

67033

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGA DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ



İ . Murat TURHAN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Yaşar ÖZDEMİR

İSTANBUL , 1995

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

ÖZET	i
----------------	---

SUMMARY	ii
-------------------	----

BÖLÜM I

1.1 FİZİKTE DALGA DENKLEMLERİNİN ÇIKARILIŞI	2
1.1.1 Bir Teldeki Enlemesine Titreşimler	2
1.1.2 Bir Çubuktaki Boylamasına Titreşimler	2
1.1.3 Boylamasına Ses dalgaları	3
1.1.4 Kablolardaki Elektrik Sinyalleri	4
1.1.5 Bir Zarın Enine Titreşimi	4
1.1.6 Uzaydaki Ses Dalgaları	4
1.1.7 Elektromanyetik Dalgalar	5
1.1.8 Katılarda Elastik Dalgaları	6

BÖLÜM II

2.1 TEK BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİ .	7
2.2 TEK BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN RIEMANN-VOLTERRA ÇÖZÜMÜ	15
2.3 TİTREŞEN ZARLAR VE VARYASYONLAR HESABININ UYGULANMASI	19
2.3.1 İntegral Dönüşüm Yöntemi	20
2.3.2 Değişkenlere Ayırma Yöntemi	21
2.4 ÜÇ BOYUTLU PROBLEMLER	27

BÖLÜM III

3.1 DALGA DENKLEMİNİN GENEL ÇÖZÜMLERİ	35
3.1.1 Birinci Helmholtz Teoremi	36
3.1.2 İkinci Helmholtz Teoremi	37
3.1.3 Weber Teoremi	38
3.1.4 Birinci Kirchhoff Teoremi	39
3.1.5 İkinci Kirchhoff Teoremi	39
3.2 DALGA DENKLEMİ İÇİN GREEN FONKSİYONU	41
3.2.1 $z \geq 0$ Yarı Uzayı İçin Green Fonksiyonu	42
3.3 HOMOJEN OLMAYAN DALGA DENKLEMİ	45
3.4 RIESZ İNTEGRALLERİ	48

SONUÇ

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

T E Ş E K K Ü R

Çalışmalarım sırasında bana en büyük desteği veren ,yol gösteren,teşvik eden ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof.Yaşar ÖZDEMİR 'e teşekkür ederim.

Ayrıca tüm çalışmalarımnda desteklerini esirgemeyen aileme ve bana yardımcı olan Arş.Gör. Çiğdem GENÇ ve Arş.Gör. Ayşe KARA HACİBEKİROĞLU ' na teşekkür ederim.

İ.Murat TURHAN

İstanbul,1995

Ö Z E T

Dalga Denklemi ve Çözümleri adı altında yaptığım bu çalışma üç bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölümde dalga denkleminin fizikteki teorisini kullanarak elde edilen bazı durumları inceledik.

İkinci bölümde tek boyutlu dalga denkleminin klasik ve Riemann -Volterra çözümlerinin bir telin hareketini tanımlamak için nasıl kullanılabileceğini gösterdik. Aynı zamanda integral dönüşüm ve değişkenlerine ayırma yöntemi ile dalga denklemlerinin çözümünü yaptık ve üç boyutlu problemlerele ilgilendik.

Üçüncü bölümde ise Helmholtz, Weber ve Kirchhof teoremini ve Green fonksiyonunu kullanarak bir dalga denkleminin genel çözümlerini nasıl bulabileceğimizi inceledik. Rietsz integralleri hakkında bilgi verdik.

S U M M A R Y

This thesis which is under named *Wave equation and its solution* , contains three chapters.

In the first chapter, we study the cases which is obtained by using the theory of wave equation in physics.

In the second chapter, we show that how to use the clasical and Riemann-Volterra's solutions of one-dimensional wave equation to define the motion of the string. Also we solve the wave equation by the methods of integral transforms and separation of variables, and interest about three-dimensional problems.

In the third chapter, we study that how to find the general solutions of the wave equation by using Helmholtz, Weber and Kirchhoff's theorems and Green's function, and we give information about non-homogeneous wave equation and Riesz's integrals.

GİRİŞ

Esnek bir ortamı oluşturan parçacıklar sıkıca eşleşmiş sistemlerdir. Bu parçacıklardan biri, bir enerji olarak titreşmeye başladığında bu enerjiyi, parçacıktan parçacığa aktararak ve ortam üzerinde bir şekil değişikliği oluşturarak yayar. Durgun bir su yüzeyine bir cisim düştüğü yerde oluşan dalgalanma, aynı merkezli halkalar halinde merkezden çevreye doğru yayılır.

Hafifçe gerilmiş bir ip üzerinde bir atma meydana getirirsek bu atma ip boyunca, her parçanın aynı hareketi tekrarlaması sureti ile ip boyunca yayılır.

Uzunca bir sarmal yayın bir kaç halkası sıkıştırılıp bırakılırsa bu sıkışıklık yay boyunca, her halkanın aynı titreşimi tekrarlaması suretiyle sıkışıklık yay boyunca yayılır. Çoğu hallerde parçacıklar gözle görülemeyecek kadar küçük, hareketler takip edilemeyecek kadar çabuk olmaktadır. Sözgelimi ses dalgalarının havada yayılması sırasında gaz moleküllerini görebilmek, titreşimleri izleyebilmek mümkün değilse de yayılma sırasında oluşan özelliklere duyar araçlar yardımı ile olayı kanıtlamak mümkündür. Örneğin yanan mum alevi üzerine ses dalgaları gönderilerek ve alevin görüntüsünü bir döner ayna ile perde üzerine düşürerek alevin titreşimleri yardımı ile havanın titreşmesi gözlenebilir.

Yayılma sırasında her bir partikülün yaptığı titreşim hareketinin doğrultusu yayılma doğrultusuna dik ise, ip üzerinde yayılan bir atmada olduğu gibi, bu tür dalgalara *enine dalgalar*, partiküllerin yaptığı titreşim hareketinin doğrultusu yayılma doğrultusuna paralel ise bu tür dalgalara *boyuna dalgalar* denir.

Hiperbolik tipte bir denklem olan $\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ dalga denklemini gözönüne alacağız. $\square^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

operatörünü göstermek üzere yukarıdaki denklem; $\square^2\psi = 0$ şeklinde de yazabiliriz. Burada eğer dalga denkleminin bir çözümünün $\psi = \Psi(x, y, z) \cdot e^{\pm i k c t}$ olduğunu kabul edersek Ψ fonksiyonu, *Helmholtz denklemi* yada *Dalga denkleminin uzay şekli* olarak adlandırılan

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0$$

denklemini sağlamalıdır. Çalışmalarımızda yukarıda söylediğimiz dalgaların yapılarından kaynaklanan farklılıklar nedeniyle, denklemlerinin çıkarılışının ve çözümlerinin nasıl olduğunu inceleyeceğiz.



BÖLÜM I

1.1. FİZİKTE DALGA DENKLEMİNİN ÇIKARILIŞI

Burada, fizikte, dalga denkleminin teorisini kullanarak elde edilen bazı durumları inceleyeceğiz.

1.1.1. Bir Teldeki Enlemesine Titreşimler

ρ yoğunluğundaki doğrusal bir tel T kadar düzgün gerilirse ve denge halinde x eksenini ile çakışır, tel denge durumundan çıkarıldığında, $y(x,t)$ enine sapması $c^2 = \frac{T}{\rho}$ olmak üzere tek boyutlu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

denklemini sağlar. Uzunluğu sabit bir telin herhangi bir $x = a$ noktasında, bütün t değerleri için $y(a,t)=0$ dır.

1.1.2. Bir Çubuktaki Boylamasına Titreşimler

Ekseni ox eksenini ile çakışan çapraz kesitli esnek bir maddeden oluşan düzgün bir çubuk gerildiğinde çubuğun tipik çapraz kesitinin her bir noktası aynı $\xi(x,t)$ sapmasına sahip olur. O taktirde, E Young modülü ve ρ maddesel çubuğun yoğunluğu ise

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.2)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

yazılır.

Çubuğun herhangi noktasındaki gerilme

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.4)$$

dir. Örneğin, $0 \leq x \leq a$ çubuğunun $x = 0$ uç noktasındaki hızının $v(t)$ olduğunu ve diğer $x = a$ uç noktasında da herhangi bir gerilme bulunmadığını varsayalım.

Ayrıca $t=0$ durumunda çubuğun hareketsiz olduğunu kabul edelim. Böylece, çubuğun parçalarındaki boylamasına sapma (1.3) kısmi türevli diferansiyel denklemi ile tanımlanır ve sınır ve başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial \xi}{\partial t} = v(t) \quad , \quad x = 0 \\ (ii) \quad & \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = a \\ (iii) \quad & \xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq a \quad , \quad t = 0 \end{aligned}$$

olur.

1.1.3. Boylamasına Ses Dalgaları

Sesin düzlem dalgaları, x apsisli kesiti için çapraz kesiti $A(x)$ olan bir boruda yayılıyorlarsa kesitin her bir noktası aynı $\xi(x, t)$ sapmasına sahiptir. O zaman ξ , tek boyutlu (1.3) dalga denkleminde indirgenen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A\xi) \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar. (1.5) denkleminde

$$c^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} \right)_o \quad (1.6)$$

dır. Burada "o" alt indisi $\frac{dp}{d\rho}$ nun denge durumundaki değerini aldığımızı gösterir. p_0 , durgun haldeki gazın basınçtaki değişim değeri ve ρ_o 'da aynı gazın yoğunluğu olmak üzere basınçtaki değişimi

$$p - p_0 = -c^2 \cdot \rho_o \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.7)$$

formülü ile verebiliriz. Örneğin; eğer $x = 0$, $x = a$ uç noktalarının her ikisinde de açık olan bir tüpten bir ses dalgası geçirdiğimizde tüpün içindeki gazın hareketini gözönüne alırsak, (1.5) denkleminin $x=0$ ve $x=a$ da $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ olan çözümlerini elde ederiz.

1.1.4. Kablolardaki Elektrik Sinyalleri

R birim direnci ve G sızıntı parametresi aynı anda sıfır iseler, $V(x, t)$ geriliminin ve $z(x, t)$ akımının birlikte tek boyutlu dalga denklemini sağladıklarını

söyleriz. Burada ayrıca L indüktans ve C birim sığa(kapasite) olmak üzere c dalga hızı

$$c^2 = \frac{1}{LC} \quad (1.8)$$

eşitliği ile tanımlanır.

1.1.5. Bir Zarın Enine Titreşimi

Düzgün bir σ yoğunluğundaki ince ve esnek bir zar T kadar düzgün gerilirse ve eğer denge durumunda zar xy düzlemi ile çakışırsa $z(x,y,t)$, zarın (x,y) noktasının t anındaki enine sapması olmak üzere zarın enine titreşimleri

$$\nabla_1^2 z = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

dalga denklemi ile belirtilir. Dalga hızı c

$$c^2 = \frac{T}{\sigma} \quad (1.10)$$

denklemi ile tanımlanır. Eğer zar kendi sınırı Γ da sabitleştiriliyorsa, t nin tüm değerleri için Γ üzerinde $z=0$ elde etmeliyiz.

1.1.6 Uzaydaki Ses Dalgaları

t anında (x,y,z) noktasında gazın hızının $V=(u,v,w)$ olduğunu varsayalım. p ve ρ sırasıyla basınç ve yoğunluğu, p_0 ve ρ_0 ise yine sırasıyla basınç ve yoğunluğun denge halindeki değerlerini göstermek üzere

$$\rho = \rho_0(1 + s) \quad , \quad P = P_0 + c^2 \cdot \rho_0 \cdot s \quad (1.11)$$

yazılabilir. Burada s *gazın yoğunlaşması (buğu, sıvı hale gelmesi)* olarak adlandırılır. (1.11) de yer alan c^2 nin değerini yukarıda (1.6) eşitliği ile vermiştik. Bu ifadeleri

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere

$$\rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = -gradp \quad (1.12)$$

hareket denkleminde yerine yazarsak ve gazın küçük salınımlarını kısıtlarsak

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -c^2 \cdot \rho_0 \cdot \text{grad} s \quad (1.13)$$

denklemini buluruz. Aynı şekilde

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div} \mathbf{v} = 0$$

denklemini bu yaklaşımla

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_0 \cdot \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.14)$$

denklemine denktir. Eğer gazın hareketi irrotasyonel (yani devinimsiz) ise

$$\mathbf{v} = \text{grad} \phi \quad (1.15)$$

eşitliği ile tanımlı bir ϕ skaler fonksiyonu bulunur. (1.15) ifadesi (1.13) denkleminde uygulanırsa küçük titreşimler (salınımlar) için

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - c^2 s \right) = 0 \quad (1.16)$$

bulunur. Benzer şekilde (1.14) denklemini

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla^2 \phi \quad (1.17)$$

denkleminde denktir.

