\left(t\right)$ birim adım fonksiyonu, t_g hareketli yükün kiriş üzerine geldiği an, $t_ç$ hareketli yükün kirişi terk ettiği an, Ω hareketli yükün zorlama frekansı, T dışmerkez basınç kuvveti, e dışmerkez basınç kuvvetinin dışmerkezliği, x_A ve x_B mesnetlerin koordinatları, $x_p\left(t\right)$ hareketli harmonik yükün kiriş üzerindeki konumu olup aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$x_P\left(t\right)=v\cdot t-L/2\ ,\ -\frac{L}{2}\le x_P\left(t\right)\le\frac{L}{2},\ t_g=0\le t\le t_ç=\frac{L}{v} \tag{2.76}$$

Burada v hareketli harmonik yükün hızıdır.

2.9.2 TKT İçin Dış Kuvvetlerin Potansiyeli

EBKT'de kesit dönmeleri çökmelerin birinci türeviyle ifade edilir. TKT'de ise kesit dönmeleri ayrı bir $\psi^T\left(x,t\right)$ dönme fonksiyonu ile tanımlanmıştır. TKT için dış kuvvetlerin potansiyelinin, EBKT için (2.72) ile verilen potansiyel ifadesinden farkı uç momentlerinin potansiyelinden kaynaklanmaktadır: TKT için dış kuvvetlerin potansiyeli izleyen şekilde olacaktır:

$$U_d=-P\left(t\right)w_0^T\left(x_P,t\right)\left[c\left(t-t_g\right)-c\left(t-t_ç\right)\right]-T\left[-u_0^T\left(x_B,t\right)+\frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\partial w_0^T\left(x,t\right)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]+$$

$$M_T\ \psi^T\left(x_A,t\right)-M_T\ \psi^T\left(x_B,t\right) \tag{2.77}$$

2.9.3 RBKT İçin Dış Kuvvetlerin Potansiyeli

RBKT için dış kuvvetlerin potansiyeli (2.77)'ye benzer şekilde aşağıdaki gibi olur:

$$U_d=-P\left(t\right)w_0^R\left(x_P,t\right)\left[c\left(t-t_g\right)-c\left(t-t_ç\right)\right]-T\left[-u_0^R\left(x_B,t\right)+\frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\partial w_0^R\left(x,t\right)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]+$$

$$M_T\ \psi^R\left(x_A,t\right)-M_T\ \psi^R\left(x_B,t\right) \tag{2.78}$$

2.10 Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Hareket denklemleri Lagrange denklemleri (ayrıntılı bilgi için Ek1'e bkz.) yardımıyla elde edilmiştir. Bu amaçla, söz konusu üç kiriş teorisi için gerekli enerji ifadeleri çıkarılmıştır. Lagrange çarpanları formülasyonuyla probleme ait Lagrangian fonksiyoneli teşkil edilmiştir. Sönüm fonksiyonlarının dikkate alınmasıyla birlikte ve Lagrange denklemlerinin kullanımıyla hareket denklemleri elde edilmiştir. Kirişe ait dinamik yer değiştirmelere yaklaşım için polinomlar kullanılmıştır. Problemin fonksiyonelinin oluşturulması ve hareket denklemlerinin elde edilmesi, söz konusu kiriş teorilerinin kullanılması durumları için birbirine çok benzer olduğundan, sadelik amacıyla, bundan sonraki işlemler aynı başlık altında verilmiştir. Probleme ait fonksiyonel kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı olarak izleyen şekildedir:

$$J = K_e - \left(U_i + U_d\right) \tag{2.79}$$

Lagrange denklemlerinin uygulanabilmesi için kirişe ait $w_0\left(x,t\right)$ ve $u_0\left(x,t\right)$ yer değiştirme fonksiyonları ile $\psi\left(x,t\right)$ dönme fonksiyonları için bazı ifadelerin seçilmesi gereklidir. Bu çalışmada, söz konusu bilinmeyen büyüklüklere polinomlar kullanılarak yaklaşım sağlanmaya çalışılmıştır. Bilindiği gibi, sadece geometrik sınır koşullarını sağlayan bazı ifadeler $w_0\left(x,t\right)$, $u_0\left(x,t\right)$ ve $\psi\left(x,t\right)$ için seçilir ve Lagrange denklemleri kullanılırsa doğal sınır koşulları da sağlatılmış olur. Lagrange denklemleri kullanılarak, yer değiştirme fonksiyonları olan $w_0\left(x,t\right)$, $u_0\left(x,t\right)$ve dönme fonksiyonu olan $\psi\left(x,t\right)$'nin kabul edilebilir fonksiyonların doğrusal serisi olarak temsil edilmesiyle ve serideki katsayıların Lagrange denklemlerini sağlayacak şekilde ayarlanmasıyla yer değiştirme ve dönme fonksiyonları için bir yaklaşık çözüm bulunur. Lagrange eşitliğinin uygulanması için çözüm fonksiyonları olan $w_0\left(x,t\right)$, $u_0\left(x,t\right)$ ve $\psi\left(x,t\right)$ ifadeleri uzay bağımlı x^0, x^1, x^2,...., x^{N-1} koordinatları ve zaman bağımlı genelleştirilmiş $A_n\left(t\right)$, $B_n\left(t\right)$ ve $C_n\left(t\right)$ koordinatlarına çarpım şeklinde ayrılmıştır. Böylece yer değiştirme ve dönme fonksiyonları izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$w_0\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{N} A_n\left(t\right) x^{n-1} \tag{2.80}$$

$$u_0\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{N} B_n\left(t\right) x^{n-1} \tag{2.81}$$

$$\psi\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{N} C_n\left(t\right)\, x^{n-1} \tag{2.82}$$

EBKT'de kesit dönmeleri çökmenin birinci türeviyle ifade edildiğinden, (2.82) eşitliği ile bağımsız değişken olarak verilen $\psi\left(x,t\right)$ kesit dönmelerinin TKT ve RBKT ile yapılan formülasyonda söz konusu olduğunun hatırlatılması faydalı olacaktır. (2.80)-(2.83) eşitliklerinden geometrik sınır koşullarının sağlanmadığı açıkça görülmektedir. Yer değiştirme fonksiyonları belirlenirken fonksiyonların geometrik sınır koşullarını sağlaması gerekir. Bu şartı haiz bir fonksiyon kolaylıkla belirlenebilir. Ancak şu unutulmamalıdır ki, yer değiştirme fonksiyonu sınır şartlarına bağlıdır ve sınır şartları değiştiği zaman yer değiştirme fonksiyonunun yeniden belirlenmesi gerekecektir. Lagrange çarpanları burada önem kazanmaktadır. Lagrange çarpanları kullanılarak mesnet koşullarının ve mesnet yerlerinin değişimi çok rahatlıkla incelenebilir. Bu nedenle problemde mesnet koşulları Lagrange çarpanları ile sağlatılmış olup, mesnet koşulları izleyen şekildedir:

$$w_0\left(x_A,\, t\right)=0,\;\; w_0\left(x_B,\, t\right)=0,\;\; u_0\left(x_A,\, t\right)=0 \tag{2.83}$$

Burada x_A ve x_B mesnet koordinatlarını göstermektedir. Bu çalışmada kirişin uç noktalarındaki düşey yer değiştirmeler ile sol ucundaki boyuna yer değiştirme tutulmuştur. Bu sebeple, bu noktalardaki mesnet kuvvetlerinin yapmış olduğu işin sıfır olması gerekir. Bu noktalar tutulu olmadığı zaman, söz konusu noktaların yapacağı yer değiştirmeler serbest eleman için seçilen yer değiştirme fonksiyonlarının o noktadaki değerine eşittir. Bu değer bir α_k ($k=1,\,2,\,....,\,n$, n: kısıtlılık sayısı) değeri ile çarpılıp mevcut fonksiyonele eklenirse tutulu sistem için Lagrangian fonksiyoneli (veya değiştirilmiş fonksiyonel) izleyen şekilde oluşturulabilir:

$$J^*=J+\alpha_1\, w_0\left(x_A,\, t\right)+\alpha_2\, w_0\left(x_B,\, t\right)+\alpha_3\, u_0\left(x_A,\, t\right) \tag{2.84}$$

(2.84) eşitliğindeki α_1, α_2 ve α_3 büyüklükleri Lagrange çarpanları olup, ele alınan problemde mesnet tepkilerine karşılık gelmektedir. Lagrange denklemlerinin genel ifadesi aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\frac{\partial J^*}{\partial q_n}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J^*}{\partial \dot{q}_n}\right)+\,Q_D=0 \tag{2.85}$$

Burada, Q_D genelleştirilmiş sönüm kuvveti (Hurty ve Rubenstein, 1967; Petyt, 1990) olup, daha önce tanımlanmış olan sönüm fonksiyonlarından izleyen şekilde elde edilmektedir:

$$Q_D = -\frac{\partial R_D}{\partial \dot{q}_n} \tag{2.86}$$

Aşağıdaki tanımlamalar yapılsın:

$$q_n = A_n\,, \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{2.87}$$

$$q_n = B_{n-N} \qquad n = N+1, ..., 2N \tag{2.88}$$

$$q_n = C_{n-2N} \qquad n = 2N+1, ..., 3N \tag{2.89}$$

$$q_{3N+1} = \alpha_1\,,\; q_{3N+2} = \alpha_2\,,\; q_{3N+3} = \alpha_3 \tag{2.90}$$

EBKT'de kesit dönmeleri çökmelere bağlı olarak ifade edildiğinden (2.89) eşitliği EBKT için hareket denklemlerinin çıkarılmasında kullanılmamıştır. (2.80)-(2.82) eşitlikleri (2.84)'de yerlerine yazılır ve (2.85) ile verilen Lagrange denklemleri uygulanırsa aşağıda matris formunda gösterilen zamana bağlı, doğrusal hareket denklemleri sistemi elde edilir.

$$[K]\{q(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [M]\{\ddot{q}(t)\} = \{F(t)\} \tag{2.91}$$

Burada, $\{q(t)\} = \{A(t),\; B(t), C(t),\; \alpha_k(t)\}^T$, $[K]$ sistem rijitlik matrisi, $[C]$ sönüm matrisi, $[M]$ kütle matrisi, $\{F(t)\}$ zamana bağlı olan yük vektörüdür. (2.91) ile verilen hareket denklemleri sistemindeki matrislerin boyutu EBKT için $(2N+3)\times(2N+3)$, TKT ve RBKT için $(3N+3)\times(3N+3)$ dür. Bundan sonraki bölümlerde (2.91) eşitliği ile verilen hareket denklemleri, söz konusu kiriş teorilerinin kullanılması durumları için daha ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

2.10.1 EBKT İçin Hareket Denklemleri

(2.91) ile verilmiş olan hareket denklemleri sistemi EBKT için daha açık olarak izleyen matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^1]_{N\times N} - [K^G]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [K^{S4}]_{N\times 3} \\ [K^{S1}]_{3\times N} & [K^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{\alpha(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [C^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}(t)\} \\ \{\dot{B}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [M^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [M^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{A}(t)\} \\ \{\ddot{B}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1(t)\} \\ \{f^2(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{2.92}$$

Burada $[K^1]$ eğilme rijitliği matrisi, $[K^2]$ uzama rijitliği matrisi, $[K^G]$ eksenel basınç kuvvetinden kaynaklanan geometrik rijitlik matrisi (Humar, 1990), $[K^{S1}]$, $[K^{S2}]$, $[K^{S3}]$ ve $[K^{S4}]$ Lagrange çarpanlarının kullanımından elde edilen matrisler, $[M^1]$ kirişin eğilme titreşiminden elde edilen kütle matrisi, $[M^2]$ boyuna titreşim sebebiyle gelen kütle matrisi, $\{f^1(t)\}$ ve $\{f^2(t)\}$ zaman bağımlı yük vektörleridir. (2.92) eşitliğinde verilen matris ve vektörlerin elemanları aşağıda verilmiştir:

$$K^1_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} D_{xx} (x^{m-1})''(x^{n-1})'' \, \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.93}$$

$$K^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} (x^{m-1})'(x^{n-1})' \, \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.94}$$

$$K^G_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} T (x^{m-1})'(x^{n-1})' \, \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.95}$$

$$C^1_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b D_{xx} (x^{m-1})''(x^{n-1})'' \, \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.96}$$

$$C^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b (x^{m-1})'(x^{n-1})' \, \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.97}$$

$$M^1_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left[I_A (x^{m-1})(x^{n-1}) + I_D (x^{m-1})'(x^{n-1})' \right] \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.98}$$

$$M^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} I_A (x^{m-1})(x^{n-1}) \, \mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.99}$$

$$K^{S1}_{mn} = (x_A)^{n-1} \qquad m = 1, \; n = 1, 2, ..., N \tag{2.100}$$

$$K^{S1}_{mn} = (x_B)^{n-1} \qquad m = 2, \; n = 1, 2, ..., N \tag{2.101}$$

$$K^{S1}_{mn} = 0 \qquad m = 3, \; n = 1, 2, ..., N \tag{2.102}$$

$$K_{mn}^{S\,2}=0 \qquad m=1,\ n=1,\ 2,....,N \tag{2.103}$$

$$K_{mn}^{S\,2}=0 \qquad m=2,\ n=1,\ 2,....,N \tag{2.104}$$

$$K_{mn}^{S\,2}=(x_A)^{n-1} \qquad m=3,\ n=1,\ 2,....,N \tag{2.105}$$

$$K_{mn}^{S\,3}=-(x_A)^{m-1} \qquad m=1,2,....,N,\ n=1 \tag{2.106}$$

$$K_{mn}^{S\,3}=-(x_B)^{m-1} \qquad m=1,2,....,N,\ n=2 \tag{2.107}$$

$$K_{mn}^{S\,3}=0 \qquad m=1,2,....,N,\ n=3 \tag{2.108}$$

$$K_{mn}^{S\,4}=0 \qquad m=1,2,....,N,\ n=1 \tag{2.109}$$

$$K_{mn}^{S\,4}=0 \qquad m=1,2,....,N,\ n=2 \tag{2.110}$$

$$K_{mn}^{S\,4}=-(x_A)^{m-1} \qquad m=1,2,....,N,\ n=3 \tag{2.111}$$

$$f_n^{\,1}=P\left(t\right)(x_P^{n-1})-M_T(x_A^{n-1})'+M_T(x_B^{n-1})' \qquad n=1,2,....,N \tag{2.112}$$

$$f_n^{\,2}=-T\,(x_B^{n-1}) \qquad n=1,2,....,N \tag{2.113}$$

2.10.2 TKT İçin Hareket Denklemleri

(2.91) ile verilmiş olan hareket denklemleri sistemi TKT için daha açık olarak izleyen matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^1]_{N\times N}-[K^G]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [K^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^{S4}]_{N\times 3} \\ [K^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [K^{S1}]_{3\times N} & [K^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{C(t)\} \\ \{\alpha(t)\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [C^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [C^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [C^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}(t)\} \\ \{\dot{B}(t)\} \\ \{\dot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [M^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [M^2]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [M^3]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{A}(t)\} \\ \{\ddot{B}(t)\} \\ \{\ddot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1(t)\} \\ \{f^2(t)\} \\ \{f^3(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{2.114}$$

(2.114) eşitliğindeki rijitlik, sönüm ve kütle matrislerinin elemanları izleyen şekildedir:

$$K^1_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} k_s\, A_{xz} (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.115}$$

$$K^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} k_s\, A_{xz} (x^{m-1})(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.116}$$

$$K^3_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.117}$$

$$K^4_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} k_s\, A_{xz} (x^{m-1})'(x^{n-1})\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.118}$$

$$K^5_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left[D_{xx} (x^{m-1})'(x^{n-1})' + k_s\, A_{xz} (x^{m-1})(x^{n-1}) \right] \mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.119}$$

$$K^G_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} T (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.120}$$

$$C^1_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s\, k_s\, A_{xz} (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.121}$$

$$C^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s\, k_s\, A_{xz} (x^{m-1})(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.122}$$

$$C^3_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b\, A_{xx} (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.123}$$

$$C^4_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s\, k_s\, A_{xz} (x^{m-1})'(x^{n-1})\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.124}$$

$$C^5_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left[\eta_b\, D_{xx} (x^{m-1})'(x^{n-1})' + \eta_s\, k_s\, A_{xz} (x^{m-1})(x^{n-1}) \right] \mathrm{d}x \quad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.125}$$

$$M_{mn}^{1}=\int_{-L/2}^{L/2} I_A\,(x^{m-1})(x^{n-1})\ \mathrm{d}x \qquad m,\,n=1,\,2,\,....,\,N \qquad (2.126)$$

$$M_{mn}^{2}=\int_{-L/2}^{L/2} I_A\,(x^{m-1})(x^{n-1})\ \mathrm{d}x \qquad m,\,n=1,\,2,\,....,\,N \qquad (2.127)$$

$$M_{mn}^{3}=\int_{-L/2}^{L/2} I_D\,(x^{m-1})(x^{n-1})\ \mathrm{d}x \qquad m,\,n=1,\,2,\,....,\,N \qquad (2.128)$$

$$K_{mn}^{S\,1}=(x_A)^{n-1} \qquad m=1,\ n=1,2,....,N \qquad (2.129)$$

$$K_{mn}^{S\,1}=(x_B)^{n-1} \qquad m=2,\ n=1,2,....,N \qquad (2.130)$$

$$K_{mn}^{S\,1}=0 \qquad m=3,\ n=1,2,....,N \qquad (2.131)$$

$$K_{mn}^{S\,2}=0 \qquad m=1,\ n=1,\,2,....,N \qquad (2.132)$$

$$K_{mn}^{S\,2}=0 \qquad m=2,\ n=1,\,2,....,N \qquad (2.133)$$

$$K_{mn}^{S\,2}=(x_A)^{n-1} \qquad m=3,\ n=1,\,2,....,N \qquad (2.134)$$

$$K_{mn}^{S\,3}=-(x_A)^{m-1} \qquad m=1,2,....,N,\ n=1 \qquad (2.135)$$

$$K_{mn}^{S\,3}=-(x_B)^{m-1} \qquad m=1,2,....,N,\ n=2 \qquad (2.136)$$

$$K_{mn}^{S\,3}=0 \qquad m=1,2,....,N,\ n=3 \qquad (2.137)$$

$$K_{mn}^{S\,4}=0 \qquad m=1,2,....,N,\ n=1 \qquad (2.138)$$

$$K_{mn}^{S\,4}=0 \qquad m=1,2,....,N,\ n=2 \qquad (2.139)$$

$$K_{mn}^{S\,4}=-(x_A)^{m-1} \qquad m=1,2,....,N,\ n=3 \qquad (2.140)$$

$$f_n^{1}=P\big(t\big)(x_P^{n-1}) \qquad n=1,2,....,N \qquad (2.141)$$

$$f_n^{2}=-T\,(x_B^{n-1}) \qquad n=1,2,....,N \qquad (2.142)$$

$$f_n^{3}=-M_T\,(x_A^{n-1})+M_T\,(x_B^{n-1}) \qquad n=1,2,....,N \qquad (2.143)$$

2.10.3 RBKT İçin Hareket Denklemleri

(2.91) ile verilmiş olan hareket denklemleri sistemi RBKT için daha açık olarak izleyen matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^1]_{N\times N}-[K^G]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [K^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^{S4}]_{N\times 3} \\ [K^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [K^{S1}]_{3\times N} & [K^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{C(t)\} \\ \{\alpha(t)\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [C^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [C^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [C^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}(t)\} \\ \{\dot{B}(t)\} \\ \{\dot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [M^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [M^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [M^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [M^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [M^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{A}(t)\} \\ \{\ddot{B}(t)\} \\ \{\ddot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1(t)\} \\ \{f^2(t)\} \\ \{f^3(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{2.144}$$

Burada,

$$K^1_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \beta^2 H_{xx}\,(x^{m-1})''(x^{n-1})''\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.145}$$

$$K^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\beta^2 H_{xx} - \beta F_{xx}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})''\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})(x^{n-1})'\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.146}$$

$$K^3_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} A_{xx}(x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.147}$$

$$K^4_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\beta^2 H_{xx} - \alpha F_{xx}\right)(x^{m-1})''(x^{n-1})'\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\alpha D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.148}$$

$$K^{5}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\beta^2 H_{xx} + D_{xx} - 2\beta F_{xx}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})(x^{n-1})\,\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.149)$$

$$K^{G}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} T(x^{m-1})'(x^{n-1})'\;\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.150)$$

$$C^{1}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b\, \beta^2 H_{xx}\, (x^{m-1})''(x^{n-1})''\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.151)$$

$$C^{2}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b \left(\beta^2 H_{xx} - \beta F_{xx}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})''\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.152)$$

$$C^{3}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b\, A_{xx}(x^{m-1})'(x^{n-1})'\;\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.153)$$

$$C^{4}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b \left(\beta^2 H_{xx} - \beta F_{xx}\right)(x^{m-1})''(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})\,\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.154)$$

$$C^{5}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \eta_b \left(\beta^2 H_{xx} + D_{xx} - 2\beta F_{xx}\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \eta_s \left(9\beta^2 F_{xz} - 6\beta D_{xz} + A_{xz}\right)(x^{m-1})(x^{n-1})\,\mathrm{d}x$$

$$m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.155)$$

$$M^{1}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} I_A(x^{m-1})(x^{n-1})\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{L/2} \beta^2 I_H\,(x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.156)$$

$$M^{2}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\beta^2 I_H - \beta I_F\right)(x^{m-1})(x^{n-1})'\;\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.157)$$

$$M^{3}_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} I_A\,(x^{m-1})(x^{n-1})\;\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.158)$$

$$M_{mn}^{4} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\beta^2 I_H - \beta I_F\right)(x^{m-1})'(x^{n-1})\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.159)$$

$$M_{mn}^{5} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(I_D + \beta^2 I_H - 2\beta I_F\right)(x^{m-1})\,(x^{n-1})\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.160)$$

$$K_{mn}^{S\,1} = (x_A)^{n-1} \qquad m = 1,\; n = 1, 2, ..., N \qquad (2.161)$$

$$K_{mn}^{S\,1} = (x_B)^{n-1} \qquad m = 2,\; n = 1, 2, ..., N \qquad (2.162)$$

$$K_{mn}^{S\,1} = 0 \qquad m = 3,\; n = 1, 2, ..., N \qquad (2.163)$$

$$K_{mn}^{S\,2} = 0 \qquad m = 1,\; n = 1,\, 2, ..., N \qquad (2.164)$$

$$K_{mn}^{S\,2} = 0 \qquad m = 2,\; n = 1,\, 2, ..., N \qquad (2.165)$$

$$K_{mn}^{S\,2} = (x_A)^{n-1} \qquad m = 3,\; n = 1,\, 2, ..., N \qquad (2.166)$$

$$K_{mn}^{S\,3} = -(x_A)^{m-1} \qquad m = 1, 2, ..., N,\; n = 1 \qquad (2.167)$$

$$K_{mn}^{S\,3} = -(x_B)^{m-1} \qquad m = 1, 2, ..., N,\; n = 2 \qquad (2.168)$$

$$K_{mn}^{S\,3} = 0 \qquad m = 1, 2, ..., N,\; n = 3 \qquad (2.169)$$

$$K_{mn}^{S\,4} = 0 \qquad m = 1, 2, ..., N,\; n = 1 \qquad (2.170)$$

$$K_{mn}^{S\,4} = 0 \qquad m = 1, 2, ..., N,\; n = 2 \qquad (2.171)$$

$$K_{mn}^{S\,4} = -(x_A)^{m-1} \qquad m = 1, 2, ..., N,\; n = 3 \qquad (2.172)$$

$$f_n^{1} = P\left(t\right)(x_P^{n-1}) \qquad n = 1, 2, ..., N \qquad (2.173)$$

$$f_n^{2} = -T\,(x_B^{n-1}) \qquad n = 1, 2, ..., N \qquad (2.174)$$

$$f_n^{3} = -M_T\,(x_A^{n-1}) + M_T\,(x_B^{n-1}) \qquad n = 1, 2, ..., N \qquad (2.175)$$

2.11 Hareket Denklemlerinin Çözümü

(2.91) eşitliği ile verilmiş olan hareket denklemleri sistemi zaman tanım alanında Newmark'ın ortalama ivme yöntemiyle çözülmüştür. Ortalama ivme yönteminde kullanılan parametreler aşağıda verilmiştir (Bathe, 1996):

$$a_0 = \frac{1}{\vartheta \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\chi}{\vartheta \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\vartheta \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\vartheta} - 1; \quad a_4 = \frac{\chi}{\vartheta} - 1$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\chi}{\vartheta} - 2\right); \quad a_6 = \Delta t(1-\chi); \quad a_7 = \chi \Delta t \tag{2.176}$$

Burada $\vartheta = 0.5$, $\chi = 0.25$. Ortalama ivme yöntemi kullanılarak (2.91) ile verilen doğrusal diferansiyel denklem sistemi izleyen şekilde doğrusal bir cebrik denklem sistemine indirgenir:

$$[\hat{K}]\{q\}_{i+1} = \{\hat{F}\}_{i,\, i+1} \tag{2.177}$$

Burada $i+1$ alt indisi $t = t_{i+1}$ zamanını göstermektedir. $[\hat{K}]$ etkili rijitlik matrisi, $\{\hat{F}\}_{i,\, i+1}$ etkili yük vektörüdür. $[\hat{K}]$ ve $\{\hat{F}\}_{i,\, i+1}$ izleyen şekilde verilmektedir:

$$[\hat{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \tag{2.178}$$

$$\{\hat{F}\}_{i,\, i+1} = \{F\}_{i+1} + [M](a_0\{q\}_i + a_2\{\dot{q}\}_i + a_3\{\ddot{q}\}_i) + [C](a_1\{q\}_i + a_4\{\dot{q}\}_i + a_5\{\ddot{q}\}_i) \tag{2.179}$$

(2.177) ile verilmiş olan denklem sistemi doğrusal bir cebrik denklem sistemi olup, $t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü $\{q\}_{i+1}$ izleyen şekilde bulunur:

$$\{q\}_{i+1} = [\hat{K}]^{-1} \cdot \{\hat{F}\}_{i,\, i+1} \tag{2.180}$$

$t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü bulunduğunda, aynı andaki genelleştirilmiş ivme $\{\ddot{q}\}_{i+1}$ ve hız vektörü $\{\dot{q}\}_{i+1}$ ise izleyen şekilde elde edilir:

$$\{\ddot{q}\}_{i+1} = a_0(\{q\}_{i+1} - \{q\}_i) - a_2\{\dot{q}\}_i - a_3\{\ddot{q}\}_i \tag{2.181}$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + a_6\{\ddot{q}\}_i + a_7\{\ddot{q}\}_{i+1} \tag{2.182}$$

$(i+1)$. zaman adımında elde edilen yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki zaman adımının başlangıç değerleri olarak alınarak, aynı işlemler $(i+2)$. zaman adımı için tekrarlanır. Hareket denklemlerinin çözümünü daha iyi kavrayabilmek için, her aşamada yapılan hesaplamalar için izleyen işlem sırası verilmiştir.

2.11.1 Hareket Denklemlerinin Çözümü İçin İşlem Sırası

A Başlangıç Hesaplamaları

A.1 $[K]$, $[C]$ ve $[M]$ matrisleri hesaplanır.

A.2 Δt zaman adımı seçilir

A.3 Newmark'ın ortalama ivme yöntemi için gerekli parametreler hesaplanır.

A.4 Etkili rijitlik matrisi $[\hat{K}]$ izleyen şekilde hesaplanır.

$$[\hat{K}]=[K]+a_0[M]+a_1[C] \tag{2.183}$$

A.5 Başlangıç koşulları belirlenir. Söz konusu kiriş, hareketli harmonik yük üzerine gelmeden önce sükûnette olduğu için başlangıç ivmesi ve hızı sıfırdır. Ancak, dışmerkez basınç kuvveti sebebiyle, kiriş başlangıçta bir yer değiştirmeye (eğriliğe) sahiptir. Statik çözümleme yapılarak, başlangıç yer değiştirmesi elde edilir ve programa tanıtılır. Başlangıç koşulları izleyen şekildedir:

$$\{q\}\neq 0\,,\ \{\dot{q}\}=0\,,\ \{\ddot{q}\}=0 \tag{2.184}$$

B Her Bir $t = t_{i+1}$ Zaman Adımı İçin Hesaplamalar

B.1 Yük vektörü $\{F\}$ ve etkili yük vektörü $\{\hat{F}\}$ izleyen şekilde hesaplanır.

$$\{\hat{F}\}_{i,\,i+1}=\{F\}_{i+1}+[M](a_0\{q\}_i+a_2\{\dot{q}\}_i+a_3\{\ddot{q}\}_i)+[C](a_1\{q\}_i+a_4\{\dot{q}\}_i+a_5\{\ddot{q}\}_i) \tag{2.185}$$

B.2 $t=t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü $\{q\}_{i+1}$ aşağıda gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\{q\}_{i+1}=[\hat{K}]^{-1}\cdot\{\hat{F}\}_{i,\,i+1} \tag{2.186}$$

B.3 $t=t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş ivme ve hızlar izleyen şekilde hesaplanır.

$$\{\ddot{q}\}_{i+1}=a_0(\{q\}_{i+1}-\{q\}_i)-a_2\{\dot{q}\}_i-a_3\{\ddot{q}\}_i \tag{2.187}$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1}=\{\dot{q}\}_i+a_6\{\ddot{q}\}_i+a_7\{\ddot{q}\}_{i+1} \tag{2.188}$$

C. $(i+1)$. zaman adımında elde edilen genelleştirilmiş yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki adımın başlangıç değerleri olarak alınarak aynı işlemler tekrarlanır.

2.12 Sönümsüz Serbest Titreşim

Kiriş ve plak gibi yapı elemanlarının sönümsüz serbest titreşimi çok eski yıllardan beri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Çünkü serbest titreşim özellikleri (serbest titreşim frekansları ve bunlara karşılık gelen mod şekilleri gibi), bu tip sistemlerin tasarımında ve zorlanmış titreşim analizlerinde gerekli olmaktadır. Sönümsüz serbest titreşimler zorlanmış titreşimlerin özel hali olarak düşünülebilir. Bu nedenle çalışmanın bu kısmında her üç kiriş teorisi için sönümsüz serbest titreşim analizi yapılmıştır. Sönümsüz serbest titreşim için (2.91) eşitliği ile verilen hareket denkleminde sönüm matrisi $[C]$ ve yük vektörü $\{F\}$ sıfır alınır ve genelleştirilmiş $q(t)$ koordinatları izleyen şekilde ifade edilirse

$$q_n(t)=\overline{q}_n\, e^{j\omega t} \tag{2.189}$$

(2.91) eşitliği ile verilen hareket denklemleri sistemi izleyen eşitlikte verilen ve adına frekans denklemi de denilen homojen doğrusal bir denklem sistemine dönüşür;

$$\left[\overline{K}\right]\{\overline{q}\}-\omega^2\left[\overline{M}\right]\{\overline{q}\}=\{0\} \tag{2.190}$$

Burada, $j=\sqrt{-1}$, ω sistemin serbest titreşim frekansları veya özdeğerleri olarak adlandırılır. Sistemin serbest titreşim frekansları, (2.190) eşitliği ile verilen frekans denkleminin trivial (sıfır veya aşikâr) çözümünden başka bir çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması şartından elde edilir. Bundan sonraki başlıklarda (2.190) eşitliği ile verilen frekans denklemi söz konusu üç kiriş teorisi için ayrıntılı olarak verilmiştir. Literatürdeki çalışmaların büyük bir çoğunluğunda serbest titreşim frekansları boyutsuz olarak verilmiştir. Bu nedenle elde edilen sonuçların mevcut sonuçlarla uyumlu olabilmesi için frekans denklemleri boyutsuz olarak elde edilmiştir.

2.12.1 EBKT İçin Frekans Denklemleri

Serbest titreşim için zaman bağımlı genelleştirilmiş koordinatlar izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$A_n(t) = \bar{A}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{2.191}$$

$$B_n(t) = \bar{B}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{2.192}$$

$$\alpha_n(t) = \bar{\alpha}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, 3 \tag{2.193}$$

(2.191)-(2.193) eşitliklerinin dikkate alınmasıyla birlikte, EBKT için (2.92) ile verilen hareket denklemleri sisteminde sönüm matrisi ve yük vektörleri sıfır alınır ve izleyen eşitlikte verilen boyutsuz büyüklükler tanımlanırsa

$$\bar{x} = \frac{x}{L},\ \bar{u} = \frac{u}{L},\ \bar{w} = \frac{w}{L},\ \lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI},\ \mu = \frac{I}{AL^2},\ \theta_T = \frac{T L^2}{EI} \tag{2.194}$$

(2.195) eşitliği ile verilen boyutsuz frekans denklemleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}^1]_{N\times N} - [\bar{K}^G]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [\bar{K}^{S4}]_{N\times 3} \\ [\bar{K}^{S1}]_{3\times N} & [\bar{K}^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{A}\} \\ \{\bar{B}\} \\ \{\bar{\alpha}\} \end{Bmatrix} -$$

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} [\bar{M}^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [\bar{M}^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{A}\} \\ \{\bar{B}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{2.195}$$

Burada,

$$\bar{K}^1_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} (\bar{x}^{m-1})''(\bar{x}^{n-1})''\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.196}$$

$$\bar{K}^2_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} (\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.197}$$

$$\bar{K}^G_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \theta_T\,(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.198}$$

$$\bar{M}^1_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \left[(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1}) + \mu\,(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})' \right] \mathrm{d}\bar{x} \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.199}$$

$$\bar{M}^2_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \mu\,(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{2.200}$$

(2.195) eşitliğinde Lagrange çarpanlarından dolayı gelen matrislerin elemanları sadelik açısından burada gösterilmemiştir.

2.12.2 TKT İçin Frekans Denklemleri

Serbest titreşim yapan bir kirişte zaman bağımlı genelleştirilmiş koordinatlar izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$A_n(t) = \bar{A}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, ..., N \qquad (2.201)$$

$$B_n(t) = \bar{B}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, ..., N \qquad (2.202)$$

$$C_n(t) = \bar{C}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, ..., N \qquad (2.203)$$

$$\alpha_n(t) = \bar{\alpha}_n e^{j\omega t} \qquad n = 1, 2, 3 \qquad (2.204)$$

(2.201)-(2.204) eşitliklerinin dikkate alınmasıyla birlikte, TKT için (2.114) ile verilen hareket denklemlerinde sönüm matrisi ve yük vektörleri sıfır alınır ve izleyen eşitlikte verilen boyutsuz büyüklükler tanımlanırsa

$$\bar{x} = \frac{x}{L},\ \bar{u} = \frac{u}{L},\ \bar{w} = \frac{w}{L},\ \bar{\psi} = \psi,\ \lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{E I},\ \kappa = \frac{k_s G A L^2}{E I},\ \mu = \frac{I}{A L^2},\ \theta_T = \frac{T L^2}{E I} \qquad (2.205)$$

(2.206) eşitliği ile verilen boyutsuz frekans denklemleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}^1]_{N\times N} - [\bar{K}^G]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^2]_{N\times N} & [\bar{K}^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [\bar{K}^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^{S4}]_{N\times 3} \\ [\bar{K}^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [\bar{K}^{S1}]_{3\times N} & [\bar{K}^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{A}\} \\ \{\bar{B}\} \\ \{\bar{C}\} \\ \{\bar{\alpha}\} \end{Bmatrix} -$$

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} [\bar{M}^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [\bar{M}^2]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{M}^3]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{A}\} \\ \{\bar{B}\} \\ \{\bar{C}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \qquad (2.206)$$

Burada,

$$\bar{K}^1_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \kappa (\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})' \,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m, n = 1, 2, ..., N \qquad (2.207)$$

$$\bar{K}^{2}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \kappa\,(\bar{x}^{\,m-1})\,(\bar{x}^{\,n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.208}$$

$$\bar{K}^{3}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} (\bar{x}^{\,m-1})'(\bar{x}^{\,n-1})'\;\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.209}$$

$$\bar{K}^{4}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \kappa\,(\bar{x}^{\,m-1})'\,(\bar{x}^{\,n-1})\;\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.210}$$

$$\bar{K}^{5}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \left[(\bar{x}^{\,m-1})'(\bar{x}^{\,n-1})' + \kappa\,(\bar{x}^{\,m-1})\,(\bar{x}^{\,n-1})\right]\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.211}$$

$$\bar{K}^{G}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \theta_T\,(\bar{x}^{\,m-1})'(\bar{x}^{\,n-1})'\;\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.212}$$

$$\bar{M}^{1}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} (\bar{x}^{\,m-1})(\bar{x}^{\,n-1})\;\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.213}$$

$$\bar{M}^{2}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \mu\,(\bar{x}^{\,m-1})(\bar{x}^{\,n-1})\;\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.214}$$

$$\bar{M}^{3}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} \mu\,(\bar{x}^{\,m-1})(\bar{x}^{\,n-1})\;\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.215}$$

2.12.3 RBKT İçin Frekans Denklemleri

Serbest titreşim yapan bir kirişte zaman bağımlı genelleştirilmiş koordinatlar izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$A_n\,(t) = \bar{A}_n\, e^{\,j\omega t} \qquad n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.216}$$

$$B_n\,(t) = \bar{B}_n\, e^{\,j\omega t} \qquad n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.217}$$

$$C_n\,(t) = \bar{C}_n\, e^{\,j\omega t} \qquad n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{2.218}$$

$$\alpha_n\,(t) = \bar{\alpha}_n\, e^{\,j\omega t} \qquad n = 1,\, 2,\, 3 \tag{2.219}$$

(2.216)-(2.219) eşitliklerinin dikkate alınmasıyla birlikte, RBKT için (2.144) ile verilen hareket denklemlerinde sönüm matrisi ve yük vektörleri sıfır alınır ve izleyen eşitlikte verilen boyutsuz büyüklükler tanımlanırsa

$$\bar{x}=\frac{x}{L},\ \bar{u}=\frac{u}{L},\ \bar{w}=\frac{w}{L},\ \bar{\psi}=\psi,\ \lambda^2=\frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI},\ \kappa^R=\frac{L^2}{h^2(1+\nu)},\ \mu^R=\frac{h^2}{L^2},\ \theta_T=\frac{T\,L^2}{EI} \tag{2.220}$$

(2.221) eşitliği ile verilen boyutsuz frekans denklemleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}^1]_{N\times N}-[\bar{K}^G]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^2]_{N\times N} & [\bar{K}^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [\bar{K}^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^{S4}]_{N\times 3} \\ [\bar{K}^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{K}^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [\bar{K}^{S1}]_{3\times N} & [\bar{K}^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{A}\} \\ \{\bar{B}\} \\ \{\bar{C}\} \\ \{\bar{\alpha}\} \end{Bmatrix} -$$

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} [\bar{M}^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{M}^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [\bar{M}^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [\bar{M}^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [\bar{M}^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{A}\} \\ \{\bar{B}\} \\ \{\bar{C}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{2.221}$$

Burada

$$\bar{K}^1_{mn}=\frac{1}{21}\int_{-1/2}^{1/2}(\bar{x}^{m-1})''(\bar{x}^{n-1})''\,\mathrm{d}\bar{x}+\frac{16}{5}\int_{-1/2}^{1/2}\kappa^R(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,n=1,2,....,N \tag{2.222}$$

$$\bar{K}^2_{mn}=\frac{16}{5}\int_{-1/2}^{1/2}\kappa^R(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x}-\frac{16}{105}\int_{-1/2}^{1/2}(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})''\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,n=1,2,....,N \tag{2.223}$$

$$\bar{K}^3_{mn}=\int_{-1/2}^{1/2}(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,n=1,2,....,N \tag{2.224}$$

$$\bar{K}^4_{mn}=\frac{16}{5}\int_{-1/2}^{1/2}\kappa^R(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x}-\frac{16}{105}\int_{-1/2}^{1/2}(\bar{x}^{m-1})''(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,n=1,2,....,N \tag{2.225}$$

$$\bar{K}^5_{mn}=\frac{16}{5}\int_{-1/2}^{1/2}\kappa^R(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x}+\frac{68}{105}\int_{-1/2}^{1/2}(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,n=1,2,....,N \tag{2.226}$$

$$\bar{K}^G_{mn}=\int_{-1/2}^{1/2}\theta_T(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,n=1,2,....,N \tag{2.227}$$

$$\bar{M}^{1}_{mn} = \int_{-1/2}^{1/2} (\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x} + \frac{1}{252}\int_{-1/2}^{1/2} \mu^{R}(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.228)$$

$$\bar{M}^{2}_{mn} = \left(\frac{1}{252} - \frac{1}{60}\right)\int_{-1/2}^{1/2} \mu^{R}(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})'\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.229)$$

$$\bar{M}^{3}_{mn} = \frac{1}{12}\int_{-1/2}^{1/2} \mu^{R}(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.230)$$

$$\bar{M}^{4}_{mn} = \left(\frac{1}{252} - \frac{1}{60}\right)\int_{-1/2}^{1/2} \mu^{R}(\bar{x}^{m-1})'(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.231)$$

$$\bar{M}^{5}_{mn} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{252} - \frac{1}{30}\right)\int_{-1/2}^{1/2} \mu^{R}(\bar{x}^{m-1})(\bar{x}^{n-1})\,\mathrm{d}\bar{x} \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \qquad (2.232)$$

Burada da sadelik açısından Lagrange çarpanlarından elde edilen matrislerin elemanları verilmemiştir.

3. GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN DURUM İÇİN KURAMSAL ÇALIŞMA

Bilindiği gibi, rezonans veya etkiyen yüklerin şiddetinin büyük olması gibi durumlarda yer değiştirmeler büyük değerlere ulaşabilmektedir. Bu gibi durumlarda yer değiştirmelerin küçük olduğu kabulüne dayanan doğrusal kiriş teorileri pek gerçekçi sonuçlar vermemektedir. Bu sebeple, analizler geometrik doğrusal olmayan (non-lineer) etkileri de dikkate alan teoriler kullanılarak yapılmalıdır. Burada yer değiştirmelerin büyüklüğü hakkında bir ölçü konulmalıdır. Denilebilir ki, kirişte oluşan düşey yer değiştirmeler kiriş yüksekliği mertebesinde olduğunda (Foda, 1998), geometrik doğrusal olmayan etkilerin dikkate alınması daha gerçekçi sonuçlar verecektir. Kirişlerin genel bir doğrusal olmayan formülasyonunu geliştirmek için, formülasyonda dikkate alınan şekil değiştirmelerle uyumlu gerilme ve şekil değiştirme ölçülerinin tanımlanması gereklidir. Şu andaki doğrusal olmayan formülasyon büyük düşey yer değiştirme, orta dereceli dönme ve küçük şekil değiştirme üzerine temellendirilmiştir. Bu kabüller, şekil değiştirmemiş birim kiriş kesit alanına gelen kuvvetin gerilme ölçüsü olarak ve şekil değiştirme için ise orijinal uzunluğun (kayma şekil değiştirmesi durumunda ise $\pi/2$ lik açıdaki değişimin) şekil değiştirme ölçüsü olarak kullanılmasını mümkün kılar. Kesit geometrisindeki değişim o kadar küçüktür ki, Piola-Kirchoff ve Cauchy gerilmeleri arasında herhangi bir ayrım yapılmaz. Bu çalışmada yapılan formülasyondaki doğrusal olmayan davranış, sadece, kiriş eksenine dik olan doğrultuların dönmesinin karesiyle düzlem içi kuvvetlerin orantılı olmasının probleme dâhil edilmesinden kaynaklanmaktadır.

Elastisite teorisinden de bilindiği gibi, şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasındaki kinematik bağıntılar doğrusal olmayan terimlerin dikkate alınmasıyla izleyen şekilde verilmektedir:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right) \tag{3.1}$$

Burada $(k, l = x, y, z)$ ve tekrarlanan m indisi üzerinde toplam yapılmaktadır. İndis notasyonuyla verilen (3.1) eşitliği daha açık olarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \tag{3.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \tag{3.5}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \tag{3.6}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \tag{3.7}$$

Burada u, v, w yer değiştirmeleri, sırasıyla, x, y, z doğrultularındaki yer değiştirmeler, ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} uzama oranları, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} kayma açılarıdır. Bu denklemlerde köşeli parantez içindeki terimler doğrusal olmayan davranışı göstermektedir (Omurtag, 2005). Bu eşitliklerde yer değiştirme gradyanlarının mertebesi ϵ mertebesinde ise, örneğin;

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{O}(\epsilon) \tag{3.8}$$

ise bu durumda (3.2)-(3.7) eşitliklerinde mertebesi ϵ^2 olan terimler ihmal edilebilir. Ancak, burada orta derecede dönme (mesela $10^\circ - 15^\circ$ gibi (Reddy, 2004)) kabulü sebebiyle aşağıdaki eşitlikte verilen terimler yine küçük olmasına rağmen, ϵ mertebesine kıyasla ihmal edilmezler (Reddy, 2004);

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.9}$$

Yukarıda yapılan kabuller sonucunda (3.2)-(3.7) eşitlikleri ile verilen şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları izleyen şekli alır (Reddy, 2004):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{3.10}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.12}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.13}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.14}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.15}$$

3.1 Yer Değiştirme, Şekil Değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

Problemde ele alınan kirişin eğilmesinin (x, z) düzleminde olduğu dikkate alındığında, (3.10)-(3.15) ile verilen şekil değiştirme bileşenlerinden ε_{xx} ve γ_{xz} dışındaki bileşenlerin sıfır olduğu görülmektedir. Bu durumda hesaplanması gerekli şekil değiştirme bileşenleri aşağıda gösterilmiştir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{3.16}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.17}$$

Şekil değiştirme-yer değiştirme ile ilgili (3-2) bağıntısındaki, geometrik doğrusal olmama nedeniyle gelen $1/2\left(\partial w/\partial x\right)^2$ terimi yatay yer değiştirmenin göz önüne alınabilmesini sağlamakta, $1/2\left(\partial u/\partial x\right)^2$ terimi ise geometrik doğrusal olmama nedeniyle düşey yer değiştirmeye katkının dikkate alınabilmesini sağlamaktadır. $1/2\left(\partial w/\partial x\right)^2$ teriminin göz önüne alınması von-Kármán durumuna karşı gelmektedir. Tezde sadece $1/2\left(\partial w/\partial x\right)^2$ terimi dikkate alınmış, diğer $1/2\left(\partial u/\partial x\right)^2$ terimi dikkate alınmamıştır.

Şekil değiştirmelerden gerilmelere geçilirken, gerilmelerle şekil değiştirmelerin ve şekil değiştirme hızlarının orantılı olduğu, yani malzeme davranışının doğrusal Kelvin-Voigt modeline uyduğu kabul edilmişti. Bundan sonraki bölümde yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki bağıntılar her üç kiriş teorisi için ayrı başlıklar altında verilecektir.

3.1.1 EBKT İçin Yer Değiştirme, Şekil değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

(2.14)-(2.16) ile EBKT için verilen yer değiştirme alanları dikkate alınarak, (3.16) ve (3.17) ile verilen kinematik bağıntılar kullanılırsa EBKT için şekil değiştirme bileşenleri izleyen şekilde olur:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u^E}{\partial x}=\frac{\partial u_0^E}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0^E}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w_0^E}{\partial x^2} \tag{3.18}$$

$\gamma_{xz}=0$ (Gerçekte $\gamma_{xz}\neq 0$ olup EBKT gereği $\gamma_{xz}=0$ alınır) (3.19)

(3.18) ve (3.19) eşitlikleriyle verilen şekil değiştirmelere von-Kármán şekil değiştirmeleri denmektedir. Bu çalışmadaki doğrusal olmayan davranış, (3.18) eşitliğinde verilen kiriş orta düzlemindeki (yani $z=0$'da) şekil değiştirmelerin kesit dönmelerinin karesine bağlı olmasından kaynaklanmaktadır. EBKT için gerilme-şekil değiştirme bağıntısı izleyen şekilde tanımlanır:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}^e+\sigma_{xx}^v=E\,\varepsilon_{xx}+E\,\eta_b\,\dot{\varepsilon}_{xx}=E\frac{\partial u_0^E}{\partial x}+\frac{E}{2}\left(\frac{\partial w_0^E}{\partial x}\right)^2-E\,z\frac{\partial^2 w_0^E}{\partial x^2}+$$

$$E\,\eta_b\frac{\partial \dot{u}_0^E}{\partial x}+E\,\eta_b\left(\frac{\partial w_0^E}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \dot{w}_0^E}{\partial x}\right)-E\,\eta_b\,z\frac{\partial^2 \dot{w}_0^E}{\partial x^2} \tag{3.20}$$

$$\tau_{xz}=0 \tag{3.21}$$

3.1.2 TKT İçin Yer Değiştirme, Şekil değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

(2.17)-(2.19) ile TKT için verilen yer değiştirme alanları dikkate alınarak, (3.16) ve (3.17) ile verilen kinematik bağıntılar kullanılırsa TKT için şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri izleyen şekilde olur:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u^T}{\partial x}=\frac{\partial u_0^T}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0^T}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial \psi^T}{\partial x} \tag{3.22}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u^T}{\partial z}+\frac{\partial w^T}{\partial x}=\frac{\partial w_0^T}{\partial x}+\psi^T \tag{3.23}$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}^{e}+\sigma_{xx}^{v}=E\,\varepsilon_{xx}+E\eta_b\dot{\varepsilon}_{xx}=E\frac{\partial u_0^T}{\partial x}+\frac{E}{2}\left(\frac{\partial w_0^T}{\partial x}\right)^2+E\,z\frac{\partial \psi^T}{\partial x}+E\,\eta_b\frac{\partial \dot{u}_0^T}{\partial x}+$$

$$E\eta_b\left(\frac{\partial w_0^T}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \dot{w}_0^T}{\partial x}\right)+E\eta_b z\frac{\partial \dot{\psi}^T}{\partial x} \qquad (3.24)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{xz}^{e}+\tau_{xz}^{v}=k_s\,G\gamma_{xz}+k_s\,G\eta_s\,\dot{\gamma}_{xz}=k_s\,G\left(\frac{\partial w_0^T}{\partial x}+\psi^T\right)+k_s\,G\eta_s\left(\frac{\partial \dot{w}_0^T}{\partial x}+\dot{\psi}^T\right) \qquad (3.25)$$

3.1.3 RBKT İçin Yer Değiştirme, Şekil değiştirme ve Gerilmeler Arasındaki Bağıntılar

(2.20)-(2.22) ile RBKT için verilen yer değiştirme alanları dikkate alınarak, (3.16) ve (3.17) ile verilen kinematik bağıntılar kullanılırsa, RBKT için şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri izleyen şekilde olur:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u^R}{\partial x}=\frac{\partial u_0^R}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial \psi^R}{\partial x}-\beta z^3\left(\frac{\partial \psi^R}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0^R}{\partial x^2}\right) \qquad (3.26)$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u^R}{\partial z}+\frac{\partial w^R}{\partial x}=\left(1-3\beta z^2\right)\left(\psi^R+\frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right) \qquad (3.27)$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}^{e}+\sigma_{xx}^{v}=E\,\varepsilon_{xx}+E\,\eta_b\,\dot{\varepsilon}_{xx}=E\frac{\partial u_0^R}{\partial x}+\frac{E}{2}\left(\frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right)^2+E\,z\frac{\partial \psi^R}{\partial x}-E\beta\,z^3\left(\frac{\partial \psi^R}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0^R}{\partial x^2}\right)+$$

$$E\eta_b\frac{\partial \dot{u}_0^R}{\partial x}+E\eta_b\left(\frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \dot{w}_0^R}{\partial x}\right)+E\,\eta_b\,z\frac{\partial \dot{\psi}^R}{\partial x}-E\,\eta_b\beta\,z^3\left(\frac{\partial \dot{\psi}^R}{\partial x}+\frac{\partial^2 \dot{w}_0^R}{\partial x^2}\right) \qquad (3.28)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{xz}^{e}+\tau_{xz}^{v}=G\gamma_{xz}+G\eta_s\,\dot{\gamma}_{xz}=G\left(1-3\beta z^2\right)\left(\psi^R+\frac{\partial w_0^R}{\partial x}\right)+G\eta_s\left(1-3\beta z^2\right)\left(\dot{\psi}^R+\frac{\partial \dot{w}_0^R}{\partial x}\right)$$

(3.29)

3.2 Şekil Değiştirme Enerjisi

İkinci bölümde söz konusu kiriş teorileri için şekil değiştirme enerjileri geometrik doğrusal durumda detaylı olarak çıkarılmıştı. Geometrik doğrusal olmayan durumda şekil değiştirme enerjileri çıkarılırken, doğrusal durumdaki enerji ifadelerine ilave olarak orta düzlemde oluşan şekil değiştirme ve gerilmelerin etkileri ilave edilmiştir. Buradaki enerji ifadelerinin çıkarılması daha önceki bölümde yapılan işlemlere çok benzediğinden, detaylı olarak gösterilmeyip sadece sonuçları verilecektir.

3.2.1 EBKT İçin Şekil Değiştirme Enerjisi

EBKT için (3.18) ve (3.20) eşitlikleri ile verilen şekil değiştirme ve gerilmeler, (2.38) ile verilen şekil değiştirme enerjisi ifadesinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir t anı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde elde edilir:

$$U_i = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left\{ A_{xx}\left[\frac{\partial u_0^E(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0^E(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^2 + D_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^E(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right\}\mathrm{d}x \tag{3.30}$$

(3.30)'daki A_{xx} ve D_{xx} kesit rijitlikleri (2.40) eşitliği ile tanımlanmıştır.

3.2.2 TKT İçin Şekil Değiştirme Enerjisi

TKT için (3.22)-(3.25) eşitlikleri ile verilen şekil değiştirme ve gerilmeler, (2.42) ile daha açık bir biçimde verilen şekil değiştirme enerjisi ifadesinde yerlerine yazılırsa, herhangi bir t anı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde elde edilir:

$$U_i = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left\{ A_{xx}\left[\frac{\partial u_0^T(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^2 + D_{xx}\left(\frac{\partial \psi^T(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. k_s A_{xz}\left(\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial x}+\psi^T(x,t)\right)^2\right\}\mathrm{d}x \tag{3.31}$$

3.2.3 RBKT İçin Şekil Değiştirme Enerjisi

RBKT için (3.26)-(3.29) eşitlikleri ile verilen şekil değiştirme ve gerilmeler, (2.42) ile daha açık bir biçimde verilen şekil değiştirme enerjisi ifadesinde yerlerine yazılır ve gerekli integrasyonlar yapılırsa, söz konusu teori için herhangi bir t anı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekli alır:

$$U_i = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left\{ A_{xx}\left[\frac{\partial u_0^R(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^2 + D_{xx}\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2\beta F_{xx}\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 2\beta F_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right) + 2\beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \psi^R(x,t)}{\partial x}\right) +$$

$$\beta^2 H_{xx}\left(\frac{\partial^2 w_0^R(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + A_{xz}\left(\psi^R(x,t)\right)^2 - 6\beta D_{xz}\left(\psi^R(x,t)\right)^2 - 12\beta D_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\psi^R(x,t)\right) +$$

$$2A_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\psi^R(x,t)\right) + 9\beta^2 F_{xz}\left(\psi^R(x,t)\right)^2 + 18\beta^2 F_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)\left(\psi^R(x,t)\right) +$$

$$9\beta^2 F_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 - 6\beta D_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 + A_{xz}\left(\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right)^2 \Bigg\} \mathrm{d}x \qquad (3.32)$$

3.3 Sönüm Fonksiyonu

Daha önce de belirtildiği gibi malzeme modeli olarak Kelvin-Voigt modeli seçilmiş ve enerji yaklaşımıyla hareket denklemlerinin elde edilmesinde, rijitlikle orantılı viskoz sönümü verecek şekilde tanımlanan sönüm fonksiyonları tanımlanmıştı. Problemin geometrik doğrusal olmayan çözümünde sistemde doğrusal rijitlik matrisiyle orantılı sönüm olduğu kabul edilmiştir. Bu nedenle, doğrusal olmayan durum için sönüm fonksiyonlarını tekrar burada vermeye gerek kalmamıştır. Geometrik doğrusal olmayan durumda EBKT için (2.52) eşitliği, TKT için (2.54) eşitliği ve RBKT için (2.55) eşitliği ile bir önceki bölümde verilmiş olan sönüm fonksiyonları geçerlidir.

3.4 Kinetik Enerji

Geometrik doğrusal olmayan durumdaki kinetik enerji ifadeleri ile geometrik doğrusal durumdaki kinetik enerji ifadeleri de aynıdır. Bu nedenle geometrik doğrusal olmayan durumda hareket denklemlerinin elde edilmesinde EBKT için (2.61), TKT için (2.66) ve RBKT için (2.69) eşitliği ile geometrik doğrusal durum için verilmiş olan kinetik enerji ifadeleri kullanılmıştır.

3.5 Dış Kuvvetlerin Potansiyeli

Geometrik doğrusal olmayan durumda yatay $u_0\left(x,t\right)$ yer değiştirmesi, şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkilerinde yatay ve düşey yer değiştirmeler arasında etkileşim olduğundan, hesaba katılabilmekte ve $u_0(x,t)$ hem x değişkenine hem de t değişkenine bağlı olmaktadır. Dolayısıyla (2.72), (2.77) ve (2.78) dış potansiyel ifadelerindeki eğilmiş kiriş boyu ile düz kiriş boyu arasındaki farkı veren ve geometrik doğrusal durumda yer değiştirmeler arası etkileşim olmadığından dikkate alınan $1/2\int_{-L/2}^{L/2}\left(\partial w_0(x,t)/\partial x\right)^2 \mathrm{d}x$ ifadesinin alınmaması gerekmektedir. Bunun dışında geometrik doğrusal olan ve olmayan durumlardaki dış potansiyel ifadeleri aynı olup burada tekrar verilmemiştir.

3.6 Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Daha önce de belirtildiği gibi hareket denklemleri Lagrange denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Bu amaçla herhangi bir t anı için geometrik doğrusal olmayan etkileri içerecek şekilde her üç kiriş teorisi için şekil değiştirme enerjileri yeniden çıkarılmıştır. Doğrusal olmayan formülasyonda da bilinmeyen yer değiştirme ve dönme fonksiyonları izleyen şekilde seçilmiştir:

$$w_0(x,t)=\sum_{n=1}^{N} A_n(t)\,x^{n-1} \tag{3.33}$$

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{N} B_n(t)\,x^{n-1} \tag{3.34}$$

$$\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{N} C_n(t)\,x^{n-1} \tag{3.35}$$

Burada da daha önceki bölümde olduğu gibi mesnet şartları Lagrange çarpanları yöntemiyle sağlanmıştır. (3.33)-(3.35) eşitlikleri (2.84) ile verilen Lagrangian fonksiyonelinde yerlerine yazıldıktan sonra, (2.85) eşitliğiyle verilen Lagrange denklemleri uygulanırsa doğrusal olmayan, zamana bağlı olan hareket denklemleri sistemi izleyen şekilde elde edilir:

$$[K]\{q(t)\}+\left[KDO\left(q(t)\right)\right]\{q(t)\}+[C]\{\dot{q}(t)\}+[M]\{\ddot{q}(t)\}=\{F(t)\} \tag{3.36}$$

Burada $\{q(t)\}=\{A(t),\ B(t),\ C(t),\ \alpha_k(t)\}^T$, $[K]$ doğrusal rijitlik matrisi, $[KDO]$ doğrusal olmayan rijitlik matrisi, $[C]$ sönüm matrisi, $[M]$ kütle matrisi, $\{F(t)\}$ zamana bağlı olan yük vektörüdür. (3.36) ile verilen hareket denklemindeki matrislerin boyutu EBKT için $(2N+3)\times(2N+3)$, TKT ve RBKT için $(3N+3)\times(3N+3)$ dür. Bundan sonraki bölümlerde

(3.36) eşitliği ile verilen hareket denklemleri, söz konusu kiriş teorilerinin kullanılması durumları için ayrıntılı olarak verilmiştir.

3.6.1 EBKT İçin Hareket Denklemleri

(3.36) eşitliği ile kapalı formda verilmiş olan hareket denklemleri sistemi geometrik doğrusal olmayan durumda EBKT için daha açık bir formda izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [K^{S4}]_{N\times 3} \\ [K^{S1}]_{3\times N} & [K^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{\alpha(t)\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [KDO^1]_{N\times N} & [KDO^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [KDO^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [C^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [C^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}(t)\} \\ \{\dot{B}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [M^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{A}(t)\} \\ \{\ddot{B}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1(t)\} \\ \{f^2(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

Burada $[K^1]$ eğilme rijitliği matrisi, $[K^2]$ uzama rijitliği matrisi, $[K^{S1}]$, $[K^{S2}]$, $[K^{S3}]$ ve $[K^{S4}]$ Lagrange çarpanlarının kullanımından elde edilen matrisler, $[KDO^1]$, $[KDO^2]$ ve $[KDO^3]$ doğrusal olmayan rijitlik matrisleri, $[M^1]$ kirişin eğilme titreşiminden elde edilen kütle matrisi, $[M^2]$ boyuna titreşim sebebiyle gelen kütle matrisi, $\{f^1(t)\}$ ve $\{f^2(t)\}$ zaman bağımlı yük vektörleridir. (3.37) eşitliğinde doğrusal olmayan davranış nedeniyle hareket denklemlerine dâhil olan doğrusal olmayan rijitlik matrislerinin elemanları aşağıda verilmiştir:

$$KDO^1_{mn} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} \left[\frac{\partial w_0^E(x,t)}{\partial x}\right]^2 (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{3.38}$$

$$KDO^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} \left[\frac{\partial w_0^E(x,t)}{\partial x}\right] (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{3.39}$$

$$KDO^3_{mn} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} \left[\frac{\partial w_0^E(x,t)}{\partial x}\right] (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{3.40}$$

3.6.2 TKT İçin Hareket Denklemleri

(3.36) eşitliği ile kapalı formda verilmiş olan hareket denklemleri sistemi geometrik doğrusal olmayan durumda TKT için daha açık bir formda izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [K^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^{S4}]_{N\times 3} \\ [K^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [K^{S1}]_{3\times N} & [K^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{C(t)\} \\ \{\alpha(t)\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [KDO^1]_{N\times N} & [KDO^2]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [KDO^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{C(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [C^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [C^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [C^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}(t)\} \\ \{\dot{B}(t)\} \\ \{\dot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [M^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [M^2]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [M^3]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{A}(t)\} \\ \{\ddot{B}(t)\} \\ \{\ddot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1(t)\} \\ \{f^2(t)\} \\ \{f^3(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

(3.41) hareket denklemleri sistemindeki doğrusal olmayan rijitlik matrislerinin elemanları izleyen şekildedir:

$$KDO^1_{mn} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} \left[\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial x}\right]^2 (x^{m-1})'(x^{n-1})' \,\mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{3.42}$$

$$KDO^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} \left[\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial x}\right] (x^{m-1})'(x^{n-1})' \,\mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{3.43}$$

$$KDO^3_{mn} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} A_{xx} \left[\frac{\partial w_0^T(x,t)}{\partial x}\right] (x^{m-1})'(x^{n-1})' \,\mathrm{d}x \qquad m, n = 1, 2, ..., N \tag{3.44}$$

3.6.3 RBKT İçin Hareket Denklemleri

(3.36) eşitliği ile kapalı formda verilmiş olan hareket denklemleri sistemi geometrik doğrusal olmayan durumda RBKT için daha açık bir formda izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} [K^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^2]_{N\times N} & [K^{S3}]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [K^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^{S4}]_{N\times 3} \\ [K^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [K^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [K^{S1}]_{3\times N} & [K^{S2}]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{C(t)\} \\ \{\alpha(t)\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [KDO^1]_{N\times N} & [KDO^2]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [KDO^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A(t)\} \\ \{B(t)\} \\ \{C(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [C^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [C^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [C^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [C^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{A}(t)\} \\ \{\dot{B}(t)\} \\ \{\dot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} [M^1]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [M^2]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{N\times N} & [M^3]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [M^4]_{N\times N} & [0]_{N\times N} & [M^5]_{N\times N} & [0]_{N\times 3} \\ [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times N} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{A}(t)\} \\ \{\ddot{B}(t)\} \\ \{\ddot{C}(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1(t)\} \\ \{f^2(t)\} \\ \{f^3(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

(3.45) hareket denklemleri sistemindeki doğrusal olmayan rijitlik matrislerinin elemanları izleyen şekildedir:

$$KDO^1_{mn} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} A_{xx}\left[\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right]^2 (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{3.46}$$

$$KDO^2_{mn} = \int_{-L/2}^{L/2} A_{xx}\left[\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right] (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{3.47}$$

$$KDO^3_{mn} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} A_{xx}\left[\frac{\partial w_0^R(x,t)}{\partial x}\right] (x^{m-1})'(x^{n-1})'\,\mathrm{d}x \qquad m,\, n = 1,\, 2,\, ...,\, N \tag{3.48}$$

3.7 Hareket Denklemlerinin Çözümü

(3.36) eşitliği ile verilmiş olan hareket denklemleri zaman tanım alanında Newmark'ın ortalama ivme yöntemiyle birlikte ardışık yaklaşım yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Bu tip denklem takımlarının çözümünde doğrusal sistemlerden farklı olarak her bir t anında doğrusal olmayan denklem takımı çözülmesi gerekmektedir. Bu çalışmada ardışık yaklaşım yöntemi olarak Picard (direkt iterasyon) ve Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. (3.36) eşitliği ile verilen doğrusal olmayan hareket denklemi Newmark'ın ortalama ivme yöntemi yardımıyla izleyen şekilde doğrusal olmayan cebrik denklem sistemine indirgenir (Reddy, 2004):

$$[\hat{K}(\{q\}_{i+1})]\{q\}_{i+1}=\{\hat{F}\}_{i,\,i+1} \tag{3.49}$$

Burada $i+1$ zaman adımını, $t=t_{i+1}$ söz konusu zaman adımındaki toplam zamanı, $[\hat{K}(\{q\}_{i+1})]$ doğrusal olmayan etkili rijitlik matrisini, $\{\hat{F}\}_{i,\,i+1}$ etkili yük vektörünü göstermekte olup, doğrusal olmayan etkili rijitlik matrisi ve etkili yük vektörü izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$[\hat{K}(\{q\}_{i+1})]=[K]+[KDO(\{q\}_{i+1})]+a_0[M]+a_1[C] \tag{3.50}$$

$$\{\hat{F}\}_{i,\,i+1}=\{F\}_{i+1}+[M](a_0\{q\}_i+a_2\{\dot{q}\}_i+a_3\{\ddot{q}\}_i)+[C](a_1\{q\}_i+a_4\{\dot{q}\}_i+a_5\{\ddot{q}\}_i) \tag{3.51}$$

(3.49) ile verilmiş olan denklem sistemi doğrusal olmayan bir denklem sistemidir. Daha önceden de belirtildiği gibi bu tip denklem sistemlerinin çözümü için ardışık yaklaşım yöntemleri kullanılmalıdır. (3.49) ile verilen denklem sistemi çözülerek $t=t_{i+1}$ anındaki yer değiştirme vektörü $\{q\}_{i+1}$ bulunduğunda aynı andaki ivme $\{\ddot{q}\}_{i+1}$ ve hız vektörü $\{\dot{q}\}_{i+1}$ izleyen şekilde elde edilir:

$$\{\ddot{q}\}_{i+1}=a_0(\{q\}_{i+1}-\{q\}_i)-a_2\{\dot{q}\}_i-a_3\{\ddot{q}\}_i \tag{3.52}$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1}=\{\dot{q}\}_i+a_6\{\ddot{q}\}_i+a_7\{\ddot{q}\}_{i+1} \tag{3.53}$$

$(i+1)$. zaman adımında elde edilen yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki zaman adımının başlangıç değerleri olarak alınarak aynı işlemler $(i+2)$. zaman adımı için tekrarlanır. Bu çalışmada (3.49) denklem sistemi ardışık yaklaşım yöntemlerinden hem Picard (direkt iterasyon) hem de Newton-Raphson yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bundan sonraki kısımda hareket denkleminin bu iki yöntemle çözümü hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca Picard ve Newton-Raphson yöntemleri hakkında daha detaylı bilgi Ek 2'de verilmiştir.

3.7.1 Picard (Direkt iterasyon) Yöntemi

(3.49) eşitliği ile verilen doğrusal olmayan denklem sistemi herhangi bir $t = t_{i+1}$ anında izleyen şekilde yazılabilir:

$$[\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]\{q\}_{i+1}^{s} = \{\hat{F}\}_{i,\,i+1} \tag{3.54}$$

Burada s iterasyon numarasını göstermektedir. Herhangi bir $t = t_{i+1}$ anında, $[\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]$ matrisi $(s-1)$. iterasyondaki bilinen $\{q\}_{i+1}^{s-1}$ çözümü kullanılarak sayısal olarak hesaplandıktan sonra s. iterasyondaki $\{q\}_{i+1}^{s}$ çözümü izleyen şekilde elde edilir:

$$\{q\}_{i+1}^{s} = [\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]^{-1} \cdot \{\hat{F}\}_{i,\,i+1} \tag{3.55}$$

İterasyon işlemi iki ardışık çözüm arasındaki fark belli bir kıyaslama parametresinden küçük oluncaya kadar devam ettirilir. Bu çalışmada izleyen formda verilen kıyaslama parametresi seçilmiştir (Reddy, 2004):

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} \left| q_n^{s} - q_n^{s-1} \right|^2}{\sum_{n=1}^{N} \left| q_n^{s} \right|^2}} \leq \zeta_{tol} \tag{3.56}$$

3.7.2 Newton-Raphson Yöntemi

(3.49) eşitliği ile verilen denklem sistemi herhangi bir $t = t_{i+1}$ anında izleyen şekilde yazılabilir:

$$\{R(\{q\}_{i+1})\} \equiv [\hat{K}(\{q\}_{i+1})]\{q\}_{i+1} - \{\hat{F}\}_{i,\,i+1} = \{0\} \tag{3.57}$$

Burada $\{R\}$ artıklar vektörü olarak adlandırılır. $(s-1)$. iterasyondaki $\{q\}_{i+1}^{s-1}$ çözümünün bilindiği kabul edilir ve $\{R\}$ vektörü bilinen bu çözüm civarında izleyen şekilde Taylor serisine açılabilir:

$$\{R(\{q\}_{i+1})\} = \{R(\{q\}_{i+1}^{s-1})\} + \left(\frac{\partial \{R(\{q\}_{i+1})\}}{\partial \{q\}_{i+1}} \right)^{s-1} \cdot \{\delta q\}_{i+1} + \ldots = \{0\} \tag{3.58}$$

(3.58) eşitliğinde mertebesi iki ve daha büyük olan terimler ihmal edilirse

$$[\hat{K}_T(\{q\}_{i+1}^{s-1})]\cdot\{\delta q\}_{i+1} = -\{R(\{q\}_{i+1}^{s-1})\} = \{\hat{F}\}_{i,\,i+1} - [\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]\{q\}_{i+1}^{s-1} \tag{3.59}$$

elde edilir. Burada $[\hat{K}_T]$ teğet (tanjant) rijitlik matrisi olup izleyen şekilde yazılabilir:

$$[\hat{K}_T(\{q\}_{i+1}^{s-1})] \equiv \left(\frac{\partial\{R(\{q\}_{i+1})\}}{\partial\{q\}_{i+1}}\right)^{s-1} \tag{3.60}$$

Artımsal çözüm $\{\delta q\}_{i+1}$ ve s. iterasyondaki çözüm $\{q\}_{i+1}^{s}$ izleyen şekilde elde edilebilir:

$$\{\delta q\}_{i+1} = -[\hat{K}_T(\{q\}_{i+1}^{s-1})]^{-1}\cdot\{R(\{q\}_{i+1}^{s-1})\} \tag{3.61}$$

$$\{q\}_{i+1}^{s} = \{q\}_{i+1}^{s-1} + \{\delta q\}_{i+1} \tag{3.62}$$

Burada da iterasyon işlemi iki ardışık çözüm arasındaki fark (3.56) ile verilen kıyaslama parametresinden küçük oluncaya kadar devam ettirilir. Newton-Raphson yönteminde her iterasyonda teğet rijitlik matrisi güncellenir. Bu işlem bazı durumlarda problemin çözümü için oldukça fazla süre gerektirebilir. Bu nedenle, çözüm süresini kısaltmak için her iterasyonda teğet rijitlik matrisinin güncellenmediği ve adına değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemi (modified Newton-Raphson method) denilen yöntem geliştirilmiştir. Ayrıca, bu problemde başlangıç tahmini çözüm vektörü olarak sıfır çözümü, yani doğrusal çözüm kullanılmıştır. Hareket denkleminin çözüm aşamalarını daha iyi kavrayabilmek için izleyen işlem sırası verilmiştir.

3.7.3 Hareket Denklemlerinin Çözümü İçin İşlem Sırası

A Başlangıç Hesaplamaları

A.1 $[C]$ ve $[M]$ matrisleri hesaplanır.

A.2 Δt zaman adımı seçilir

A.3 Newmark'ın ortalama ivme yöntemi için gerekli parametreler hesaplanır.

A.4 Başlangıç koşulları $\{\ddot{q}\}=0$, $\{\dot{q}\}=0$, $\{q\}\neq 0$ belirlenir (doğrusal olmayan statik analizden).

B Her Bir $t = t_{i+1}$ Zaman Adımı İçin Hesaplamalar

B.1 Yük vektörü $\{F\}$ ve etkili yük vektörü $\{\hat{F}\}$ hesaplanır.

B.2 $[\hat{K}(\{q\}_{i+1})]\{q\}_{i+1}=\{\hat{F}\}_{i,\,i+1}$ denklem sisteminin Direkt iterasyon yöntemi ile çözümü

B.2.1 $s=1$ için $\{q\}_{i+1}^{s-1}=0$ alınarak $[\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]$ matrisi hesaplanır.

B.2.2 s. iterasyondaki $\{q\}_{i+1}^{s}$ çözümü izleyen şekilde elde edilir:

$$\{q\}_{i+1}^{s}=[\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]^{-1}\cdot\{\hat{F}\}_{i,\,i+1} \tag{3.63}$$

B.2.3 İki ardışık çözüm arasındaki farkın aşağıda verilen koşulu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}\left|q_n^{s}-q_n^{s-1}\right|^2}{\sum_{n=1}^{N}\left|q_n^{s}\right|^2}}\leq\zeta_{tol}=0.0001 \tag{3.64}$$

B.2.4. Eğer koşul sağlanmazsa $\{q\}_{i+1}^{s-1}=\{q\}_{i+1}^{s}$ alınarak B.2.1 adımına gidilir.

Eğer koşul sağlanırsa sonraki B.3 adımına geçilir.

B.2 $[\hat{K}(\{q\}_{i+1})]\{q\}_{i+1}=\{\hat{F}\}_{i,\,i+1}$ denkleminin Newton-Raphson yöntemi ile çözümü

B.2.1 Teğet rijitlik matrisi $[K_T]$ oluşturulur.

B.2.2 $s=1$ için $\{q\}_{i+1}^{s-1}=0$ alınarak teğet rijitlik matrisi ve izleyen eşitlikten artıklar vektörü $\{R\}$ hesaplanır.

$$-\{R(\{q\}_{i+1}^{s-1})\}=\{\hat{F}\}_{i,\,i+1}-[\hat{K}(\{q\}_{i+1}^{s-1})]\{q\}_{i+1}^{s-1} \tag{3.65}$$

B.2.3 Artımsal çözüm $\{\delta q\}_{i+1}$ ve s. iterasyondaki çözüm $\{q\}_{i+1}^{s}$ izleyen şekilde elde edilir.

$$\{\delta q\}_{i+1}=-[K_T(\{q\}_{i+1}^{s-1})]^{-1}\cdot\{R(\{q\}_{i+1}^{s-1})\} \tag{3.66}$$

$$\{q\}_{i+1}^{s}=\{q\}_{i+1}^{s-1}+\{\delta q\}_{i+1} \tag{3.67}$$

B.2.4 İki ardışık çözüm arasındaki farkın aşağıda verilen koşulu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}\left|q_n^s-q_n^{s-1}\right|^2}{\sum_{n=1}^{N}\left|q_n^s\right|^2}} \leq \zeta_{tol} = 0.0001 \tag{3.68}$$

B.2.5. Eğer koşul sağlanmazsa $\{q\}_{i+1}^{s-1} = \{q\}_{i+1}^{s}$ alınarak B.2.2 adımına gidilir.

Eğer koşul sağlanırsa sonraki B.3 adımına geçilir.

B.3 $t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş ivme ve hızlar hesaplanır.

$$\{\ddot{q}\}_{i+1} = a_0\left(\{q\}_{i+1} - \{q\}_i\right) - a_2\{\dot{q}\}_i - a_3\{\ddot{q}\}_i \tag{3.69}$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + a_6\{\ddot{q}\}_i + a_7\{\ddot{q}\}_{i+1} \tag{3.70}$$

C. $(i+1)$. zaman adımında elde edilen genelleştirilmiş yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki adımın başlangıç değerleri olarak alınarak aynı işlemler tekrarlanır.

4. SAYISAL UYGULAMALAR

4.1 Geometrik Doğrusal Durum İçin Sönümsüz Serbest Titreşim

Eksenel yük etkisindeki (eksenel yükün basınç ve çekme olması durumunda) basit mesnetli bir kirişin sönümsüz serbest titreşim analizi EBKT, TKT ve RBKT çerçevesinde, çeşitli kiriş yüksekliği/kiriş açıklığı (h/L) değerleri için yapılmıştır. Bu amaçla, söz konusu kirişin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametresi λ_i, eksenel yük parametresi θ_T nin çeşitli değerleri için elde edilerek çizelgeler halinde verilmiştir. Bu çalışmada, eksenel yükün işaretinin basınç olması durumu (+), çekme olması durumu ise ($-$) olarak kabul edilmiştir. Eksenel yükün basınç olması durumunda, boyutsuz eksenel yük parametresi $\theta_T = 4,\ 8$, çekme olması durumunda $\theta_T = -4,\ -8$ olarak seçilmiştir. $\theta_T = 0$ olması ise eksenel yükün sıfır olduğu duruma karşı gelmektedir. Sayısal hesaplamalarda Poisson oranı $\nu = 0.3$, TKT'de gerekli olan dikdörtgen kesit için kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısı $k_s = 5/6$ olarak alınmıştır. Serbest titreşim analizlerinde kirişin boyuna yer değiştirmeleri, kiriş enine titreşimleri üzerinde çok az etkili olduğundan ihmal edilmiştir. Elde edilen sonuçların bir kısmı daha önceden yayınlanmış olup, literatürde mevcut olan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

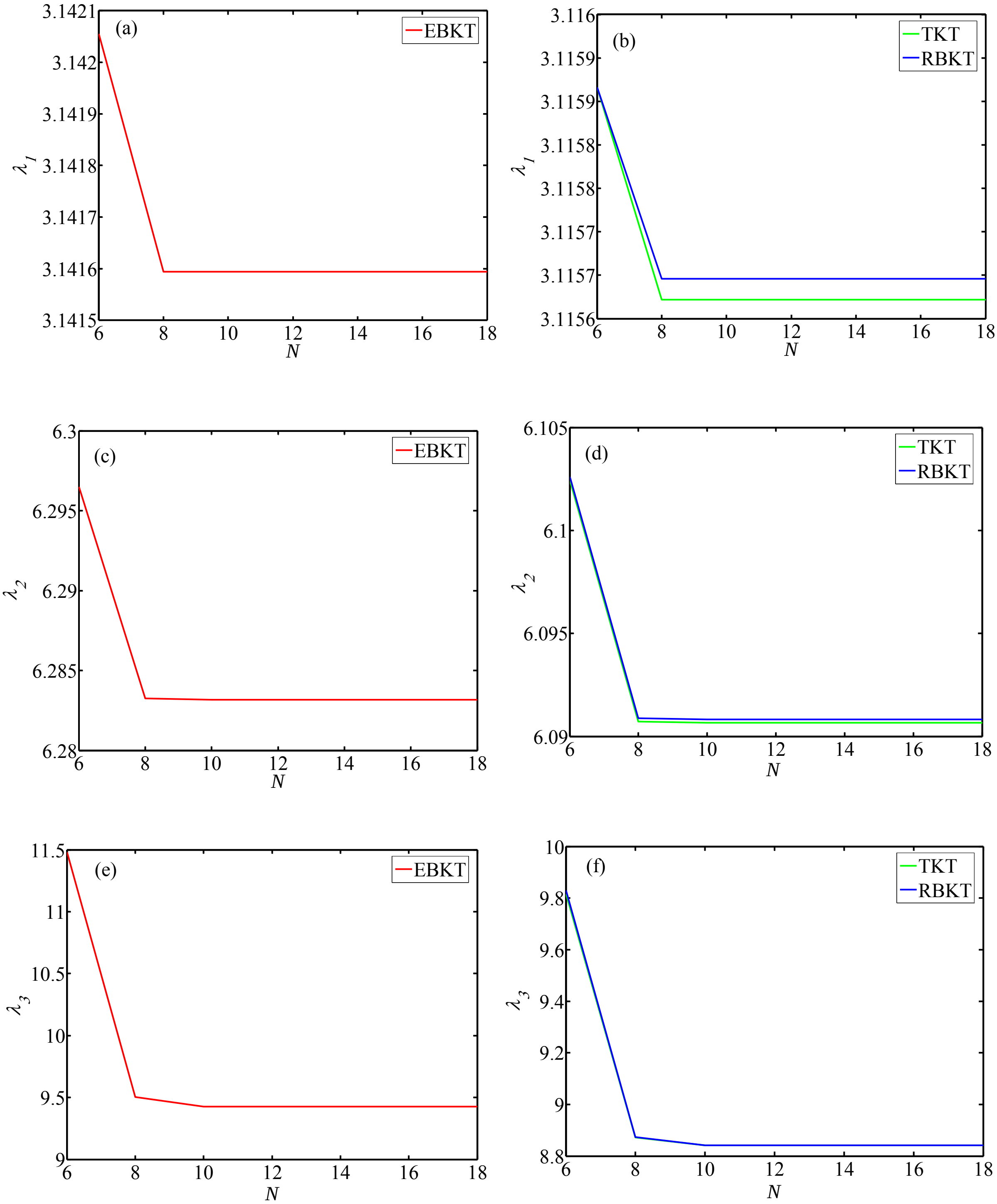
Yukarıda bahsedilen hesaplara geçmeden önce yer değiştirme fonksiyonları için seçilen polinomların terim sayıları için yakınsama çalışmaları yapılmıştır. Bu amaçla terim sayısı $N = 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$ alınarak $h/L = 0.1$ değeri için ilgili kirişin boyutsuz ilk altı serbest titreşim frekansı (özdeğeri) hesaplanarak yapılan yakınsama çalışması sonuçları Çizelge 4.1'de verilmiş ve elde edilen sonuçlar Timoshenko ve Young (1955) tarafından EBKT'ye göre elde edilmiş kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.1'de verilen yakınsama çalışmalarından görüldüğü üzere terim sayısının artmasıyla elde edilen frekans değerlerinin azaldığı, yani kesin değerlere üstten bir yakınsama olduğu görülmüştür. Literatürdeki diğer çalışmalardan da bilindiği üzere enerji metotları ile elde edilen doğal titreşim frekans değerleri kesin değerlere daima üsten yakınsamaktadır (Kocatürk vd., 2004; Kocatürk, 2005). Terim sayısı $N = 8$ olarak alındığında ilk iki modda çok iyi sonuçlar elde edilmiş, ancak beşinci ve altıncı modların elde edilebilmesi içinse terim sayısının arttırılması gerektiği görülmüştür. Ayrıca, Çizelge 4.1'den EBKT için elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut sonuçlarla (örneğin Timoshenko ve Young, 1955) iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.1 Basit mesnetli kiriş için yakınsama çalışması, $h/L = 0.1$, $\theta_T = 0$.

Terim Sayısı N	Teori	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
	EBKT[1]	3.141592	6.283185	9.424777	12.56637	15.70796	18.84955
6	EBKT[2]	3.142055	6.296476	11.48096	16.61391	-	-
	TKT[3]	3.115916	6.102451	9.817001	13.84069	-	-
	RBKT[4]	3.115916	6.102613	9.829280	13.85760	-	-
8	EBKT[2]	3.141594	6.283242	9.504577	12.82870	16.45755	-
	TKT[3]	3.115672	6.090713	8.871699	11.52479	15.98179	-
	RBKT[4]	3.115696	6.090875	8.873625	11.52865	16.07145	-
10	EBKT[2]	3.141594	6.283182	9.425931	12.57477	16.33632	20.08920
	TKT[3]	3.115672	6.090663	8.840824	11.34889	13.82618	16.34147
	RBKT[4]	3.115696	6.090825	8.841825	11.35213	13.84615	16.36586
12	EBKT[2]	3.141594	6.283182	9.424782	12.56646	15.74331	18.95374
	TKT[3]	3.115672	6.090663	8.840522	11.34317	13.62187	15.73471
	RBKT[4]	3.115696	6.090825	8.841488	11.34637	13.63057	15.75051
14	EBKT[2]	3.141594	6.283182	9.424774	12.56637	15.70873	18.85312
	TKT[3]	3.115672	6.090663	8.840513	11.34310	13.61327	15.68074
	RBKT[4]	3.115696	6.090825	8.841488	11.34631	13.62094	15.69566
16	EBKT[2]	3.141594	6.283182	9.424774	12.56636	15.70796	18.84957
	TKT[3]	3.115672	6.090663	8.840513	11.34310	13.61316	15.67898
	RBKT[4]	3.115696	6.090825	8.841488	11.34631	13.62079	15.69385
18	EBKT[2]	3.141594	6.283182	9.424774	12.56636	15.70796	18.84950
	TKT[3]	3.115672	6.090663	8.840513	11.34302	13.61310	15.67697
	RBKT[4]	3.115696	6.090825	8.841462	11.34630	13.62074	15.69364

[1](Timoshenko ve Young, 1955), [2](Şimşek, 2005), [3](Kocatürk ve Şimşek, 2005a), [4](Şimşek ve Kocatürk, 2007a).

Şekil 4.1'de ilk üç serbest titreşim frekans değerinin yer değiştirme fonksiyonundaki terim sayısıyla değişimi gösterilmiştir. Diğer titreşim frekansları için de aynı şekiller elde edilebilir. Bu şekillerden de görüldüğü gibi ilk üç özdeğer için, terim sayısı 8 veya 8 den büyük alınarak yapılan çözümlerin yeterli derecede hassas sonuç verdiği söylenebilir.



Şekil 4.1 Basit mesnetli bir kirişin ilk üç boyutsuz frekans parametresinin yer değiştirme fonksiyonundaki terim sayısıyla değişimi, $h/L = 0.1$, $\theta_T = 0$.

Çizelge 4.2 Değişik h/L oranları için basit mesnetli bir kirişin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametresi, $\theta_T = 0$.

Teori	h/L	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
EBKT	-	3.1415	6.2831	9.4247	12.5664	15.7080	18.8496
TKT[5]	0.002	3.1415	6.2831	9.4244	12.5657	15.7066	18.8473
TKT[3]		3.1415	6.2831	9.4244	12.5656	15.7066	18.8471
RBKT[4]		3.1415	6.2831	9.4244	12.5656	15.7066	18.8472
TKT[5]	0.005	3.1415	6.2826	9.4229	12.5621	15.6997	18.8352
TKT[3]		3.1415	6.2826	9.4229	12.5621	15.6996	18.8351
RBKT [4]		3.1415	6.2826	9.4229	12.5621	15.6996	18.8352
TKT[5]	0.01	3.1413	6.2810	9.4176	12.5494	15.6749	18.7926
TKT[3]		3.1413	6.2810	9.4176	12.5494	15.6749	18.7925
RBKT [4]		3.1413	6.2810	9.4176	12.5494	15.6749	18.7926
TKT[5]	0.02	3.1405	6.2747	9.3963	12.4994	15.5784	18.6282
TKT[3]		3.1405	6.2747	9.3962	12.4993	15.5784	18.6280
RBKT[4]		3.1405	6.2747	9.3963	12.4994	15.5784	18.6283
TKT[5]	0.05	3.1349	6.2313	9.2553	12.1813	14.9926	17.6810
TKT[3]		3.1349	6.2313	9.2553	12.1812	14.9926	17.6802
RBKT[4]		3.1349	6.2313	9.2554	12.1816	14.9935	17.6829
TKT[5]	0.1	3.1156	6.0906	8.8405	11.3431	13.6132	15.6790
TKT[3]		3.1156	6.0906	8.8404	11.3430	13.6131	15.6769
RBKT[4]		3.1156	6.0908	8.8414	11.3463	13.6207	15.6938
TKT[5]	0.2	3.0453	5.6715	7.8395	9.6570	11.2220	12.6022
TKT[3]		3.0453	5.6715	7.8394	9.6569	11.2219	12.5971
RBKT[4]		3.0454	5.6731	7.8469	9.6769	11.2625	12.6723

[3](Kocatürk ve Şimşek, 2005a), [4](Şimşek ve Kocatürk, 2007a), [5](Lee ve Schultz, 2004).

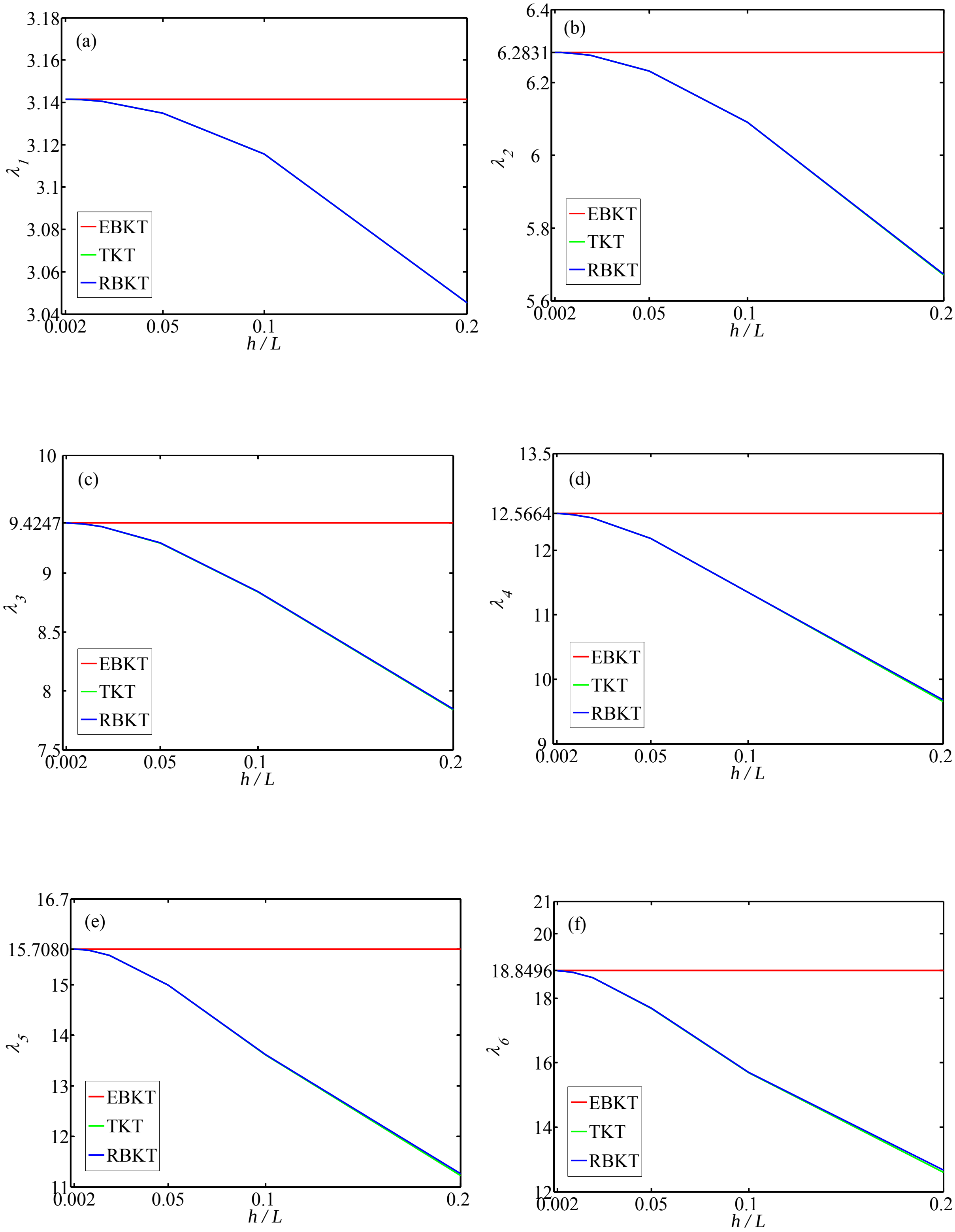
Çizelge 4.2'de basit mesnetli bir kirişin EBKT, TKT ve RBKT'ye göre hesaplanan ilk altı boyutsuz frekans parametresi h/L oranının 0.002 ile 0.2 arasında değişen değerleri için verilmiştir. Burada eksenel yük parametresi $\theta_T = 0$ alınmış, yani eksenel yükün etkisi dikkate alınmamıştır. Ayrıca, EBKT kayma şekil değiştirmelerinin etkisini dikkate almadığından, h/L oranının etkisi EBKT için söz konusu değildir. Bu çizelgede TKT[3] ile verilen sonuçlar Kocatürk ve Şimşek (2005a), RBKT[4] ile verilen sonuçlar da Şimşek ve Kocatürk (2007a) tarafından daha önceden yayınlanmıştır. TKT'ye göre elde edilen sonuçlar Lee ve Schultz (2004) tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.2'den görüldüğü gibi TKT'ye göre elde edilen sonuçların Lee ve Schultz (2004) tarafından verilen sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Gerek Çizelge 4.2'deki sonuçlardan gerekse Çizelge 4.1'deki yakınsama çalışmasından görüldüğü gibi yer değiştirme fonksiyonları için seçilen polinomların geometrik doğrusal durumda yeterli hassasiyette sonuç verdiği görülmektedir.

Çizelge 4.2'den kayma şekil değiştirmelerinin etkisini dikkate alan TKT ve RBKT'ye göre hesaplanan boyutsuz frekansların, kayma şekil değiştirmelerinin etkisini ihmal eden EBKT'ye göre hesaplanan boyutsuz frekanslardan daha küçük olduğu görülmektedir. Bu davranış şöyle açıklanabilir: Bilindiği gibi mühendislikte kiriş ve plak problemi gibi bazı problemleri basitleştirmek için birtakım kabuller veya bilinmeyen bir fonksiyonu bilinmeyen başka bir fonksiyon cinsinden ifade etmek gibi kısıtlamalar yapılır. Bu kabuller ve kısıtlamalar sonucu ele alınan problemin serbestlik derecesi azalır ve serbestlik derecesi azalan bir eleman daha rijit bir davranış gösterir. Örneğin EBKT'de eğilmeden önce düzlem ve tarafsız eksene dik olan kesitler eğilmeden sonra da düzlem ve tarafsız eksene dik olarak kalır. Böylece kesit dönmeleri elastik eğrinin birinci türeviyle ifade edilir. Daha önceden de açıklandığı gibi TKT'ye göre eğilme öncesinde tarafsız eksene dik olan düzlem kesitler eğilmeden sonra yine düzlem kalır ama artık tarafsız eksene dik kalmaz. RBKT'de ise eğilmeden sonra kesitler hem düzlem kalmayarak çarpılır hem de tarafsız eksene dik kalmaz. Bu kabullerden anlaşılacağı gibi üç teori içinde EBKT'nin serbestliği en azdır. Dolayısıyla en rijit davranışı EBKT gösterir. Yine dinamik derslerinden bilindiği üzere bir elemanın rijitliği arttıkça serbest titreşim frekansları artar. Böylece, her üç teori içinde en rijit olan EBKT'ye göre hesaplanan boyutsuz frekanslar diğer iki teoriye göre bulunan boyutsuz frekanslardan daha büyük olacaktır. Bu açıklamalara göre üç teori içinde RBKT'ye göre hesaplanan boyutsuz frekansların en küçük olması beklenebilir. Ancak, Çizelge 4.2'den görüldüğü gibi RBKT'ye göre hesaplanan boyutsuz frekanslar EBKT ve TKT için hesaplanan boyutsuz frekansların arasında kalmaktadır. Bu durum da şöyle açıklanabilir: TKT için kiriş kesiti üzerinde tarafsız eksenden z mesafesi kadar uzaklıktaki bir noktanın x ekseni doğrultusundaki yer değiştirmesi (2.17) eşitliğinde $u^T = u_0^T + z\psi^T$, RBKT için (2.20) eşitliği ile $u^R = u_0^R + z\psi^R - \beta z^3 \left(\psi^R + \partial w_0^R / \partial x\right)$ şeklinde verilmişti. Burada kesit dönmelerini ifade eden ψ^T ve ψ^R büyüklüklerinin kiriş ekseni üzerindeki değerlerinin birbirine çok yakın olması gerektiği söylenebilir. Bu durumda, RBKT için verilen yer değiştirme ifadesindeki negatif terim sebebiyle, RBKT'deki yer değiştirmeler TKT'deki yer değiştirmelerden genellikle daha küçük olacaktır. Bundan dolayı, RBKT'deki şekil değiştirmeler de TKT'deki şekil değiştirmelerden daha küçük olacaktır. Böylece, TKT'ye göre daha rijit olan RBKT daha büyük frekans değerleri verecektir. RBKT'de kesitin en üst ve en alt liflerinde kayma gerilmesinin sıfır olması şartı sağlandığından dolayı, RBKT'ye göre bulunan boyutsuz frekansların TKT'ye göre bulunan boyutsuz frekanslara göre daha kesin olduğu söylenebilir.

Ancak, RBKT'nin kesit şekli dikdörtgenden farklı olan kirişlere uygulanamayacağını hatırlatmak faydalı olacaktır. Ayrıca, Çizelge 4.2'den göz önüne alınan parametreler için, RBKT ve TKT'ye göre elde edilen boyutsuz frekans değerlerinin birbirine çok yakın olduğu ve bu iki teoriye göre hesaplanan boyutsuz frekans değerleri arasındaki farkın yüksek modlara gidildikçe arttığı görülmektedir. Her üç teori için elde edilen boyutsuz frekanslar h/L oranının küçük değerleri (örneğin $h/L = 0.002$ ve $h/L = 0.005$) için birbirine çok yakın olmakla beraber, h/L oranının artmasıyla beraber EBKT için bulunan boyutsuz frekanslar ile TKT ve RBKT'ye göre bulunan boyutsuz frekanslar arasındaki fark artmaktadır. Başka bir ifadeyle h/L oranının artmasıyla kayma şekil değiştirmelerinin kirişin davranışı üzerindeki etkisi artmaktadır. Yine EBKT için bulunan boyutsuz frekanslar ile TKT ve RBKT'ye göre bulunan boyutsuz frekanslar arasındaki farkın yüksek modlarda daha fazla olduğu görülmektedir. Örneğin, $h/L = 0.1$ için EBKT ve TKT arasındaki fark, birinci boyutsuz frekans için % 0.82, ikinci boyutsuz frekans için % 3.06, üçüncü boyutsuz frekans için % 6.18, dördüncü boyutsuz frekans için % 9.70, beşinci boyutsuz frekans için % 13.28 ve altıncı boyutsuz frekans için % 16.74 olmaktadır. Yani, kayma şekil değiştirmelerinin kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkisinin mod numarasının artmasıyla birlikte daha da önem kazandığı söylenebilir.

Şekil 4.2'de, Çizelge 4.2'de her üç teoriye göre hesaplanmış olan ilk altı boyutsuz frekansın h/L oranına göre değişimi gösterilmiştir. Şekil 4.2'de h/L oranının hesaplarda dikkate alınan tüm değerleri yatay eksen üzerinde gösterildiğinde rakamlar birbirine karışmaktadır. Bu nedenle, yatay eksende h/L oranının sadece 0.002, 0.05, 0.1 ve 0.2 değerleri yazdırılmıştır. Bu şekillerde yeşil eğri ile çizdirilen TKT'nin frekans değerleri ile mavi eğri ile gösterilen RBKT'nin frekans değerleri hemen hemen üst üste düştüğünden dolayı birbirinden ayırt edilememektedir. Şekil 4.2 önceki çizelgelerde verilen sonuçları özetlemektedir. Bu şekilden görüldüğü gibi EBKT'ye göre elde edilen boyutsuz frekanslar h/L oranından bağımsız olup, tüm h/L oranları için aynı frekans değeri elde edilmektedir. TKT ve RBKT'ye göre elde edilen boyutsuz frekans değerleri birbirine çok yakın olup, h/L oranının artmasıyla birlikte boyutsuz frekans değerleri azalmaktadır.



Şekil 4.2 Basit mesnetli bir kirişin ilk altı boyutsuz frekans parametresinin h/L oranıyla değişimi, $\theta_T = 0$.

Çizelge 4.3 Değişik h/L oranları için basit mesnetli bir kirişin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametreleri, $\theta_T = 4$.

Teori	h/L	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
EBKT	-	2.7588	6.1175	9.3168	12.4860	15.6446	18.7998
TKT	0.002	2.7588	6.1175	9.3165	12.4853	15.6433	18.7975
RBKT		2.7588	6.1175	9.3165	12.4853	15.6433	18.7975
TKT	0.005	2.7587	6.1170	9.3149	12.4817	15.6362	18.7854
RBKT		2.7587	6.1170	9.3149	12.4817	15.6363	18.7854
TKT	0.01	2.7585	6.1153	9.3094	12.4688	15.6113	18.7425
RBKT		2.7585	6.1153	9.3094	12.4688	15.6113	18.7425
TKT	0.02	2.7574	6.1086	9.2876	12.4181	15.5138	18.5770
RBKT		2.7574	6.1086	9.2876	12.4181	15.5138	18.5771
TKT	0.05	2.7500	6.0627	9.1431	12.0953	14.9219	17.6222
RBKT		2.7500	6.0627	9.1432	12.0956	14.9228	17.6242
TKT	0.1	2.7240	5.9129	8.7154	11.2405	13.5221	15.5956
RBKT		2.7240	5.9131	8.7164	11.2438	13.5299	15.6109
TKT	0.2	2.6262	5.4573	7.6648	9.4928	11.0582	12.4352
RBKT		2.6264	5.4592	7.6730	9.5143	11.1017	12.5104

Çizelge 4.4 Değişik h/L oranları için basit mesnetli bir kirişin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametreleri, $\theta_T = 8$.

Teori	h/L	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
EBKT	-	2.0725	5.9373	9.2050	12.4040	15.5798	18.7461
TKT	0.002	2.0725	5.9372	9.2046	12.4034	15.5784	18.7438
RBKT		2.0725	5.9372	9.2046	12.4034	15.5784	18.7438
TKT	0.005	2.0723	5.9367	9.2031	12.3997	15.5713	18.7316
RBKT		2.0723	5.9367	9.2031	12.3997	15.5713	18.7316
TKT	0.01	2.0718	5.9349	9.1974	12.3866	15.5461	18.6885
RBKT		2.0718	5.9349	9.1974	12.3866	15.5461	18.6885
TKT	0.02	2.0695	5.9277	9.1751	12.3352	15.4478	18.5219
RBKT		2.0695	5.9277	9.1751	12.3353	15.4478	18.5220
TKT	0.05	2.0538	5.8787	9.0266	12.0075	14.8498	17.5600
RBKT		2.0538	5.8787	9.0266	12.0078	14.8508	17.5620
TKT	0.1	1.9965	5.7175	8.5847	11.1351	13.4290	15.5091
RBKT		1.9966	5.7177	8.5857	11.1385	13.4371	15.5247
TKT	0.2	1.7386	5.2143	7.4771	9.3193	10.8865	12.2602
RBKT		1.7390	5.2165	7.4862	9.3427	10.9333	12.3406

Çizelge 4.5 Değişik h/L oranları için basit mesnetli bir kirişin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametreleri, $\theta_T = -4$.

Teori	h/L	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
EBKT	-	3.4205	6.4366	9.5291	12.6452	15.7720	18.9059
TKT	0.002	3.4205	6.4365	9.5288	12.6445	15.7706	18.9036
RBKT		3.4205	6.4365	9.5288	12.6445	15.7706	18.9036
TKT	0.005	3.4204	6.4361	9.5273	12.6410	15.7637	18.8916
RBKT		3.4204	6.4361	9.5273	12.6410	15.7637	18.8916
TKT	0.01	3.4202	6.4345	9.5221	12.6284	15.7391	18.8492
RBKT		3.4202	6.4345	9.5221	12.6284	15.7391	18.8492
TKT	0.02	3.4195	6.4285	9.5013	12.5790	15.6433	18.6857
RBKT		3.4195	6.4285	9.5013	12.5791	15.6433	18.6858
TKT	0.05	3.4148	6.3873	9.3636	12.2654	15.0629	17.7446
RBKT		3.4148	6.3873	9.3637	12.2658	15.0637	17.7465
TKT	0.1	3.3985	6.2540	8.9604	11.4429	13.7026	15.7644
RBKT		3.3985	6.2542	8.9614	11.4460	13.7100	15.7790
TKT	0.2	3.3399	5.8638	8.0030	9.8131	11.3787	12.7638
RBKT		3.3400	5.8652	8.0098	9.8315	11.4165	12.8299

Çizelge 4.6 Değişik h/L oranları için basit mesnetli bir kirişin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametreleri, $\theta_T = -8$.

Teori	h/L	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
EBKT	-	3.6442	6.5798	9.6301	12.7225	15.8345	18.9582
TKT	0.002	3.6442	6.5797	9.6298	12.7219	15.8332	18.9560
RBKT		3.6442	6.5797	9.6298	12.7219	15.8332	18.9560
TKT	0.005	3.6441	6.5793	9.6284	12.7184	15.8263	18.9440
RBKT		3.6441	6.5793	9.6284	12.7184	15.8263	18.9441
TKT	0.01	3.6439	6.5778	9.6233	12.7060	15.8019	18.9019
RBKT		3.6439	6.5778	9.6233	12.7060	15.8019	18.9019
TKT	0.02	3.6433	6.5720	9.6029	12.6572	15.7069	18.7393
RBKT		3.6433	6.5720	9.6029	12.6573	15.7069	18.7394
TKT	0.05	3.6391	6.5325	9.4683	12.3479	15.1319	17.8049
RBKT		3.6391	6.5326	9.4684	12.3482	15.1328	17.8068
TKT	0.1	3.6244	6.4055	9.0758	11.5401	13.7902	15.8468
RBKT		3.6244	6.4057	9.0767	11.5431	13.7975	15.8610
TKT	0.2	3.5724	6.0387	8.1569	9.9618	11.5289	13.4444
RBKT		3.5724	6.0399	8.1631	9.9788	11.5642	13.4072

Çizelge 4.3 ve 4.4 ‘de eksenel basınç kuvvet, Çizelge 4.5 ve 4.6’da eksenel çekme kuvveti etkisindeki basit mesnetli bir kirişin boyutsuz ilk altı titreşim frekansı h/L oranının değişik değerleri için verilmiştir. Eksenel kuvvetin basınç olması durumunda eksenel yük parametresinin değeri $\theta_T = 4, 8$ ve eksenel yükün çekme olması durumunda $\theta_T = -4, -8$ olarak alınmıştır. Çizelge 4.3-4.6’dan görüldüğü gibi eksenel yükün basınç olması durumunda titreşim frekanslarının azaldığı, çekme olması durumunda ise arttığı görülmektedir. Bu davranış Timoshenko ve Young (1955), Chan ve Yung (2000), Şimşek (2005), Kocatürk ve Şimşek (2006a) tarafından yapılan çalışmalarda da gözlenmiştir. Eşitlik (2.195), (2.206) ve (2.221) eşitliklerinden görüldüğü gibi eksenel yükün basınç olması durumunda geometrik rijitlik matrisi $[\overline{K}_G]$ sistemin toplam rijitliğini azaltmakta, çekme olması durumunda ise sistemin toplam rijitliğini arttırmaktadır. Bu nedenle, ele alınan kiriş eksenel kuvvet etkisi altında yukarıda sözü edilen davranışı göstermektedir. Ayrıca, eksenel basınç kuvveti altında sistemin toplam rijitliğinin azalması, literatürde basınç yumuşaması etkisi (compression softening effect) (Chan ve Yung, 2000b) olarak bilinir. Çizelge 4.3-4.6 incelendiğinde eksenel kuvvetin, özellikle, ilgili kirişin birinci titreşim frekansı üzerinde çok daha etkili olduğu, yüksek modlarda eksenel yükün etkisinin giderek azaldığı dikkati çekmektedir.

Çizelge 4.7 Değişik h/L oranları için basit mesnetli bir kirişin ilk altı titreşim frekansının eksenel basınç kuvvet nedeniyle yüzde (%) olarak değişimi, $\theta_T = 4$.

Teori	h/L	$\Delta\lambda_1$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$	$\Delta\lambda_4$	$\Delta\lambda_5$	$\Delta\lambda_6$
EBKT	-	12.182	2.635	1.144	0.639	0.403	0.264
TKT	0.002	12.182	2.635	1.144	0.639	0.403	0.263
RBKT		12.182	2.635	1.144	0.639	0.403	0.263
TKT	0.01	12.186	2.638	1.148	0.642	0.405	0.266
RBKT		12.186	2.638	1.148	0.642	0.405	0.266
TKT	0.05	12.277	2.705	1.212	0.705	0.471	0.328
RBKT		12.277	2.705	1.212	0.705	0.471	0.331
TKT	0.2	13.762	3.776	2.227	1.699	1.458	1.285
RBKT		13.758	3.770	2.216	1.680	1.427	1.277

Çizelge 4.7’de $\theta_T = 4$ için, eksenel basınç kuvveti nedeniyle kirişin frekanslarındaki azalma yüzde olarak gösterilmiştir. Bu çizelgeden mod numarasının artmasıyla birlikte frekanslardaki değişim yüzdesinin azaldığı görülmektedir. Daha önce de belirtildiği gibi, eksenel kuvvet kirişin birinci doğal frekansı üzerinde çok daha etkili olmaktadır. Ayrıca, h/L oranı arttıkça tüm doğal frekanslardaki değişim yüzdesinin arttığı, yani eksenel basınç kuvvetinin kirişin frekansları üzerinde daha etkili duruma geldiği göze çarpmaktadır.

4.2 Geometrik Doğrusal Durum İçin Hareketli Harmonik Yük Altında Zorlanmış Titreşim

Dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisindeki bir kirişin dinamik cevapları EBKT, TKT ve RBKT'ye göre sayısal olarak hesaplanmış ve çeşitli şekiller üzerinde verilmiştir. Kayma şekil değiştirmelerinin (bir diğer anlamda kiriş kesit yüksekliği / kiriş açıklığı oranının), hareketli harmonik yükün hızı ve frekansının, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti ve dışmerkezliğinin ve kiriş malzemesinin sönümünün kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir. Sayısal hesaplamalarda dikkate alınan parametreler mümkün olduğunca uygulamadaki değerlere yakın seçilmeye çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar, Timoshenko ve Young (1955) tarafından hareketli harmonik yük etkisindeki basit mesnetli bir kiriş için verilen çözümlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Newmark-β yöntemi için zaman adımı sayısı için yakınsama çalışması yapılmıştır. Polinomlardaki terim sayıları için tekrar bir yakınsama çalışması yapılmasına gerek duyulmamıştır. Sayısal hesaplarda polinom terim sayısı $N=16$ alınmıştır. Sayısal uygulamalarda hareketli yükün genliği $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, ele alınan kirişin birim boy kütlesi $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m}$, elastisite modülü $E = 35\,\mathrm{GPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, kesit genişliği $b = 0.4\,\mathrm{m}$, kesit yüksekliği $h = 0.9\,\mathrm{m}$, TKT için kayma gerilmesi dağılışı düzeltme katsayısı $k_s = 5/6$ (dikdörtgen kesit için) alınmıştır. Kiriş malzemesinin eğilme ve kaymadaki sönüm katsayısı birbirine eşit alınmıştır, yani $\eta_b = \eta_s = \eta$. Yukarıda sözü edilen etkileri incelemek için kirişe ve yüklemeye ait diğer parametreler çeşitli değerlerde alınmış ve seçilen değerler ilgili şekil yazılarında verilmiştir. Elde edilen dinamik yer değiştirmeler, statikten bilinen, açıklık ortasında tekil yüklü basit mesnetli bir kirişteki en büyük yer değiştirme olan $D = PL^3/48EI$ değerine bölünerek boyutsuzlaştırılmıştır. Dinamik yer değiştirmelerin statik yer değiştirmelere oranına dinamik büyütme faktörü de denilmektedir. İzleyen grafiklerde hareketli harmonik yükün altındaki veya kiriş orta noktasındaki boyutsuz dinamik yer değiştirmeler izleyen şekilde tanımlanmış olan boyutsuz zaman parametresine göre çizdirilmiştir. Sözü edilen boyutsuz zaman parametresi S aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$S = \frac{t}{t_P} - \frac{1}{2} = \frac{vt}{L} - \frac{1}{2}; \quad t_P = t_ç - t_g = t_ç - 0 = t_ç \tag{4.1}$$

Burada, t_g hareketli yükün kiriş üzerine geldiği an (bu problemde $t_g = 0$ olarak alınmıştır), $t_ç$ hareketli yükün kirişi terk ettiği an ve t_P hareketli yükün kiriş üzerinde kaldığı süredir.