(1.16) ve (1.17) denklemleri arasında s yi yok edersek ϕ fonksiyonunun

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

dalga denklemini sağladığını görürüz.

1.1.7. Elektromanyetik Dalgalar

Eğer

$$\mathbf{H} = \text{curl} \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi$$

ise

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \text{div} \mathbf{H} = 0$$

(1.19)

$$\text{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad , \quad \text{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Maxwell denklemleri , $\mathbf{A}$ ve ϕ 'nin

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{i}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 4\pi \rho$$

denklemlerini sağlamaları şartıyla sağlanır. Bu yüzden elektrik yüklerinin veya akımlarının yokluğunda, ϕ ve $\mathbf{A}$ 'nın bileşenleri dalga denklemini sağlar.

1.1.8 Katılarda Elastik Dalgalar

(u, v, w) , (x, y, z) noktasında $\mathbf{v}$ sapma vektörünün bileşenlerini göstermek üzere basınç tensörünün bileşenleri, λ ve μ Lamé sabitleri olmak üzere

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$(\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

denklemleri ile verilir. Hareket denklemi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dir. $\mathbf{F}=(X,Y,Z)$, (x,y,z) noktasındaki kuvvettir. Eğer

$$\mathbf{F} = \text{grad} \Phi + \text{curl} \psi$$

yazarsak, c_1 ve c_2 dalga hızları

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad , \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

şeklinde verilmek üzere ϕ ve ψ 'nin

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_1^2 \nabla^2 \phi = \Phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_2^2 \nabla^2 \psi = \psi$$

denklemlerini sağlaması şartıyla sapma vektörünün

$$\mathbf{v} = \text{grad}\phi + \text{curl}\psi$$

şeklinde alınabileceği aşıkardır. Dolayısıyla $\mathbf{F}$ kuvveti uygulanmadığında ϕ ve ψ nin bileşenleri bir dalga denklemini sağlarlar.



BÖLÜM II

2.1. TEK BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

dalga denkleminin bir genel çözümünün, f ve g fonksiyonları keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$y = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (2.2)$$

olduğu bilinmektedir. Burada, bu çözümün bir telin hareketini tanımlamak için nasıl kullanılabileceğini göstereceğiz.

Önce, telin sonsuz uzunlukta olduğunu ve $t=0$ anında telin sapma ve hızının sırasıyla

$$y = \eta(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v(x) \quad (t = 0 \text{ da}) \quad (2.3)$$

olduğunu kabul edelim. Bizim problemimiz (2.3) başlangıç şartlarına bağlı (2.1) denklemini çözmektir. (2.3) şartlarını (2.2) 'de yerine yazarsak

$$\eta(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad v(x) = c \cdot f'(x) - c \cdot g'(x) \quad (2.4)$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu bağıntılardan ikincisini integre edersek b keyfi seçilmek suretiyle

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_b^x v(\xi) d\xi$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemden ve (2.4) bağıntılarının birincisinden

$$f(x) = \frac{1}{2} \eta(x) + \frac{1}{2c} \int_b^x v(\xi) d\xi$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \eta(x) - \frac{1}{2c} \int_b^x v(\xi) d\xi$$

formüllerini elde ederiz. Bu ifadeleri (2.2) denkleminde yerine yazarsak

$$y = \frac{1}{2} \left[\eta(x + ct) + \eta(x - ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

çözümünü elde ederiz. (2.5) çözümü tek boyutlu dalga denkleminin **D'Alembert çözümü** olarak adlandırılır. Tel durgun(hareketsiz) halden çıkarılırsa ($v \equiv 0$) (2.5) denklemi

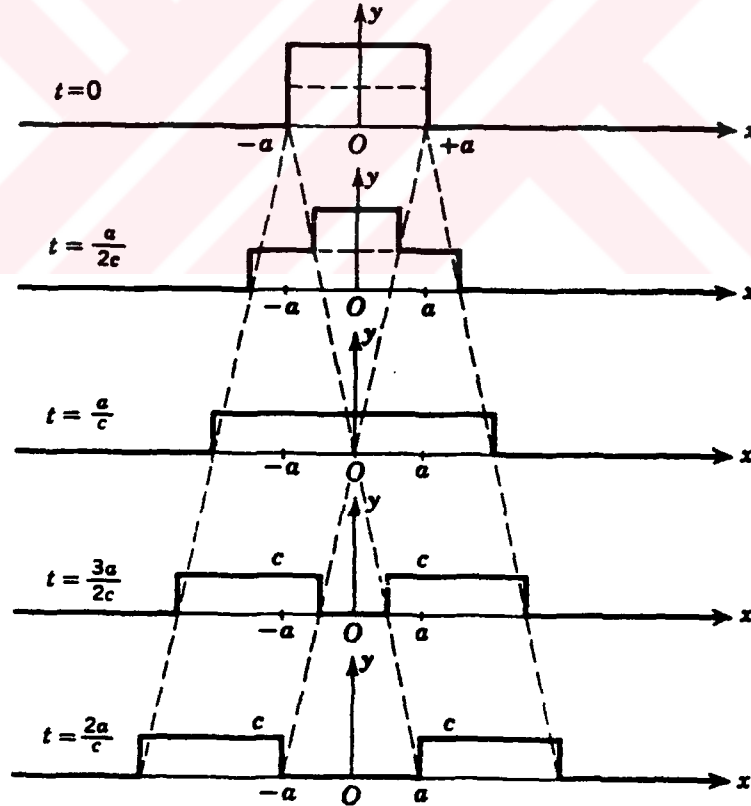
$$y = \frac{1}{2} \left\{ \eta(x + ct) + \eta(x - ct) \right\} \quad (2.6)$$

olur. Bu da gösterir ki, telin sonraki sapması, biri sağa ve diğeri sola c hızı ile hareket eden $y = \frac{1}{2}\eta(x)$ şeklinin iki titreşimi ile oluşturulur. Böyle bir hareket (şekil 1) ile gösterilir ve burada başlangıç sapması

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -a \\ 1 & , \quad |x| < a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases}$$

olur.

Hareket bu şekildeki gibi t nin farklı değerlerine karşı gelen bir grafik serisi ile gösterilebilir. Hareketi grafiksel göstermenin diğeri bir yolu



Şekil 1.

(şekil 1) de gösterildiği gibi bu profillerden bir yüzey çizmektir. Şimdi, $x=0$ noktasında sabit olan yarı sonsuz bir $x \geq 0$ telinin hareketini gözönüne alalım. (2.3) şartlarının yerine

$$y = \eta(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v(x) \quad x \geq 0 \quad (t = 0 \text{ da}) \quad (2.7.a)$$

$$y = 0 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad t \geq 0 \quad (x = 0 \text{ da}) \quad (2.7.b)$$

şartlarını kabul edelim.

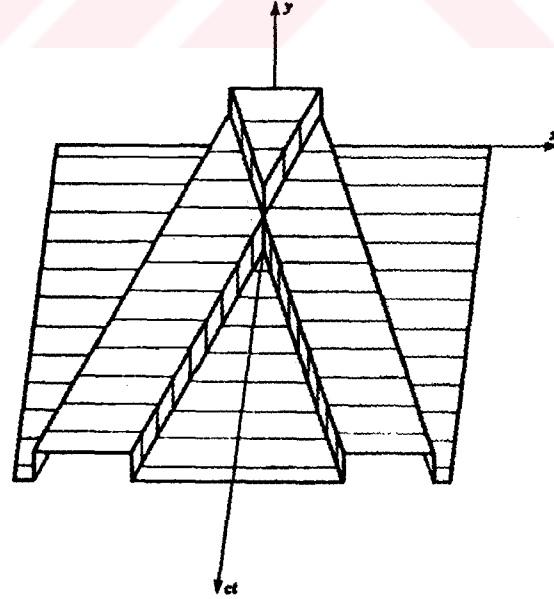
$t > \frac{x}{c}$ olduğunda $\eta(x - ct)$ bir anlam ifade etmediğinden (2.5) çözümü uygulanabilir değildir. Bununla beraber

$$Y(x) = \begin{cases} \eta(x) & , \quad x \geq 0 \\ -\eta(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ve

$$V(x) = \begin{cases} v(x) & , \quad x \geq 0 \\ -v(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olmak üzere



Şekil 2.

$$y = Y(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = V(x) \quad (t = 0 \text{ da})$$

başlangıç şartlarına bağlı olan sonsuz bir teli gözönüne alalım. O zaman telin sapması

$$y = \frac{1}{2} \left[Y(x + ct) + Y(x - ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} V(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

denklemini ile verilir.

Böylece $x=0$ için

$$y = \frac{1}{2} \left[Y(ct) + Y(-ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} V(\xi) d\xi \quad (2.9)$$

ve

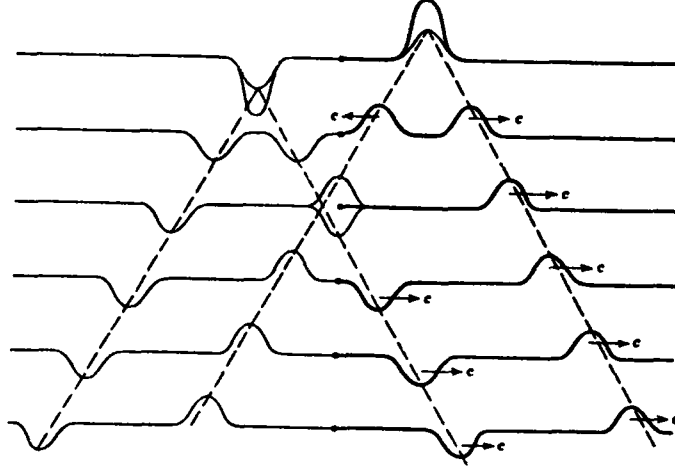
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}c \left[Y'(ct) - Y'(-ct) \right] + \frac{1}{2} \left[V(ct) + V(-ct) \right]$$

elde edilir.

Bu, Y ve V nin tanımından aşıkardır ki bu iki fonksiyon da t nin tüm değerleri için aynı şekilde sıfırdırlar ve bundan dolayı (2.9) fonksiyonu (2.7.b) şartını sağladığı gibi (2.1) diferansiyel denklemini de sağlar. Aynı zamanda (2.7.a) şartınıda sağladığı kolaylıkla ispatlanır. Özellikle teli hareket ettirdiğimizde v ve bundan dolayı V sıfır olur. Bizde uygun çözümü

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} [\eta(x + ct) + \eta(x - ct)] & , \quad x \geq ct \\ \frac{1}{2} [\eta(x + ct) - \eta(ct - x)] & , \quad x \leq ct \end{cases}$$

olarak buluruz. Böyle bir çözümün grafiksel gösterimi (şekil 3) de gösterilmiştir. Bu, doğrudan doğruya çözümün analitik formundan elde edilebilir yada daha kolay olarak bir $Y(x)$ başlangıç sapmasına bağlı olan sonsuz uzunluklu bir tel için bulunan grafiksel çözümden elde edilebilir.



Şekil 3.

Benzer bir yol , $0 \leq x \leq l$ aralığı gözönüne alınmak suretiyle l uzunluğunda sonlu bir tel için de uygulanabilir. Başlangıç şartlarını

$$y = \eta(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (t = 0 \text{ da})$$

$$y = 0 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad t \geq 0 \quad (x = 0 \text{ ve } x = l \text{ de})$$

olarak aldığımızda üstteki metoda benzer bir yöntem ile bu şartları sağlayan (2.1) dalga denkleminin çözümünün (2.8) ifadesi olduğu görülür. Burada $Y(x)$ fonksiyonu

$$Y(x) = \begin{cases} \eta(x) & , \quad 0 \leq x \leq l \\ -\eta(-x) & , \quad -l \leq x \leq 0 \end{cases}$$

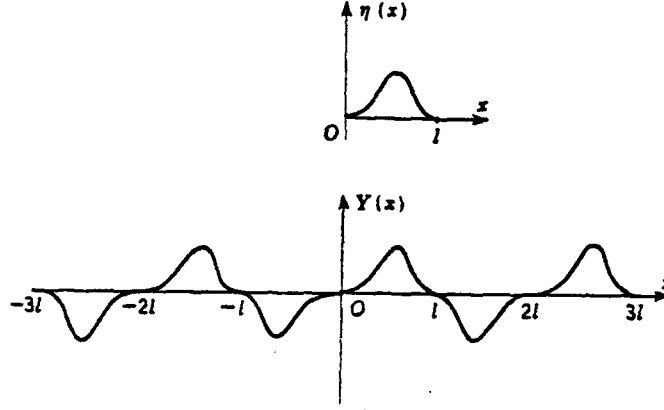
$$Y(x + 2rl) = Y(x) \quad , \quad -l \leq x \leq l \quad \text{ve} \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots$$

bağıntıları ile tanımlanır. Başka bir deyişle $Y(x)$, periyodu $2l$ olan periyodik tek fonksiyondur. $\eta(x)$ ve $Y(x)$ arasındaki bağıntı şekil 4 'de grafiksel olarak gösterilmiştir. $V(x)$ de tamamen benzer bir şekilde $v(x)$ terimleriyle tanımlanır.

Bir periyodik tek fonksiyonun

$$Y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (2.10)$$

formunda bir fourier sinüs açılımına sahip olduğu Fourier Serileri Teorisinden söylenebilir.



Şekil 4.

Burada η_m katsayıları

$$\eta_m = \frac{2}{l} \int_0^l \eta(\xi) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{l}\right) d\xi \quad (2.11)$$

formülü ile verilir. Benzer olarak

$$V(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi\xi}{l}\right) \quad (2.12)$$

$$v_m = \frac{2}{l} \int_0^l v(\xi) \cdot \sin\left(\frac{m\pi\xi}{l}\right) d\xi \quad (2.13)$$

yazabiliriz. Bu sonuçları yerlerine koyarak elde edeceğimiz

$$\frac{1}{2} \left[Y(x+ct) + Y(x-ct) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi ct}{l}\right)$$

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} V(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_m}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right)$$

ifadelerini (2.8) çözümünde yerine koyarsak mevcut problemimizin çözümünü

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi ct}{l}\right) + \frac{1}{\pi c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_m}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right) \quad (2.14)$$

olarak buluruz. Burada η_m ve v_m sırasıyla (2.11) ve (2.13) denklemleriyle tanımlanmışlardır.

Örnek 1.

İki nokta ile üç eşit parçaya ayrılmış bir teli, bu noktalardan ters yönlerde bir ε uzaklık yaratacak şekilde çekelim ve sonra serbest bırakalım. Herhangi bir anda telin sapmasına ait ifadeyi bulun ve telin orta noktasının daima hareketsiz kaldığını gösteriniz.

Çözüm.1

Bu durumda $l = 3a$ ve

$$\eta = \begin{cases} \frac{\varepsilon x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \varepsilon \frac{(3a-2x)}{a} & a \leq x \leq 2a \\ \varepsilon \frac{(x-3a)}{a} & 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$$

ve $v(x) \equiv 0$ alabiliriz. Bu halde Fourier katsayıları

$$\eta_m = \frac{2\varepsilon}{3a^2} \left[\int_0^a x \sin \frac{m\pi x}{3a} dx + \int_a^{2a} (3a-2x) \sin \frac{m\pi x}{3a} dx + \int_{2a}^{3a} (x-3a) \sin \frac{m\pi x}{3a} dx \right]$$

$$\eta_m = \frac{18\varepsilon}{n^2 m^2} \left[1 + (-1)^m \right] \cdot \sin\left(\frac{1}{3}m\pi\right)$$

ve

$$v_m = 0$$

olur. Böylece sapma

$$y = \frac{18\varepsilon}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^m}{m^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{3} \cdot \sin \frac{m\pi x}{3a} \cdot \cos \frac{m\pi ct}{3a}$$

olur ki bu da

$$y = \frac{9\varepsilon}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sin \frac{2n\pi}{3} \cdot \sin \frac{2n\pi x}{3a} \cdot \cos \frac{2n\pi ct}{3a}$$

ya denkdir. Bu açılımda $x = \frac{3a}{2}$ koyarak telin orta noktasındaki sapmayı elde ederiz. Açılımda bulunan $\sin(\frac{2n\pi x}{3a})$ ifadesi $\sin(n\pi)$ ye eşit olur ve bu, n nin tüm değerleri için sıfırdır. O zaman telin orta noktasındaki sapmayı sıfır olarak buluruz.

2.2. TEK BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN RIEMANN - VOLTERRA ÇÖZÜMÜ

Bir önceki kısımda tek boyutlu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad y = ct \quad (2.15)$$

dalga denklemi için mevcut olan halin oldukça farklı olduğunu, yani ψ ve $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ nin $y=0$ doğrusu boyunca bağımsız olarak verilebildiğini görmüştük. Eğer bir C şeriti boyunca (x, y, z, p, q) nun değerleri veriliyorsa o takdirde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) \quad (2.16)$$

denkleminin, xy düzlemi üzerinde C nin izdüşümü olan Γ eğrisi boyunca verilen z, p, q , değerleri üzerinde alınan bir integrale sahip olduğunu ve basit değişken dönüşümünün (2.15) denklemini (2.16) haline indirgediğini hiperbolik tipteki lineer denklemlerin teorisinden söyleyebiliriz. Bu kısımda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

$$\psi = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = g(x, y) \quad (C \text{ üzerinde}) \quad (2.18)$$

Cauchy probleminin çözümünü belirlemek için Riemann - Volterra yöntemini kullanacağız. Burada Γ , denklemi $u(x, y) = 0$ olan bir eğri gösterir.

Koordinatları (ξ, η) olan bir P noktasında, ψ dalga fonksiyonunun $\psi(\xi, \eta)$ değerini bulmak istediğimizi farzedelim. O zaman, P noktası vasıtasıyla (2.17) denkleminin karakteristiklerinin

$$x + y = \xi + \eta \quad (2.19)$$

ve

$$x - y = \xi - \eta \quad (2.20)$$

denklemlerine sahip oldukları rahatlıkla gösterilir ve bu doğruların ikincisinin C eğrisi ile A noktasında kesiştiğini ve birincisinin C ile B noktasında kesiştiğini farzedebiliriz (Şekil 5).

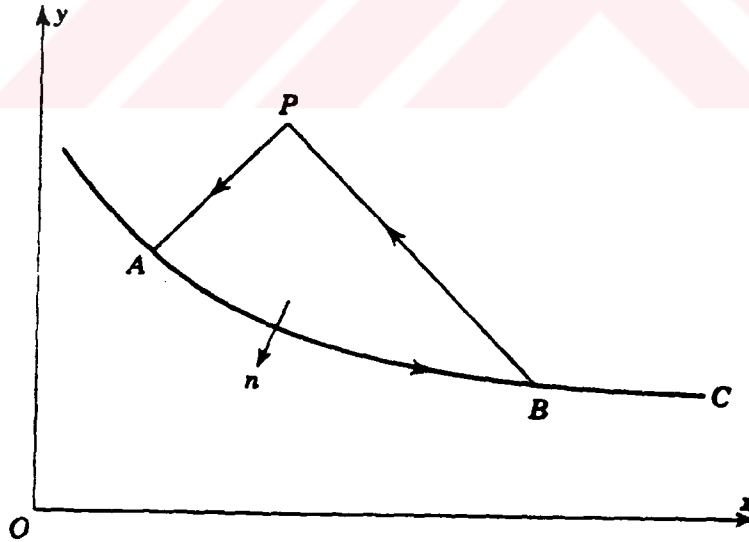
Eğer L 'yi

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.21)$$

olarak alırsak, bu operatör özdeşlenik olduğu için, Green teoreminin genel şekli

$$\int_{\Sigma} \int (w.L\psi - \psi.Lw) dx dy = \int_{\Gamma} [U.\cos(n, x) + V.\cos(n, y)] ds \quad (2.22)$$

yazılabilir.



Şekil 5.

Burada U ve V ,

$$U = w \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.23)$$

$$V = -w \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.24)$$

dir.

C , kapalı ABPA yoludur ve Σ da C ile kapatılan (sınırlanan) bölgedir. w Green fonksiyonu

$$\begin{aligned} (i) \quad Lw &= 0 \\ (ii) \quad \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 \quad , \quad AP \text{ ve } BP \text{ de} \\ (iii) \quad w &= 1 \quad , \quad P \text{ de} \end{aligned}$$

şartlarını sağlamalıdır. $w=1$ alalım. Ayrıca $L\psi = 0$ alarak (2.22) denklemini

$$\left(\int_{PA} + \int_{AB} + \int_{BP} \right) \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds = 0 \quad (2.25)$$

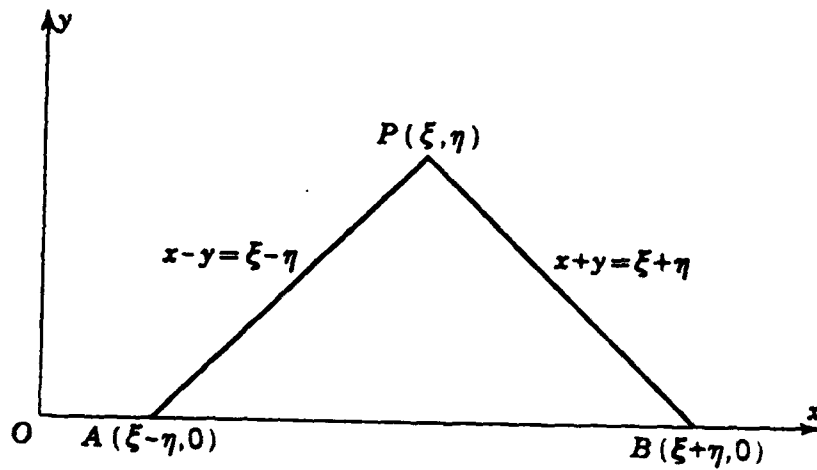
şeklinde yazarız. (2.20) denklemine sahip PA karakteristiğinde

$$\cos(n, x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos(n, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad ds = -\sqrt{2}dx = -\sqrt{2}dy$$

alnırsa

$$\begin{aligned} \int_{PA} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds &= \int_A^P \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \\ &= \psi_A - \psi_P \end{aligned}$$

olur.



Şekil 6.

Benzer şekilde. PB karakteristiği boyunca

$$\cos(n, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos(n, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad ds = -\sqrt{2}dx = \sqrt{2}dy$$

alınırsa BP doğrusu boyunca integral değeri $\psi_B - \psi_P$ olur. Bu değerleri (2.25) denkleminde yerine koyduğumuzda Cauchy problemimizin çözümü olarak

$$\psi_P = \frac{1}{2}(\psi_A + \psi_B) - \frac{1}{2} \int_{AB} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(x, n) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n, y) \right) ds \quad (2.26)$$

denklemini elde ederiz. Örneğin,

$$\psi = f(x) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g(x) \quad (y = 0 \text{ da}) \quad (2.27)$$

eşitliklerini varsaydığımızda, eğer P, (ξ, η) noktası ise A 'nın $(\xi - \eta, 0)$ olduğu ve B 'nin $(\xi + \eta, 0)$ olduğu ortaya çıkar (Şekil.6).

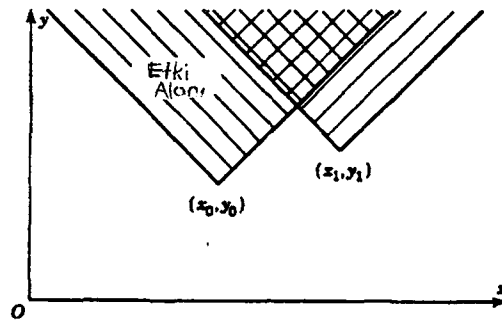
Sonuç olarak

$$\psi_A = f(\xi - \eta) \quad , \quad \psi_B = f(\xi + \eta)$$

$$\int_{AB} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(x, n) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(y, n) \right) ds = - \int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} g(x) dx$$

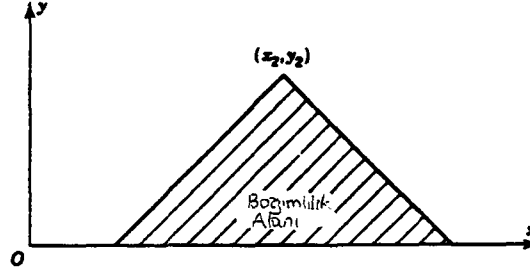
ifadelerini elde ederiz. Bu ifadeleri (2.26) denkleminde yerine koyarsak d'Alembert çözümünü elde ederiz.

Riemann-Volterra çözümünden (2.26), başlangıç disturbansı ya bir sapma yada bir hız olmak üzere (x_0, y_0) noktası civarında yoğunlaşırsa, noktadan geçen ± 1 eğimli iki doğru ve $y \geq y_0$ yarı düzleminin oluşturduğu sonsuz bölgeyi etkileyebileceği sonucuna varılır.



Şekil 7.