(4.1) bağıntısında verilen tanıma göre, $S = -0.5$ olduğunda $t = 0$ değerini alır, yani hareketli harmonik yük kirişin sol ucunda ($x_P(t) = -L/2$) olduğu anlamına gelmektedir. Benzer şekilde $S = 0.5$ olduğunda ise $t = t_P$, yani hareketli yük kirişin sağ ucunda ($x_P(t) = L/2$) olacaktır.

4.2.1 Zaman Adımı Sayısı İçin Yakınsama Çalışması

Zaman tanım alanında yapılan dinamik analizlerde seçilen zaman adımı sayısı elde edilen sonuçları önemli derecede etkilemektedir. Bu nedenle çalışmanın bu kısmında zaman adımı sayısı için bir yakınsama çalışması yapılmıştır. Farklı zaman adımı sayıları için, her üç kiriş teorisine göre kiriş ortasındaki en büyük boyutsuz yer değiştirmeler hesaplanarak yapılan yakınsama çalışması sonuçları Çizelge 4.8'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.8 Zaman adımı sayısı için yakınsama çalışması, $L = 20\,\text{m}$, $P_0 = 100\,\text{kN}$, $v = 20\,\text{m/s}$, $\Omega = 0$, $T = 0$, $\eta = 0.001\,\text{s}$.

Zaman adımı sayısı	Kiriş orta noktasındaki en büyük boyutsuz yer değiştirme		
	EBKT	TKT	RBKT
10	1.052367	1.056482	1.056490
25	1.140712	1.148493	1.148483
50	1.139845	1.147971	1.147960
100	1.140202	1.147969	1.147958
200	1.139831	1.147532	1.147522
300	1.139896	1.147498	1.147488
400	1.139838	1.147542	1.147531
500	1.139850	1.147541	1.147530
1000	1.139837	1.147524	1.147523

Yukarıdaki çizelgeden görüldüğü gibi zaman adımı sayısı 25, 50 alınarak yapılan analizlerden elde edilen sonuçlar ile zaman adımı sayısı 1000 alınarak yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlar arasındaki fark ihmal edilebilecek bir mertebededir. Bundan sonraki sayısal hesaplarda tatmin edici hassasiyette sonuçlar elde etmek için zaman adımı sayısı 500 olarak seçilmiştir.

4.2.2 Bu Çalışmada Elde Edilen Sayısal Sonuçların Doğrulanması

Bu çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğu, burada elde edilen sonuçların, literatürde mevcut olan ve bu çalışmanın özel durumuna karşı gelen sonuçlarla karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir. Literatürde hareketli harmonik yük etkisindeki basit mesnetli bir kiriş için birkaç analitik çözüm mevcuttur. Bu çalışmada elde edilen sonuçların bir kısmı Timoshenko ve Young (1955) tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Timoshenko ve Young (1955), hareketli harmonik yük etkisindeki basit mesnetli bir kirişin dinamik cevabını Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde analitik olarak elde ederek izleyen bağıntıyla vermiştir:

$$w(x,t)=\frac{P_0 L^3}{EI\,\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\frac{k\pi x}{L}\left\{\frac{\sin\left(\frac{k\pi v}{L}+\Omega\right)t}{k^4-(g+k\,y)^2}+\frac{\sin\left(\frac{k\pi v}{L}-\Omega\right)t}{k^4-(g-k\,y)^2}-\right.$$

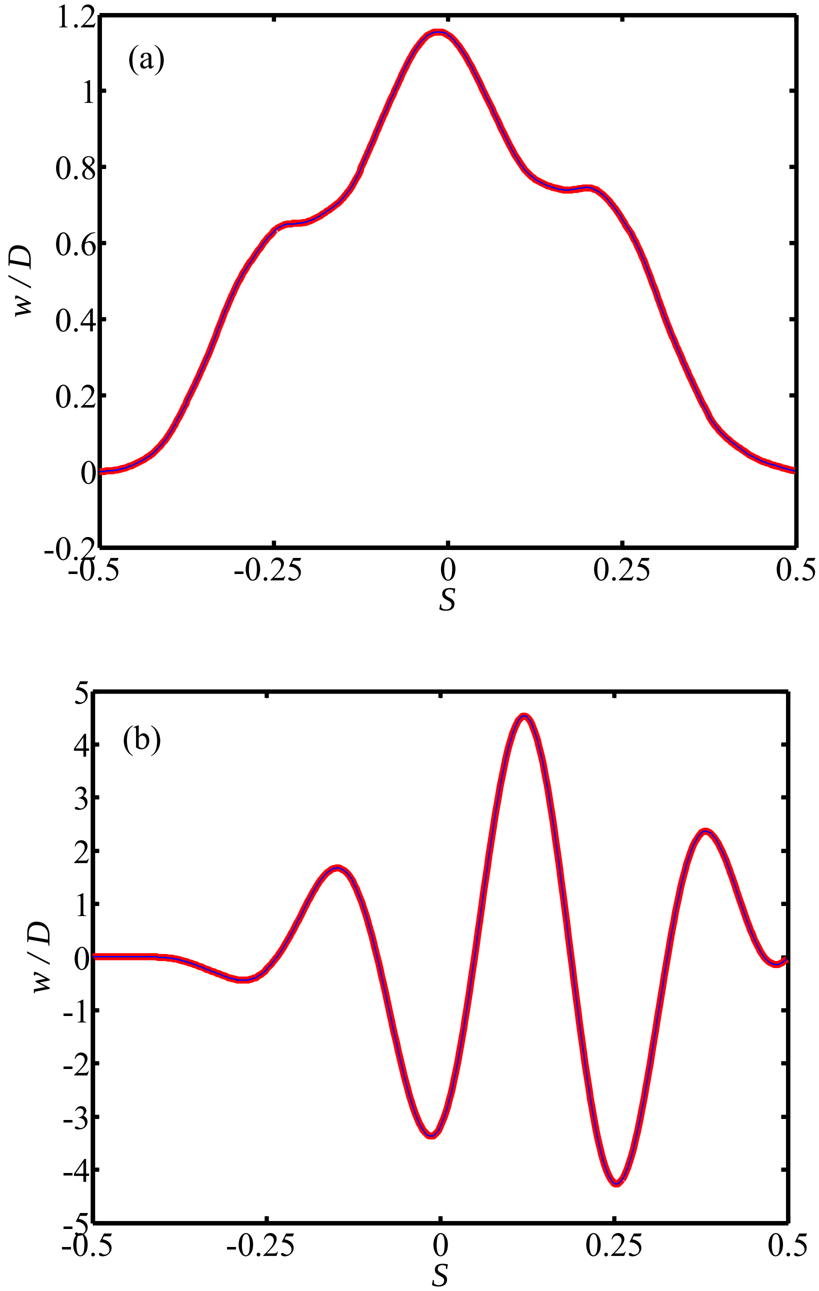
$$\left.\frac{y}{k}\left[\frac{\sin\frac{k^2\pi^2 a t}{L^2}}{-k^2y^2+(k^2-g)^2}+\frac{\sin\frac{k^2\pi^2 a t}{L^2}}{-k^2y^2+(k^2+g)^2}\right]\right\} \tag{4.2}$$

Burada

$$a=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}},\quad y=\frac{vL}{\pi a},\quad g=\frac{\Omega L^2}{\pi^2 a} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanmış büyüklüklerdir. Ancak (4.2) çözümü elde edilirken hareketli harmonik yük $P(t)=P_0\cos(\Omega t)$ şeklinde göz önüne alınmış ve ayrıca kiriş iç sönümünün etkisi ihmal edilmiştir. Her iki çalışmadaki sonuçların uyumlu olabilmesi için, burada da hareketli harmonik yük $P(t)=P_0\cos(\Omega t)$ şeklinde göz önüne alınarak ve sönüm ihmal edilerek karşılaştırma çalışması yapılmıştır.

Şekil 4.3'de bu çalışmada elde edilen hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmeler kırmızı eğri ile, Timoshenko ve Young (1955) tarafından verilen (4.2) eşitliğinin kullanılmasıyla elde edilen yer değiştirmeler mavi eğriyle gösterilmiştir. Şekil 4.2a'da hareketli yükün şiddetinin sabit olması durumunda ($\Omega=0$), Şekil 4.3b'de ise rezonans durumundaki ($\Omega=\omega_1$) yer değiştirmeler gösterilmiştir. Ele alınan kirişin birinci titreşim frekansı $\omega_1=22.7550$ rad/s olarak hesaplanmıştır.



Şekil 4.3 Hareketli yük altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\text{kN}$, $L = 20\,\text{m}$, $v = 20\,\text{m/s}$, $\eta = 0$, $T = 0$, a) $\Omega = 0$, b) $\Omega = \omega_1 = 22.7550\,\text{rad/s}$, (——) Bu çalışma, (——) Timoshenko ve Young (1955).

Her şeyden önce her iki çalışmadan elde edilen sonuçların birbiriyle mükemmel bir uyum içinde olduğunu söylemek yerinde olacaktır. Bir başka deyişle, ele alınan kirişe ait dinamik yer değiştirmelere yaklaşım için kullanılan polinomların oldukça başarılı olduğu söylenebilir. Şekil 4.3a'dan görüldüğü gibi hareketli yükün şiddetinin sabit olması durumunda dinamik yer değiştirmeler statik yer değiştirmelerin yaklaşık olarak 1.2 katı kadardır. Beklenen bir durum olarak, rezonans durumunda oldukça büyük yer değiştirmeler, yaklaşık olarak statik yer değiştirmelerin 4 katından fazla, elde edilmiştir.

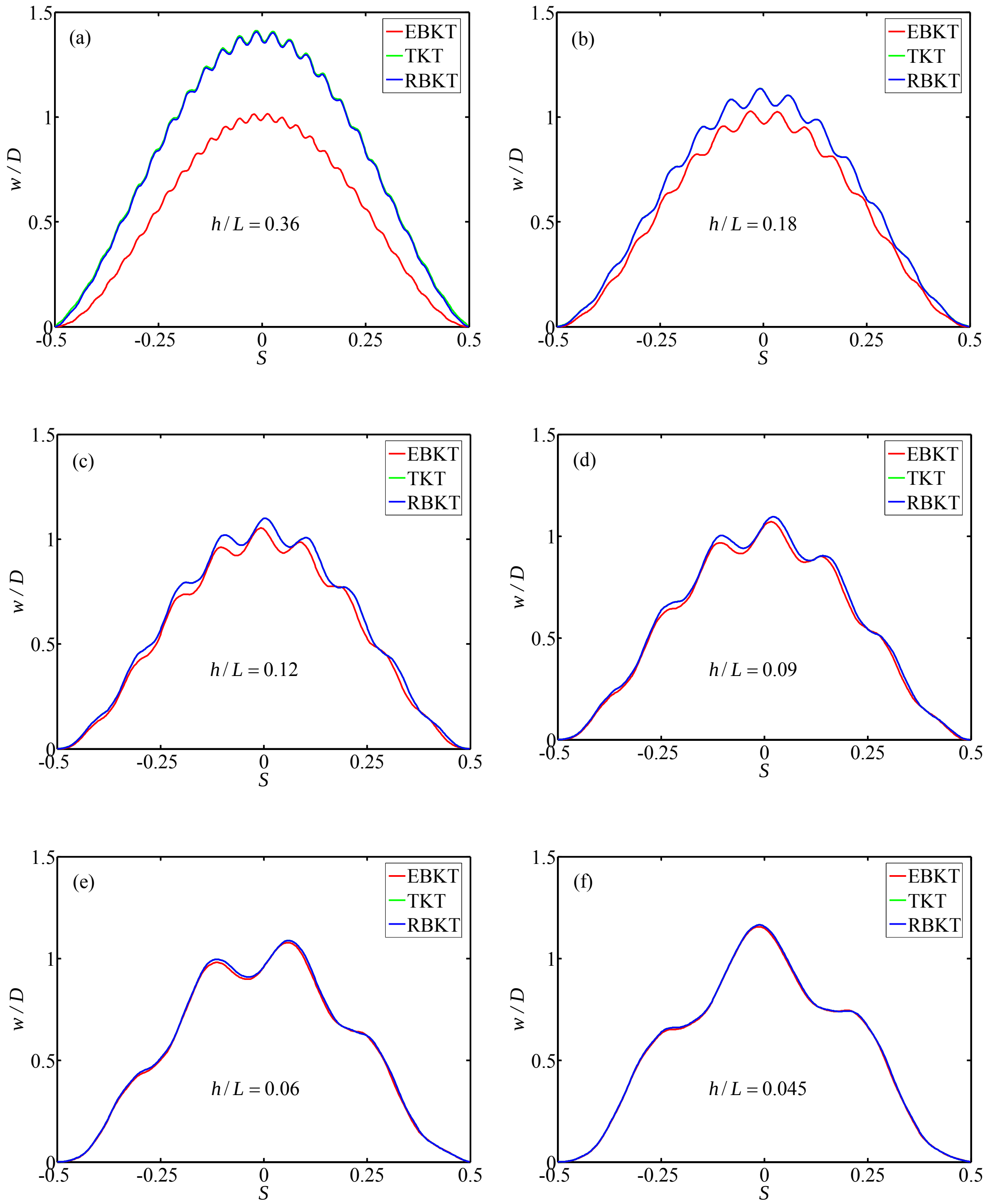
4.2.3 Kayma Şekil Değiştirmelerinin Etkisi

Kayma şekil değiştirmelerinin veya kayma gerilmelerinin kirişin davranışı üzerindeki etkisini inceleyebilmek için kiriş açıklığı $L = 2.5,\ 5.0,\ 7.5,\ 10,\ 15,\ 20\ \mathrm{m}$ alınarak (bu uzunluklara karşılık gelen h/L oranları da şekiller üzerinde verilmiştir), her üç kiriş teorisi için hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmeler boyutsuz zamana karşı çizdirilmiştir. Burada hareketli yükün hızı sabit $v = 20\ \mathrm{m/s}$ olarak seçilmiş ve dışmerkez basınç kuvvetinin etkisi şimdilik dikkate alınmamıştır.

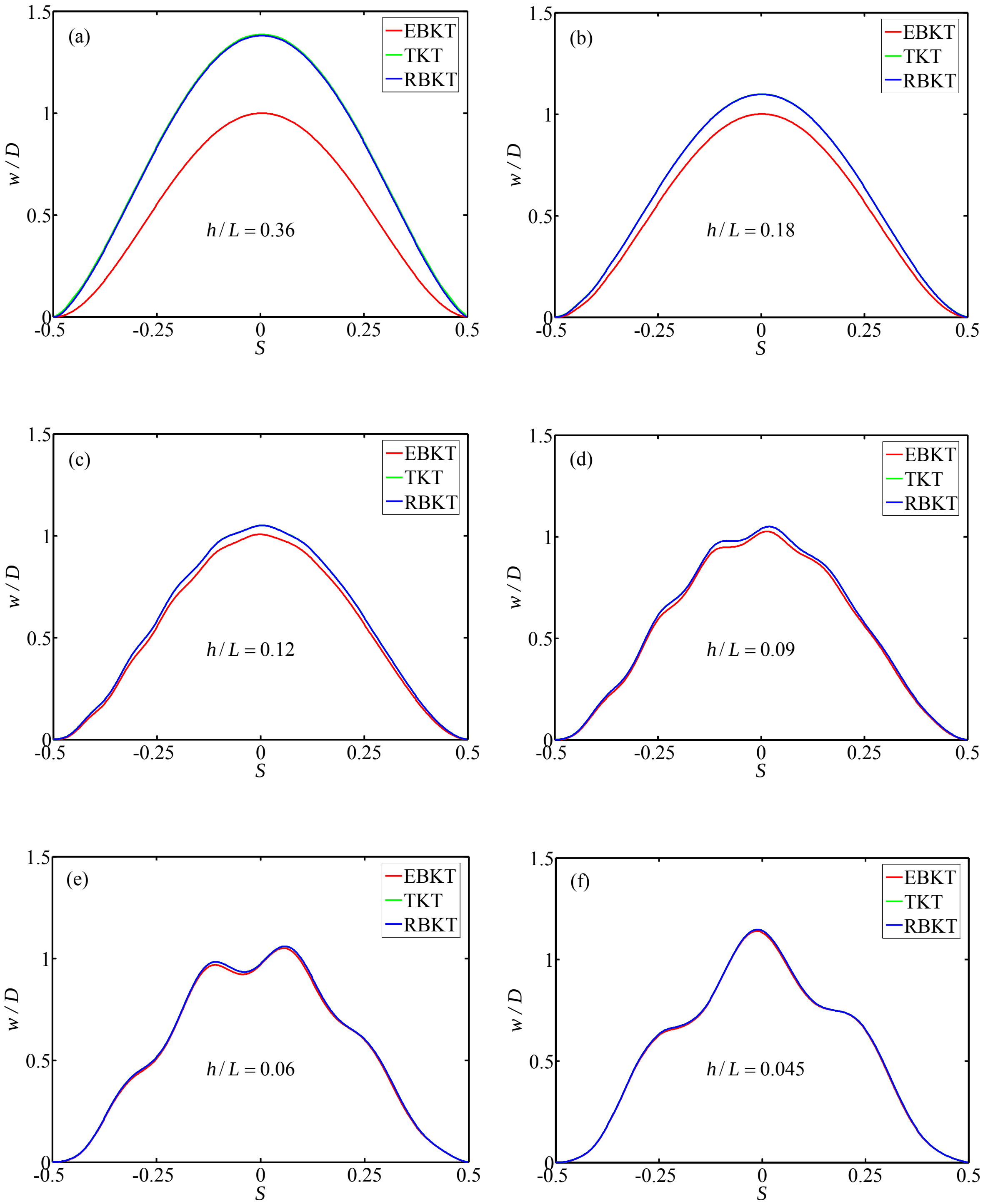
Şekil 4.4 ve 4.5'de hareketli yük ($\Omega = 0$) altındaki yer değiştirmeler iç sönümün $\eta = 0$ ve $\eta = 0.001\ \mathrm{s}$ değerleri için elde edilmiştir. Her iki şekilden de görüldüğü gibi kiriş açıklığının artmasıyla beraber kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin azaldığı ve her üç teoriye göre elde edilen yer değiştirmelerin birbirine yaklaştığı görülmektedir. Kiriş açıklığının $L = 2.5,\ 5.0,\ 7.5\ \mathrm{m}$ olduğu durumda veya başka bir ifadeyle $h/L = 0.36, 0.18, 0.12$ iken, EBKT için elde edilen yer değiştirmelerle diğer iki teori için elde edilen yer değiştirmeler arasında önemli derecede fark olmaktadır. Kiriş açıklığı $7.5\ \mathrm{m}$ den büyük olduğunda yer değiştirmeler arasındaki fark çok küçük olmaktadır. Bu durumda kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin ihmal edilebileceği söylenebilir. Uygulamada kullanılan öngerilmeli kirişlerin açıklıklarının $10\ \mathrm{m}\ (h/L = 0.09)$ veya $15\ \mathrm{m}\ (h/L = 0.06)$ den daha büyük değerler aldığı düşünüldüğünde, Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre yapılan hesapların tatmin edici bir hassasiyette sonuç vereceği söylenebilir.

Şekil 4.4 ve 4.5'den görüldüğü gibi söz konusu parametreler için, TKT ve RBKT'ye göre elde edilen yer değiştirme eğrilerinin (sırasıyla yeşil ve mavi eğriler) birbirinden ayırt edilemeyecek kadar üst üste düştüğü görülmektedir. TKT'ye göre elde edilen yer değiştirmelerin RBKT'ye göre elde edilen yer değiştirmelerden çok az bir miktar büyük olduğu görülmektedir. Elde edilen yer değiştirme eğrilerinden Euler-Bernoulli kirişinin Timoshenko ve Reddy-Bickford kirişlerine göre daha rijit bir davranış gösterdiği söylenebilir.

Beklenen bir durum olarak, kirişte malzeme iç sönümü olması durumunda yer değiştirmelerin sönümsüz duruma göre bir miktar azaldığı görülmektedir. Şekil 4.4a-d ve Şekil 4.5a-d'den görüldüğü gibi, göz önüne alınan parametreler için, malzeme iç sönümünün $L = 2.5,\ 5.0,\ 7.5,\ 10\ \mathrm{m}$ açıklıklı kirişlerin yer değiştirmeleri üzerinde daha etkili olduğu görülmektedir.



Şekil 4.4 Hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $T = 0$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, a) $L = 2.5\,\mathrm{m}$, b) $L = 5.0\,\mathrm{m}$, c) $L = 7.5\,\mathrm{m}$, d) $L = 10\,\mathrm{m}$, e) $L = 15\,\mathrm{m}$, f) $L = 20\,\mathrm{m}$.



Şekil 4.5 Hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 0$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$, $T = 0$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, a) $L = 2.5\,\mathrm{m}$, b) $L = 5.0\,\mathrm{m}$, c) $L = 7.5\,\mathrm{m}$, d) $L = 10\,\mathrm{m}$, e) $L = 15\,\mathrm{m}$, f) $L = 20\,\mathrm{m}$.

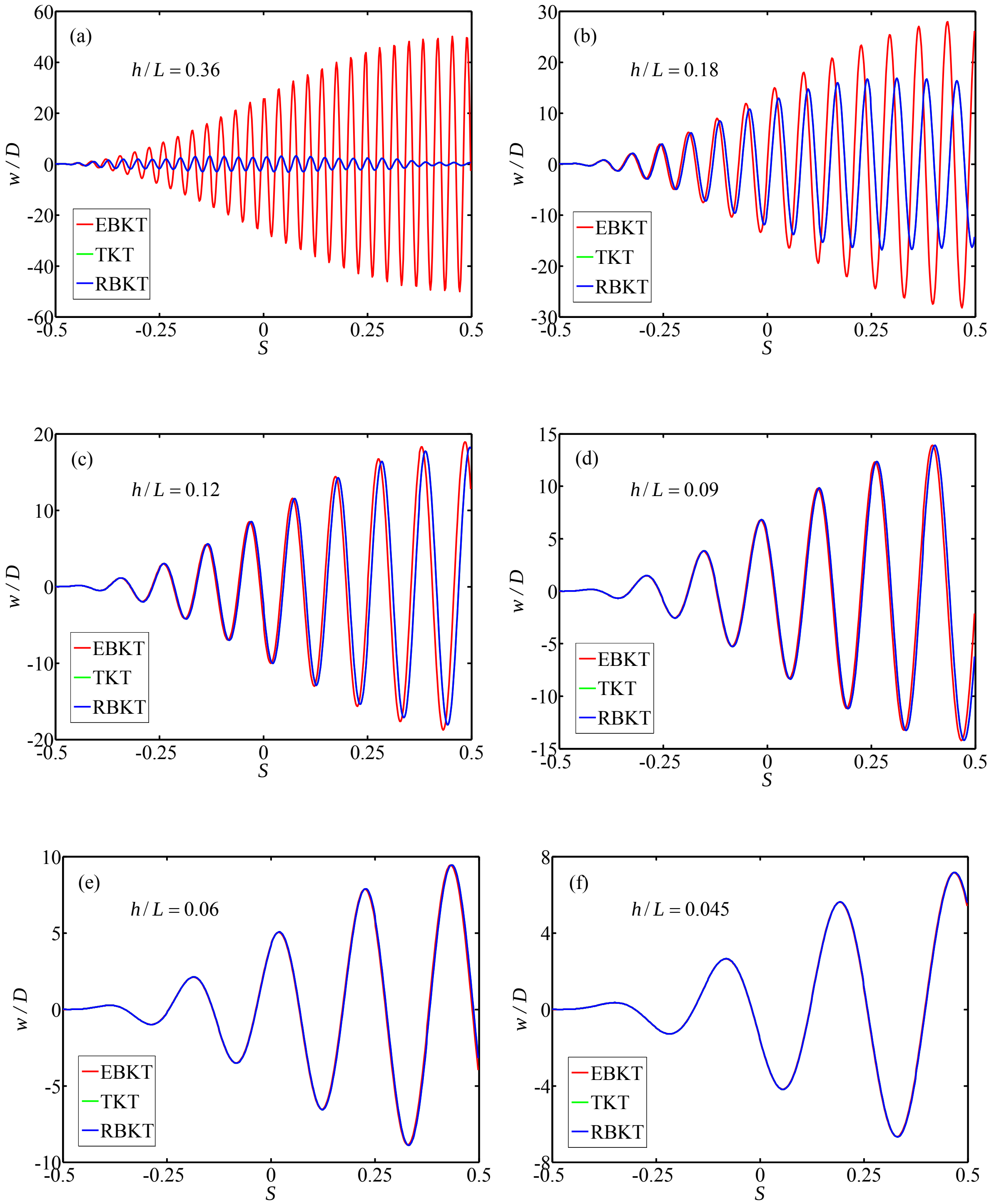
Bu kirişlerde iç sönümün ihmal edildiği durumda, $\eta = 0$ iken, yer değiştirmelerin küçük tepecikler yaptığı görülmektedir. Ancak, kiriş malzemesine iç sönüm verildiğinde yer değiştirme eğrilerindeki tepeciklerin sayısının azaldığı ve hatta bazı durumlarda tepeciklerin yok olduğu görülmektedir. Şekil 4.4e-f ve Şekil 4.5e-f'den görüldüğü gibi $15\,\mathrm{m}$ ve $20\,\mathrm{m}$ açıklıklı kirişlerde malzeme iç sönümünün yer değiştirme eğrilerinin şeklini fazla etkilemediği görülmektedir.

Şekil 4.6 ve 4.7'de rezonans durumunda ($\Omega = \omega_1$) göz önüne alınan kirişlerin orta noktalarındaki boyutsuz yer değiştirmeler her üç kiriş teorisi için, iç sönümün $\eta = 0$ ve $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$ değerleri için elde edilmiştir. Burada hesaplarda kullanılan ω_1 değerleri ele alınan değişik uzunluktaki kirişlerin EBKT'ye göre hesaplanmış birinci doğal titreşim frekanslarıdır. Problemde dikkate alınan kirişlerin birinci doğal frekansları Çizelge 4.9'da verilmiştir.

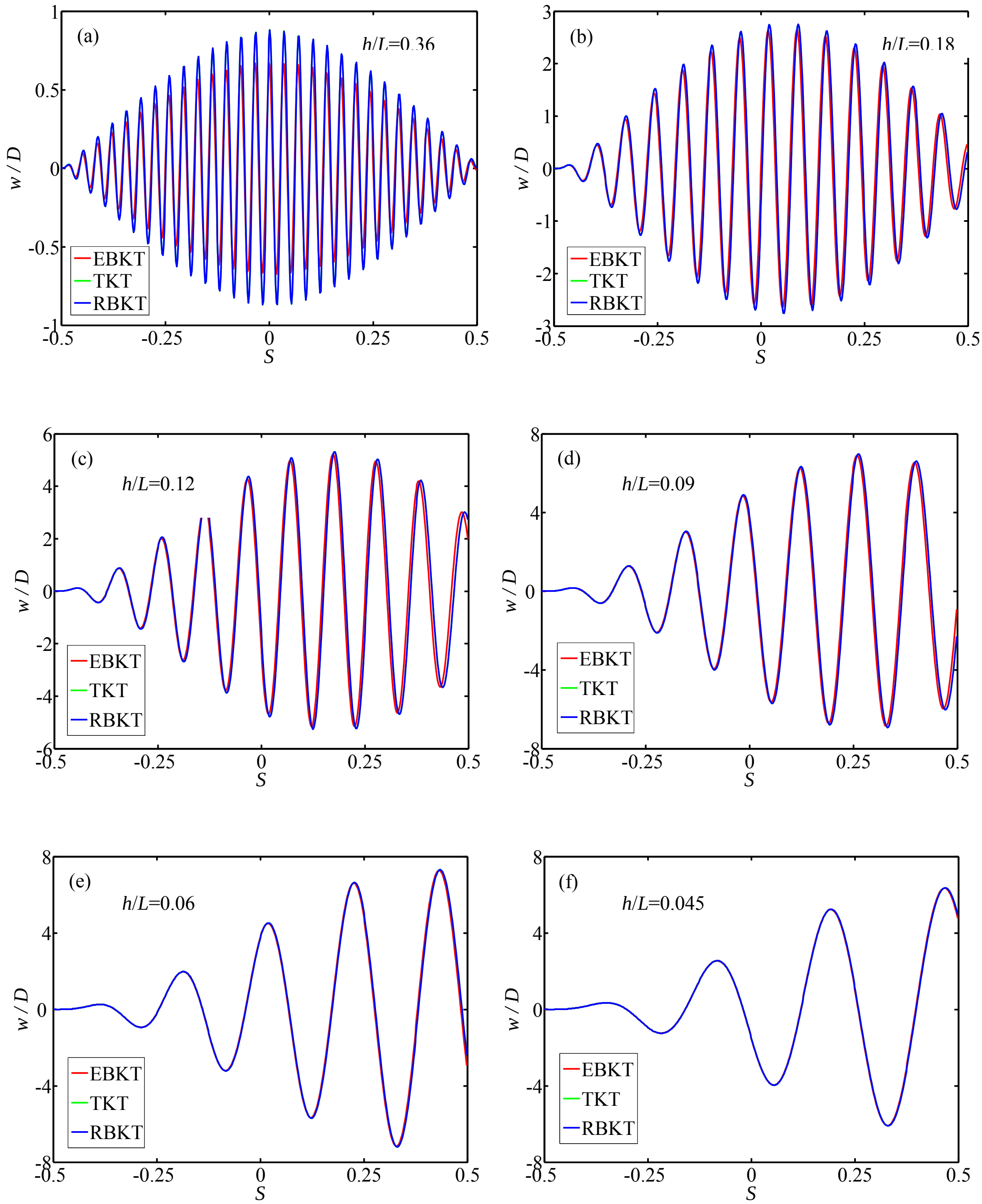
Çizelge 4.9 Değişik uzunluktaki kirişler için birinci doğal titreşim frekansları

L (m)	Birinci doğal titreşim frekansı ω_1 (rad/s)		
	EBKT	TKT	RBKT
2.5	1456.3216097	1224.6619691	1225.1573051
5.0	364.08040244	345.91620621	345.92746385
7.5	161.81351219	158.03594978	158.03594978
10	91.020100612	89.801461478	89.801461478
15	40.453378049	40.209462595	40.209462595
20	22.755025153	22.677277102	22.677277102

Şekil 4.6'dan görüldüğü gibi rezonans durumunda, beklenen bir durum olarak, zamanla artarak oldukça büyük değerler alan yer değiştirmeler elde edilmiştir. Ancak, Şekil 4.6a'ya dikkat edilirse TKT ve RBKT'ye göre elde edilen yer değiştirmeler oldukça küçüktür. Daha önceden de belirtildiği gibi burada rezonans durumunda EBKT'ye göre elde edilen ω_1 değeri kullanılmıştır. Çizelge 4.9'a dikkat edilirse $2.5\,\mathrm{m}$ uzunluğundaki kirişin EBKT'ye göre bulunan birinci doğal frekans değeri ile TKT ve RBKT'ye göre bulunan birinci doğal frekans değerleri arasında önemli derecede fark bulunmaktadır. Dolayısıyla $\omega_1 = 1456.3216097\,\mathrm{rad/s}$ değeri için $2.5\,\mathrm{m}$ açıklıklı Timoshenko ve Reddy-Bickford kirişlerinde rezonans durumu oluşmamıştır. Fakat, kiriş açıklığının artmasıyla birlikte doğal frekans değerleri birbirine yaklaştığından ötürü her üç teori için rezonans durumunun daha açık bir şekilde oluştuğu gözlenmektedir.



Şekil 4.6 Kirişin orta noktasındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = \omega_1$ (EBBT'ye göre), $\eta = 0$, $T = 0$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, a) $L = 2.5\,\mathrm{m}$, b) $L = 5.0\,\mathrm{m}$, c) $L = 7.5\,\mathrm{m}$, d) $L = 10\,\mathrm{m}$, e) $L = 15\,\mathrm{m}$, f) $L = 20\,\mathrm{m}$.



Şekil 4.7 Kirişin orta noktasındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = \omega_1$ (EBBT'ye göre), $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$, $T = 0$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, a) $L = 2.5\,\mathrm{m}$, b) $L = 5.0\,\mathrm{m}$, c) $L = 7.5\,\mathrm{m}$, d) $L = 10\,\mathrm{m}$, e) $L = 15\,\mathrm{m}$, f) $L = 20\,\mathrm{m}$.

Şekil 4.7, rezonans durumunda kiriş orta noktasındaki yer değiştirmeleri iç sönümün $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$ değeri için göstermektedir. İç sönüm dikkate alındığında $2.5\,\mathrm{m}$, $5\,\mathrm{m}$ ve $7.5\,\mathrm{m}$ lik kirişlerdeki yer değiştirmeler, sönümsüz durumdaki yer değiştirmelerden oldukça farklı bir davranış göstermektedir. Burada elde edilen yer değiştirme değerleri sönümsüz duruma göre oldukça küçük olmakla beraber önce artmakta daha sonra ise azalmaktadır.

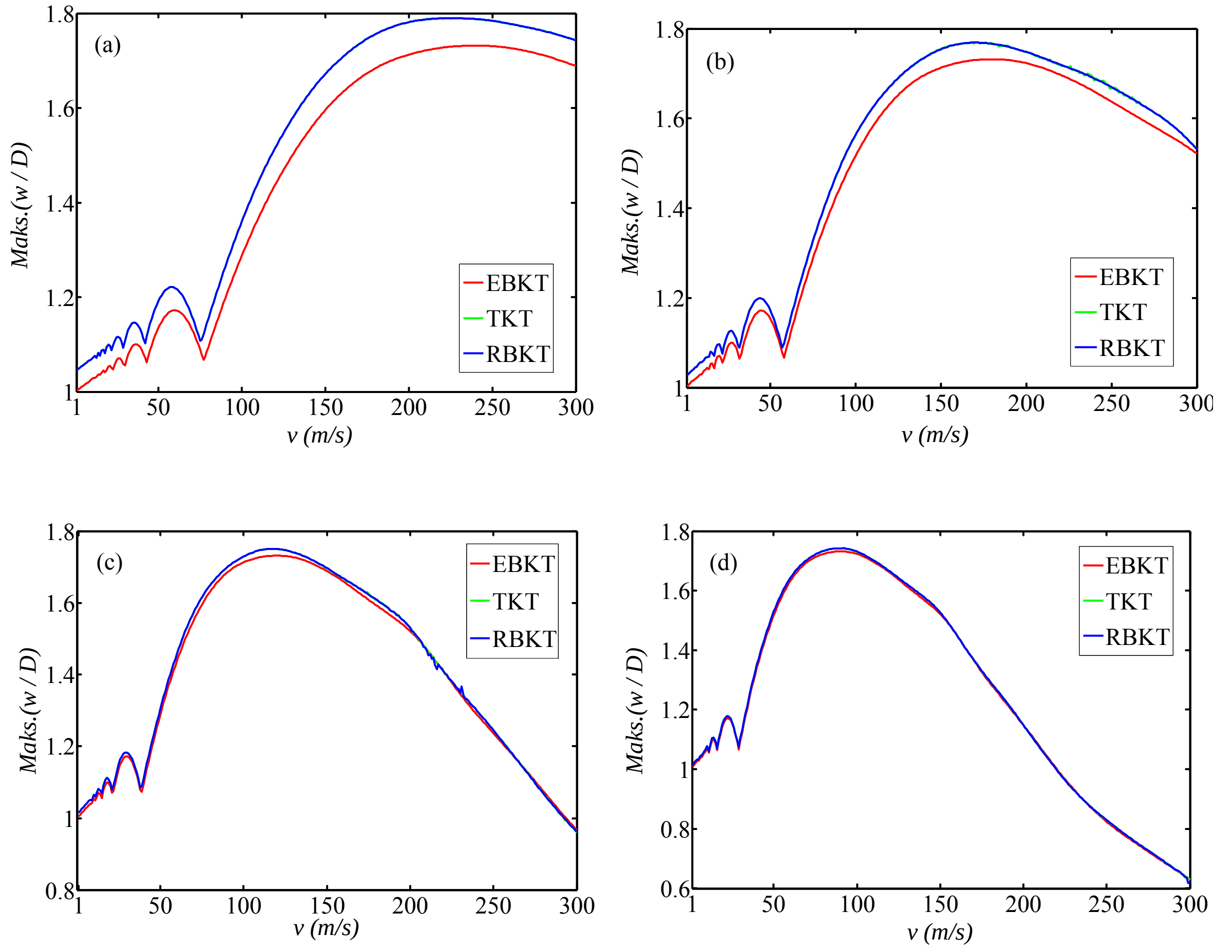
Şekil 4.4-4.7'den elde edilen sonuçlar kısaca izleyen şekilde özetlenebilir:

- Kiriş açıklığının artmasıyla (veya h/L oranının azalmasıyla) birlikte kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin azaldığı ve her üç teoriye göre elde edilen yer değiştirme değerlerinin birbirine yaklaştığı görülmüştür.
- Sayısal hesaplar sonucu en büyük yer değiştirmeyi TKT'nin, en küçük yer değiştirmeyi ise EBKT'nin verdiği görülmektedir. RBKT'ye göre elde edilen yer değiştirmelerin diğer iki teoriye göre elde edilen yer değiştirme değerleri arasında kaldığı ve fakat TKT'ye göre elde edilen yer değiştirmelere yakın olduğu görülmüştür. Böylece söz konusu üç kiriş modeli içerisinde en rijit olanının Euler-Bernoulli kirişi, en esnek (flexible) olanının ise Timoshenko kirişi olduğu söylenebilir.
- EBKT'nin uygulamada büyük açıklıkları geçmek için kullanılan öngerilmeli kirişlerin statik ve dinamik analizlerinde kullanılması, mühendislik açısından bakıldığında, dikkate değer bir hataya sebep olmayacaktır.
- Beklendiği gibi rezonans durumunda oldukça büyük değerler alan yer değiştirmeler elde edilmiştir.
- Göz önüne alınan parametreler için, malzeme iç sönümünün kısa kirişlerin dinamik davranışı üzerinde daha etkili olduğu görülmüştür.