Bu bölgeye (x_0, y_0) 'ın ilk etki alanı denir (Şekil.7). Benzer bir şekilde, başka bir (x_1, y_1) noktasının etki alanını oluşturabiliriz ve (Şekil 7) 'de basit bir şekilde gösterebiliriz. Burada bütün etki alanlarının $y \geq 0$ için kesiştiği açıkça görülür.



Şekil 8.

Yine benzer bir yoldan bir (x_2, y_2) noktasının bağımlılık alanını (x_2, y_2) noktasını içermek üzere pozitif y 'li ($y > 0$) bütün noktaların kümesi olarak tanımlayabiliriz (şekil 8). Kolayca görülebileceği gibi bir noktanın bağımlılık alanı, (x_2, y_2) noktasından aşağı doğru çizilen ± 1 eğimli iki doğru ile xy düzleminin üst yarısının oluşturduğu üçgen kesitidir. Eğer bu doğrular yukarı doğru olsalardı, (x_2, y_2) noktasının etki alanını sınırlayabilirlerdi. Genelde $y < 0$ lı noktaları dikkate almadığımız için kesişmeyen bağımlılık alanları elde etmenin mümkün olduğu görülür. Zaman koordinatları eşit, (x, y) ve (x', y) gibi iki noktayı göz önüne alalım. Bunların bağımlılık alanları kesişmezse noktalardaki sapmalar tutarsız olacaktır. Buna sebep olan ise birbirinden tamamen bağımsız olan başlangıç sapmaları ve hızlarıdır.

2.3. TİTREŞEN ZARLAR VE VARYASYONLAR HESABININ UYGULANMASI

Bölüm (1.1.5) de, xy düzlemindeki Γ eğrisi ile sınırlanan ince bir S zarına ait enine titreşimlerin

$$\nabla_1^2 z = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

dalga denklemini,

$$z = 0 \quad (\Gamma \text{ üzerindeki bütün } t \text{ ler için}) \quad (2.29)$$

sınır şartını ve

$$z = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = g(x, y) \quad t = 0 \quad , \quad (x, y) \in S \quad (2.30)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir $z(x, y, t)$ fonksiyonu ile tanımlanabileceğini görmüştük.

Bu sınır değer probleminin çözümüne ilişkin iki temel yöntem, integral dönüşüm ve değişkenlerin ayrılması yöntemleridir. Bu yöntemlerin ilki, zarın sonsuz büyüklükte olması halinde kısmen yararlıdır. İkincisi de Γ eğrisinin basit bir forma sahip olması halinde uygundur.

2.3.1. İntegral Dönüşüm Yöntemi

İntegral dönüşüm teorisinin bu tür problemlerde nasıl kullanıldığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek.2

Çok büyük ince bir zar $z=f(x, y)$ olduğunda hareketsiz iken serbest bırakılıyor. Herhangi bir andaki sapmayı belirleyiniz.

Çözüm.2

Burada

$$z = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

koşullarına bağlı olarak, düzleme ait bütün (x, y) ler için $t=0$ da (2.28) denklemini çözmemiz gerekir. Bu başlangıç değer problemini çözmek için (2.28) denkleminin her iki yanını da $e^{i(\xi x + \eta y)}$ ile çarpalım ve tüm xy düzlemi üzerinde integre edelim. Sonra $z(x, y, t)$ nin iki katlı Fourier dönüşümü

$$Z(\xi, \eta; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(x, y, t) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy = \left(-\xi^2, -\eta^2, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Z$$

sonucunu kullanırsak (2.28) denkleminin

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + c^2(\xi^2 + \eta^2)Z = 0 \quad (2.32)$$

denklemine dönüştüğünü ve (2.31) koşullarının sırasıyla

$$Z = F(\xi, \eta) \quad , \quad \frac{dZ}{dt} = 0 \quad (t = 0) \quad (2.33)$$

ifadelerine eşdeğer olduğunu görürüz. (2.33) 'ya bağlı olarak (2.32) 'i çözdüğümüzde

$$Z = F(\xi, \eta). \cos[c(\xi^2 + \eta^2)t]$$

eşitliğini buluruz. Fourier ters dönüşüm teoremini uygulayarak

$$z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta). \cos \left[c(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} t \right] . e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (2.34)$$

elde edilir. Böylece problem iki katlı integrasyona ve $F(\xi, \eta)$ 'yı içeren (2.34) ifadesine indirgenmiş olur.

2.3.2. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

Değişkenlerine ayırma yönteminin kullanılması iki farklı durumda gösterilebilir. Bunlar sırasıyla Γ nın bir dikdörtgen ve bir daire olması halleridir.

(i) Γ , $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ doğruları ile oluşturulan bir dikdörtgen ise (2.28) denkleminin ait çözümleri

$$z = X(x).Y(y).e^{\mp i k c t}$$

formunda düşünebiliriz. Daha sonra (2.28) denkleminde yerine yazarak $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k^2 = 0$ denklemini buluruz ve buradan X ve Y için oluşan adi diferansiyel denklemlerin

$$\begin{aligned} X'' + k_1^2 X &= 0 \\ Y'' + k_2^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

olduklarını gösterebiliriz. Burada $k_1^2 + k_2^2 = k^2$ dir. Böylece

$$z = A_{k_1 k_2} \cdot e^{\mp i(k_1 x + k_2 y + kct)} \quad (2.36)$$

şeklinde çözümler elde ederiz. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ olduğunda z 'nin sıfıra eşit olması için m ve n tam sayı ve

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (2.37)$$

olacak şekilde

$$z = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\mp i k_{mn} ct}$$

formunda çözümler almalıyız. Örneğin,

$$z = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (t = 0 \text{ da})$$

ise uygun çözüm

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(k_{mn} ct) \quad (2.38)$$

dir ve k_{mn} (2.37) denklemi ile verilmiştir. Ayrıca A_{mn} katsayıları

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.39)$$

denklemiyle bulunur. Dolayısıyla genel çözüm (2.37), (2.38) ve (2.39) denklemleriyle verilebilir.

Salınım veya titreşimlerin frekansları (2.37) denklemi ile verilmiştir. Bu değerler k nın özdeğerleri olarak bilinir. k nın bu değerlerden birine eşit olması halinde problemin sadece (2.36) şeklinde bir çözüme sahip olması söz konusudur.

(ii) Γ sınır eğrisi a yarıçaplı bir daire ise en iyi yol r, θ kutupsal koordinatlarına geçmektir. Bu durumda (2.28) denklemi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.40)$$

şeklinde yazılır ve Γ eğrisi $r=a$ olarak alınabilir. Bu diferansiyel denklemin

$$z = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot e^{\mp i k c t}$$

şeklinde bir çözümünün olduğunu varsayarak R, Θ fonksiyonlarının

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (2.41)$$

ve

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (2.42)$$

diferansiyel denklemlerini ve bunlarında

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R \right] + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

denklemini sağlaması gerektiğini görürüz. (2.41) diferansiyel denkleminin çözümleri

$$\Theta = e^{\mp i m \theta}$$

şeklindedir. Eğer $z(r, \theta, t)$ sapmasının $z(r, \theta, t) = z(r, \theta + 2\pi, t)$ şeklinde alınması gerekirse m yi tam sayı olarak almak zorundayız. Buna ilaveten, sadece $r=0$ da sonlu kalan çözümlerle ilgilendiğimiz için $J_m(x)$, argümanı x olan ve m 'inci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonunu göstermek üzere (2.42) denkleminin çözümünü

$$R = J_m(kr)$$

olarak almalıyız. Bu yoldan (2.40) denkleminin çözümlerini

$$z = \sum_{m,k} A_{mk} \cdot J_m(kr) \cdot e^{\mp i m \theta \mp i k c t} \quad (2.43)$$

şeklinde oluşturabiliriz. Eğer z , $r=a$ dairesi üzerinde sıfıra giderse k sayıları

$$J_m(ka) = 0 \quad (2.44)$$

olacak şekilde seçilmelidir. Sonuç olarak A_{mn} ler sabitler ve $k_{m1}, k_{m2}, \dots$ ler (2.44) denkleminin pozitif kökleri olmak üzere

$$z = \sum_{m,n} A_{mn} \cdot J_m(k_{mn}r) \cdot e^{\mp im\theta \mp ik_{mn}ct} \quad (2.45)$$

çözümleri elde edilir. z nin r ve t nin bir pozitif fonksiyonu olduğu durumda uygun ve benzer çözüm

$$z(r, t) = \sum_n A_n \cdot J_0(k_n r) \cdot e^{\mp ik_n ct} \quad (2.46)$$

olur. Burada $k_1, k_2, \dots$ ler $J_0(ka)$ fonksiyonunun pozitif sıfırlarıdır.

Örneğin,

$$z = f(r) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (t = 0 \text{ da})$$

olduğunu varsayarsak problemin çözümü A_n sabitleri

$$f(r) = \sum_n A_n \cdot J_0(k_n r)$$

olacak şekilde seçilmek üzere

$$z = \sum_n A_n \cdot J_0(k_n r) \cdot \cos(k_n ct) \quad (2.47)$$

dir. Bessel fonksiyonları teorisinden bunun

$$A_n = \frac{2}{a_2 J_1^2(k_n a)} \int_0^a r f(r) J_0(k_n r) dr \quad (2.48)$$

şeklinde ifade edilebileceğini görürüz. Dolayısıyla problemimizin genel çözümünü (2.47) ve (2.48) denklemleri ile verebiliriz.

Dikdörtgen ve dairesel sınırlı zarların titreşimi ile ilgili bu tür problemlerin çözümleri sonlu dönüşümler teorisi ile de oluşturulabilir. Bu yöntemler ancak Γ sınır eğrisi basit bir formda ise uygundur. Γ karmaşık bir sınır ise, sisteme ait frekansların yaklaşık değerleri varyasyonlar hesabına göre, eğer Γ 'nın sabit olduğu (2.28) denkleminin çözümü $f(x, y) \cdot e^{it\sqrt{\lambda}}$ ise Γ üzerinde sıfıra giden ve

$$\sigma \int_S \int \phi^2 dx dy = 1 \quad (2.49)$$

normalleştirme koşulu ile n-1 tane

$$\int_S \int \phi \phi_m dx dy = 0 \quad (2.50)$$

ortogonalite bağıntısını sağlayan ϕ fonksiyonlarına bağlı olarak n. λ_n özdeğeri

$$I = T \int_S \int \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.51)$$

integralinin minimumudur. (Burada ϕ_m , I'yı λ_m ye eşit yapan azaltıcı fonksiyondur). Bu bize problemimizi çözmeye yarayacak bir yöntem elde etmeyi sağlar. Eğer

$$z = \psi_m(x, y) \cdot e^{ik_m ct} \quad (2.52)$$

(2.28) ve (2.29) denklemleriyle belirtilen problemin yaklaşık bir çözümü ise, o halde, eğer $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ S de sürekli, diferansiyellenebilir ve Γ üzerinde sıfıra eşitlenen n tane fonksiyon ise yaklaşık bir çözüm

$$\psi_m(x, y) = \sum_{i=1}^n C_i^{(m)} \Phi_i(x, y) \quad (2.53)$$

dir. Burada $C_i^{(m)}$ katsayıları

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \int_S \int \Phi_i \Phi_j dx dy \quad (2.54)$$

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \int_S \int \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.55)$$

ile tanımlı

$$\sum_{j=1}^n (\sigma_{ij} k_m^2 - \Gamma_{ij}) C_j^{(m)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

cebirsel denklemlerinin pozitif kökleridir. $k_1, k_2, \dots, k_n$ özdeğerleri

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}k^2 - \Gamma_{11} & \sigma_{12}k^2 - \Gamma_{12} & \dots & \sigma_{1n}k^2 - \Gamma_{1n} \\ \sigma_{21}k^2 - \Gamma_{21} & \sigma_{22}k^2 - \Gamma_{22} & \dots & \sigma_{2n}k^2 - \Gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}k^2 - \Gamma_{n1} & \sigma_{n2}k^2 - \Gamma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}k^2 - \Gamma_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.57)$$

determinant denkleminin n pozitif kökleri ile verilir. Ayrıca katsayılar

$$\sigma \sum_{i,j=1}^n C_i^{(m)} . C_j^{(m)} . \sigma_{ij} = 1 \quad (2.58)$$

normalleştirme koşulunu sağlayacak şekilde seçilmelidir.

S zarına ait Γ sınır eğrisi $u(x,y)=0$ denklemine sahip ise Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) yaklaşım fonksiyonlarının basit bir seçimi

$$\Phi_1 = u(x, y) \quad , \quad \Phi_2 = x.u(x, y) \quad , \quad \Phi_3 = y.u(x, y)$$

$$\Phi_4 = x^2.u(x, y) \quad , \quad \Phi_5 = xy.u(x, y) \quad , \quad \Phi_6 = y^2.u(x, y) \quad , \quad \text{v.s.},$$

şeklinde alınır.

Örnek.3

İki yüzlü bir kare zarın ilk üç özdeğeri için yaklaşık değerler bulunuz.

Çözüm.3

Zarın $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğruları ile sınırlı olduğunu varsayalım. O halde

$$\Phi_1 = (1 - x^2)(1 - y^2) \quad , \quad \Phi_2 = x(1 - x^2)(1 - y^2) \quad , \quad \Phi_3 = y(1 - x^2)(1 - y^2)$$

alabiliriz. Böylece

$$\sigma_{11} = \frac{256}{225} \quad , \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{256}{1575} \quad , \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

$$\Gamma_{11} = \frac{256}{45} \quad , \quad \Gamma_{22} = \Gamma_{33} = \frac{3328}{1575} \quad , \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{23} = \Gamma_{31} = 0$$

olarak buluruz. Bu durumda (2.57) determinant denklemi

$$(k^2 - 5)(k^2 - 13)^2 = 0$$

haline gelir. Ve böylece karenin ilk üç yaklaşık özdeğeri

$$k_1 = \sqrt{5} = 2.236 \quad k_2 = k_3 = \sqrt{13} = 3.606$$

olarak bulunur. (2.37) denkleminde gerçek sonuçların

$$k_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2.221 \quad , \quad k_2 = k_3 = \frac{\pi\sqrt{5}}{2} = 3.942$$

olduğunu görebiliriz.

2.4. ÜÇ BOYUTLU PROBLEMLER

Bu bölümde, üç boyutlu

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.59)$$

dalga denkleminin ait çözümlerden bazılarını gözönüne alacağız.

Bu denklemin,

$$k^2 = \ell^2 + m^2 + n^2 \quad (2.60)$$

olmak üzere

$$e^{\mp i(\ell x + m y + n z + k c t)} \quad (2.61)$$

şeklinde çözümlere sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Örnek.4

a yüzlü kübik bir kutunun içinde bir gaz bulunmaktadır. c gaz içindeki sesin hızı ise serbest salınımların periyotlarının n_1, n_2 ve n_3 tam sayı olmak üzere

$$\frac{2a}{c\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.4:

Bu problemde $0 \leq (x, y, z) \leq a$ uzayında geçerli olan (2.59) dalga denkleminin küpün sınırlarında $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ olan çözümlerini arıyoruz.

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} \cos\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n_3 \pi z}{a}\right) \cos\left[n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \frac{1}{2} \frac{\pi c t}{a}\right]$$

dır. Burada n_1, n_2, n_3 tamsayılardır. Gazın serbest salınım periyotlarının

$$\frac{2a}{c\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

olduğu görülür. $\square$

r, θ, ϕ küresel koordinatlarında (2.59) dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.62)$$

şeklinde olur.

$\Psi(r)$, r 'ye bağlı bir fonksiyon ve $P_n^m(\cos \theta)$ ortak Legendre fonksiyonu olmak üzere $\psi(r, \theta, \phi)$ yi

$$\psi(r, \theta, \phi) = \Psi(r) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{\mp i m \phi \mp i k c t} \quad (2.63)$$

olarak alırsak (2.63) denkleminin (2.62) denkleminde yerine konmasıyla $\Psi(r)$ 'nin

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (2.64)$$

diferansiyel denklemini sağladığı görülür. Şimdi

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot R(r)$$

eşitliğini uygularsak (2.64) denkleminin

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (2.65)$$

şekline geldiğini görürüz. Buradan şu çıkartılır: eğer $\{n + \frac{1}{2}\}$ ne sıfır ne de tam sayı ise A ve B sabitler ve $J_\nu(z)$, z argümanlı ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olmak üzere

$$R(r) = A \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + B \cdot J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) \quad (2.66)$$

dir. (2.63) çözümünün

$$\psi(r, \theta + \pi, \phi) = \psi(r, \theta, \phi) \quad , \quad \psi(r, \theta, \phi + 2\pi) = \psi(r, \theta, \phi)$$

simetri özelliklerini sağlamasını istiyorsak m ve n yi tam sayı olarak almak zorundayız.

Böylece

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{\mp(n+\frac{1}{2})}(kr) \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot e^{\mp im\phi \mp ikct} \quad (2.67)$$

fonksiyonu (2.62) dalga denkleminin bir çözümü olur. (2.67) çözümünde bulunan $J_{\mp(n+\frac{1}{2})}(kr)$ fonksiyonları *Küresel Bessel Fonksiyonları* olarak adlandırılır. Trigonometrik fonksiyonlar ile ilişkilidirler. n , bir tek tam sayının yarısı ise ve $f_n(x)$ ve $g_n(x)$, örneğin $n = \frac{1}{2}$ için $f_{\frac{1}{2}}(x) = 1$, $g_{\frac{1}{2}}(x) = 0$ ve $n = \frac{3}{2}$ için $f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}$, $g_{\frac{3}{2}}(x) = 1$ olan polinomlar olmak üzere

$$J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[f_n(x) \sin x - g_n(x) \cos x \right]$$

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} (-1)^{n-\frac{1}{2}} \left[g_n(x) \sin x + f_n(x) \cos x \right]$$

sonucu yazılabilir. Bu da trigonometrik fonksiyonlarla ilişkili olduklarını gösterir. Böylece

$$\psi(r) = \frac{1}{r} e^{\mp ikr \mp ikct} \quad (2.68)$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{r} \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right] \cos\theta \cdot e^{\mp ikct} \quad (2.69)$$

denklemlerinin (2.59) dalga denkleminin kısmi çözümleri olduğu sonucuna varabiliriz.

(2.68) çözümü, doğrudan (2.59) denklemlerinden çıkartılabilen daha genel bir çözümün kısmi bir halidir. Dalga denkleminin çözümünün küresel bir simetriye sahip olduğu varsayılırsa, örneğin, eğer ψ , sadece r ve t nin bir fonksiyonu ise, o halde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.70)$$

denklemini sağlamak zorundadır. $\psi = \frac{\phi}{r}$ olarak alırsak f ve g fonksiyonları keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\phi = f(r - ct) + g(r + ct)$$

olacak şekilde

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

yi elde ederiz. Başka bir ifade ile (2.70) denkleminin genel çözümü, f ve g fonksiyonları keyfi olmak üzere

$$\psi = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)] \quad (2.71)$$

dir.

$\frac{1}{r} f(r - ct)$ fonksiyonu uzaklaşan bir dalga gösterir. Bir gazın hız potansiyeli olarak

$$\phi = \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.72)$$

yi alırsak gazın hızı

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r c} f'\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

olur. Öyle ki, orijin merkezli ve küçük bir ε yarıçaplı bir küreden geçen toplam akıntı

$$4\pi\varepsilon^2 u = f(t) + O(\varepsilon)$$

dir. Bundan dolayı, merkezde f(t) gücünde bir nokta kaynak olduğunu söyleriz. Dolayısıyla (2.72) ifadesindeki bu tür bir kaynağın hız potansiyelini temsil eder. Bir t anındaki basınç ile denge değeri arasındaki fark

$$p - p_0 = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\rho}{4\pi r} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.73)$$

ile verilebilir.

Örnek.5

a yarıçaplı katı (sert) bir kürede bir gaz bulunmaktadır. Eğer c, gaz içindeki sesin hızı ise yalnızca radyal titreşimlerin frekanslarının $\frac{c\xi_i}{a}$ olduğunu gösteriniz. Burada $\xi_1, \xi_2, \dots$ ler $\tan \xi = \xi$ denkleminin pozitif kökleridir.

Çözüm.5

Önce ψ 'ye ait şu koşulları yazalım.

ψ dalga fonksiyonu

i) (2.70) denklemini sağlamalıdır.

ii) Orijinde sonlu bir değere sahip olmalıdır.

iii) $r=0$ da $u = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ olmalıdır.

(2.68) denklemlerinden bu koşulların ilk ikisinin, A bir sabit olmak üzere

$$\psi = A \cdot \frac{\sin(kr)}{r} e^{ikct}$$

olarak alındığında sağlandığını görürüz. Bu fonksiyon için

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = A \left[\frac{k \cos(kr)}{r} - \frac{\sin(kr)}{r^2} \right] e^{ikct}$$

dir ve k

$$\tan(ka) = ka$$

olacak şekilde seçilirse $r=a$ da $u=0$ olur. Bu nedenle frekanslar , $\xi_1, \xi_2, \dots$ ler

$$\tan \xi = \xi \quad (2.74)$$

denkleminin pozitif kökleri olmak üzere $\frac{c\xi_i}{a}$ ($i = 1, 2, \dots$) ifadesi ile verilmişlerdir. ■

(2.59) dalga denklemine ait benzer çözümler, koordinatlar (ρ, ϕ, z) silindirik koordinatları olarak verildiğinde bulunabilir. O zaman dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.75)$$

formunu alır. Eğer

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = R(r) \cdot \Phi(\phi) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

yazarsak, (2.75) denkleminin, $\gamma^2 = k^2 - w^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + (w^2 - \frac{m^2}{\rho^2}) R &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 Z &= 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

şeklinde ayrıldığını görürüz. Buradan da

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = J_m(w\rho) \cdot e^{ikct - i\gamma z \mp im\phi} \quad (2.77)$$

şeklinde çözümler elde ederiz. Burada γ , k ve w 'ye bağlıdır. Eğer $k > w$ ise γ gerçel olacak şekilde (2.77) çözümünün z eksenini boyunca hareketli $J_m(w\rho) \cdot e^{\mp im\phi}$ genlikli bir dalgayı temsil ettiğini düşünebiliriz. Böyle bir dalganın faz hızı

$$V = \frac{kc}{\gamma}$$

ve grup hızı

$$W = \frac{d}{d\gamma}(kc) = \frac{c\gamma}{k}$$

dır.

Örnek.6

$\frac{2\pi}{kc}$ periyotlu ve küçük genlikli harmonik ses dalgaları, $\rho = a$ silindiri ile sınırlı bir dairesel dalga kılavuzu boyunca yayılır. ϕ açısı değişkeninden bağımsız olan çözümlerin, ξ_n , $J_1(\xi)$ 'nin bir sıfırı ise $\gamma^2 = k^2 - (\frac{\xi_n^2}{a^2})$ olmak üzere

$$\psi = e^{i(kct - \gamma z)} J_0\left(\frac{\xi_n \cdot \rho}{a}\right)$$

şeklinde olduğunu ispatlayınız ve bu tür bir dalganın $k > \frac{\xi_n}{a}$ olması halinde yayıldığı gösteriniz.

Çözüm.6

w, ϕ 'den bağımsız olduğundan dolayı

$$\psi = J_0(w\rho)e^{i(kct-\gamma z)}$$

yi elde etmek için $\gamma^2 = k^2 - w^2$ olacak şekilde (2.77) denkleminde $m=0$ yazmalıyız. Sınır koşulu, gazın hızının silindir üzerinde sıfıra eşitlenmesidir, yani

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0 \quad (\rho = a \text{ da}) \quad (2.78)$$

dir. $J'_0(x) = -J_1(x)$ olduğundan dolayı bu koşulun ancak w nın $J_1(wa) = 0$ olacak şekilde seçilmesi ile sağlandığı görülür. $\xi_1, \xi_2, \dots$ 'ler $J_1(\xi)$ 'nin sıfırları olmak üzere $w = \frac{\xi_n}{a}$ dır. Böylece

$$\psi = e^{i(kct-\gamma z)} J_0\left(\frac{\xi_n \cdot \rho}{a}\right) \quad (2.79)$$

elde edilir. $\left[\gamma^2 = k^2 - \left(\frac{\xi_n^2}{a^2}\right) \right]$.

(2.79) denklemi ile verilen dalganın yayılması için γ nın gerçel olması zorunludur, yani $k > \frac{\xi_n}{a}$ olmalıdır. ■

(2.77) çözümü daha çok, $\rho = 0$ olduğunda w nın sonlu kalması gerektiği şeklinde bir sınırlamayı içeren problemlere ait uygulamalarda yararlıdır. Bu tür bir koşulun bulunmadığı problemlerde çözüm olarak

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = \left[A_m J_m(w\rho) + B_m Y_m(w\rho) \right] e^{ikct - i\gamma z} \quad (2.80)$$

denklemini almalıyız. Burada $Y_m(w\rho)$, ikinci tür bir Bessel fonksiyonunu ve A_m ile B_m de kompleks sabitleri gösterirler. Bessel denkleminin en uygun ve en kullanışlı çözümleri olan

$$H_m^{(1)}(w\rho) = J_m(w\rho) + iY_m(w\rho) \quad , \quad H_m^{(2)}(w\rho) = J_m(w\rho) - iY_m(w\rho)$$

Hankel fonksiyonlarını kullanarak (2.80) çözümünü

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = \left[A_m H_m^{(1)}(w\rho) + B_m H_m^{(2)}(w\rho) \right] e^{ikct - i\gamma z \mp im\phi} \quad (2.81)$$

şeklinde yazabiliriz.