4.2.4 Hareketli Harmonik Yükün Hızının Etkisi

Şekil 4.8'de $L = 7.5,\, 10,\, 15,\, 20\,\text{m}$ açıklıklı kirişlerin orta noktasındaki en büyük yer değiştirmelerin hareketli yükün hızıyla değişimi gösterilmiştir. Hareketli yükün hızı $v = 1 \text{ - } 300\,\text{m/s}$ aralığında $1\,\text{m/s}$ artımla dikkate alınmıştır. Bu şekiller oluşturulurken her bir hız değeri için, hareketli yükün kiriş üzerinde kaldığı süre boyunca kiriş orta noktasının yer değiştirmeleri hesaplanmış ve hesaplanan bu değerlerin en büyüğü alınmıştır. Çizelge 4.10'da ise her bir kirişte dikkate alınan hız aralığında elde edilen en büyük yer değiştirmeler ve bu yer değiştirmelere karşılık gelen hareketli yükün hızları gösterilmiştir.

Şekil 4.8'den hareketli yükün hızının kirişlerin dinamik davranışı üzerinde oldukça etkili olduğu görülmektedir. Yer değiştirmelerin hareketli yükün hızının belli bir değerine kadar arttığı, hızın bu değerinden sonra ise yer değiştirmelerin azaldığı görülmektedir. Kiriş açıklığının artmasıyla birlikte en büyük yer değiştirmeyi veren hız değerlerinin de azaldığı dikkati çekmektedir.



Şekil 4.8 Kiriş orta noktasındaki en büyük boyutsuz yer değiştirmelerin hareketli yükün hızıyla değişimi, $P_0 = 100\,\text{kN}$, $\Omega = 0$, $\eta = 0$, $T = 0$, a) $L = 7.5\,\text{m}$, b) $L = 10\,\text{m}$, c) $L = 15\,\text{m}$, d) $L = 20\,\text{m}$.

Çizelge 4.10 Kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirmelerin maksimumları ve bu değerlere karşılık gelen hareketli yük hızları.

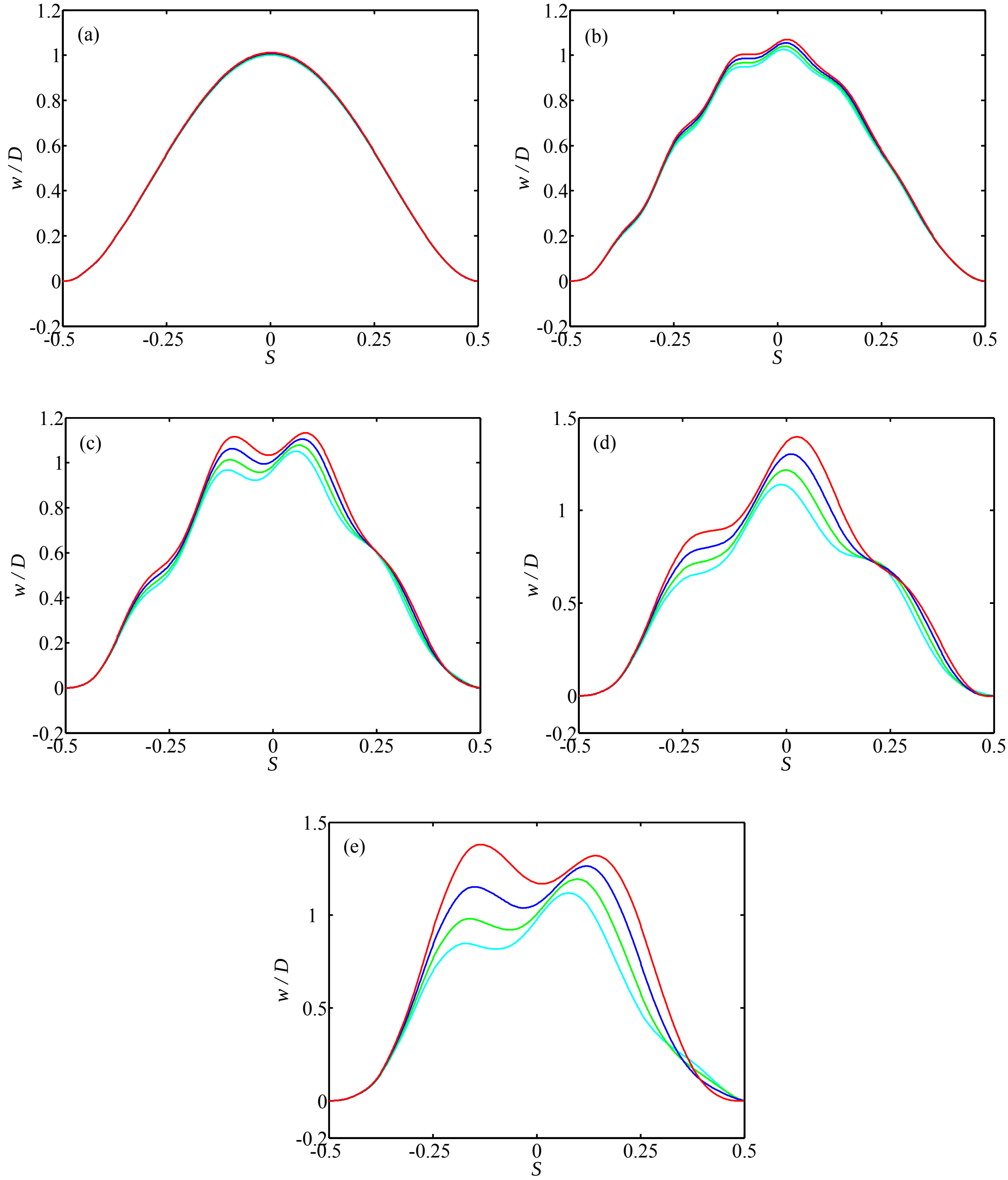
L (m)	EBKT		TKT		RBKT	
	Maks.(*w*/*D*)	*v* (m/s)	Maks.(*w*/*D*)	*v* (m/s)	Maks.(*w*/*D*)	*v* (m/s)
7.5	1.7317	240	1.7900	222	1.7900	224
10	1.7317	180	1.7697	176	1.7690	171
15	1.7317	120	1.7509	118	1.7508	118
20	1.7317	90	1.7424	88	1.7432	92

4.2.5 Eksenel Basınç Kuvvetinin Etkisi

Eksenel basınç kuvvetinin ($e=0$ olması durumu) kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkisi $L=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\,\mathrm{m}$ açıklıklı kirişler üzerinde, eksenel basınç kuvvetinin $T=0,\ 1250,\ 2500,\ 3750\,\mathrm{kN}$ değerleri için incelenmiştir. Hareketli yükün altındaki dinamik yer değiştirmeler, hareketli yükün harmonik olması durumunda zorlama frekansının $\Omega=0,\ 20,\ 40\,\mathrm{rad/s}$ değerleri için ayrı şekillerde verilmiştir. Hareketli yükün hızı $v=20\,\mathrm{m/s}$, iç sönüm değeri $\eta=0.001\,\mathrm{s}$ sabit olarak alınmıştır. Her üç teoriye göre yapılan sayısal hesaplamalar sonucunda birbirine çok benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bundan dolayı, sadelik açısından, ilgili şekillerde sadece EBKT'ye göre elde edilen dinamik yer değiştirmeler gösterilmiştir.

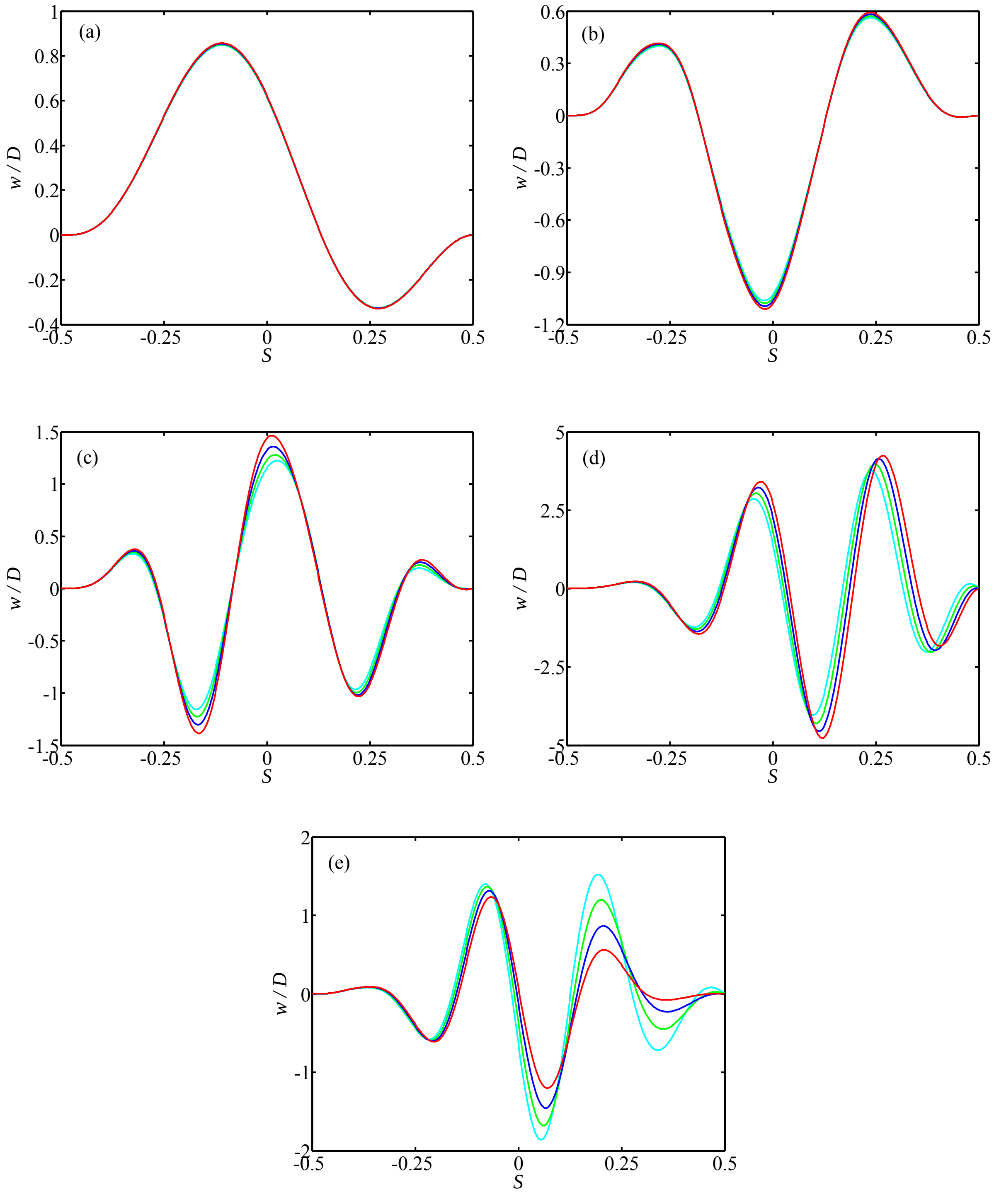
Şekil 4.9-4.11'de açık mavi ile çizilen eğriler öngerilme kuvveti etkimeyen klasik bir kirişi temsil etmektedir. Bu şekillerden görüldüğü gibi eksenel basınç kuvvetinin şiddetinin artması ilgili kirişlerin dinamik yer değiştirmelerinin büyümesine neden olmuştur. Bu davranışın nedeni daha önceki bölümde de açıklandığı gibi, eksenel basınç kuvveti sebebiyle kirişlerde oluşan basınç yumuşaması (compression softening) etkisidir. Diğer bir ifadeyle, eksenel basınç kuvveti nedeniyle kirişin rijitliği azalmaktadır. Böylece, aynı düşey yük altında eksenel yüklü bir kiriş öngerilmesiz bir kirişe göre daha büyük yer değiştirme yapmaktadır.

$5\,\mathrm{m}$ ve $10\,\mathrm{m}$ açıklıklı kirişlerde eksenel basınç kuvvetinin kirişlerin yer değiştirmeleri üzerindeki etkisi çok az olup ihmal edilebilecek düzeydedir. Ancak, kiriş açıklığının artmasıyla beraber eksenel basınç kuvveti nedeniyle yer değiştirmelerin önemli derecede arttığı görülmektedir. Şekil 4.10e'de $25\,\mathrm{m}$ açıklıklı kirişte eksenel basınç kuvvetinin diğer kirişlere göre tam aksi bir etki yaptığı dikkati çekmektedir. Yani, eksenel basınç kuvveti arttıkça kirişteki yer değiştirmeler artacağı yerde azalmaktadır. Bu davranış izleyen şekilde açıklanabilir: $25\,\mathrm{m}$ açıklıklı kirişin birinci doğal frekansı $\omega_1=14.5632\,\mathrm{rad/s}$, hareketli yükün zorlama frekansı ise $\Omega=20\,\mathrm{rad/s}$ dir. Eksenel basınç kuvveti arttıkça kirişin doğal frekansı azalacağından, söz konusu kiriş rezonansa benzer olan bu durumundan uzaklaşacaktır. Eğer, eksenel kuvvet basınç yerine çekme olsaydı, eksenel kuvvetin artmasıyla birlikte kirişin doğal frekansı artarak zorlama frekansına yaklaşacağından çok daha büyük yer değiştirmeler elde edilmiş olacaktı.

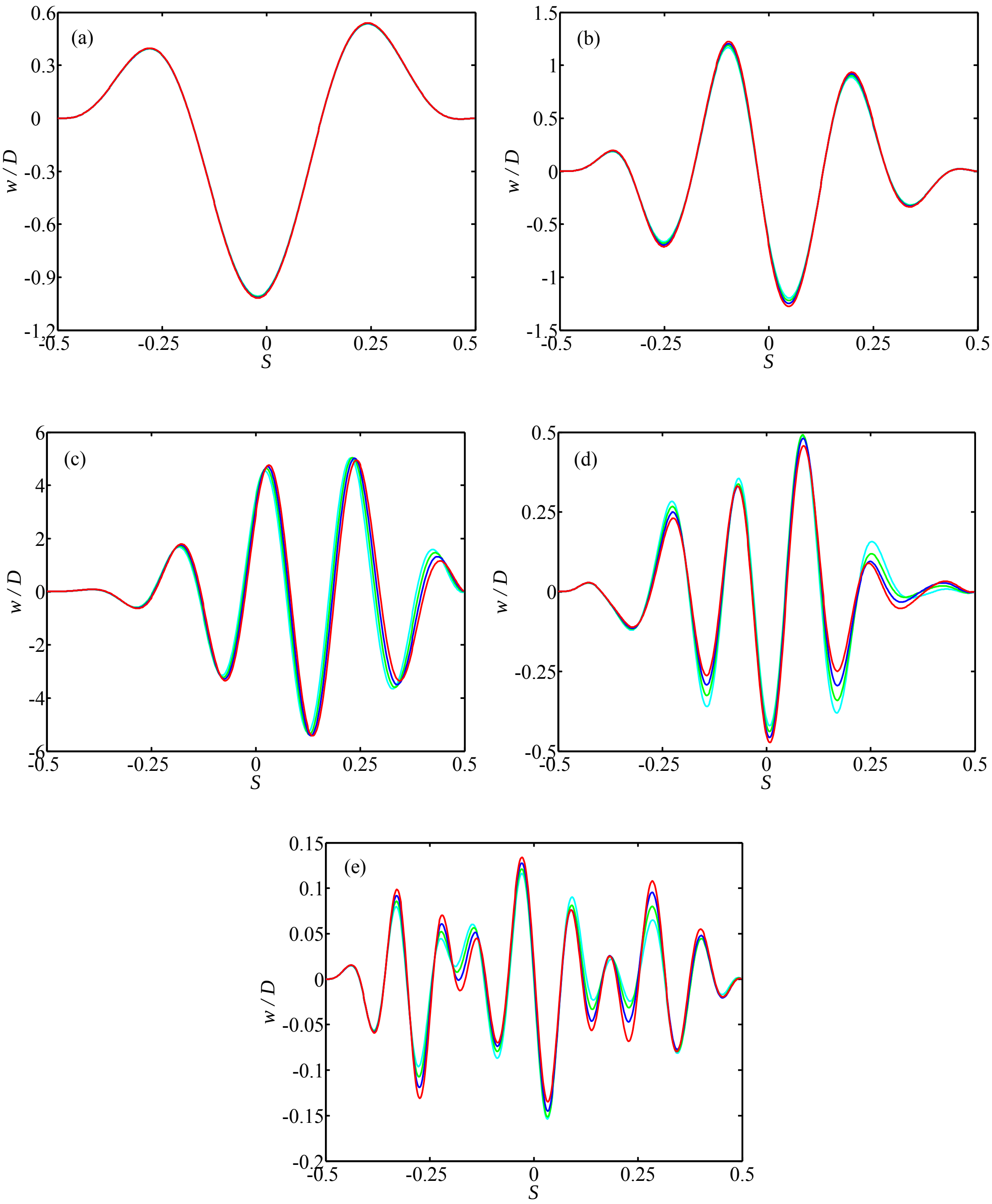


Şekil 4.9 Eksenel basınç kuvvetinin ($e = 0$) değişik değerleri için hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 0$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$; a) $L = 5\,\mathrm{m}$, b) $L = 10\,\mathrm{m}$, c) $L = 15\,\mathrm{m}$, d) $L = 20\,\mathrm{m}$ e) $L = 25\,\mathrm{m}$;

(——) $T = 0$, (——) $T = 1250\,\mathrm{kN}$, (——) $T = 2500\,\mathrm{kN}$, (——) $T = 3750\,\mathrm{kN}$.



Şekil 4.10 Eksenel basınç kuvvetinin ($e = 0$) değişik değerleri için hareketli harmonik yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 20\,\mathrm{rad/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$; a) $L = 5\,\mathrm{m}$, b) $L = 10\,\mathrm{m}$, c) $L = 15\,\mathrm{m}$, d) $L = 20\,\mathrm{m}$ e) $L = 25\,\mathrm{m}$; (——) $T = 0$, (——) $T = 1250\,\mathrm{kN}$, (——) $T = 2500\,\mathrm{kN}$, (——) $T = 3750\,\mathrm{kN}$.



Şekil 4.11 Eksenel basınç kuvvetinin ($e = 0$) değişik değerleri için hareketli harmonik yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 40\,\mathrm{rad/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$; a) $L = 5\,\mathrm{m}$, b) $L = 10\,\mathrm{m}$, c) $L = 15\,\mathrm{m}$, d) $L = 20\,\mathrm{m}$ e) $L = 25\,\mathrm{m}$; (——) $T = 0$, (——) $T = 1250\,\mathrm{kN}$, (——) $T = 2500\,\mathrm{kN}$, (——) $T = 3750\,\mathrm{kN}$.

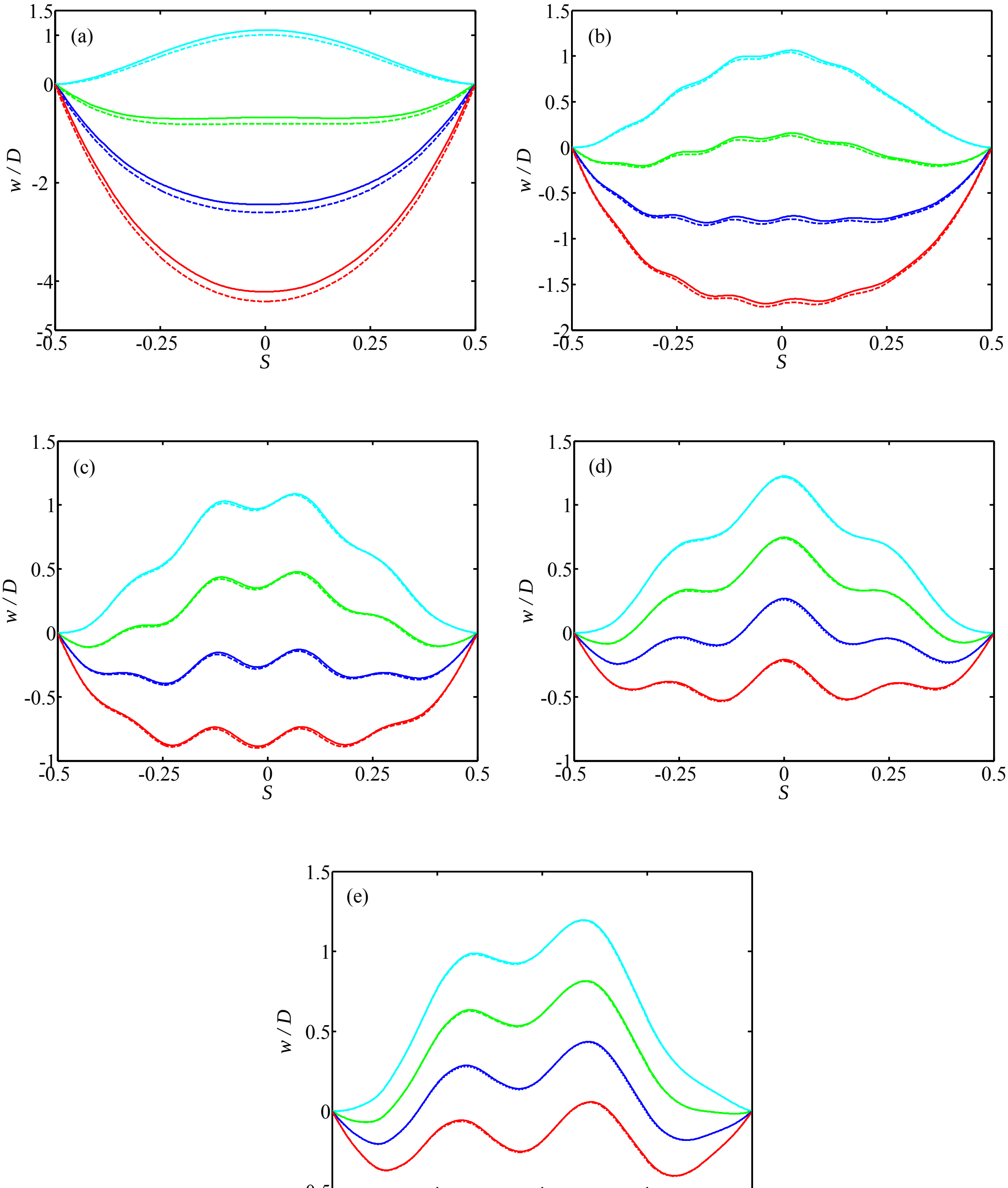
4.2.6 Dışmerkez Basınç Kuvvetinin Etkisi

Bu bölümde dışmerkez basınç kuvvetinin öngerilmeli bir kirişin dinamik yer değiştirmeleri üzerindeki etkisi farklı uzunluktaki kirişler ve dışmerkezliğin $e = 0,\ 0.12,\ 0.24,\ 0.36\ \mathrm{m}$ değerleri için incelenmiştir. EBKT ve RBKT'ye göre hesaplanmış olan hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirme eğrileri, sırasıyla, kesikli ve düz çizgilerle gösterilmiştir. Sayısal hesaplarda kiriş açıklıkları $L = 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\ \mathrm{m}$, hareketli yükün hızı $v = 20\ \mathrm{m/s}$, hareketli yükün harmonik olması durumunda zorlama frekansı $\Omega = 20,\ 40\ \mathrm{rad/s}$, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti $T = 1250\ \mathrm{kN}$ ve iç sönüm $\eta = 0.001\ \mathrm{s}$ olarak dikkate alınmıştır.

Kirişe dışmerkez basınç kuvveti etkimesi durumunda, hareketli yük kirişin üzerine gelmeden önce, kiriş sükûnette olup uç momentleri sebebiyle başlangıç yer değiştirmesine sahiptir. Yani, $t = 0$ anında kirişin ilk (başlangıç) hız ve ivmesi sıfır olmasına karşın, ilk yer değiştirmesi sıfır değildir. Böylece, kirişin başlangıç yer değiştirmesi statik analiz yapılarak hesaplanmalı ve hesaplanan bu değerler daha sonraki dinamik analizde başlangıç değeri olarak dikkate alınmalıdır. Bilindiği gibi mühendislik uygulamalarında, örneğin bu çalışmaya konu olan öngerilmeli bir kirişin herhangi bir kesitinde oluşan gerilmeleri hesaplayabilmek için toplam yer değiştirmelerin sebep olduğu eğriliklere ihtiyaç vardır. Bu nedenle, buradaki şekillerde verilen yer değiştirmeler toplam yer değiştirmelerdir. Yani, dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük durumunda verilen yer değiştirmeler toplam yer değiştirmeler olup, kirişin sükûnetteki başlangıç yer değiştirmelerini de içermektedir.

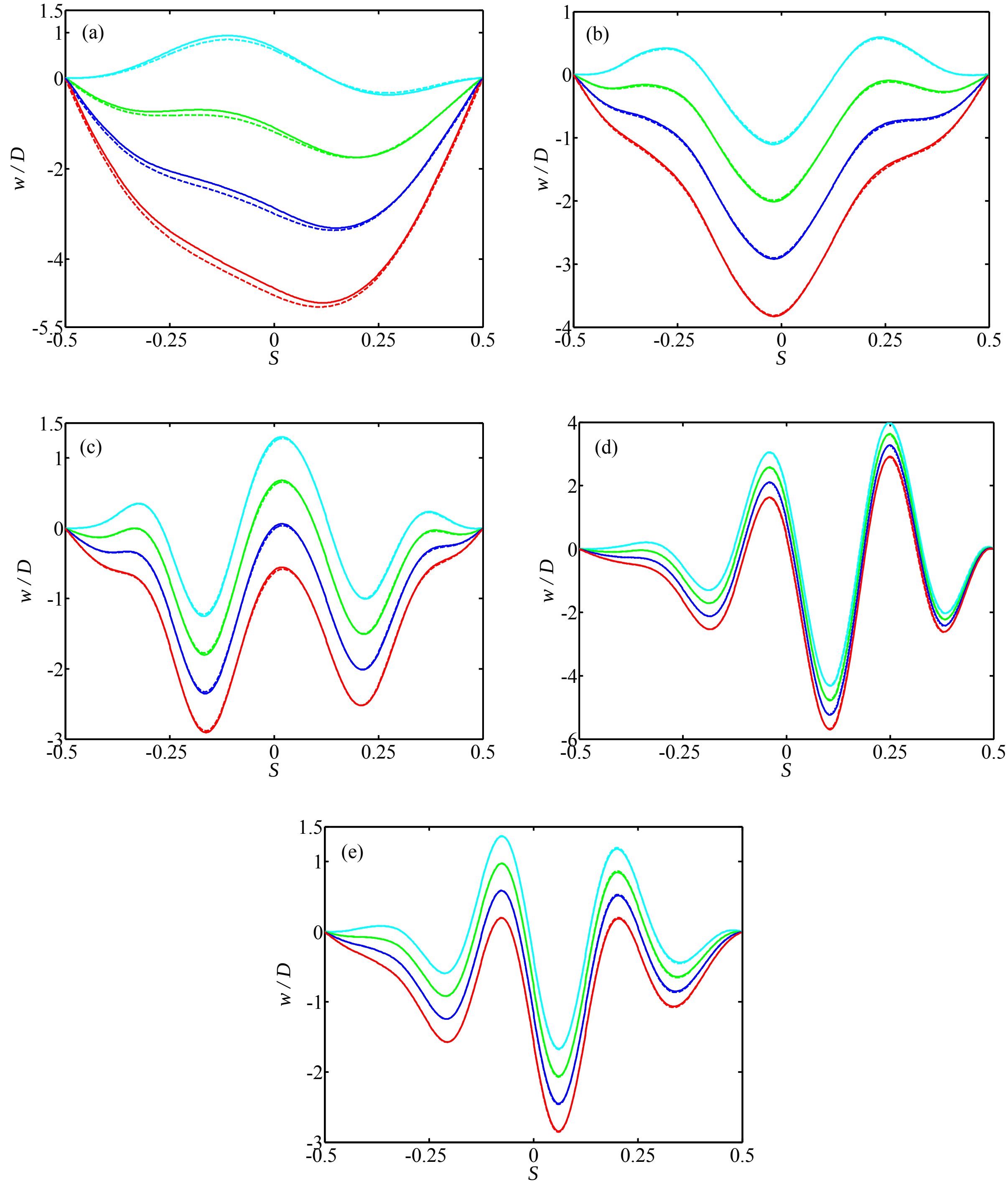
Şekil 4.12-4.14'den görüldüğü gibi dışmerkez basınç kuvveti kirişlerin yer değiştirmeleri üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Bu etki dışmerkezlikten kaynaklanan uç momentleri sebebiyle oluşmaktadır. Dışmerkezliğin artmasıyla birlikte pozitif yer değiştirmeler azalırken, negatif yer değiştirmeler mutlak değerce artmaktadır. Dışmerkezliğin aldığı değerlerin artımına bağlı olarak kirişte oluşan tüm yer değiştirmeler negatif olabilmektedir. Burada yer değiştirmelerin negatif olması kiriş kesitinin alt liflerindeki toplam normal gerilmelerin (hareketli harmonik yük, eksenel basınç kuvveti ve uç momentleri nedeniyle oluşan toplam normal gerilmeler) basınç olduğu anlamına gelmektedir. Bu davranış öngerilmeli kirişlerin tasarımında kiriş kesitlerinin daha etkili kullanımı için istenen bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Ayrıca, Şekil 4.12-4.14'de verilen yer değiştirmelerin, hareketli harmonik yük ve eksenel basınç kuvveti nedeniyle oluşan yer değiştirmelerle, uç momentleri nedeniyle meydana gelen yer değiştirmelerin süperpozisyonuyla elde edilebileceğinin hatırlatılması faydalı olacaktır.



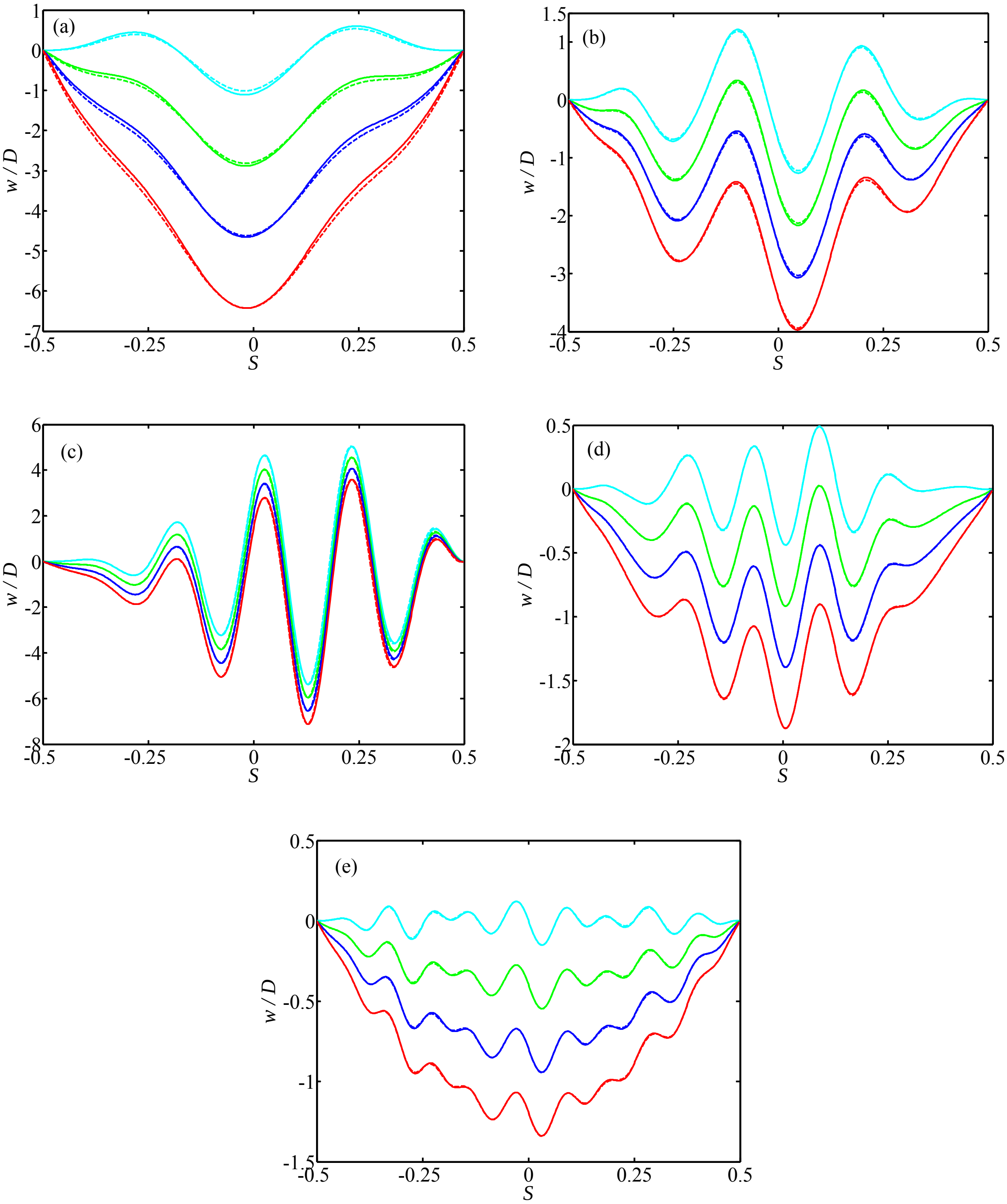
Şekil 4.12 Dışmerkezliğin değişik değerleri için hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 0$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$; a) $L = 5\,\mathrm{m}$, b) $L = 10\,\mathrm{m}$, c) $L = 15\,\mathrm{m}$, d) $L = 20\,\mathrm{m}$, e) $L = 25\,\mathrm{m}$; (——) $e = 0$, (——) $e = 0.12\,\mathrm{m}$, (——) $e = 0.24\,\mathrm{m}$, (——) $e = 0.36\,\mathrm{m}$; (– – –) EBKT,

(——) RBKT.



Şekil 4.13 Dışmerkezliğin değişik değerleri için hareketli harmonik yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 20\,\mathrm{rad/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$; a) $L = 5\,\mathrm{m}$, b) $L = 10\,\mathrm{m}$, c) $L = 15\,\mathrm{m}$, d) $L = 20\,\mathrm{m}$, e) $L = 25\,\mathrm{m}$; (——) $e = 0$, (——) $e = 0.12\,\mathrm{m}$, (——) $e = 0.24\,\mathrm{m}$, (——) $e = 0.36\,\mathrm{m}$; (−−−) EBKT,

(——) RBKT.



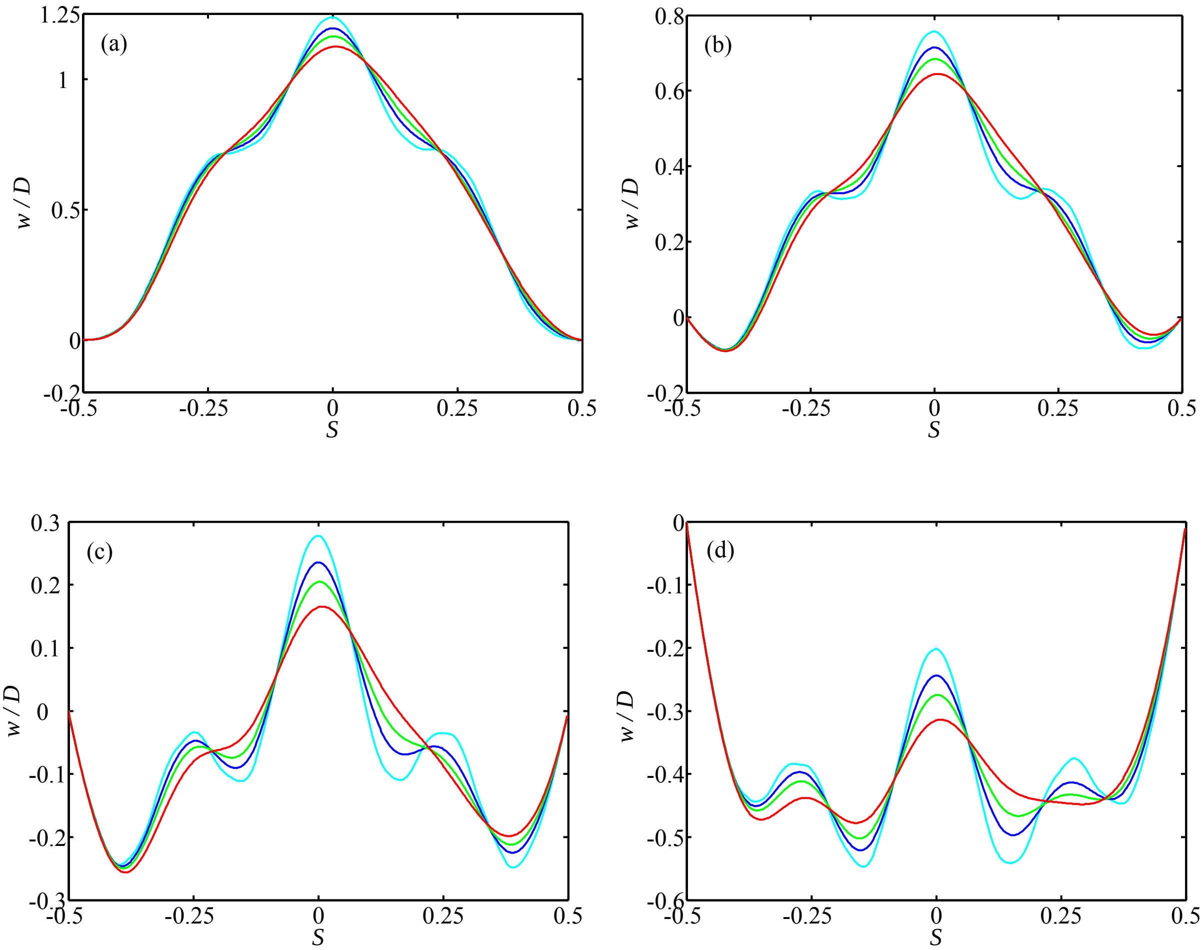
Şekil 4.14 Dışmerkezliğin değişik değerleri için hareketli harmonik yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 40\,\mathrm{rad/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$; a) $L = 5\,\mathrm{m}$, b) $L = 10\,\mathrm{m}$, c) $L = 15\,\mathrm{m}$, d) $L = 20\,\mathrm{m}$, e) $L = 25\,\mathrm{m}$;

(——) $e = 0$, (——) $e = 0.12\,\mathrm{m}$, (——) $e = 0.24\,\mathrm{m}$, (——) $e = 0.36\,\mathrm{m}$; (– – –) EBKT,

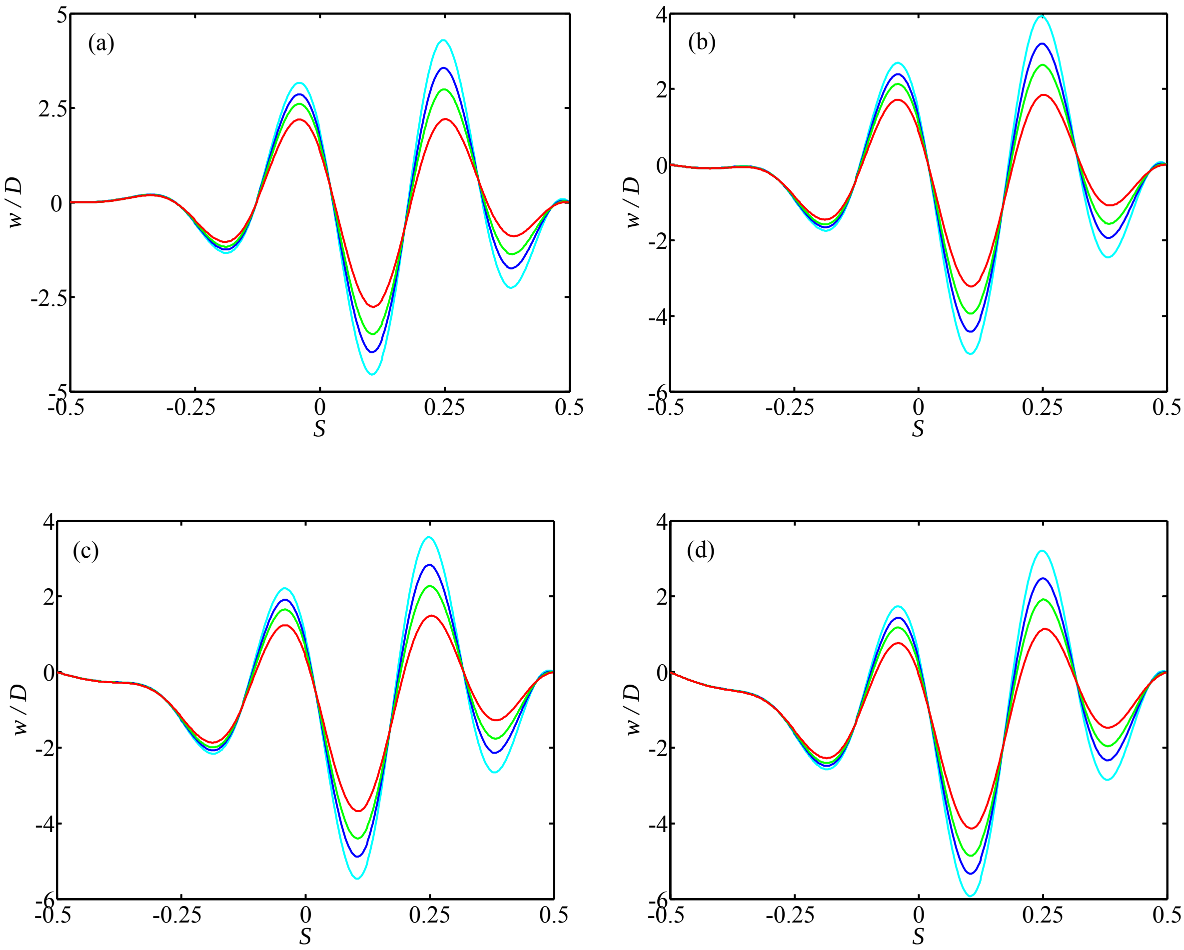
(——) RBKT.

4.2.7 İç Sönümün Etkisi

Şekil 4.15-4.17'de malzeme iç sönümünün, dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisindeki $20\,\mathrm{m}$ açıklıklı bir kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkisi, iç sönümün değişik değerleri için gösterilmiştir. İlgili şekillerde EBKT'ye göre hesaplanmış olan hareketli harmonik yükün altındaki yer değiştirmeler, hareketli yükün hızı $v = 20\,\mathrm{m/s}$, hareketli yükün harmonik olması durumunda zorlama frekansının $\Omega = 20,\ 40\,\mathrm{rad/s}$, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti $T = 1250\,\mathrm{kN}$, dışmerkezliğin $e = 0,\ 0.12,\ 0.24,\ 0.36\,\mathrm{m}$ değerleri için elde edilmiştir.



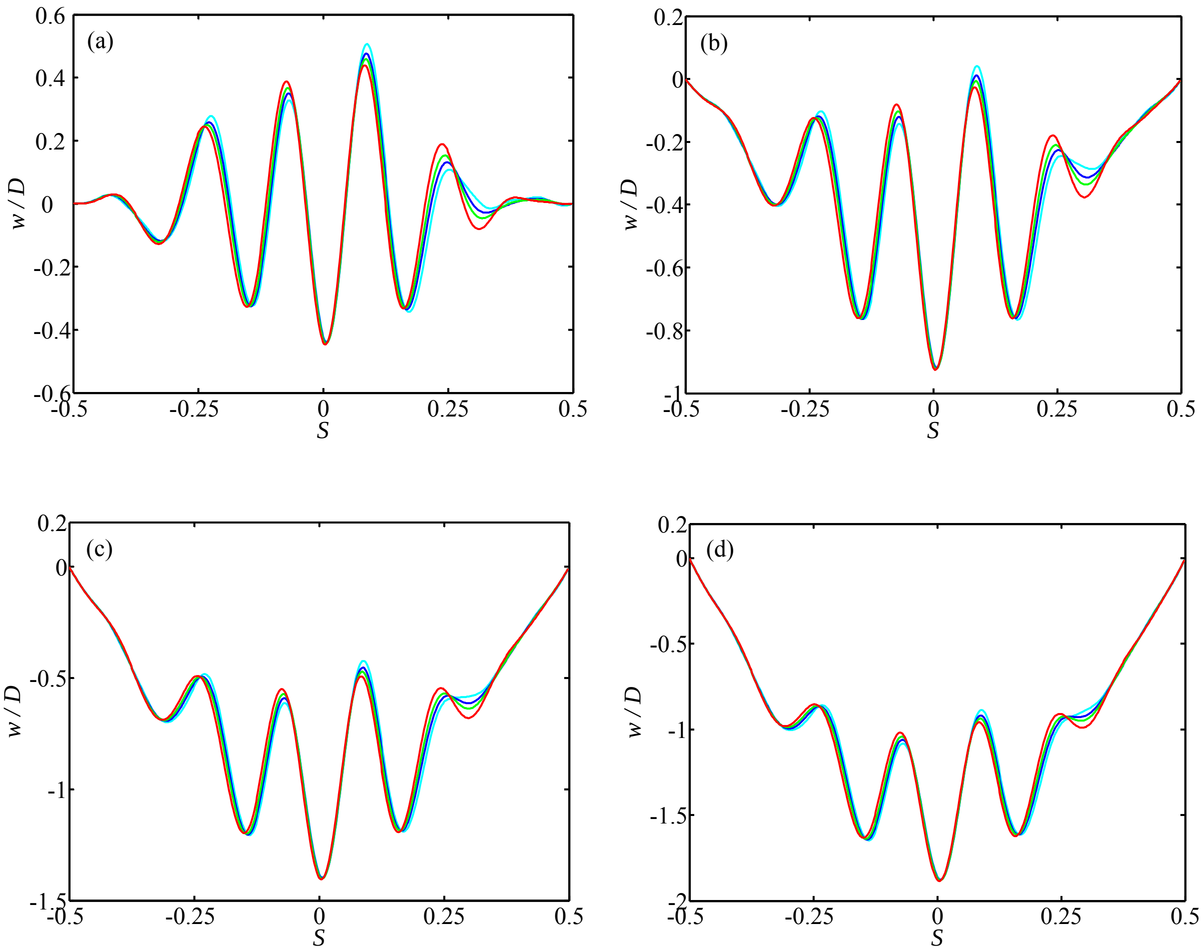
Şekil 4.15 İç sönümün değişik değerleri için hareketli yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $L = 20\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 0$, a) $e = 0$, b) $e = 0.12\,\mathrm{m}$, c) $e = 0.24\,\mathrm{m}$, d) $e = 0.36\,\mathrm{m}$; (——) $\eta = 0$, (——) $\eta = 0.0025\,\mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.005\,\mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.01\,\mathrm{s}$.



Şekil 4.16 İç sönümün değişik değerleri için hareketli harmonik yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $L = 20\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\Omega = 20\,\mathrm{rad/s}$, a) $e = 0$, b) $e = 0.12\,\mathrm{m}$, c) $e = 0.24\,\mathrm{m}$, d) $e = 0.36\,\mathrm{m}$;

(——) $\eta = 0$, (——) $\eta = 0.0025\,\mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.005\,\mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.01\,\mathrm{s}$.

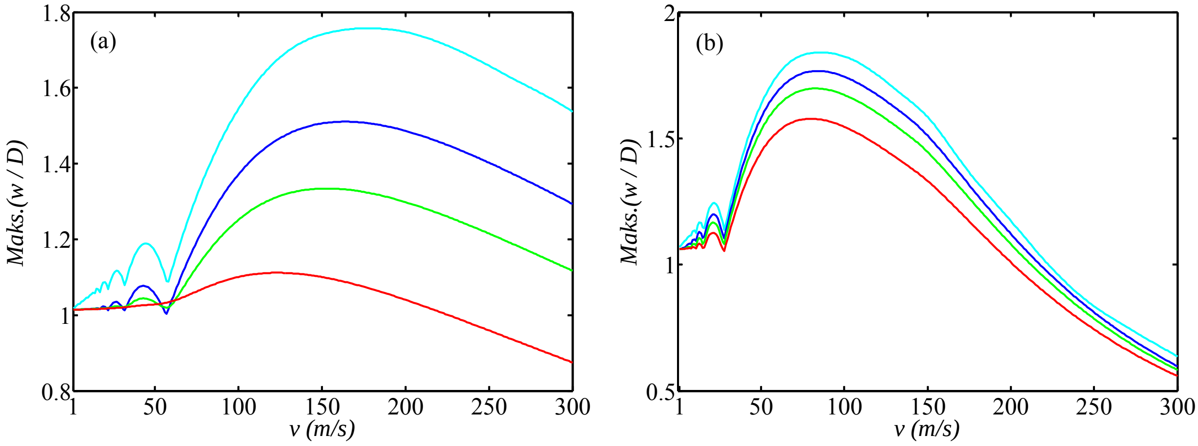
Her üç şekilden görüldüğü gibi, beklenen bir durum olarak, iç sönümün artmasıyla birlikte yer değiştirmeler azalmaktadır. Şekil 4.15'den hareketli yükün sabit olması durumunda, yani $\Omega = 0$ iken, iç sönüm arttıkça yer değiştirme eğrilerindeki tepelerin yok olmaya veya düzleşmeye başladığı dikkati çekmektedir. Zorlama frekansının $\Omega = 20\,\mathrm{rad/s}$ değeri için iç sönümün ilgili kirişin yer değiştirmeleri üzerinde çok etkili olduğu görülmektedir. $20\,\mathrm{m}$ açıklıklı kirişin $\omega_1 = 22.7550\,\mathrm{rad/s}$ olarak hesaplanan birinci doğal frekansının zorlama frekansına yakın olduğu dikkati çekmektedir. Buradan beklenen bir sonuç olarak, bir kirişin doğal frekansıyla zorlama frekansı birbirine yakın olduğunda veya rezonans durumunda, iç sönümün kirişin yer değiştirmeleri üzerinde çok daha etkili olduğu söylenebilir. Her ne kadar iç sönümün ihmal edildiği rezonans durumunda yer değiştirmeler sonsuza gitse de her malzemenin doğasında belli bir ölçüde iç sönüm vardır. Dolayısıyla, malzemelerin iç sönüm değerlerine bağlı olarak rezonans veya rezonansa yakın durumlarda yer değiştirmeler sonsuza gitmeyecek ve sonlu kalacaktır. Ancak, yine de yapı sistemlerinde çok büyük yer değiştirmelere ve bunun sonucunda önemli hasarlara neden olan bu gibi durumlardan kaçınmak daha doğru olacaktır. Ayrıca, Şekil 4.17'ye dikkat edilirse zorlama frekansının $\Omega = 40\ \mathrm{rad/s}$ değeri için iç sönümün yer değiştirmeler üzerinde, diğer iki duruma göre, daha az etkili olduğu görülmektedir.



Şekil 4.17 İç sönümün değişik değerleri için hareketli harmonik yükün altındaki boyutsuz yer değiştirmelerin boyutsuz zamana göre değişimi, $L = 20\ \mathrm{m}$, $T = 1250\ \mathrm{kN}$, $P_0 = 100\ \mathrm{kN}$, $v = 20\ \mathrm{m/s}$, $\Omega = 40\ \mathrm{rad/s}$, a) $e = 0$, b) $e = 0.12\ \mathrm{m}$, c) $e = 0.24\ \mathrm{m}$, d) $e = 0.36\ \mathrm{m}$;

(——) $\eta = 0$, (——) $\eta = 0.0025\ \mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.005\ \mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.01\ \mathrm{s}$.

Şekil 4.18'de $L = 10,\ 20\ \mathrm{m}$ açıklıklı kirişlerin orta noktalarında, EBKT'ye göre hesaplanan en büyük yer değiştirmelerin hareketli yükün hızıyla değişimi çeşitli iç sönüm, dışmerkez basınç kuvvetinin $T = 1250\ \mathrm{kN}$, dışmerkezliğin $e = 0$, zorlama frekansının $\Omega = 0$ değerleri için gösterilmiştir. Çizelge 4.11'de ise Şekil 4.18'de elde edilen en büyük yer değiştirmelerin maksimumları ve bu değerlere karşılık gelen hareketli yük hızları gösterilmiştir.

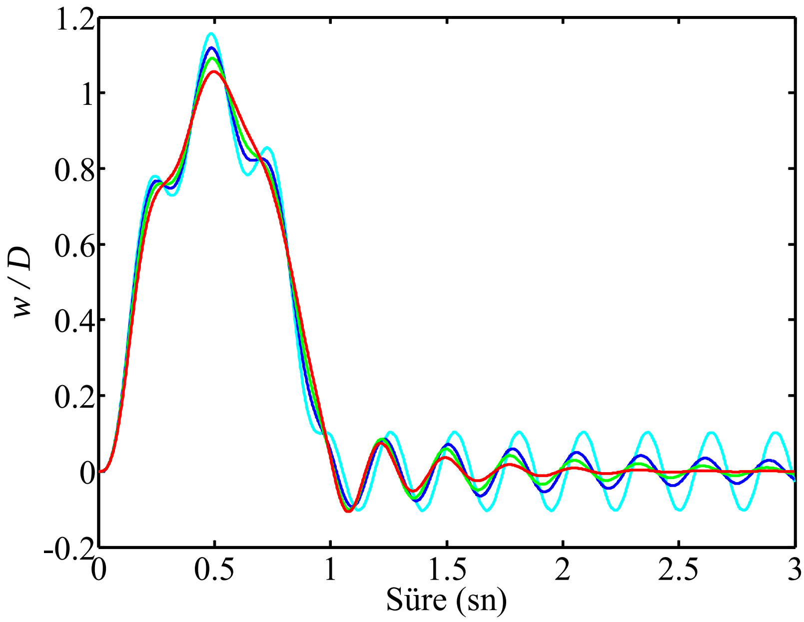


Şekil 4.18 İç sönümün değişik değerleri için kiriş orta noktasındaki en büyük boyutsuz yer değiştirmelerin hareketli yükün hızıyla değişimi, $P_0 = 100\,\text{kN}$, $\Omega = 0$, $T = 1250\,\text{kN}$, $e = 0$; a) $L = 10\,\text{m}$, b) $L = 20\,\text{m}$; (——) $\eta = 0$, (——) $\eta = 0.0025\,\text{s}$, (——) $\eta = 0.005\,\text{s}$, (——) $\eta = 0.01\,\text{s}$.

Çizelge 4.11 İç sönümüm değişik değerleri için kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirmelerin maksimumları ve bu değerlere karşılık gelen hareketli yük hızları.

η (s)	$L = 10$ m		$L = 20$ m	
	Maks.(w/D)	v (m/s)	Maks.(w/D)	v (m/s)
0	1.7574	178	1.8405	86
0.0025	1.5109	164	1.7669	84
0.005	1.3344	153	1.6979	83
0.01	1.1118	123	1.5776	80

İç sönümün dikkate alınan değerleri için, iç sönümün kirişin yer değiştirmeleri üzerinde oldukça etkili olduğu Şekil 4.18’den açıkça görülmektedir. Bu etki kendisini $10\,\text{m}$ açıklıklı kirişin dinamik davranışı üzerinde daha net bir biçimde göstermektedir. İç sönümün hızın belli bir aralıktaki değerleri için çok daha etkili olduğu görülmektedir. Bu durum $20\,\text{m}$ açıklıklı kiriş için verilen yer değiştirme eğrilerinden daha açık bir şekilde izlenmektedir. Örneğin, iç sönüm hareketli yükün yaklaşık olarak $v = 50 - 150\,\text{m/s}$ arasındaki değerleri için, 20 m lik kirişin yer değiştirmelerini önemli derecede azaltmaktadır. Bu hız aralığından sonra hızın artmasına paralel olarak sönümün etkisi azalmaktadır. Ayrıca, Çizelge 4.11'den en büyük yer değiştirmeyi veren hız değerinin sönümün artmasıyla birlikte azaldığı anlaşılmaktadır.



Şekil 4.19 Kiriş orta noktasındaki yer değiştirmenin zamanla değişimi, $P_0 = 100\,\mathrm{kN}$, $\Omega = 0$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $L = 20\,\mathrm{m}$, $T = 0$; (——) $\eta = 0$, (——) $\eta = 0.0025\,\mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.005\,\mathrm{s}$, (——) $\eta = 0.01\,\mathrm{s}$.

Şekil 4.19'da 20 m açıklıklı kirişin EBKT'ye göre bulunan orta nokta yer değiştirmelerinin zamanla değişimi çeşitli iç sönüm değerleri için gösterilmiştir. Kiriş açıklığı 20 m ve hareketli yükün hızı 20 m / s olduğundan hareketli yük kirişe 1 saniye boyunca etkimektedir. Böylece ele alınan kiriş, hareketli yük kirişi terk ettiği andan itibaren, 1. saniye sonundaki ivme, hız ve yer değiştirme değerleri kirişin başlangıç değerleri olacak şekilde serbest titreşim yapmaktadır. İç sönümün olmadığı, yani açık mavi eğriyle gösterilen durumda serbest titreşim hareketi sonsuza dek sürmektedir. Ancak, şekilden de görüldüğü gibi serbest titreşim hareketi iç sönümün değerine bağlı olarak belli bir zaman sonra sönümlenerek etkisini kaybetmektedir.

4.3 Geometrik Doğrusal Olmayan Durum İçin Hareketli Harmonik Yük Altında Zorlanmış Titreşim

Bu bölümde dışmerkez basınç kuvveti ve hareketli harmonik yük etkisindeki bir kirişin dinamik davranışı EBKT, TKT ve RBKT çerçevesinde, geometrik doğrusal olmayan etkiler (büyük yer değiştirmelerin etkisi) dikkate alınarak incelenmiştir. Geometrik doğrusal olmayan etkiler dikkate alınarak elde edilen sonuçlar doğrusal hesaplardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Önceki bölümde kayma şekil değiştirmelerinin (kiriş kesit yüksekliği/ kiriş açıklığı oranının), hareketli harmonik yükün hızı ve frekansının, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti ve dışmerkezliğinin ve kiriş malzemesinin sönümünün kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmişti. Burada ise daha çok büyük yer değiştirmelerin kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri incelenecektir.

Bilindiği gibi zaman tanım alanında yapılan doğrusal olmayan dinamik analizlerde her bir zaman adımında doğrusal olmayan denklem sistemi çözülmektedir. Başka bir ifadeyle, her bir zaman adımında ardışık yaklaşım işlemine gereksinim duyulmaktadır. Bu nedenle doğrusal olmayan dinamik analizler oldukça fazla zaman almaktadır. Hem zamandan tasarruf yapabilmek hem de yeterli hassasiyette sonuç elde edebilmek için yer değiştirme fonksiyonlarındaki terim sayısı ve dinamik analizlerdeki zaman adımı sayısı için yakınsama çalışmaları yapılmıştır.

Çizelge 4.12 Zaman adımı sayısı için yakınsama çalışması, $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $P_0 = 1000\,\mathrm{kN}$, $\Omega = 0$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$.

Zaman adımı sayısı	Kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirme (m)		
	EBKT	TKT	RBKT
10	0.215573	0.216486	0.216486
25	0.237257	0.238673	0.238673
50	0.237556	0.238992	0.238992
100	0.237766	0.239301	0.239300
200	0.237748	0.239307	0.239306
300	0.237741	0.239305	0.239303
500	0.237737	0.239304	0.239301

Çizelge 4.13 Terim sayısı için yakınsama çalışması, $L = 20\,\text{m}$, $b = 0.4$ m, $h = 0.9$ m, $P_0 = 2000$ kN, $v = 20$ m/s, $\Omega = 0$, $T = 1250$ kN, $e = 0$, $\eta = 0.020\,\text{s}$.

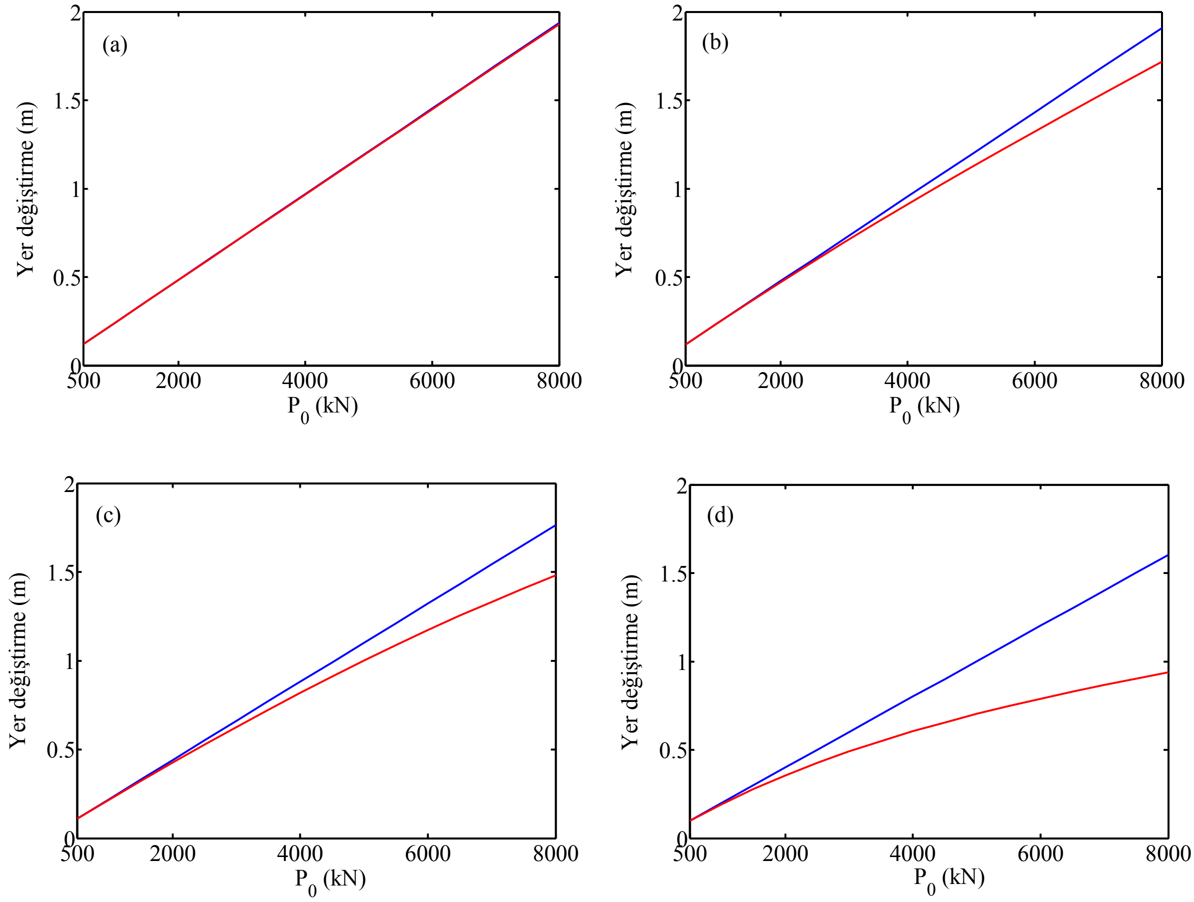
Terim Sayısı, N	Kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirme (m)					
	Doğrusal Çözüm			Doğrusal Olmayan Çözüm		
	EBKT	TKT	RBKT	EBKT	TKT	RBKT
4	0.314184	0.321207	0.321201	0.309515	0.315909	0.315909
6	0.421452	0.424367	0.424365	0.409015	0.411685	0.411685
8	0.426341	0.429094	0.429093	0.414121	0.416640	0.416639
10	0.427260	0.430007	0.430006	0.415078	0.417584	0.417583
12	0.427551	0.430311	0.430309	0.415349	0.417862	0.417860
14	0.427670	0.430445	0.430443	0.415458	0.417987	0.417985
16	0.427729	0.430518	0.430514	0.415510	0.418045	0.418041
18	0.427762	0.430579	0.430551	0.415510	0.417092	0.417087

Çizelge 4.12 ve 4.13'de zaman adımı sayısı ve serilerdeki terim sayısı için yapılan yakınsama çalışması sonuçları verilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre bundan sonraki sayısal hesaplarda zaman adımı sayısının 100 ve serilerdeki terim sayısının 12 olarak alınması durumunda yeterli hassasiyette sonuç alınacağı kanaatine varılmıştır.

Çizelge 4.14 Ardışık Yaklaşım Yöntemlerinin Karşılaştırılması, $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\Omega = 0$, $\eta = 0.01\,\mathrm{s}$.

		Kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirme (m)	
	P_0 (kN)	Direkt İterasyon	Newton-Raphson
EBKT	2000	0.426014	0.426014
	4000	0.820169	0.820172
	6000	1.173446	1.173465
	8000	1.480887	1.480901
TKT	2000	0.428661	0.428661
	4000	0.824848	0.824848
	6000	1.179335	1.179336
	8000	1.487356	1.487349
RBKT	2000	0.428661	0.428661
	4000	0.824846	0.824846
	6000	1.179332	1.179333
	8000	1.487351	1.487352

Çizelge 4.14'de direkt iterasyon ve Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemleri kullanılarak her üç teori çerçevesinde elde edilmiş olan kiriş orta noktasına ait yer değiştirme değerleri gösterilmiştir. Parantez içindeki rakamlar ise hareketli yükün kiriş üzerinde kaldığı zaman dilimi içerisinde maksimum ardışık yaklaşım işlemi sayısını göstermektedir. Burada göz önüne alınan parametreler için, her iki ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak elde edilen yer değiştirme değerlerinin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Bundan sonraki doğrusal olmayan tüm analizlerde Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemi kullanılmıştır.



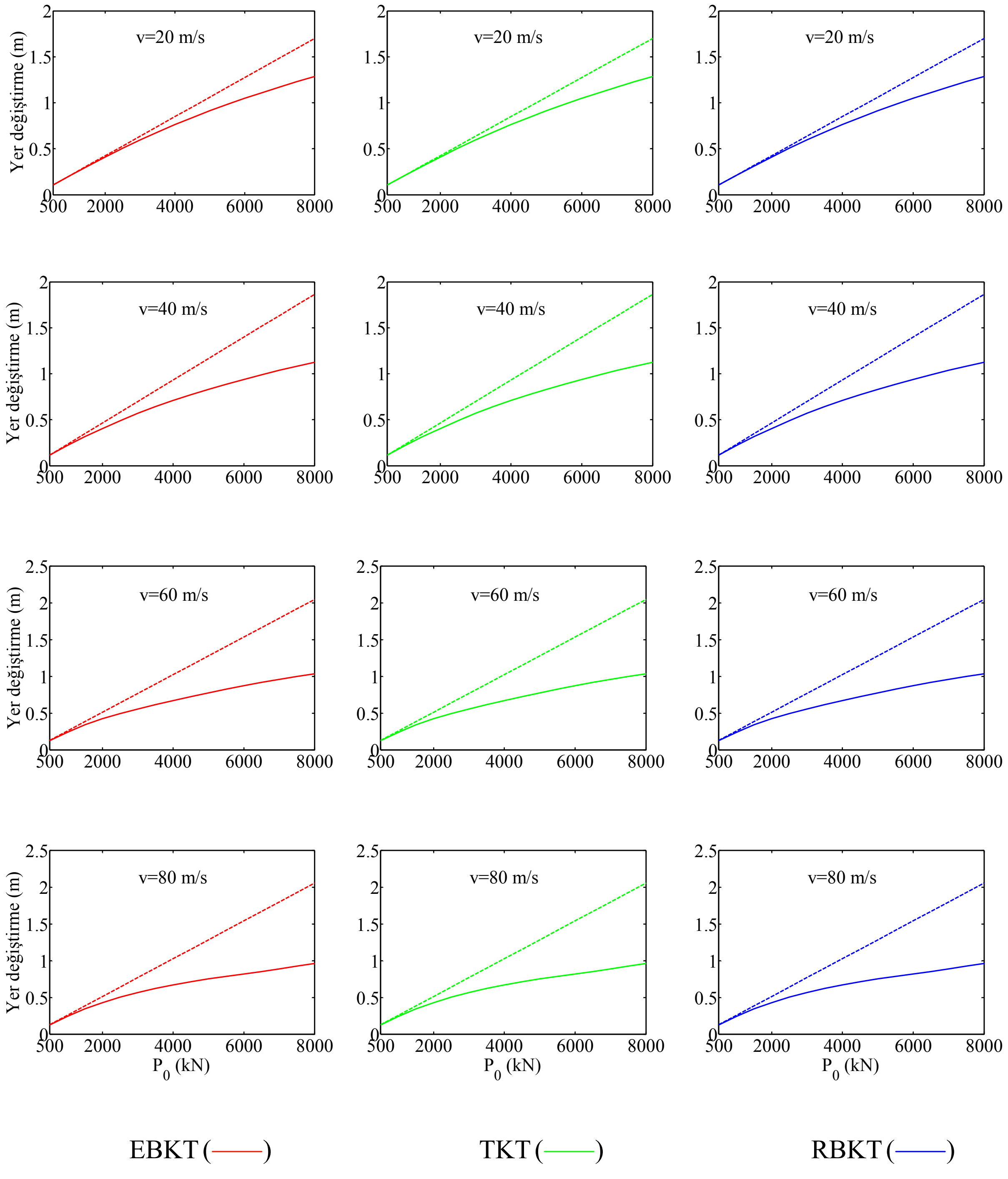
Şekil 4.20 Farklı sönüm katsayıları için yük-yer değiştirme eğrileri; $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\Omega = 0$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, a) $\eta = 0$ b) $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$ c) $\eta = 0.01\,\mathrm{s}$ d) $\eta = 0.1\,\mathrm{s}$ (——) doğrusal çözüm, (——) doğrusal olmayan çözüm.

Şekil 4.20'de EBKT'ye göre iç sönümün $\eta = 0,\ 0.001,\ 0.01,\ 0.1\,\mathrm{s}$ değerleri için hem doğrusal hem de doğrusal olmayan yük-yer değiştirme eğrileri gösterilmiştir. Harketli yükün hızı $v = 20\,\mathrm{m/s}$ olarak alınmıştır. Bu eğriler oluşturulurken P_0 değeri $500\,\mathrm{kN}$ değerinden $8000\,\mathrm{kN}$ değerine $500\,\mathrm{kN}$ luk artımlarla arttırılmış, her bir P_0 değeri için kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirme değeri elde edilerek grafiğe işlenmiştir.

Literatürdeki çalışmalardan (örneğin Reddy, 2004) ve burada gösterilmemesine karşın yapılan statik analizlerden görülmüş olduğu gibi, eğer göz önüne alınan kirişin bir ucu sabit diğer ucu yatay doğrultuda hareketli ise geometrik doğrusal ve geometrik doğrusal olmayan hallerde düşey w_0 statik yer değiştirmeleri eşittir. Bir başka deyişle, statik durumda doğrusal olmayan davranış ortaya çıkmamaktadır. Ancak, Şekil 4.20'den görüldüğü gibi dinamik durumda, kirişin bir ucu yatay yönde hareketli olsa bile, doğrusal olmayan davranış ortaya çıkmaktadır.

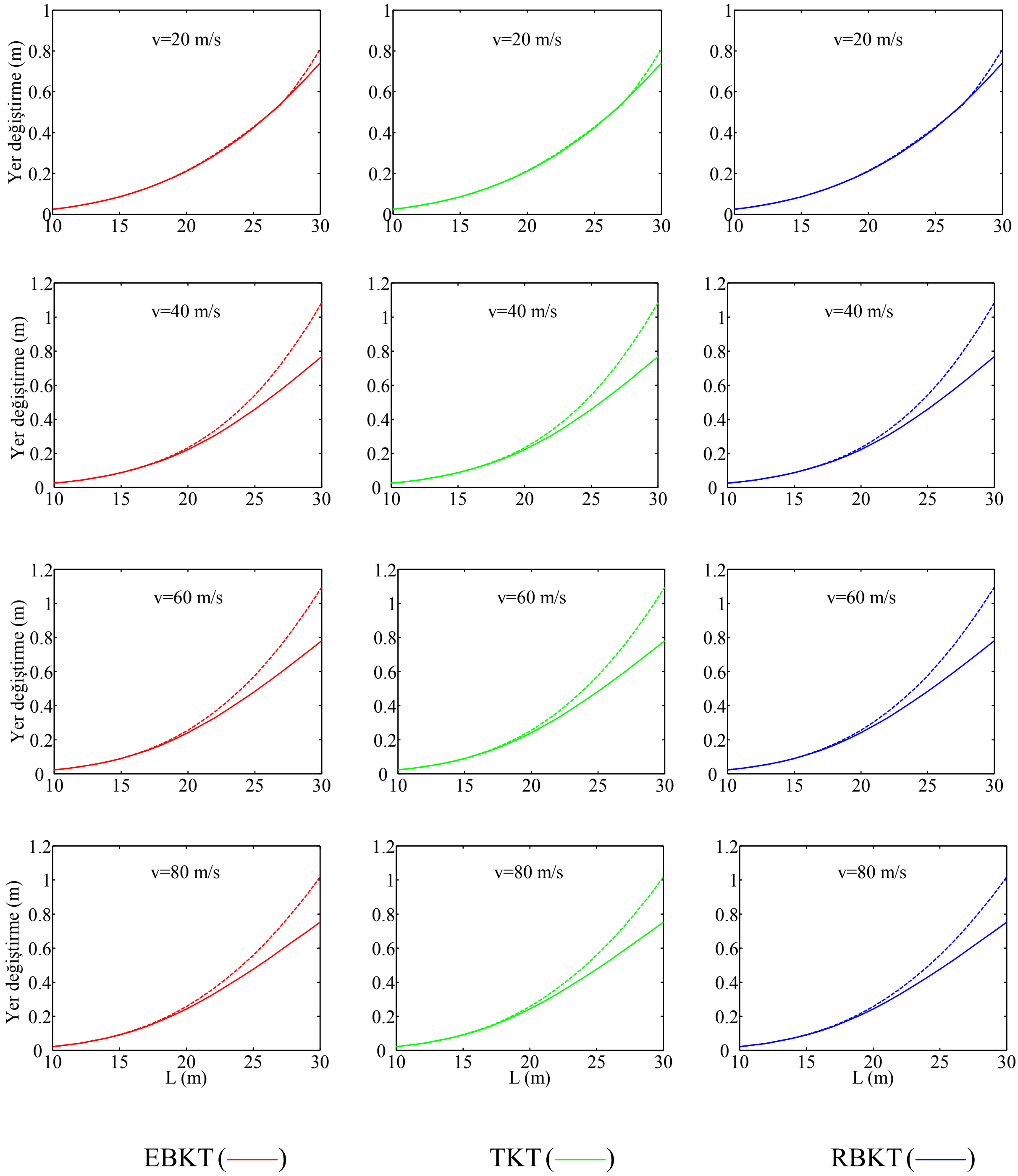
Şekil 4.20a'da doğrusal olmayan teoriye göre elde edilen yer değiştirmelerin doğrusal teoriden elde edilen yer değiştirmelerden küçük olmasının nedeni, von-Kármán teorisi kullanılarak hesap yapıldığında (2.61), (2.66) ve (2.69) eşitlikleri ile verilen kinetik enerji ifadelerinde boyuna kinetik enerjinin dikkate alınabilmesidir. Şekil 4.20a'dan görüldüğü gibi, sönüm katsayısı $\eta = 0$ olduğunda, doğrusal ve doğrusal olmayan çözümler arasındaki fark çok az olmaktadır. Yatay u_0 yer değiştirmeleri geometrik doğrusal durumda sadece eksenel T kuvvetinden, doğrusal olmayan durumda ise eksenel kuvvetle birlikte eğilmeden ortaya çıkmaktadır. Geometrik doğrusal durumda u_0 yatay yer değiştirmesi zamandan bağımsız olduğu için boyuna kinetik enerji oluşmamaktadır. Fakat von-Kármán teorisinde zamana bağlı yatay $u_0(x,t)$ yer değiştirmeleri göz önüne alınabildiği için, yatay hareketle ilintili olan boyuna kinetik enerji dikkate alınabilmektedir. Bununla birlikte sönüm varolduğunda, Şekil 4.20b-d'den görüldüğü gibi, sönümün artmasıyla doğrusal ve doğrusal olmayan sonuçlar arasındaki fark artmaktadır. Bu farkın nedeni (2.52), (2.54) ve (2.55) eşitlikleri ile verilen sönüm fonksiyonlarına bakıldığında izleyen şekilde yorumlanabilir: Bilindiği gibi, iki ucu yatay yöndeki harekete karşı tutulmuş kirişlerde, doğrusal ve doğrusal olmayan çözümler arasındaki fark hem statik hem de dinamik durumda oldukça belirgin olmaktadır. (2.52), (2.54) ve (2.55) eşitliklerindeki ilk terim sönümün boyuna doğrultudaki hareket üzerindeki etkisini göstermektedir. Bu etki ise, boyuna kinetik enerjide de olduğu gibi, geometrik doğrusal olmayan durumda dikkate alınabilmektedir. Sönümün artmasıyla boyuna doğrultudaki bu etki büyümekte ve hatta sönümün çok büyük değerlerinde, göz önüne alınan kiriş iki ucu sabit mesnetli durum davranışına benzer bir davranış sergilemektedir.