Örneğin, eksenel simetri ($m=0$) durumunda

$$\psi(\rho, z, t) = \left[AH_0^{(1)}(w\rho) + BH_0^{(2)}(w\rho) \right] e^{ikct - i\gamma z} \quad (2.82)$$

şeklinde çözümler elde ederiz. Şimdi ρ nun büyük değerleri için

$$H_0^{(1)}(w\rho) \sim \left(\frac{2}{\pi w\rho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(w\rho - \frac{1}{4}\pi)} \quad , \quad H_0^{(2)}(w\rho) \sim \left(\frac{2}{\pi w\rho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(w\rho - \frac{1}{4}\pi)} \quad (2.83)$$

$$(\rho \rightarrow \infty) \quad \psi(\rho, z, t) \sim \left(\frac{2}{\pi w\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left[Ae^{i(kct + w\rho - i\gamma z - \frac{1}{4}\pi)} + Be^{i(kct - w\rho - i\gamma z + \frac{1}{4}\pi)} \right]$$

olur. Böylece

$$\psi_0(\rho, z, t) = H_0^{(1)}(w\rho) e^{ikct - i\gamma z} \quad (2.84)$$

çözümü, $\rho = 0$ ekseninden uzaklaşan dalgaları gösterirken

$$\psi_i(\rho, z, t) = H_0^{(2)}(w\rho) e^{ikct - i\gamma z} \quad (2.85)$$

çözümü bu eksene yaklaşan dalgaları gösterir.

İki boyutlu durumda ($\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$) (2.43) denkleminde (2.50) denkleminin benzerinin

$$\psi(\rho, \phi, t) = \left[A_m H_m^{(1)}(k\rho) + B_m H_m^{(2)}(k\rho) \right] e^{ikct \mp im\phi} \quad (2.86)$$

olduğu görülür ki bu durumda (2.84) ve (2.85) denklemleri sırasıyla

$$\psi_0(\rho, t) = H_0^{(1)}(k\rho) e^{ikct} \quad (2.87)$$

ve

$$\psi_i(\rho, t) = H_0^{(2)}(k\rho) e^{ikct} \quad (2.88)$$

şeklinde yazılır. (2.68) çözümlerinin küresel dalga teorisindeki özelliklerinin aynılarına, (2.87) ve (2.88) fonksiyonları silindirik dalga teorisinde sahiptirler.

BÖLÜM III

3.1. DALGA DENKLEMİNİN GENEL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde dalga denkleminin Helmholtz, Kirchhoff ve Poisson adları altında toplanan genel çözümlerini üreteceğiz. Helmholtz ve Kirchhoff çözümleri $\psi(r, t)$ dalga fonksiyonunun ve onun bir S yüzeyindeki $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ normal türevinin değerlerinde tanımlı dalga problemlerini konu alırlar. Problemin Kirchhoff çözümünden, ψ ve $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ($t = 0$ da) başlangıç değer probleminin Poisson çözümünü çıkarıyoruz.

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (3.1)$$

dalga denkleminin bir çözümünün Ψ olduğunu ve Ψ 'ye ait bütün singülerliklerin V hacmini sınırlayan kapalı bir S yüzeyinin dışında bulunduğunu varsayalım. O zaman

$$\Psi' = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.2)$$

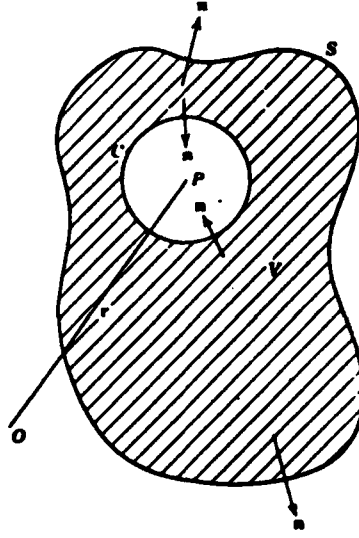
yi alırsak $\mathbf{r}$ vektörü ile belirtilen noktanın S dışında bulunması halinde

$$\int_S \left[\Psi(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS' = 0 \quad (3.3)$$

olur.

Diğer taraftan, eğer P, S nin içinde kalırsa, Green teoremini S ile dıştan ve

C ile içten sınırlanan bölgeye uygulamakla (r merkezli ve ε yarıçaplı küçük bir küre)



Şekil.9

$$\int_S \left[\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C \left[\left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \Psi(\mathbf{r}') - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial r'} \right] \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'$$

eşitliğini buluruz. Eşitliğin sağ tarafındaki limitin değerinin $-4\pi\Psi(r)$ olduğunu gösterebiliriz.

3.1.1. Birinci Helmholtz Teoremi

S yüzeyi ile sınırlanan V hacmi içinde birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan $\Psi(r)$

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0$$

dalga denkleminin bir çözümü ise, o zaman n, S yüzeyinde dış normal olmak üzere

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] dS' = \begin{cases} \Psi(\mathbf{r}) & , \mathbf{r} \in V \\ 0 & , \mathbf{r} \notin V \end{cases} \quad (3.4)$$

olur. ■

Birinci Helmholtz teoremi, $\Psi(\mathbf{r})$ fonksiyonunun bütün singülerliklerinin belirli bir V hacmi dışında bulunması halinde uygulanabilir. Şimdi, Ψ 'ye ait bütün

singülerliklerin kapalı bir S yüzeyinde bulunduğunu varsayalım. Green teoremini, S ile içten ve Σ ile dıştan sınırlandırılan V bölgesine uygularsak (orijin merkezli ve çok büyük bir R yarıçaplı bir küre) $R \rightarrow \infty$ için ikinci Helmholtz teoremine varırız.

3.1.2. İkinci Helmholtz Teoremi

V hacmi dışında ve V 'yi sınırlayan kapalı S yüzeyinde birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan $\Psi(\mathbf{r})$ fonksiyonu, dalga denkleminin bir çözümü ise $r \rightarrow \infty$ için benzer olarak

$$r\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - ik\Psi\right) \rightarrow 0$$

ise n , S yüzeyinde dış normal olmak üzere

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] dS' = \begin{cases} \Psi(\mathbf{r}) & , \mathbf{r} \notin V \\ 0 & , \mathbf{r} \in V \end{cases} \quad (3.5)$$

olur. ■

Helmholtz formüllerinden Ψ ile S yüzeyindeki $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ değerlerinin keyfi ve birbirinden bağımsız olarak bulunabildiği görülebilir. P de singüleriteye sahip $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ Green fonksiyonu kullanılarak $\Psi(\mathbf{r})$ 'yi $\Psi(\mathbf{r}')$ 'lû terimler içeren

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Psi(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \cdot dS'$$

denklemini ifade edebiliriz, öyle ki S yüzeyindeki Ψ değerini belirleyerek genelde $\Psi(\mathbf{r})$ 'nin tek olduğunu gösterebilir ve $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ 'nin değerini hesaplayabiliriz. Böylece, $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ S üzerinde olmak şartıyla $\Psi(\mathbf{r})$ tek olarak bulunur ve bunun S üzerindeki değeri belirlenebilir. Dolayısıyla Ψ ve S üzerindeki $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ değerleri birbiriyle ilişkilidirler. $f(\mathbf{r})$ ve $g(\mathbf{r})$ fonksiyonları keyfi fonksiyonlar olacak şekilde

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[f(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - g(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \right] dS'$$

fonksiyonu dalga denklemini sağlar, fakat $\Psi(\mathbf{r}') = g(\mathbf{r}')$, $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = f(\mathbf{r}')$ (S üzerinde) olduğu sonucuna varmak gerekmez.

Benzer olarak iki boyutlu halde $\rho = (x, y)$ olmak üzere

$$\Psi' = H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|)$$

olarak, Green teoreminin iki boyutlu şekinden birinci Helmholtz teoreminin iki boyutlusunu kurabiliriz.

3.1.3. Weber Teoremi

Birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri, S alanı içinde ve S yi sınırlayan kapalı Γ eğrisi üzerinde sürekli olan iki boyutlu

$$\nabla_1^2 \Psi + k^2 \Psi = 0$$

dalga denkleminin bir çözümü $\Psi(\rho)$ ise o taktirde n, Γ ya ait dış normal olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \left\{ \Psi(\rho') \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) - H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) \frac{\partial \Psi(\rho')}{\partial n} \right\} ds' \\ = \begin{cases} \Psi(\rho) & , \rho \in S \\ 0 & , \rho \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Birinci Helmholtz teoremini bir başka şekilde ifade edebiliriz. Eğer $\psi(\mathbf{r}', t)$, $\mathbf{r}'$ vektörü ile belirli değişken bir noktanın koordinatlarının bir fonksiyonu ise ψ nin gecikmeli değerini, sabit bir noktanın yer vektörü $\mathbf{r}'$ olmak üzere

$$[\psi] = \psi(\mathbf{r}', t - \frac{\lambda}{c}) \quad , \quad \lambda = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \quad (3.6)$$

denklemini ile belirtebiliriz. Eğer

$$\psi(\mathbf{r}', t) = \Psi(\mathbf{r}') \cdot e^{-ikct}$$

ise

$$[\psi] = \psi(\mathbf{r}', t) \cdot e^{ik\lambda} \quad , \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -ikc[\psi] \quad (3.7)$$

olduğu anlaşılır. Şimdi eğer, Birinci Helmholtz teoremindeki (3.4) denkleminin her iki tarafını e^{ikct} ile çarparsak, $\mathbf{r}$ vektörü ile belirtilen noktanın S yüzeyi içinde olması halinde, denklemin

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -[\psi] \frac{\partial \lambda}{\partial n} \left[\frac{ik}{\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \right\} dS'$$

şeklinde yazılabileceğini buluruz ve (3.6) eşitliklerinin ikincisinden dolayı da

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -[\psi] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \right\} dS' \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi keyfi bir $\psi(\mathbf{r}, t)$ dalga fonksiyonu, $\Psi_k(\mathbf{r}).e^{-ikct}$ tipindeki dalga fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu olarak, ya bir Fourier serisi yada bir Fourier integrali yardımıyla ifade edilebilir. (3.8) denklemi k 'yı açıkça bulundurmadiğın-
dan herhangi bir dalga fonksiyonu için bunun doğru olduğu açıktır. $\mathbf{r}$ yer vektörlü bir nokta S dışında bulunursa (3.8) denkleminin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu gösterilebilir.

3.1.4. Birinci Kirchhoff Teoremi

Birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri V hacminde ve V 'yi sınırlayan S yüzeyinde sürekli olan dalga denkleminin bir çözümü $\psi(\mathbf{r}, t)$ ise

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -[\psi] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \right\} dS' = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}, t) & , P(\mathbf{r}) \in V \\ 0 & , P(\mathbf{r}) \notin V \end{cases} \quad (3.9)$$

dır. Burada $\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ve $\mathbf{n}$, S yüzeyinde bir dış normaldir.

3.1.5. İkinci Kirchhoff Teoremi

$-\infty$ ile t arasındaki bütün değerler için S yüzeyi ile sınırlanmış V bölgesi-
nin dışında singüleriteye sahip olmayan dalga denkleminin bir çözümü $\psi(\mathbf{r}, t)$ ise $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ için $f(u)$ ve $f'(u)$, $u = -\infty$ civarında sınırlı olmak üzere

$$\psi(r, t) \sim \frac{f(ct - r)}{r}$$

ise $\mathbf{n}$, S 'de bir dış normal olmak üzere

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ [\psi] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] - \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \right\} dS' = \begin{cases} \psi(\mathbf{r}) & , P(\mathbf{r}) \in V \\ 0 & , P(\mathbf{r}) \notin V \end{cases} \quad (3.10)$$

dır.

Eğer S yüzeyini

$$\lambda \equiv |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = ct \quad (3.11)$$

küresi olarak alırsak bu sonuçların özel bir halini buluruz. f, ψ 'nin $t=0$ daki değeri olmak üzere S 'nin herhangi bir noktasında

$$[\psi] = \psi(\mathbf{r}', 0) = f(\mathbf{r}')$$

dir. Benzer şekilde $g, \frac{\partial \psi}{\partial t}$ 'nin $t=0$ 'daki değeri olmak üzere

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_0 = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}', 0)}{\partial t} = g(\mathbf{r}')$$

dir. Bu sonucu (3.9) 'da yerine yazarsak

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{f}{\lambda^2} + \frac{g}{c\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_0 \right\} dS' \quad (3.12)$$

eşitliğini buluruz. Burada S yüzeyi daha önce olduğu gibi (3.11) denklemine sahiptir. Eğer (3.11) küresi üzerindeki f fonksiyonunun ortalama değerini $M_r(f)$ ile gösterirsek,

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{gdS'}{c\lambda} = t.M_r(g)$$

ve

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{f}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) dS' = \frac{\partial}{\partial t} \left[t.M_r(f) \right]$$

yazabiliriz. Bu ifadeleri (3.12) denkleminde yerlerine yazarsak

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t.M_r(f) \right] + t.M_r(g) \quad (3.13)$$

nin

$$\psi = f \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = g \quad , \quad t = 0 \quad (3.14)$$

başlangıç şartlarını sağlayan dalga denkleminin çözümü olduğunu görürüz. (3.12) çözümü, (3.14) sınır değer probleminin "Poincaré Çözümü" dür. (3.13) denklemi "Poisson Çözümü" nü ifade eder.

3.2. DALGA DENKLEMİ İÇİN GREEN FONKSİYONU

Burada dalga denkleminin belirli sınır koşulları altındaki çözümünün uygun Green fonksiyonunun bulunmasına bağlı olarak nasıl yapılacağını göstereceğiz.

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 'nün

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3.15)$$

denklemini sağladığını ve kapalı bir S yüzeyi ile sınırlı olan bir V bölgesine ait olan $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ noktalarında $\mathbf{r}$ noktasının komşuluğu dışında hem x, y, z değişkenlerine hem de x', y', z' değişkenlerine göre sonlu ve sürekli olduğunu ve $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ iken

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (3.16)$$

ile aynı singüleriteye sahip olduğunu varsayalım. Böylece, eğer $\mathbf{r}$, V bölgesi içindeki bir noktanın yer vektörü ve $\mathbf{n}$, S yüzeyinde bir dış normal ise (3.4) denkleminde işlem yaparak

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right\} dS' \quad (3.17)$$

bulunur. (3.17) denkleminde şu çıkartılır: eğer $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3.18)$$

sınır koşulunu sağlayan böyle bir fonksiyon ise ve eğer yer vektörü $\mathbf{r}'$ olan nokta S nin üzerindeyse

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS' \quad (3.19)$$

yazılabilir. Bunun anlamı, S yüzeyinin içindeki herhangi bir noktada Ψ nin değeri Ψ 'nin sınır üzerindeki değerlerine göre hesaplanabilir.

Benzer şekilde eğer $G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0 \quad , \quad \mathbf{r}' \in S \text{ için} \quad (3.20)$$

sınır koşulunu sağlayan bu tür bir fonksiyon ise

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (3.21)$$

yi elde ederiz. Bu denklem ile S 'nin her noktasındaki $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ değerinin bilinmesi halinde S içindeki herhangi bir noktada ψ 'yi hesaplayabiliriz.

Benzer sonuçlar daha genel bir sınır koşulu olması halinde ve iki boyutlu durumda elde edilebilir.

Şimdi S yüzeyinin bir düzlem olduğu özel durumları dikkate alalım.

3.2.1. $z \geq 0$ Yarı Uzayı İçin Green Fonksiyonu

Örnek olarak, $\rho = (x, y, -z)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ yer vektörlü noktanın $z=0$ düzlemindeki görüntüsünün yer vektörü olmak üzere

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{e^{ik|\rho-\mathbf{r}'|}}{|\rho-\mathbf{r}'|} \quad (3.22)$$

alabiliriz. Bu fonksiyon için eğer $\mathbf{r}'$ yer vektörlü nokta Π (xy düzlemi) de ise bu fonksiyon için

$$\frac{\partial G_1}{\partial n} = -\frac{\partial G_1}{\partial z'} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right)$$

olduğu kolayca gösterilir. Burada $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$ dir. Eğer $z=0$ da $\Psi = f(x, y)$ ise $z > 0$ iken (3.5) denkleminde

$$\Psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Pi} f(x', y') \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy' \quad (3.23)$$

çıkarılır. Benzer şekilde

$$G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{e^{ik|\rho-\mathbf{r}'|}}{|\rho-\mathbf{r}'|} \quad (3.24)$$

eşitliği gösterilebilir ve öyle ki Π düzleminde

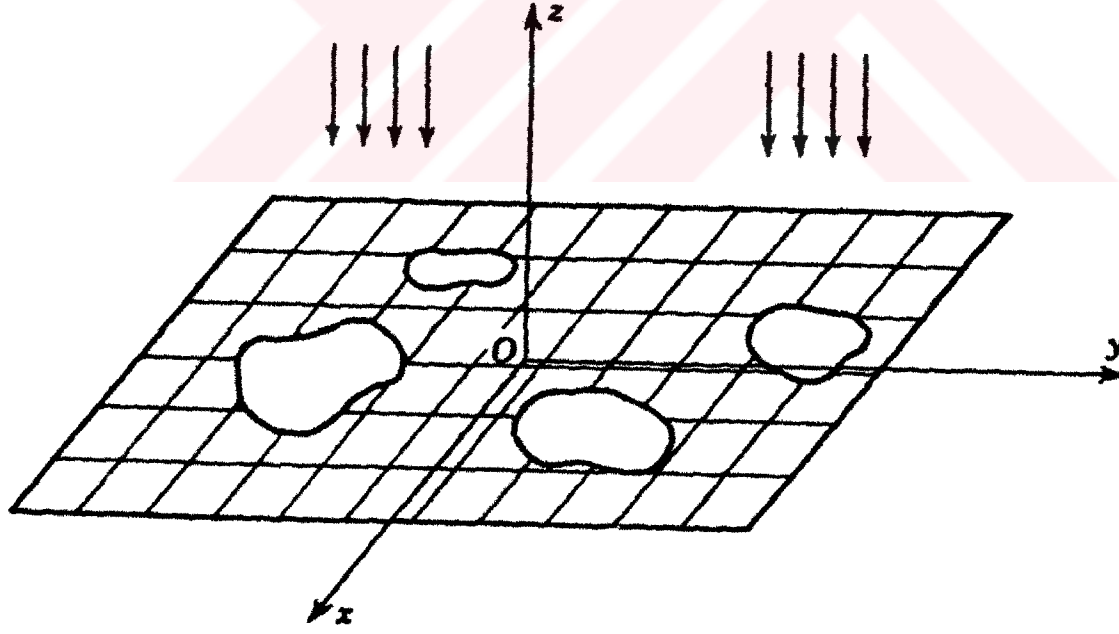
$$G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2e^{ikR}}{R}$$

dir. Eğer Π düzleminde $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = g(x, y)$ ise $z > 0$ iken (3.21) denkleminde

$$\Psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \rho(x', y') \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy' \quad (3.25)$$

olduğu görülür.

Şimdi (3.25) çözümünün, dalgaları mükemmel yansıttığı farzedilen ama key-fi ebat ve şekilde delikler içeren sonsuz bir düzlem-elek vasıtasıyla "monokromatik" ses dalgalarının kırınımı teorisinde nasıl uygulanabileceğini belirteceğiz. Eleğin xy düzleminde bulunduğunu varsayacağız ve kolaylık için elektteki delikleri S_1 ve eleğin delikler dışındaki kısmını S_2 ile ifade edeceğiz. Eleğin yokluğunda $\Psi_i(\mathbf{r})e^{ikct}$ hız potansiyeline sahip olan monokromatik dalgaların eleğin pozitif tarafına



Şekil 10.

düştüklerini farz edersek (Şekil 10), eleğin oluşturduğu yansıtılmış ve kırılmış dalgaya $\Psi_S(\mathbf{r})e^{ikct}$ şeklinde bir hız potansiyeline sahip olacak ve ses dalgalarının toplam hız potansiyeli $\Psi(\mathbf{r})e^{ikct}$ olacaktır. Burada

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_i(\mathbf{r}) + \Psi_S(\mathbf{r}) \quad (3.26)$$

dir. Problemin sınır koşulları; eleğin deliksiz kısmı üzerinde, gazın hızının normal bileşeninin sıfıra eşitlenmesi yani

$$\frac{\partial \Psi_S}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \quad (S_2 \text{ de}) \quad (3.27)$$

ve her delikte toplam hız potansiyeli gelen hız potansiyeline eşit olması yani

$$\Psi_S = 0 \quad (S_1 \text{ de}) \quad (3.28)$$

dır. Bu problemi çözmek için S_1 de

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right)_{z=0} = f(x, y) \quad (3.29)$$

varsayalım. $\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial z} \right)_{z=0}$ 'ın (3.29) denkleminde bulunan değerini (3.25) denkleminde yerine yazarsak

$$\Psi_S(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial z'} \right)_{z'=0} \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy' - \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} f(x', y') \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy' \quad (3.30)$$

yı buluruz.

Şimdi eğer $f(x', y') = 0$ 'ı (3.30) denkleminde yerleştirirsek eleğin deliksiz olduğu probleme uygun olan bir çözüm elde ederiz ve bu, xy düzleminin tamamını içine alan deliksiz bir elektrik vasıtasıyla yansıtılan dalgaların hız potansiyelini gösterir. $\rho = (x, y, -z)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ yer vektörlü noktanın $z=0$ düzlemindeki görüntüsünün yer vektörü olmak üzere bu hız potansiyelinin $z > 0$ durumunda $\Psi_i(\rho)$ şeklinde olduğu açıkça gösterilir. Dolayısıyla eğer $z > 0$ ise

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_i(\mathbf{r}) + \Psi_i(\rho) - \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} f(x', y') \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy' \quad (3.31)$$

denklemini elde etmemiz gerekir. (3.28) koşulunun halen sağlandığını göstermek için $(x,y,0)$ noktası S_1 'e ait olduğunda $f(x,y)$ 'yi

$$\lambda = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

olmak üzere

$$\int_{S_1} f(x', y') \frac{e^{-ik\lambda}}{\lambda} dx' dy' = 2\pi \Psi_i(x, y, 0) \quad (3.32)$$

denklemini sağlayacak şekilde seçmeliyiz. Bundan dolayı eğer $z > 0$ ise kırınım problemimizin çözümü (3.31) denklemi ile verilmiş olur ve burada $f(x,y)$ fonksiyonu (3.32) integral denklemini sağlar.

$z < 0$ durumundaki çözümü de kolayca bulabiliriz. Eğer, $\Psi_i(\rho)e^{ikct}$ hız potansiyelli dalgaların eleğin negatif tarafına geldiği bir problemin çözümünüde göz önüne alırsak sonuç olarak $[\Psi_i(\mathbf{r}) + \Psi_i(\rho)]e^{ikct}$ çözümünün (3.27) ve (3.28) sınır koşullarını sağladığını görürüz. Dolayısıyla,

$$\Psi(\mathbf{r}) + \Psi(\rho) = \Psi_i(\mathbf{r}) + \Psi_i(\rho)$$

bağıntısını çıkartırız. Buradan, eğer $z < 0$ ise

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} f(x', y') \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy' \quad (3.33)$$

sonucunu çıkartırız. $f(x,y)$ yine (3.32) integral denklemini sağlar.

3.3. HOMOJEN OLMAYAN DALGA DENKLEMİ

L operatörü

$$L = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.34)$$

olmak üzere, elektromanyetik teori ile matematiksel fizikte karşımıza çıkan ve ikinci mertebeden hiperbolik bir denklem olan

$$L\psi = f(\mathbf{r}, t) \quad (3.35)$$

denklemine "Homogen olmayan dalga denklemi" denir. Eğer ψ_1 homogen olmayan (3.35) denkleminin herhangi bir çözümü ise ve ψ_2 de dalga denkleminin herhangi bir çözümü ise

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (3.36)$$

nin (3.35) denkleminin de bir çözümü olduğu görülür.

Bir ψ fonksiyonunun kapalı bir S yüzeyi ile sınırlandırılmış sonlu bölgede (3.35) denklemini sağladığını varsayalım. S de bulunan ve yer vektörü $\mathbf{r}$ olan bir P noktasında fonksiyonun değerini bulmaya çalışalım. Eğer Ω ile, S ve P merkezli küçük bir ε yarıçaplı C küresi ile sınırlanan bölgeyi gösterirsek Green teoremini

$$\int_{\Omega} (\psi \cdot \nabla^2 \phi - \phi \cdot \nabla^2 \psi) d\tau' = \left(\int_C + \int_S \right) \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS' \quad (3.37)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.37) denkleminde $\psi(\mathbf{r}')$ 'nü (3.35) denkleminin çözümü olarak alırsak

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}') = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}', t) \quad (3.38)$$

olur ve t' bir sabit ve F fonksiyonu keyfi olmak üzere ϕ 'yi

$$\phi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} F\left(t - t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (3.39)$$

olarak alalım. Buradan $L\phi = 0$ olduğu sonucu çıkar ve

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.40)$$

olur. (3.38) ve (3.40) denklemlerini (3.37) denkleminde kullanarak

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau' + \int_{\Omega} f(\mathbf{r}', t) \phi d\tau' = \left(\int_C + \int_S \right) \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS'$$

buluruz. $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a kadar t 'ye göre integre edersek ve ψ , $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 'nin $t = \mp \infty$ için sıfır olduğunu varsayarsak, integrasyon sırasını değiştirerek

$$\int_{\Omega} d\tau' \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t) \phi dt \right) = \left(\int_C + \int_S \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dt \right\} dS' \quad (3.41)$$

buluruz. Böylece

$$\int_C \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dt \right\} dS' = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, t) F(t - t') dt + O(\varepsilon) \quad (3.42)$$

ve

$$\int_S \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dt \right\} dS' = \int_S \frac{dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}', t)}{\partial n} F\left(t - t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) dt \right\} \quad (3.43)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dt \right\} dS' \\ &= \int_S dS' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi(\mathbf{r}', t) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial n} \right] \right. \\ & \quad \left. F\left(t - t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

olur. Buraya kadar F fonksiyonunu keyfi almıştık. Şimdi

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\eta} & , \quad -\eta \leq x \leq \eta \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olduğunu varsayalım. O zaman ortalama değer teoremini kullanarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t) \phi dt = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f\left(\mathbf{r}', t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + \theta_1 \eta\right) \quad -1 \leq \theta_1 \leq 1$$

yi buluruz, öyleki

$$\int_{\Omega} d\mathbf{r}' \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t) \phi dt \right) = \int_{\Omega} f\left(\mathbf{r}', t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + \theta_1 \eta\right) \frac{dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.45)$$

olur. Benzer şekilde (3.42) 'dan

$$\int_C \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dt \right\} dS' = 4\pi \psi(\mathbf{r}, t' + \theta_2 \eta) \quad (3.46)$$

eşitliğini elde ederiz ($-1 \leq \theta_2 \leq 1$) ve (3.43) ve (3.44) denklemlerinden

$$\int_S \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dt \right\} dS' = \int_S \frac{dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \psi\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + \theta_3 \eta\right)}{\partial n} \quad (3.47)$$

ve

$$\int_S \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dt \right\} dS' = \int_S dS' \left\{ \psi \left(\mathbf{r}', t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + \theta_4 \eta \right) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi \left(\mathbf{r}', t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + \theta_4 \eta \right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial n} \right\} \quad (3.48)$$

denklemlerini elde ederiz. Burada $-1 \leq \theta_3, \theta_4 \leq 1$ 'dir. (3.45), (3.46), (3.47) ve (3.48) denklemlerini (3.41) denkleminde yerlerine yazarak ve $\eta \rightarrow 0$ alarak t' 'nü t ile değiştirdiğimizde

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{[f] d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\psi] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial n} \right\} dS \quad (3.49)$$

eşitliğini buluruz. Burada $[f]$, f fonksiyonunun $t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ anındaki değerini gösterir. Özellikle

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (S \text{ üzerinde})$$

koşulunu yerine getiren (3.35) denkleminin çözümü

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{[f] d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.50)$$

dir. $[f]$, f 'nin "gecikmiş değeri" olarak bilinir ve (3.50) denkleminin sağ tarafındaki ifade de "gecikmiş potansiyel" olarak adlandırılır.

3.4. RIESZ İNTEGRALLERİ

Burada (3.50) formülünün ispatını veren ve Marcel Riesz tarafından verilen bir metoda ait açıklamalarda bulunacağız. Ayrıca bu metodun Poisson denkleminin çözümüne nasıl uygulanacağını göstereceğiz. Riesz, bu konuda Riemann-Liouville integralinin iki genellemesini vermiştir.

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.51)$$

operatörü ile birleşik olan ilk genelleştirme

$$I^n \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{2^{1-n}}{\pi \cdot \Gamma(\frac{1}{2}n) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}n - 1)} \int_D \psi(\mathbf{r}', t') \cdot R^{n-4} \cdot d\tau' dt' \quad (3.52)$$

dir ve burada $d\tau' = dx' dy' dz'$, $R^2 = (t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ ve D, R=0 hiperyüzeyi ve $t' = 0$ hiperdüzlemi ile sınırlı hiperhacimdir. t zaman değişkeninin daima pozitif olduğu kabul edilir.

(3.52) integralinin temel özellikleri Riesz tarafından ispatsız olarak belirtilmiş, fakat teorik fizikte kullanımları için, yeterli koşullar altındaki bu sonuçların ispatları Copson tarafından verilmiştir. Eğer ψ fonksiyonu sürekli ise $I^n \psi$ integrali $R(n) > 2$ için n kompleks değişkeninin bir analitik fonksiyonudur. (3.52) Riesz integralinin karakteristik özellikleri

$$I^m I^n \psi = I^{m+n} \psi \quad (3.53)$$

$$L I^{n+2} \psi = I^n \psi \quad (3.54)$$

denklemleri ile belirtilir. Eğer ψ ve $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ t=0 da sıfır oluyorsa

$$I^{n+2} L \psi = I^n \psi \quad (3.55)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} I^n \psi = \psi \quad (3.56)$$

olur. (3.53) ve (3.54) denklemlerini karşılaştıırırsak L operatörünün I^{-2} olduğunu görürüz.

Özel olarak n=2 alırsak basit bir değişken dönüşümü ile

$$I^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t - |\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}'|} d\tau' \quad (3.57)$$

olduğu gösterilebilir. Burada integrali $0 \leq |\mathbf{r}'| \leq t$ üzerinden alacağız.

Bu sonuçların kullanımına ait bir örnek olarak, $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ ($t = 0$ da) başlangıç koşullarına bağlı, homogen olmayan

$$L \psi = I^{n+2} f \quad (3.58)$$

dalga denkleminin çözümünü bulma problemini alalım. Burada f ve $\frac{\partial f}{\partial t}$ 'nin sürekli olduğu varsayılır. (3.53) denkleminde

$$I^n \psi = I^{n+2} f$$

buluruz. Eğer, şimdi $n \rightarrow 0$ alırsak ve (3.56) ile (3.57) denklemlerinden

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}'|} d\tau'$$

denklemine uygun

$$\psi = I^2 f = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}'|} d\tau' \quad (3.59)$$

elde ederiz. Eğer L 'yi I^{-2} olarak alsaydık elde ettiğimiz (3.59) denklemi çözümdür.

Benzer iki boyutlu problem için Riesz ,

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_1^2 \quad (3.60)$$

operatörü ile birlikte

$$I_1^n \psi(\rho, t) = \frac{1}{2\pi \Gamma(n-1)} \int_{D_1} \psi(\rho', t') \cdot R_1^{n-3} \cdot dx' dy' dt' \quad (3.61)$$

integralini tanımlamıştır. Burada ρ , (x,y) düzlem vektörünü gösterir. Ayrıca $R_1^2 = (t - t')^2 - |\rho - \rho'|^2$, D_1 $t' = 0$ düzlemi ile sınırlı $x'y't'$ uzayındaki hacim ve $|\rho - \rho'| = (t - t')$ konidir. Bu integral

$$I_1^m I_1^n \psi = I_1^{m+n} \psi \quad (3.62)$$

$$L_1 I_1^{n+2} \psi = I_1^n \psi \quad (3.63)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} I_1^n \psi = \psi \quad (3.64)$$

özelliklerine sahiptir.

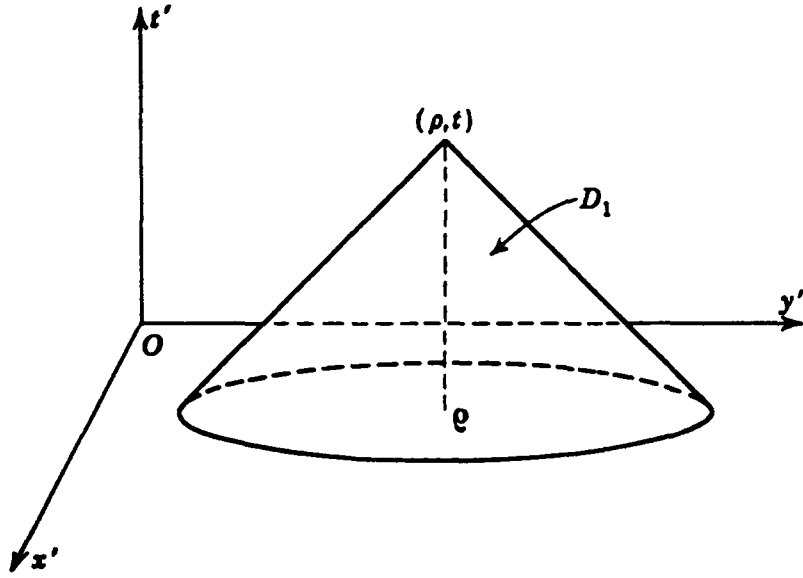
Homogen olmayan iki boyutlu

$$L_1 \psi(\rho, t) = f(\rho, t) \quad , \quad t > 0 \quad (3.65)$$

dalga denkleminin bir çözümü

$$\psi(\rho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \frac{\psi(\rho', t') dx' dy' dz'}{R_1} \quad (3.66)$$

dir.



Şekil 11.

İkinci Riesz integrali

$$J^n \psi(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{n}{2})}{2^n \cdot \pi^{\frac{3}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \int \frac{\psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3-n}} d\tau' \quad (3.67)$$

denklemleri ile tanımlanır. Burada integrasyon uzayın tamamında alınmıştır. ψ sürekli bir fonksiyon ve $J^n \psi$, n kompleks düzleminin $0 < R(n) < k$ şeridinde mevcut ise

$$J^m J^n \psi = J^{m+n} \psi \quad (3.68)$$

$$\nabla^2 J^{n+2} \psi = -J^n \psi \quad (3.69)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} J^n \psi = \psi \quad (3.70)$$

olur. Böylece

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r})$$

Poission denklemini çözmek gerekirse eşitliğin her iki yanına J^{n+2} uygularsak ve $n \rightarrow 0$ alırsak

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(r)d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.71)$$

haline gelen (3.60) denkleminde

$$\psi(\mathbf{r}) = 4\pi J^2 \rho(\mathbf{r})$$

buluruz.



S O N U Ç

Çalışmamızda mühendislikte ve fizikte kullanılan fakat çözümleri matematiksel olarak yapılan dalga denklemleri hakkında bilgi verildi. Dalga denkleminin çözümünü bazı kabullerle nasıl elde edeceğimiz incelendi ve bunun teorisi verildi. Bu çalışma, sınır ve başlangıç şartları değiştiğinde oluşan bir dalga denkleminin nasıl çözüleceği konusunda okuyucuya yol gösterecektir. Ayrıca integral dönüşüm yöntemi ve değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak dalga denkleminin çözümüne nasıl ulaşıldığı anlatıldı. Bundan yararlanılarak, karşılaşılan problemler için problemin yapısına göre çözüm yöntemi belirlenebilir.

Üç boyutlu problemler hakkında verilen bilgiler ileri düzeyde yapılacak başka çalışmalara ışık tutacaktır. Green fonksiyonlarının kullanılış şekli hakkında bilgi verilmiştir. Bu bilgiler kullanılması bazı problemlerin çözümlerine kolayca ulaşmayı sağlar. Ayrıca homojen olmayan dalga denklemleri hakkında da bilgiler verilmiştir.

K A Y N A K L A R

1. SNEDDON,Ian,1957,
Elements of Partial Differential Equations,TOKYO,CCN:56-6972.
2. USER ,A.Fahri,1985
Temel Fizik ;Dalgalar.Geometrik ve Fizik Optik,cilt 2,İstanbul.



Ö Z G E Ç M İ Ş

Adı Soyadı : İ.Murat TURHAN
Doğum Tarihi : 10 Temmuz 1971
Doğum Yeri : İstanbul
İlk Öğrenimi : 1982 yılında Erenköy Zihni Paşa İlkokulundan mezun oldu.
Orta Öğrenimi : 1988 yılında Göztepe 50.Yıl Tahran Lisesinden mezun oldu.
Yüksek Öğrenimi : 1989 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1993 yılında tamamladı
Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.