Literatürde kirişlerin geometrik doğrusal olmayan statik ve dinamik analizleri ile ilgili diğer çalışmalardan da görüleceği gibi, dikkate alınan kirişin her iki ucunun sabit olması halinde geometrik doğrusal olmayan durumda düşey yer değiştirmelerin azalıyor olması yatay hareketin tutulması nedeniyle ortaya çıkan normal kuvvet nedeniyledir. Yani, geometrik doğrusal olmayan durumdaki sözü edilen bu davranış kiriş kesitlerinde oluşan normal kuvvetin düşey yer değiştirmelerle etkileşmesi sonucu kirişin rijitliğinin artmasından kaynaklanmaktadır. Bu davranışı daha iyi anlayabilmek için kirişte oluşan normal kuvveti elde etmek faydalı olacaktır. Bu amaçla kiriş orta düzlemindeki şekil değiştirmeleri gösteren (3.18) eşitliği dikkate alınarak normal kuvvet izleyen şekilde ifade edilebilir:

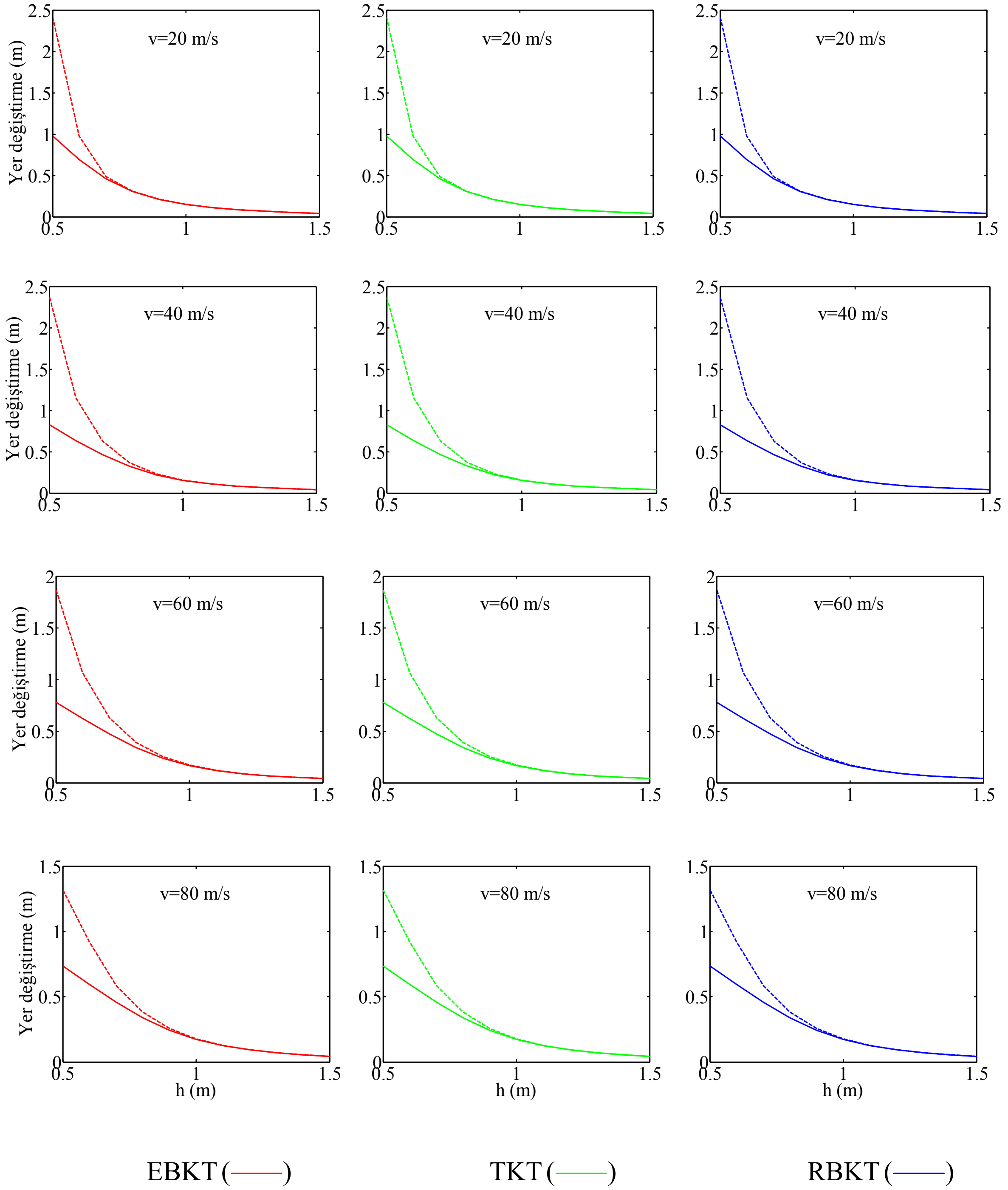


Şekil 4.21 Farklı kiriş teorileri için yük-yer değiştirme eğrileri; $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\Omega = 0$, $\eta = 0.025\,\mathrm{s}$; (−−−) doğrusal çözüm,

(——) doğrusal olmayan çözüm.



Şekil 4.22 Farklı kiriş teorileri için kiriş açıklığının kiriş orta noktasındaki en büyük dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkisi; $P_0 = 1000$ kN, $\Omega = 0$, $b = 0.4$ m, $h = 0.9$ m, $T = 1250$ kN, $e = 0$, $\eta = 0.025$ s; (– – –) doğrusal çözüm, (——) doğrusal olmayan çözüm.



Şekil 4.23 Farklı kiriş teorileri için kiriş yüksekliğinin kiriş orta noktasındaki en büyük dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkisi; $P_0 = 1000\,\mathrm{kN}$, $\Omega = 0$, $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\eta = 0.025\,\mathrm{s}$; (– – –) doğrusal çözüm, (——) doğrusal olmayan çözüm.

$$N_{xx} = \int_A \sigma_{xx}\, \mathrm{d}A = \int_A \left(E\,\varepsilon_{xx} + E\,\eta_b\,\dot{\varepsilon}_{xx} \right) \mathrm{d}A \tag{4.4}$$

$$N_{xx} = EA\left[\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] + \eta_b\, EA\left[\frac{\partial \dot{u}_0(x,t)}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \dot{w}_0(x,t)}{\partial x} \right) \right] \tag{4.5}$$

(4.5) eşitliğinden görüldüğü gibi N_{xx} normal kuvveti çekme olup, kirişin düşey yer değiştirmesi ile etkileşim halindedir. Dolayısıyla, kirişteki düşey yer değiştirmeler arttıkça N_{xx} normal kuvveti artarak kirişi rijitleştirecektir.

Şekil 4.21'de söz konusu kiriş teorileri için hareketli yükün farklı hız değerlerinde hem doğrusal hem de doğrusal olmayan yük-yer değiştirme eğrileri gösterilmiştir. Bu eğriler oluşturulurken P_0 değeri $500\,\mathrm{kN}$ değerinden $8000\,\mathrm{kN}$ değerine $500\,\mathrm{kN}$ luk artımlarla arttırılmış, her bir P_0 değeri için kiriş orta noktasındaki en büyük yer değiştirme değeri elde edilerek grafiğe işlenmiştir. Şekil 4.21'den görüldüğü gibi tüm hız değerleri için, yaklaşık olarak $P_0 = 2000\,\mathrm{kN}$ değerine kadar doğrusal ve doğrusal olmayan teoriden elde edilen yer değiştirmeler birbirine yakın olmasına karşın, P_0'ın bu değerinden sonra iki teori arasındaki sapma artmaktadır. Doğrusal olmayan kiriş teorilerinden elde edilen dinamik yer değiştirmelerin doğrusal kiriş teorilerinden elde edilen yer değiştirmelerden daha küçük olduğu görülmektedir.

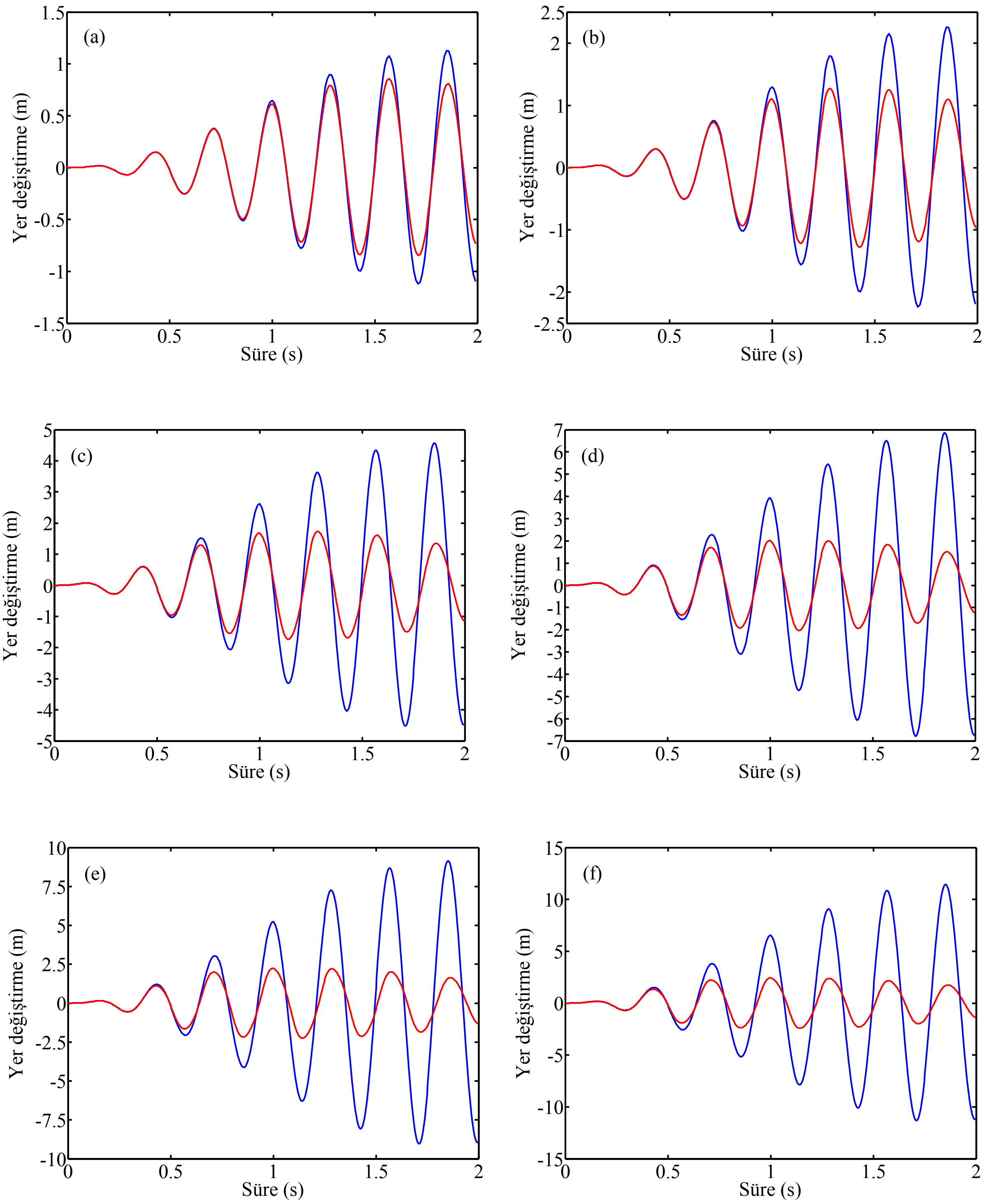
Şekil 4.22'de kiriş açıklığının kiriş orta noktasındaki en büyük dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkisi hareketli yükün farklı hız değerleri için gösterilmiştir. Burada kiriş açıklığı $10\,\mathrm{m} \le L \le 30\,\mathrm{m}$ aralığında $1\,\mathrm{m}$ artımla göz önüne alınmıştır. Şekil 4.22'den görüldüğü gibi kiriş açıklığı arttıkça doğrusal ve doğrusal olmayan teorilerden elden edilen yer değiştirmeler arasındaki fark artmaktadır. Ayrıca, doğrusal teoriden bildiğimiz gibi tekil yüklü bir kirişte düşey yer değiştirmeler kiriş açıklığının küpüyle orantılı olup, bu durum Şekil 4.22'den gözlenmektedir.

Şekil 4.23'de hareketli yükün hızının farklı değerleri için, kiriş yüksekliğinin kiriş orta noktasındaki en büyük dinamik yer değiştirmeler üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Burada kiriş yüksekliği $0.5\,\mathrm{m} \le h \le 1.5\,\mathrm{m}$ aralığında $0.1\,\mathrm{m}$ artımla dikkate alınmıştır. Beklenen bir sonuç olarak, kiriş yüksekliği arttıkça kirişe ait düşey yer değiştirmeler azalmaktadır. Çünkü doğrusal kiriş teorilerinden bilindiği gibi, düşey yer değiştirmeler eğilme rijitliği ile ters orantılı, eğilme rijitliği de kiriş yüksekliğinin küpü ile orantılıdır. Şekil 4.23'den doğrusal ve doğrusal olmayan teorilerden elde edilen yer değiştirmeler arasındaki farkın kiriş yüksekliği azaldıkça dikkat çekici bir şekilde arttığı görülmektedir. Yani, geometrik doğrusal olmayan etkiler narin kirişlerin (h/L oranı küçük olan kirişler) eğilme davranışını önemli derecede etkilemektedir.

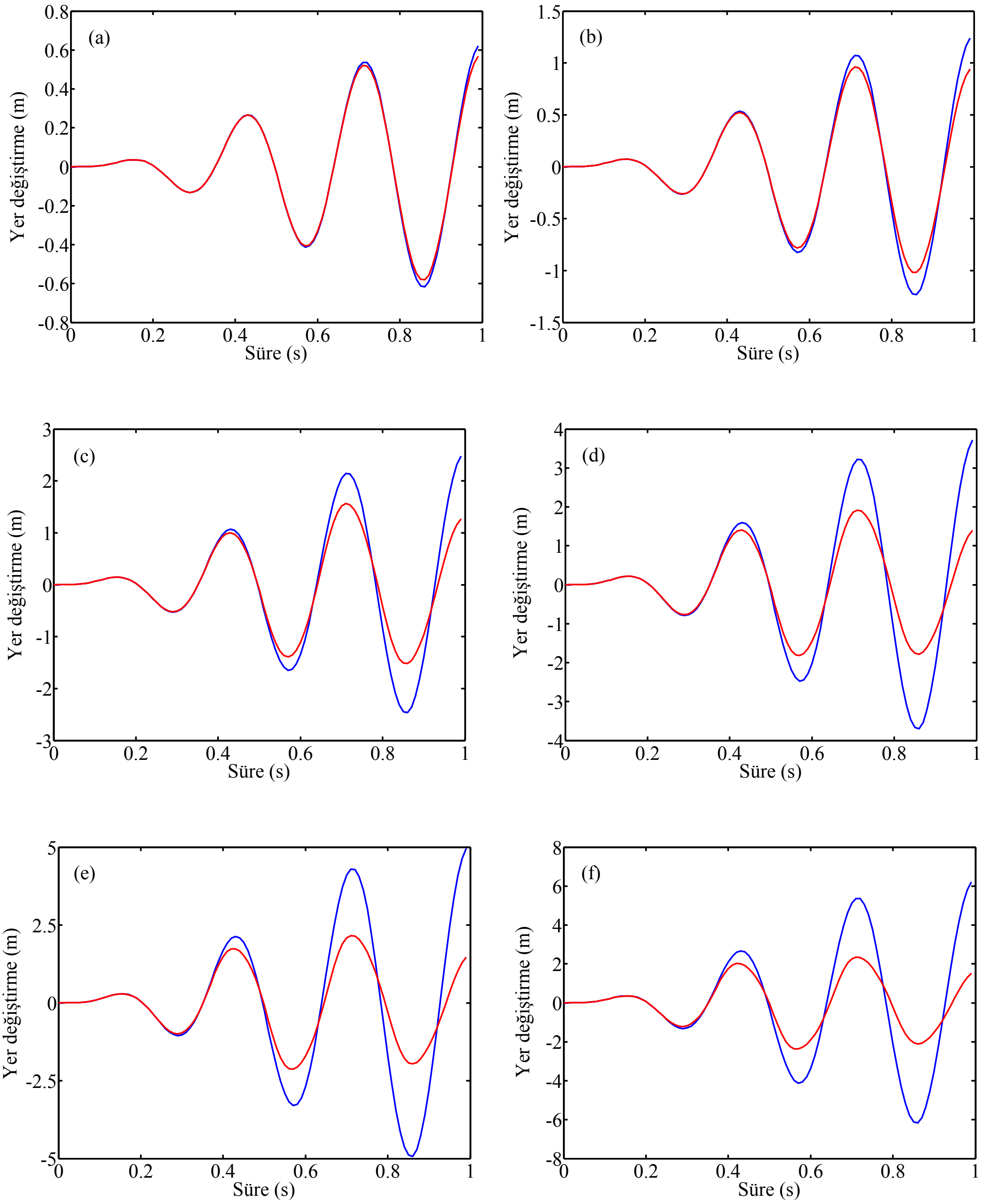
Şekil 4.24-4.26, rezonans durumunda ($\Omega = \omega_{1l}, \omega_{1l}$ söz konusu kirişin doğrusal teoriye göre birinci doğal titreşim frekansı) kiriş orta noktasındaki yer değiştirmeleri hareketli harmonik yükün genliğinin çeşitli değerleri için göstermektedir. Kiriş açıklığı $L = 20\,\mathrm{m}$, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti $T = 1250\,\mathrm{kN}$, dışmerkezlik $e = 0$, iç sönüm $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$ ve hareketli yükün hızı $v = 10, 20, 40\,\mathrm{m/s}$ değerleri için hesap yapılmıştır. Şekillerde verilen yer değiştirmeler EBKT kullanılarak hesaplanan yer değiştirmelerdir. Kirişin birinci doğal titreşim frekansı $\omega_{1l} = 22.06690\,\mathrm{rad/s}$ olarak hesaplanmıştır. Şekil 4.24-4.26'dan açıkça görüldüğü gibi, beklenen bir durum olarak, rezonans durumunda oldukça büyük yer değiştirmeler elde edilmiştir. Şekil 4.24'den görüldüğü gibi, hareketli yükün hızı $v = 10\,\mathrm{m/s}$ olduğunda, diğer iki hareketli yük hızına göre daha büyük yer değiştirmeler elde edilmiştir. Şekil 4.24'de hareketli harmonik yük kirişe daha uzun süre etkidiğinden ve dolayısıyla hareketli harmonik yük zaman içerisinde daha çok çevrim yaptığından, diğer iki hız durumuna göre yer değiştirmeler daha büyük ve denge konumu etrafındaki salınım sayısı da daha fazla olacaktır. Şekil 4.25 ve 4.26'dan görüldüğü gibi hareketli harmonik yükün hızı arttıkça yer değiştirmelerin büyüklüğü ve salınım sayısı da azalmaktadır.

Şekil 4.24-4.26'dan görüldüğü gibi hareketli harmonik yükün genliği arttıkça doğrusal ve doğrusal olmayan çözümler arasındaki fark bariz bir şekilde artmaktadır. İki teoriye ait çözümler arasındaki fark hareketli harmonik yükün hızı $v = 10\,\mathrm{m/s}$ olduğunda çok daha belirgin olmaktadır (Şekil 4.24).

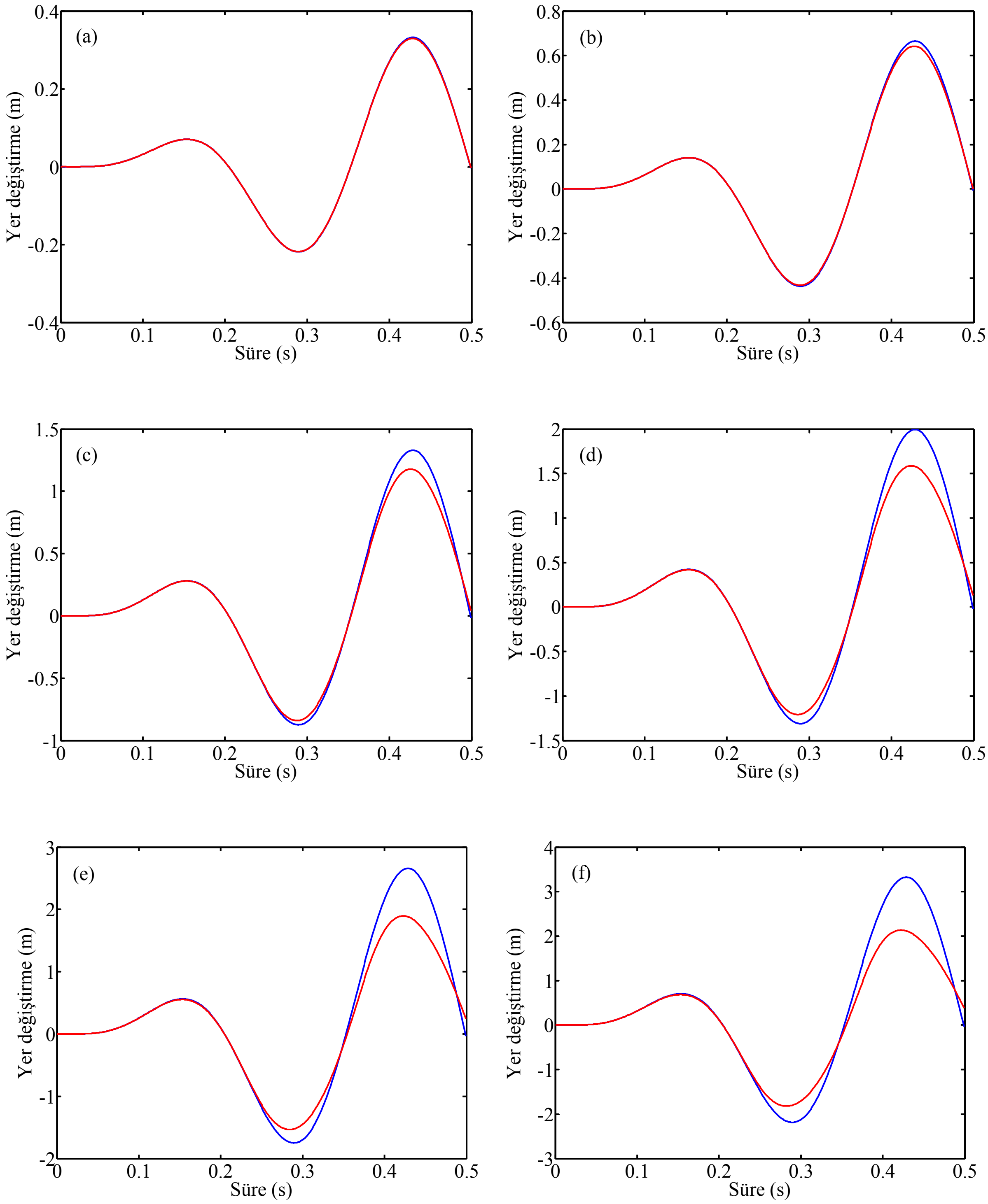
Bu aşamada, doğrusal teoriden elde edilen doğal titreşim frekanslarının titreşimin genliğinden bağımsız olmasına karşın, doğrusal olmayan teoriden elde edilen doğal frekansların ise titreşimin genliğine bağlı olduğunun hatırlatılması faydalı olacaktır. Literatürde doğrusal olmayan titreşimler üzerindeki teorik ve deneysel çalışmalar, titreşimin genliğinin artmasıyla birlikte, kirişin doğal titreşim frekanslarının arttığını göstermektedir (Ray ve Bert, 1969; Bhashyam ve Prathap, 1980; Reddy ve Singh, 1981; Sarma ve Varadan, 1984; Lewandowski, 1987; Ribeiro ve Petyt, 2000). Bu davranışın sebebi, kiriş rijitliğinin titreşimin genliğine bağlı olarak değişmesidir. Böylece, geometrik doğrusal olmayan durumdaki doğal titreşim frekansları doğrusal teoriden elde edilen doğal frekanslardan daha çok uzaklaştığından dolayı, her iki çözüme ait yer değiştirmeler arasındaki fark da büyümektedir.



Şekil 4.24 Hareketli harmonik yükün genliğinin farklı değerleri için, rezonans durumunda kiriş orta noktasındaki yer değiştirmeler, $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\Omega = \omega_{1l}$, $v = 10\,\mathrm{m/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$, a) $P_0 = 500\,\mathrm{kN}$ b) $P_0 = 1000\,\mathrm{kN}$ c) $P_0 = 2000\,\mathrm{kN}$ d) $P_0 = 3000\,\mathrm{kN}$ e) $P_0 = 4000\,\mathrm{kN}$ f) $P_0 = 5000\,\mathrm{kN}$; (——) doğrusal çözüm, (——) doğrusal olmayan çözüm.



Şekil 4.25 Hareketli harmonik yükün genliğinin farklı değerleri için, rezonans durumunda kiriş orta noktasındaki yer değiştirmeler, $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\Omega = \omega_{1l}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$, a) $P_0 = 500\,\mathrm{kN}$ b) $P_0 = 1000\,\mathrm{kN}$ c) $P_0 = 2000\,\mathrm{kN}$ d) $P_0 = 3000\,\mathrm{kN}$ e) $P_0 = 4000\,\mathrm{kN}$ f) $P_0 = 5000\,\mathrm{kN}$; (——) doğrusal çözüm, (——) doğrusal olmayan çözüm.



Şekil 4.26 Hareketli harmonik yükün genliğinin farklı değerleri için, rezonans durumunda kiriş orta noktasındaki yer değiştirmeler, $L = 20\,\mathrm{m}$, $b = 0.4\,\mathrm{m}$, $h = 0.9\,\mathrm{m}$, $T = 1250\,\mathrm{kN}$, $e = 0$, $\Omega = \omega_{1l}$, $v = 40\,\mathrm{m/s}$, $\eta = 0.001\,\mathrm{s}$, a) $P_0 = 500\,\mathrm{kN}$ b) $P_0 = 1000\,\mathrm{kN}$ c) $P_0 = 2000\,\mathrm{kN}$ d) $P_0 = 3000\,\mathrm{kN}$ e) $P_0 = 4000\,\mathrm{kN}$ f) $P_0 = 5000\,\mathrm{kN}$; (——) doğrusal çözüm, (——) doğrusal olmayan çözüm.

5. SONUÇLAR VE GELECEKTE YAPILMASI DÜŞÜNÜLEN ÇALIŞMALAR

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, hareketli harmonik yük ve dışmerkez basınç kuvveti etkisindeki basit mesnetli bir kirişin doğrusal ve doğrusal olmayan titreşimleri Euler-Bernoulli kiriş teorisi (EBKT), Timoshenko kiriş teorisi (TKT) ve Reddy-Bickford kiriş teorisi (RBKT) çerçevesinde sayısal olarak incelenmiştir. Problemin doğrusal olmayan çözümünde sadece geometrik doğrusal olmayan etkiler dikkate alınmıştır. Kiriş malzemesi için doğrusal Kelvin-Voigt modeli kullanılmıştır. Kirişin yer değiştirmelerini ve kesit dönmelerini ifade eden bilinmeyen fonksiyonlar zaman ve uzay bağımlı koordinatlara çarpım şeklinde ayrılmıştır. Doğrusal ve doğrusal olmayan her iki çözümde de bilinmeyen yer değiştirme ve dönme fonksiyonlarında uzay bağımlı koordinatlar için polinomlar seçilmiştir. Mesnet koşulları Lagrange çarpanları ile sağlatılarak, problemin Lagrangian fonksiyoneli oluşturulmuştur. Hareket denklemleri Lagrange denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Elde edilen zamana bağlı diferansiyel denklem takımı Newmark-β yöntemiyle çözülerek, herhangi bir anda kirişe ait ivmeler, hızlar ve yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Doğrusal olmayan analizlerde hareket denklemlerinin çözümünde Newmark-β yöntemiyle birlikte Picard (Direkt iterasyon) ve Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemleri kullanılmıştır. Bu çalışmadaki sonuçların doğruluğu, burada elde edilen sonuçların daha önce yayınlanmış ve bu çalışmadaki sonuçların özel durumlarına karşı gelen sonuçlarla karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir. Yakınsama çalışmaları yapılmıştır. Doğrusal durum için serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Bu çalışmada, kayma şekil değiştirmeleri, hareketli harmonik yükün hızı, frekansı, dışmerkez basınç kuvvetinin şiddeti ve dışmerkezliği ile malzeme sönümünün kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir. Bunlara ilave olarak problemin geometrik doğrusal olmayan çözümünde, büyük yer değiştirmelerin etkisi etraflıca araştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen belli başlı sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Kayma şekil değiştirmelerinin etkisini dikkate alan TKT ve RBKT'ye göre hesaplanan özdeğerlerin, kayma şekil değiştirmelerinin etkisini ihmal eden EBKT'ye göre hesaplanan frekanslardan daha küçük olduğu görülmüştür. En büyük frekansı EBKT, en küçük frekansı ise TKT vermiştir.
- Her üç teori için elde edilen özdeğerler, kiriş yüksekliği / kiriş açıklığı (h/L) oranının küçük değerleri için birbirine çok yakın olmakla beraber, h/L oranının artmasıyla beraber EBKT için bulunan özdeğerler ile TKT ve RBKT'ye göre bulunan özdeğerler

arasındaki fark artmaktadır.

- Kayma şekil değiştirmelerinin kirişin özdeğerleri üzerindeki etkisinin mod numarasının artmasıyla birlikte arttığı sonucuna varılmıştır.
- Eksenel yükün basınç olması durumunda titreşim frekanslarının azaldığı, çekme olması durumunda ise arttığı görülmüştür.
- Kiriş açıklığının artmasıyla beraber kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin azaldığı ve her üç teoriye göre elde edilen yer değiştirmelerin birbirine yaklaştığı görülmüştür.
- Kiriş açıklığı $7.5\,\mathrm{m}$ den büyük olduğunda, yer değiştirmeler arasındaki fark çok küçük olmaktadır. Bu durumda kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin ihmal edilebileceği söylenebilir. Uygulamada kullanılan öngerilmeli kirişlerin açıklıklarının $10\,\mathrm{m}$ veya $15\,\mathrm{m}$ den daha büyük değerler aldığı düşünüldüğünde, Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre yapılan hesapların tatmin edici bir yaklaşıklıkta sonuç vereceği söylenebilir.
- Beklendiği gibi rezonans durumunda oldukça büyük değerler alan yer değiştirmeler elde edilmiştir.
- Hareketli yükün hızının kirişlerin dinamik davranışı üzerinde oldukça etkili olduğu görülmüştür.
- Eksenel basınç kuvveti nedeniyle kirişin rijitliği azalmaktadır. Böylece aynı düşey yük altında eksenel yüklü bir kiriş öngermesiz bir kirişe göre daha büyük yer değiştirme yapmaktadır. Sayısal hesaplarda dikkate alınan parametreler için dışmerkez basınç kuvvetinin kirişlerin dinamik yer değiştirmeleri üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Bu etki dışmerkezlikten kaynaklanan uç momentleri sebebiyle oluşmaktadır.
- Beklenen bir durum olarak, iç sönümün artmasıyla birlikte yer değiştirmelerin azaldığı görülmüştür.
- İç sönümün ihmal edildiği rezonans durumunda sonsuza giden yer değiştirme değerleri elde edilmiştir. Ancak, her malzemenin doğasında belli bir ölçüde iç sönüm vardır. Dolayısıyla malzemelerin iç sönüm değerlerine bağlı olarak rezonans veya rezonansa yakın durumlarda yer değiştirmeler sonsuza gitmeyecek ve sonlu kalacaktır. Ancak, yine de yapı sistemlerinde çok büyük yer değiştirmelere ve bunun sonucunda önemli hasarlara neden olan bu gibi durumlardan kaçınılmalıdır.
- Bir ucu sabit diğer ucu hareketli kirişte statik durumda doğrusal ve doğrusal olmayan statik yer değiştirmeler aynı olmakla birlikte, dinamik durumda doğrusal olmayan kiriş teorilerinden elde edilen yer değiştirmeler doğrusal kiriş teorilerinden elde edilen

dinamik yer değiştirmelerden daha küçüktür. Bu davranış geometrik doğrusal olmayan durumda von-Kármán şekil değiştirmelerinin kullanılmasıyla zamana bağlı yatay $u_0(x,t)$ yer değiştirmelerinin göz önüne alınabilmesi sonucu, yatay hareketle ilintili kinetik enerji ve sönüm etkilerinin hesaba katılabilmesinden kaynaklanmaktadır. Geometrik doğrusal durumda boyuna yöndeki bu iki etkiyi hesaba katmak mümkün olmamaktadır.

- Geometrik doğrusal olmayan durumdaki bu davranışta, boyuna yöndeki sönümün etkisi boyuna hareketle ilintili kinetik enerjiye göre çok daha önemli bir rol oynamaktadır.
- Sönümün artmasıyla boyuna doğrultudaki bu etki büyümekte ve hatta sönümün çok büyük değerlerinde, göz önüne alınan kiriş iki ucu sabit mesnetli durum davranışına benzer bir davranış sergilemektedir.
- Kiriş açıklığı arttıkça doğrusal ve doğrusal olmayan teorilerden elde edilen yer değiştirmeler arasındaki farkın arttığı görülmüştür.
- Doğrusal ve doğrusal olmayan teorilerden elde edilen yer değiştirmeler arasındaki farkın kiriş yüksekliği azaldıkça dikkat çekici bir şekilde arttığı görülmüştür. Yani, doğrusal olmayan etkiler narin kirişlerin (h/L oranı küçük olan kirişler) eğilme davranışını önemli derecede etkilemektedir.

5.2 Gelecekte Yapılması Düşünülen Çalışmalar

Bu çalışmada ele alınan problemin, daha sonraki zamanlarda yapılması düşünülen çalışmalarda izleyen alanlara genişletilmesi düşünülmektedir:

- Ele alınan problemin tabakalı kompozit kirişlere veya fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (elastisite modülünün kiriş yüksekliği veya kiriş uzunluğu boyunca belli bir fonksiyona bağlı olarak değişmesi gibi) yapılmış kirişlere genişletilmesi.
- Tekil hareketli yük yerine çok serbestlik dereceli yay-kütle sistemleri veya daha gelişmiş taşıt modelleri gibi hareketli modellerin göz önüne alınması.
- Ele alınan problemin eğri eksenli kirişler veya plaklar gibi diğer yapı elemanlarına uygulanması.
- Doğrusal olmayan malzeme özellikleri (fiziksel açıdan doğrusal olmayan davranış) göz önüne alınarak problemin yeniden çözülmesi.

KAYNAKLAR

Abu-Hilal, M. ve Zibdeh, H. S., (2000), “Vibration Analysis of Beams with General Boundary Conditions Traversed by a Moving Force”, Journal of Sound and Vibration, 229(2): 377-388.

Abu-Hilal, M. ve Mohsen, M., (2000), “Vibration of Beams with General Boundary Conditions Due to Moving Harmonic Load”, Journal of Sound and Vibration, 232(4) 703-717.

Abu-Hilal, M., (2006), “Dynamic Response of a Double Euler-Bernoulli Beam Due to a Moving Constant Load”, Journal of Sound and Vibration, 297(3-5): 477-491.

Bani-Hani, K. A. Ve Alawneh, M. R., (2007), “Prestressed Active Post-Tensioned Tendons Control for Bridges Under Moving Loads”, Structural Control and Health Monitoring, 14(3): 357-383.

Bathe, K. J., (1996), Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey.

Bhashyam, G. R. ve Prathap, G., (1980), “Galerkin Finite Element Method for Non-linear Beam Vibrations”, Journal of Sound and Vibration, 72(2):191-203.

Bickford, W. B., (1982), “A Consistent Higher Order Beam Thoery”, In Developments in Theoretical and Applied Mechanics, 11: 137-150.

Bu, J. Q., Law, S. S., Zhu, X. Q., (2006), “Innovative Bridge Condition Assessment from Dynamic Response of a Passing Vehicle”, Journal of Structural Engineering-ASCE, 132(12): 1372-1379.

Celasun, H. ve Polat, Z., (1974), Öngerilmeli Beton, İDMM Akademisi Yayınları 123, İstanbul.

Chan, T. H. T., Law, S. S., Yung, T. H., (2000), “Moving Force Identification Using an Existing Prestressed Concrete Bridge”, Engineering Structures, 22 (10): 1261-1270.

Chan, T. H. T., Yung, T. H., (2000), “A Theoretical Study of Force Identification Using Prestressed Concrete Bridges”, Engineering Structures, 23 (11): 1529-1537.

Chang, T. P., Liu, Y. N., (1996), “Dynamic Finite Element Analysis of a Non-linear Beam Subjected to a Moving Load”, International Journal of Solids Structures, 33 (12): 1673-1688.

Chang, T. P., Lin, G. L., Chang, E., (2006), “Vibration Analysis of a Beam With an Internal Hinge Subjected to a Random Moving Oscillator”, International Journal of Solids and Structures, 43(21): 6398-6412.

Chen, Y. H., Huang, Y. H., Shih, C. T., (2001), “Response of an Infinite Timoshenko Beam on a Viscoelastic Foundation to a Harmonic Moving Load”, Journal of Sound and Vibration, 241(5): 809-824.

Cheung, Y. K., Au, F. T. K., Zheng D. Y., Cheng, Y. S., (1999), “Vibration of Multi-Span Non-Uniform Bridges Under Moving Vehicles and Trains by Using Modified Beam Vibrations Functions”, Journal of Sound and Vibration, 228(3): 611-628.

Clough, R. W., and Penzien, J., (1993), Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Co., New York.

Cojocaru, E. C., Irschik, H., Gattinger, H., (2004), “Dynamic Response of an Elastic Bridge Due to a Moving Elastic Beam”, Computers and Structures, 82(11-12): 931-943.

Cowper, G. R., (1966), “The Shear Coefficients in Timoshenko’s Beam Theory”, Journal of Applied Mechanics-ASME, 33(2): 335-340.

Delgado, R. M. ve dos Santos RC, S. M., (1997), “Modelling of Railway Bridge-Vehicle Interaction on High Speed Tracks”, Computers and Structures, 63(3): 511-523.

Dugush, Y. A. ve Eisenberger, M., (2002), “Vibrations of Non-Uniform Continuous Beams Under Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, 254(5): 911-926.

Esmailzadeh, E. ve Jalili, N., (2003), “Vehicle-Passenger-Structure Interaction of Uniform Bridges Traversed by Moving Vehicles”, Journal of Sound and Vibration, 260(4): 611-635.

Fryba, L., (1972), Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads, Noordhoff International Publishing, The Netherlans.

Flügge, W., (1967), Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company, The United States of America.

Foda, M. A ve Abduljabbar, Z., (1998), “A Dynamic Green Function Formulation for the Response of a Beam Structure to a Moving Mass”, Journal of Sound and Vibration, 210(3): 295-306.

Foda, M. A., (1999), “Influence of Shear Deformation and Rotary Inertia on Nonlinear Free Vibration of a Beam with Pinned Ends”, Computers and Structures, 71(1999): 663-670.

Garinei, A., (2006), “Vibrations of Simple Beam-Like Modelled Bridge Under Harmonic Moving Loads”, International Journal of Engineering Science, 44(11-12): 778-787.

Garinei, A. ve Risitano, G., (2007), “Vibration of Railway Bridges for High Speed Trains Under Moving Loads Varying in Time”, Engineering Structures, (Baskıda).

Greco, A. ve Santini, A., (2002), “Dynamic Response of a Flexural Non-Classically Damped Continuous Beam Under Moving Loads”, Computers and Structures, 80(26): 1945-1953.

Gilbert, R. I. ve Mickleborough, N. C., (1990), Design of Prestressed Concrete, Unwin Hayman, London.

Henchi, K., Fafard, M., Dhatt, G., Talbot, M., (1997), “Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, 199(1): 33-50.

Hino, J., Yoshimura, T., Konishi, K., Ananthanarayana, N., (1984), “A Finite Element Method Prediction of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load”, Journal of Sound and Vibration, 96(1): 45-53.

Hino, J., Yoshimura, T., Ananthanarayana, N., (1985), “Vibration Analysis of Non-linear Beams Subjected to a Moving Load Using the Finite Element Method”, Journal of Sound and Vibration, 100 (4): 477-491.

Humar, J. L., (1990), Dynamics of Structures, Prentice Hall, New Jersey.

Hurty, W. C. ve Rubinstein, M. F., (1967), Dynamics of Structures, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

Ichikawa, M., Miyakawa, Y, Matsuda, A., (2000), “Vibration Analysis of Continuous Beam Subjected to a Moving Mass”, Journal of Sound and Vibration, 230(3): 493-506.

Ju, S. H. ve Lin H. T., (2004), “Analysis of Train-Induced Vibrations and Vibration Reduction Schemes Above and Below Critical Rayleigh Speeds by Finite Element Method”, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 24(12): 993-1002.

Ju, S. H. Ve Lin, H. T, (2007), “A Finite Element Model of Vehicle-Bridge Interaction Considering Braking and Acceleration”, Journal of Sound and Vibration, 303(2007): 46-57.

Kadivar, M. H. Ve Mohebpour, S. R., (1998), “Finite Element Dynamic Analysis of Unsymmetric Composite Laminated Beams with Shear Effect and Rotary Inertia Under the Action of Moving Loads”, Finite Elements in Analysis and Design, 29(1998): 259-273.

Kim, S. M. ve Roesset, M. J., (2003), “Dynamic Response of a Beam on a Frequency-Independent Damped Elastic Foundation to Moving Load”, Canadian Journal of Civil Engineering, 30(2): 460-467.

Kim, S. M. ve Cho, Y. H., (2006), “Vibration and Dynamic Buckling of Shear Beam-Columns on Elastic Foundation Under Moving Harmonic Loads”, International Journal of Solids and Structures, 43(3-4): 393-412.

Kocatürk, T., Sezer, S., Demir, C., (2004), “Determination of the Steady-State Response of Viscoelastically Point-Supported Rectangular Specially Orthotropic Plates with Added Concentrared Masses”, Journal of Sound and Vibration, 278(4-5): 789-806.

Kocatürk, T., (2005), “Determination of the Steady-State Response of Viscoelastically Supported Cantilever Beam Under Sinusoidal Base Excitation”, Journal of Sound and Vibration, 281(3-5): 1146-1156.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2004), “Vibration of Viscoelastic Beams Subjected to Moving Harmonic Load”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2004/3:116-128.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2005a), “Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2005/1:30-44.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2005b), “Free Vibration Analysis of Elastically Supported Timoshenko Beams”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2005/3:79-93.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2006a), “Vibration of Viscoelastic Beams Subjected to an Eccentric Compressive Force and a Concentrated Moving Harmonic Force”, Journal of Sound and Vibration, 291(1-2):302-322.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2006b), “Dynamic Analysis of Eccentrically Prestressed Viscoelastic Timoshenko Beams Under a Moving Harmonic Load”, Computers and Structures, 84(31-32):2113-2127.

Law, S. S., Chan, T. H. T., Zeng, Q. H., (1997), “Moving Force Identification: A Time Domain Method”, Journal of Sound and Vibration, 201(1): 1-22.

Law, S. S. ve Zhu, X. Q., (2000), “Study on Different Beam Models in Moving Force Identification”, Journal of Sound and Vibration, 234(4): 661-679.

Law, S. S., Bu, J. Q., Zhu, X. Q., Chan S. L., (2004), “Vehicle Axle Loads Identification Using Finite Element Method”, Engineering Structures, 26(8): 1143-1153.

Law, S. S. ve Zhu, X. Q., (2005), “Bridge Dynamic Responses Due to Road Surface Roughness and Braking of Vehicle”, Journal of Sound and Vibration, 282(3-5): 805-830.

Law, S. S. ve Lu, Z. R., (2005), “Time Domain Responses of a Prestressed Beam and Prestress Identification”, Journal of Sound and Vibration, 288(4-5): 1011-1025.

Lee, C. H., Kawatani, M., Kim, C. W., Nishimura, N., Kobayashi, Y., (2006), “Dynamic Response of a Monorail Steel Bridge Under a Moving Train”, Journal of Sound and Vibration, 294(3): 562-579.

Lee, J. ve Schultz, W. W., (2004), “Eigenvalue Analysis of Timoshenko Beams and Axisymmetric Mindlin Plates by the Pseudospectral Method”, Journal of Sound and Vibration, 269: 609-621.

Lee, H. P., (1994), “Dynamic Response of a Beam with Intermediate Point Constraints Subject to a Moving Load”, Journal of Sound and Vibration, 171(3): 361-368.

Lee, H. P., (1998), “Dynamic Response of a Timoshenko Beam on a Winkler Foundation Subjected to a Moving Mass”, Applied Acoustic, 55(3): 203-215.

Li, J. ve Su, M., (1999), “The Resonant Vibration for Simply Supported Girder Bridge Under High-Speed Trains”, Journal of Sound and Vibration, 224(5): 897-915.

Lin, Y. H., ve Trethewey, W., (1990), “Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads”, Journal of Sound and Vibration, 136(2): 323-342.

Lou, P., (2005), “A Vehicle-Track-Bridge Interaction Element Considering Vehicle’s Pitching Effect”, Finite Elements in Analysis and Design, 41(4): 397-427.

Majka, M. ve Hartnett, M., (2007), “Effects of Speed, Load and Damping on the Dynamic Response of Railway Bridges and Vehicles”, Computers and Structures, (Baskıda)

Martinez-Castro, A. E., Museros, P., Castillo-Linares, A., (2006), “Semi-Analytic Solution in the Time Domain for Non-Uniform Multi-Span Bernoulli-Euler Beams Traversed by Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, 294(1-2): 278-297.

Michaltsos, G. T., (2002), “Dynamic Behaviour of a Single-Span Beam Subjected to Loads Moving with Variable Speeds”, Journal of Sound and Vibration, 258(2): 359-372.

Michaltsos, G. T., Sarantithou, E., Sophianopoulos, D. S., (2005), “Flexural-Torsional Vibration of Simply Supported Open Cross-Section Steel Beams Under Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, 280(3-5): 479-494.

Newmark, N. M., (1959), “A Method of Computation for Structural Dynamics”, Journal of Engineering Mechanics Division-ASCE, 85: 67-94.

Omurtag, M. H., (2005), Mukavemet Cilt II, Birsen Yayınevi, İstanbul.

Petyt, M., (1990), Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Pres, Cambridge.

Pinkaew, T., (2006), “Identification of Vehicle Axle Loads From Bridge Responses Using Updated Static Component Technique”, Engineering Structures, 28(11): 1599-1608.

Ray, J. D. ve Bert, C. W., (1969), “Nonlinear Vibrations of a Beam With a Pinned Ends”, Journal of Engineering for Industry-ASME 91: 997-1004.

Reddy, J. N. ve Singh, I. R., (1981), “Large deflections and Large-Amplitude Free Vibrations of Straight and Curved Beams”, International Journal For Numerical Methods in Engineering, 17: 829-852.

Reddy, J. N., (1984a), “A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates”, Journal of Applied Mechanics-ASME, 51: 745-752.

Reddy, J. N., (1984b), Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley, New York.

Reddy, J. N., (2004), An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Oxford University Press, New York.

Ribeiro, P. ve Petyt, M., (2000), “Non-linear Free Vibration of Isotropic Plates with Internal Resonance”, International Journal of Non-linear Mechanics, 35:263-278.

Sarma, B. S. ve Varadan, T. K., (1984) “Ritz Finite Element Approach to Nonlinear Vibrations of Beams”, International Journal For Numerical Methods in Engineering, 20: 353-367.

Savin, E., (2001), “Dynamic Amplification Factor and Response Spectrum for the Evaluation of Vibrations of Beams Under Successive Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, 248(2): 267-288.

Sun, L., (2001), “Dynamic Displacement of Beam-Type structures to Moving Line Loads”, International Journal of Solids and Structures, 38(48-49): 8869-8878.

Sun, L., (2002), “A Closed-Form Solution of Beam on Viscoelastic Subgrade Subjected to Moving Loads”, Computers and Structures, 80(1): 1-8.

Svensson, I., (2002), “Dynamic Response of a Constrained Axially Loaded Beam”, Journal of Sound and Vibration, 252(4): 739-749.

Şener, S., (2006), Öngerilmeli Beton, Alp Yayınevi, Ankara.

Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Beams Subjected to Axial Load Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2005/3:1-10.

Şimşek, M. ve Kocatürk, T., (2007a), “Free Vibration Analysis of Beams by Using a Third Order Shear Deformation Theory”, Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences, 32(3):167-179.

Şimşek, M. ve Kocatürk, T., (2007b), “Dynamic Analysis of an Eccentrically Prestressed Damped Beam Under a Moving Harmonic Force Using Higher Order Shear Deformation Theory”, Journal of Structural Engineering-ASCE, 133(12): 1733-1741.

Şimşek, M. ve Kocatürk, T., (2007c), “Dışmerkez Basınç Kuvveti ve Hareketli Harmonik Yük Etkisindeki Bir Kirişin Doğrusal Olmayan Dinamik Analizi”, XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 3-7 Eylül 2007, Isparta, (baskıda).

Timoshenko, S. ve Young, D. H., (1955), Vibration Problems in Engineering, 3rd Ed., Van Nostrand Company, New York.

Wang, C. M., Reddy J. N., Lee, K. H., (2000), Shear Deformable Beams and Plates, 1st Ed., Elsevier Science Ltd, Amsterdam.

Wang, R. T., (1997), "Vibration of Multi-Span Timoshenko Beams to a Moving Force", Journal of Sound and Vibration, 207(5): 731-742.

Wang, R. T., Chou, T. H., (1998), "Non-linear Vibration of Timoshenko Beam Due to a Moving Force and the Weight of Beam", Journal of Sound and Vibration, 218 (1) 117-1131.

Wang, H. P., Li, J., Zhang, K., (2007), "Vibration Analysis of the Maglev Guideway with the Moving Load", Journal of Sound and Vibration, 35(4-5): 621-640.

Wayou, Y. A. N., Tchoukuegno, R., Woafo, P., (2004), "Non-linear Dynamics of an Elastic Beam Under Moving Loads", Journal of Sound and Vibration, 273 (4-5) 1101-1108.

Xia, H. ve Zhang, N., (2005), "Dynamic Analysis of Railway Bridge Under High-Speed Trains", Computers and Structures, 83(23-24): 1891-1901.

Xu, X., Xu, W., Genin, J., (1997), "A Non-Linear Moving Mass Problem", Journal of Sound and Vibration, 204(3) 495-504.

Yang, Y. B., Yau, J. D., Hsu, L. C., (1997), "Vibration of Simple Beams Due to Trains Moving at High Speeds", Engineering Structures, 19(11): 936-944.

Yang, Y. B., Lin, C. W., Yau, J. D.,(2004), "Extracting Bridges Frequencies From the Dynamic Response of a Passing Vehicle", Journal of Sound and Vibration, 272(3-5): 471-493.

Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y., Jia, X. L., (2007), "Free and Forced Vibration of Cracked Inhomogeneous Beams Under an Axial Force and Moving Load", Journal of Sound and Vibration, (Baskıda).

Yoshimura, T., Hino, J., Ananthanarayana, N., (1986), "Vibration Analysis of Non-linear Beam Subjected to Moving Loads by Using the Galerkin Method", Journal of Sound and Vibration, 104 (2): 179-86.

Yoshimura, T., Hino, J., Kamata, T., Ananthanarayana, N., (1988), "Random Vibration of a Non-linear Beam Subjected to a Moving Load by a Finite Element Analysis", Journal of Sound and Vibration, 122 (1988): 317-329.

Zheng, D. Y., Cheung, Y. K., Au, F. T. K., Cheng, Y. S. (1998), "Vibration of Multi-Span Non-Uniform Beams Under Moving Loads by Using Modified Beam Vibration Functions", Journal of Sound and Vibration, 212(3): 455-467.

Zhu, X. Q. ve Law, S. S., (1999), "Moving Forces Identification on A Multi-Span Continuous Bridge", Journal of Sound and Vibration, 228(2): 377-396.

Zhu, X. Q. ve Law, S. S., (2001), "Orthogonal Function in Moving Loads Identification on a Multi-Span Bridge", Journal of Sound and Vibration, 245(2): 329-345.

EKLER

Ek1 Lagrange Denklemleri

Ek2 Ardışık Yaklaşım Yöntemlerine Genel Bir Bakış

Ek1 Lagrange Denklemleri*

Hamilton prensibi virtüel yer değiştirmeler prensibinin rijit cisimler, maddesel noktalar veya şekil değiştiren cisimlerin dinamiğine uygulanmış olan genelleştirilmiş şeklidir. Kütlesi m olan bir maddesel nokta için hareket eşitliği izleyen dinamik denge formunda yazılsın:

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}-\vec{F}_c\left(\vec{r}\right)=0 \tag{Ek1.1}$$

Gerçek yoldan farklı bir yol $\vec{r}+\delta\vec{r}$ olsun. Burada $\delta\vec{r}$ herhangi bir sabit t zamanı için yoldaki değişimi gösterir. Farz edilsin ki gerçek yol ile değiştirilmiş yol birbirlerinden t_1 ve t_2 zamanları dışındaki zamanlarda farklı olsunlar; yani $\delta\vec{r}\left(t_1\right)=\delta\vec{r}_1\left(t_2\right)=0$. (Ek1.1) in $\delta\vec{r}$ değişimi ile skaler çarpımı yapılır ve t_1 ve t_2 zamanları arasındaki zamanla münasebetli olarak integrasyon yapılırsa

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}-\vec{F}_c\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\delta\vec{r}\,\mathrm{d}t=0 \tag{Ek1.2}$$

elde edilir. Birinci terimin parçalı integrasyonu yapılırsa

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(m\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\vec{F}_c\left(\vec{r}\right)\cdot\delta\vec{r}\right)\mathrm{d}t+\left(m\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\vec{r}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}=0 \tag{Ek1.3}$$

$\delta\vec{r}\left(t_1\right)=\delta\vec{r}_1\left(t_2\right)=0$ olduğundan (Ek1.3) deki son terim yok olur. Ayrıca

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\vec{r}}{\delta t}=\delta\left[\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right]\equiv\delta E_k \tag{Ek1.4}$$

Burada E_k maddesel noktanın kinetik enerjisidir

$$E_k=\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{Ek1.5}$$

Bu durumda (Ek1.3) izleyen formu alır:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta E_k+\vec{F}_c\left(\vec{r}\right)\cdot\delta\vec{r}\right)\mathrm{d}t=0 \tag{Ek1.6}$$

* Ek 1 Hurty ve Rubenstein (1967)'den alınmıştır.

Bu eşitlik bir adet maddesel nokta için Hamilton prensibinin genel formu olarak bilinir. Farz edilsin ki $\vec{F}_c$ konservatif bir kuvvettir (Potansiyel ve kinetik enerjilerin toplamı korunmaktadır). Bu durumda kuvvet bir potansiyelin gradyanı olarak yazılabilir:

$$\vec{F}_c = -\mathrm{grad}\ E_p \tag{Ek1.7}$$

Burada $E_p = E_p\left(\vec{r}\right)$ maddesel noktanın potansiyel enerjisidir. Bu durumda (Ek1.6) izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(E_k - E_p\right) \mathrm{d}\, t = 0 \tag{Ek1.8}$$

Çünkü

$$\mathrm{grad}\ E_p \cdot \delta \vec{r} = \frac{\partial E_p}{\partial x_1}\, \delta x_1 + \frac{\partial E_p}{\partial x_2}\, \delta x_2 + \frac{\partial E_p}{\partial x_3}\, \delta x_3 = \delta E_p\left(x_1, x_2, x_3\right) \tag{Ek1.9}$$

Kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı Lagrangian fonksiyonu olarak adlandırılır:

$$J = E_k - E_p \tag{Ek1.10}$$

(Ek1.8) eşitliği bir maddesel noktanın korunumlu hareketi için Hamilton prensibini temsil eder. Bu eşitlik**,** iki keyfi zaman olan t_1 ve t_2 zaman aralığındak, konservatif kuvvetlerin etkisi altındaki bir maddesel noktanın hareketinin öyle bir hareket olduğunu gösterir ki Lagrangian fonksiyonu üzerindeki çizgisel integral gerçek yol için bir ekstremumdur. Diğer bir deyişle, parçacık t_1 zamanındaki pozisyonundan t_2 zamanındaki pozisyonuna hareket ederken öyle bir yörünge izler ki mümkün olan yörüngeler içinde gerçek olanı için izleyen integral ekstremumdur (Minimum, maksimum veya dönüm noktası):

$$H \equiv \int_{t_1}^{t_2} J\ \mathrm{d}t \tag{Ek1.11}$$

Eğer $\vec{r}$ yolu q_k genelleştirilmiş koordinatları cinsinden yazılabilirse, Lagrange fonksiyonları q_k ler ve onların zaman türevleri cinsinden yazılabilir.

$$J = J\left(q_1\,,\, q_2\,,\, q_3\,,\, \dot{q}_1\,,\, \dot{q}_2\,,\, \dot{q}_3\right) \tag{Ek1.12}$$

Bu durumda H nın ekstremum olması koşulu

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} J\left(q_1\,,\, q_2\,,\, q_3\,,\, \dot{q}_1\,,\, \dot{q}_2\,,\, \dot{q}_3\right)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{\partial J}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_k}\right) \right] \delta q_k \;\mathrm{d}t \qquad \text{(Ek1.13)}$$

Olur. Tüm q_k ler lineer bağımsızsa (yani q_k ler arasında kısıtlılıklar(constraints) yoksa), $\delta\, q_k$ değişimleri tüm t ler için, t_1 ve t_2 de $\delta\, q_k = 0$ hariç, bağımsızdır. Bu yüzden, $\delta\, q_1$, $\delta\, q_2$ ve $\delta\, q_3$ katsayıları ayrı ayrı yok olur.

$$\frac{\partial J}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \qquad k = 1,2,3 \qquad \text{(Ek1.14)}$$

Bu eşitlikler hareketin Lagrange denklemleri olarak adlandırılır. Bu eşitlikler Euler eşitlikleri olarak da adlandırılır. Ayrıca bunlara Euler-Lagrange eşitlikleri de denmektedir. Kuvvetlerin bazıları konservatif olmadığında, (Ek1.6)'daki Hamilton prensibinin genel formu ile ilgilenilmelidir. Konservatif olan kuvvetlerin potansiyeli bu durumda da E_p ile, konservatif olmayan kuvvetlerin işi $\delta W_{nc} = \vec{F}_{nc} \cdot \delta\, \vec{r}$ ile gösterilirse, (Ek1.6) izleyen şekilde yazılabilir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(E_k - E_p\right)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}\;\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{(Ek1.15)}$$

Bu durumda ekstremum olacak bir H fonksiyoneli ortaya çıkmaz. Eğer konservatif olmayan kuvvetlerin virtüel işi genelleştirilmiş koordinatlar olan q_k cinsinden, Q_k ler genelleştirilmiş sönüm kuvvetleri olarak, izleyen şekilde ifade edilebilirse

$$\delta W_{nc} = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + Q_3\,\delta q_3 \qquad \text{(Ek1.16)}$$

Bu durumda (Ek1.15)

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{\partial J}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_k}\right) + Q_k \right] \delta q_k \;\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{(Ek1.17)}$$

olur ve korunumsuz durum için Euler-Lagrange eşitlikleri izleyen şekilde verilir:

$$\frac{\partial J}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_k}\right) + Q_k = 0 \qquad k = 1,2,3 \qquad \text{(Ek1.18)}$$

(Ek1.18) denklemleri, genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden ifade edilebilen sürekli sistemlere de mevcut formu ile uygulanabilir.

Ek2 Ardışık Yaklaşım Yöntemlerine Genel Bir Bakış**

Bilindiği gibi doğrusal olmayan denklemlerin çözümü ardışık yaklaşım işlemi (iterasyon) gerektirmektedir. Örneğin, doğrusal olmayan bir denklem sistemi, daha sonraki doğrusallaştırma işlemleri için uygun olacağından, doğrusal forma benzetilerek izleyen şekilde verilsin:

$$\left[K\left(\{X\}\right)\right]\{X\}=\{F\} \qquad \text{(Ek2.1)}$$

(Ek2.1) eşitliğinden görüldüğü gibi katsayılar matrisi $[K]$, bilinmeyenler vektörünün fonksiyonu şeklindedir. Bu formda yazılan ifade, eğer katsayılar matrisi içindeki bilinmeyenlere keyfi başlangıç değerleri atanırsa, doğrusal denklem takımına dönüşür. İlk adımda katsayılar matrisi içindeki bilinmeyenlere bir başlangıç keyfi değerinin atanmış olduğu düşünülerek bilinmeyen vektörü içindeki bilinmeyenler hesaplanır ve bunların başlangıçta keyfi olarak alınan değerlere ne derecede yakın olduğuna bakılır. Birinci adımda bunlar arasındaki fark doğal olarak büyük olacağından hesaplanan değerler katsayılar matrisinde bilinen olarak yerine konulup bu durum için bilinmeyenler vektörü elde edilir ve bir önceki adımda elde edilen değerlerle karşılaştırılır. Bu ardışık işlemlere katsayılar matrisinde yerine konulan değerlerle doğrusal denklem takımının çözümü sonucu elde edilen değerler yeteri kadar birbirlerine yakın olana kadar devam edilir. Bu işlemler izleyen şekilde de tarif edilebilir: $(s-1)$. ardışık yaklaşımdaki $\{X\}^{(s-1)}$ çözüm vektörünün bilindiği kabul edilsin ve s. ardışık yaklaşımdaki $\{X\}^{(s)}$ çözümü elde edilmek istensin. Bunun için iterasyonun başlangıcında, yani $s=1$ için, problemin yapısına uygun olarak seçilen tahmini çözüm vektörü $\{X\}^{0}$ ile işe başlanır. Diğer bir deyişle $(s-1)$. ardışık yaklaşımdaki bilinen çözüm vektörü $\{X\}^{(s-1)}$ kullanılarak katsayılar matrisi $[K(\{X\}^{(s-1)})]$ hesaplanır. Genellikle

---

** Ek2 Reddy (2004)'den alınmıştır.

$$\left[K\left(\{X\}^{(s-1)}\right)\right]\{X\}^{(s)} \neq \{F\} \tag{Ek2.2}$$

olmaktadır. Çünkü katsayılar matrisi tahmin edilen bir çözüm vektörü ile hesaplanmıştı. Bu sebeple $\{R\}$ ile gösterilen ve yaklaşık çözüm sebebiyle oluşan artıklar vektörü izleyen şekilde verilmektedir:

$$\{R\} = \left[K\left(\{X\}^{(s-1)}\right)\right]\{X\}^{(s)} - \{F\} \tag{Ek2.3}$$

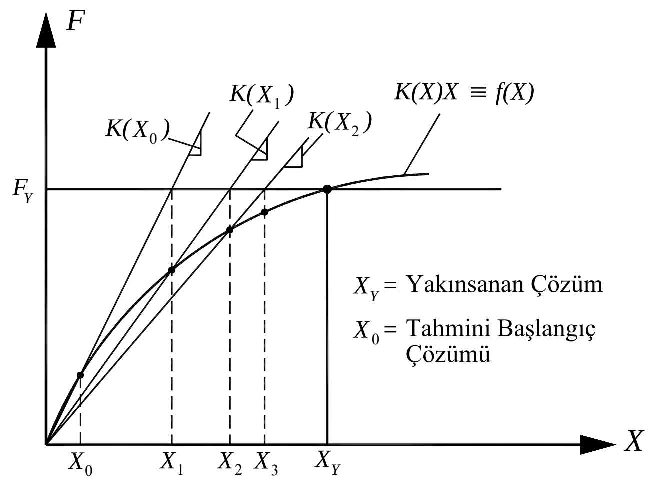
Ardışık yaklaşım yöntemlerinin temel felsefesi, artıklar vektörünü çok küçük bir ζ_{tol} ile tanımlanan kıyaslama parametresinden küçük kılacak çözümü elde etmektir. ζ_{tol} parametresi izleyen formlarda seçilebilir:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} R_i^2} \leq \zeta_{tol} \tag{Ek2.4}$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left|R_i^{(s)} - R_i^{(s-1)}\right|^2}{\sum_{i=1}^{N} \left|R_i^{(s)}\right|^2}} \leq \zeta_{tol} \tag{Ek2.5}$$

Ek2.1 Picard (Direkt iterasyon) Yöntemi

Picard yöntemi direkt iterasyon yöntemi olarak da bilinir. Bu yöntem zayıf doğrusal olmayan davranış gösteren sistemlerde başarılı sonuçlar vermektedir. Doğrusal olmayan davranışı kuvvetli olan sistemlerde ise yakınsama sorunu ortaya çıkabilmektedir. Şekil Ek2.1**'**de Picard yönteminin ana fikri gösterilmiştir.



Şekil Ek2.1 Picard (direkt iterasyon) yöntemi (Reddy, 2004'den uyarlanmıştır)

Picard yönteminde, çözülmek istenen (Ek2.1) eşitliği ile verilmiş olan doğrusal olmayan denklem sistemi $s.$ ardışık yaklaşımda izleyen şekilde yazılabilir:

$$\left[K\left(\{X\}^{(s-1)}\right)\right]\{X\}^{(s)}=\{F\} \qquad \text{(Ek2.6)}$$

Burada katsayılar matrisi $[K]$, $(s-1)$. iterasyondaki bilinen $\{X\}^{(s-1)}$ çözümü yardımıyla sayısal olarak hesaplandığında (Ek2.6) eşitliği doğrusal denklem sistemine dönüşür. Bu eşitliğin çözümü için ilk yaklaşımda başlangıç çözümü $\{X\}^{(0)}$ için bir tahmin yapılması gereklidir. Genellikle ilk adımda $\{X\}^{(0)}=\{0\}$ olarak seçilir, yani doğrusal çözüm başlangıç çözümü olarak girilmiş olur. Bu durumda $s=1$ yaklaşımındaki çözüm izleyen şekilde elde edilir:

$$\{X\}^{(1)}=\left[K\left(\{X\}^{(0)}\right)\right]^{-1}.\{F\} \qquad \text{(Ek2.7)}$$

Genellikle birinci yaklaşımda elde edilen (Ek2.7)'deki çözümle tahmini çözüm olan $\{X\}^{(0)}$

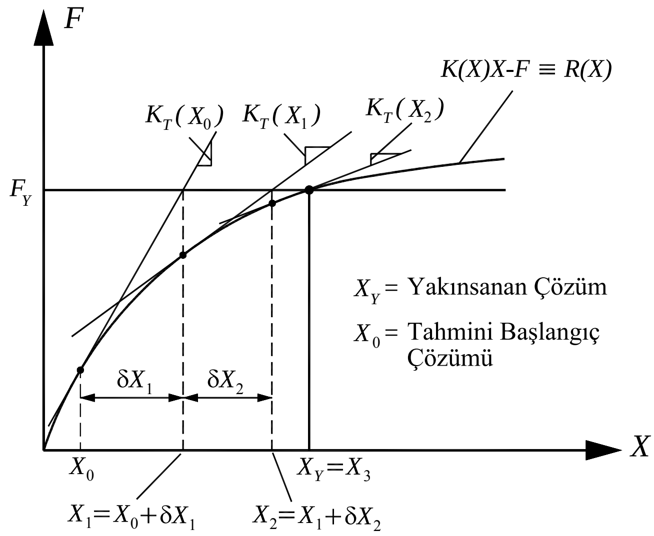
arasındaki fark oldukça büyüktür. Bu nedenle ardışık yaklaşımlara gereksinim duyulur. İkinci yaklaşımdaki ($s = 2$ için) çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\{X\}^{(2)} = \left[K\left(\{X\}^{(1)}\right)\right]^{-1}.\{F\} \tag{Ek2.8}$$

Ardışık yaklaşım işlemlerine, iki ardışık çözüm arasındaki fark daha önceden seçilmiş olan bir kıyaslama parametresinden küçük olana kadar devam edilerek, yeteri yaklaşıklıkta bir çözüm bulunmuş olur.

Ek2.2 Newton-Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi ardışık yaklaşım yöntemlerinden en çok kullanılanı olup kuvvetli doğrusal olmayan davranış gösteren denklem sistemlerinin çözümünde iyi sonuçlar vermektedir. Newton-Raphson yönteminin temel fikri Şekil Ek2.2'de gösterilmiştir.



Şekil Ek2.2 Newton-Raphson yöntemi (Reddy, 2004'den uyarlanmıştır)

(Ek2.1) eşitliği izleyen şekilde yazılabilir:

$$\{R\} = \left[K\left(\{X\}\right)\right]\{X\} - \{F\} = \{0\} \tag{Ek2.9}$$

$\{R\}$ vektörü, $(s-1)$. ardışık yaklaşımda bilinen $\{X\}^{(s-1)}$ çözümü civarında Taylor serisine açılırsa

$$\{R(\{X\})\} = \{R(\{X\}^{(s-1)})\} + \left(\frac{\partial\{R(\{X\})\}}{\partial\{X\}}\right)^{(s-1)} \cdot \{\delta X\} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\{R(\{X\})\}}{\partial\{X\}^2}\right)^{(s-1)} \cdot \{\delta X\}^2 ... = \{0\} \tag{Ek2.10}$$

(Ek2.10) eşitliği 2. mertebeden büyüklüklerin ihmal edilmesiyle izleyen şekli alır:

$$\left(\frac{\partial\{R(\{X\})\}}{\partial\{X\}}\right)^{(s-1)} \cdot \{\delta X\} = -\{R(\{X\}^{(s-1)})\} \tag{Ek2.11}$$

Artımsal çözüm vektörü olan $\{\delta X\}$ aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$\{\delta X\} = -[K_T(\{X\}^{(s-1)})]^{-1} \cdot \{R(\{X\}^{(s-1)})\} \tag{Ek2.12}$$

$$=[K_T(\{X\}^{(s-1)})]^{-1}\cdot\left(\{F\}-[K(\{X\}^{(s-1)})]\cdot\{X\}^{(s-1)}\right) \quad \text{(Ek2.13)}$$

Yukarıdaki eşitliklerdeki $[K_T]$ teğet (tanjant) rijitlik matrisi olarak adlandırılır ve izleyen şekilde ifade edilir:

$$[K_T(\{X\}^{(s-1)})]\equiv\left(\frac{\partial\{R(\{X\})\}}{\partial\{X\}}\right)^{(s-1)} \quad \text{(Ek2.14)}$$

Böylece, s. ardışık yaklaşımdaki çözüm ise izleyen şekilde elde edilir:

$$\{X\}^{(s)}=\{X\}^{(s-1)}+\{\delta X\} \quad \text{(Ek2.15)}$$

Daha önceden yapıldığı gibi burada da ardışık yaklaşım işlemlerine iki ardışık çözüm arasındaki fark daha önceden seçilmiş olan bir kıyaslama parametresinden küçük olana kadar devam edilir.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanmış Makaleler

Şimşek, M. ve Kocatürk, T., (2007b), "Dynamic Analysis of an Eccentrically Prestressed Damped Beam Under a Moving Harmonic Force Using Higher Order Shear Deformation Theory", Journal of Structural Engineering-ASCE, 133(12): 1733-1741.

Şimşek, M. ve Kocatürk, T., (2007a), "Free Vibration Analysis of Beams by Using a Third Order Shear Deformation Theory", Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences, 32(3): 167-179.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2006b), "Dynamic Analysis of Eccentrically Prestressed Viscoelastic Timoshenko Beams Under a Moving Harmonic Load", Computers and Structures, 84(31-32): 2113-2127.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2006a), "Vibration of Viscoelastic Beams Subjected to an Eccentric Compressive Force and a Concentrated Moving Harmonic Force", Journal of Sound and Vibration, 291(1-2): 302-322.

Ulusal Hakemli Dergilerde Yayınlanmış Makaleler

Şimşek, M., (2005), "Free Vibration Analysis of Beams Subjected to Axial Load Under Various Boundary Conditions", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2005/3: 1-10.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2005b), "Free Vibration Analysis of Elastically Supported Timoshenko Beams", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2005/3: 79-93.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2005a), "Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams Under Various Boundary Conditions", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2005/1: 30-44.

Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2004), "Vibration of Viscoelastic Beams Subjected to Moving Harmonic Load", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 2004/3: 116-128.

Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulmuş Bildiriler

Şimşek, M. ve Kocatürk, T., (2007c), "Dışmerkez Basınç Kuvveti ve Hareketli Harmonik Yük Etkisindeki Bir Kirişin Doğrusal Olmayan Dinamik Analizi", XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 3-7 Eylül 2007, Isparta, (baskıda).

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	23.04.1976	
Doğum yeri	Bursa	
Lise	1990-1993	Gaziantep Fen Lisesi
Lisans	1993-1998	İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1998-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı
Doktora	2002-2007	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı kurum(lar)

	2000-2001	Yapısal Analiz İnş. Ltd Şti.
	2001-2003	Işıkkale İnş. Ltd Şti.
	2003-	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi