

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sandviç Plak, Stabilité Hesabı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sinan Akgün

1989

RE
İN
15
15

150
164

15.000

-YILDIZ ÜNİVERSİTESİ-

-

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SANDVIÇ PLAKLARIN STABİLİTE HESABI

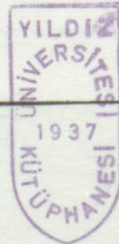
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞ. MÜH. SİNAN AKGÜN

İSTANBUL - 1989

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 150
164
Alındığı Yer : FEN. BİL. ENS.
Tarih : 18.10.1991
Fatura : - - - - -
Fiyatı : 18. 000. TL.
Ayniyat No : 1/15
Kayıt No : 47756
UDC : 624. 378.242
Ek :



-YILDIZ ÜNİVERSİTESİ-

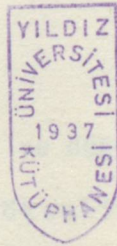
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
D.B. No. 45533

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SANDVIÇ PLAKLARIN STABİLİTE HESABI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞ. MÜH. SİNAN AKGÜN



İSTANBUL - 1989

Çalışmalarına yön veren ve değerli yardımlarını esirgemeyen
Sayın Doç. Dr. Türkân Köksal'a teşekkürlerimi sunarım.

Sinan Akgün

İnş. Müh.

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

SUMMARY

Sayfa No:

Bölüm 1-

1.	:GİRİŞ	1
1.1	:KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI	1
1.1.1.	:Stabilitenin tarifi ve önemi	1
1.1.2.	:Plaklarda stabilite sınırının bulunması ile ilgili metodlar	2
1.2	:PLAKLARDA DEPLASMAN DEFORMASYON VE ELASTİSİTE BAĞINTILARI, KESİT TESİRLERİ VE MEMBRAN Denge DENKLEMLERİ	3

Bölüm 2-

2.	:İZOTROP PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMLERİNİN BULUNMASI	6
2.1.	:BURKULMA YÜZEYİ DİFFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI	6
2.1.1.	: N_x ve N_y kuvvetlerinin z eksenindeki izdüşümleri	9
2.1.2	: N_{xy} ve N_{yx} kuvvetlerinin z eksenindeki izdüşümleri	9
2.1.3.	:Kesme kuvvetlerinin etkisi	10
2.1.4	:Toplam denge denklemleri	11
2.2.	:İZOTROP BİR PLAKTA STABİLİTE DENKLEMİNİN ENERJİ METODU İLE ÇIKARILMASI	12
2.2.1.	:Eğilme momentleri tarafından yapılan iş	12
2.2.2	:Burulma momentleri tarafından yapılan iş	13
2.2.3.	:Plağın ortalama düzlemine tatbik edilen kuvvetlerde bu düzlemin şekil değiştirmesinden ileri gelen enerji	14

2.2.4.	:Toplam potansiyel enerji	15
2.2.5.	:Eğilme şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu	17
2.2.6	:Membran şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu	18
2.2.7.	:Toplam potansiyel enerjinin minimum olma koşulu ve euler denklemi	23

Bölüm 3:

3.	:SANDVIÇ PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI	26
3.1.	:SANDVIÇ PLAK ELASTİSİTE SABİTLERİ KULLANILARAK PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI	26
3.1.1.	:Sandviç plak elastisite sabitlerinin bulunması	26
3.1.2.	:Sandviç plaklarda M_x , M_y , M_{xy} ifadelerinin bulunması	27
3.1.3.	:İfadelerin yerine konulması sonucu elde edilen, sandviç plak differansiyel denklemi	27
3.1.4.	:Pratik Uygulamalar	29

Bölüm 4:

:Sayısal Uygulamalar	33
----------------------	----

Bölüm 5:

:Sonuçlar	42
:Kaynaklar	45
:Özgeçmiş	46

Ö Z E T

Bu çalışmada Sandviç kesitli plakların kendi düzlemi içindeki yükler altında stabilite çözümleri yapılmıştır. Bu çözümlerde Flugge'nin anizotrop silindirik kabuklar içinde uygulamış olduğu rijitlik parametreleri kullanılmıştır. Çözümler seriler ile yapılmıştır. Konuyu daha iyi açıklamak ve hesapları kolaylaştırmak amacıyla basit mesnetli dikdörtgen plak ele alınıp, örnekler çözülmüştür.

Birinci bölümde; çalışmanın amacı, konu ve konu ile ilgili çalışmalara toplu bir bakış verilmiştir.

İkinci bölümde; izotrop plaklar için stabilite denklemi bulunmuştur. Bunun için denge denklemleri ve enerji metodu kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde; rijitlik parametreleri bulunmuş, sandviç kesitli plak için stabilite denklemi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde; sayısal örnekler verilmiştir, karşılaştırmalar yapılmıştır.

Son bölümde; sonuçlar ve kaynaklar yer almıştır.

SUMMARY

In this work, the general stability solutions of plywood shells have been done lengthwise and both two directions under external loads. Flugge's rigidity parameters for anisotropic cylindrical shells used in this solution.

Solutions easier, the simple supported quadrangle shells are used and examples are solved.

In the introduction which also forms the first chapter, the aim of the work, the subject and a broad outline of the related work has been given.

In the second chapter, stability equation for the isotropic shells are found, for this solution energy method and equality equation are used.

In the third chapter, rigidity parameters founded, and stability equations for plywood shells written.

In the fourth chapter numerical examples are given. In the final chapter of the work the results and references take place.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI:

1.1.1. STABİLİTENİN TARİFİ VE ÖNEMİ:

h kalınlığı kenar boyları yanında küçük olan bir plak orta düzlemi içinde ve kendi arasında dengede bulunan kenar kuvvetlerinin tesiri altında bir levha olarak zorlanır. Plak bütün kenarları boyunca mesnetlenmiş olup, bu tesbit tarzı plak noktalarının plak orta düzlemi içindeki yer değiştirmelere mani olmayacak şekildedir.

Bu kenar gerilmeleri plakta bir düzlem gerilme hali meydana getirir. Bu arada plak orta düzlemi içinde, keyfi doğrultuda tesir eden basınç gerilmeleri teşekkül eder. Kenar kuvvetleri belirli bir değere eriştiğinde, plağın dengesi stabil olmaktan çıkabilir.

Bu düzlem denge formunun yanı sıra, ona sonsuz yakın, fakat kubbeleşmiş en az bir denge formunun daha mevcut olması halinde, plağın dengesi farksız olur. Bu takdirde plak, bu kritik yük değerleriyle kendi stabilite sınırına erişir.

Bu çalışmanın amacı: Genellikle kendi düzlemindeki kenar kuvvetlerinin tesiri altında bulunan plakların stabilite sınırının bulunmasıdır. Bu sınırların bulunmasında burkulma yüzeyi diferansiyel denkleminin integrasyonu ve enerji metodlarını kullanacağız. Çalışmada çözümleri seriler yardımı ile yapacağız.

Stabilitenin büyük bir pratik önemi mevcuttur. Umumiyetle bir plak, kenar kuvvetlerinin kritik değerlerin üzeri-

ne çıkması halinde tahammül edebilir. Buna benzer bir durum aksenel olarak yüklenmiş elastik bir burkulma çubuğunda da mevcuttur. Fakat çubukta pratik olarak, kuvvetin stabilite sınırını ancak cüz'i bir miktar aşabilmesi mümkündür. Zira ufak kuvvet artmalarında eğilmeler ve ilave eğilme gerilmeleri çok çabuk büyür.

Plaklarda ise, ekseriya taşıma kabiliyetini tam olarak kaybetmeden evvel plak önemli bir kuvvet artmasına karşılayabilir. Kritik üstü olan bu bölgenin çok ince plaklarda pratik önemi mevcuttur. (Uçak inşaatı)

Fakat yüksek yapı ve köprü inşaatlarında, plakların taşıma kabiliyeti sınırı olarak, stabilite sınırı dikkate alınmalıdır. Çünkü burkulmuş kalın plaklarda, bu sınır aşılacak olursa çok çabuk ve tehlikeli cinsden gerilme halleri teşekkül eder.

1.1.2. PLAKLARDA STABİLİTE SINIRININ BULUNMASI İLE İLGİLİ

METODLAR:

A) BURKULMA YÜZEYİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU: (KESİN METOD)

Burkulma yüzeyinin denklemi denge mülahazasından veya enerji metodu yardımı ile bulunabilir. Bu denklemin her sefer cari sınır şartları dikkate alınarak integrasyonu yapıldığı takdirde, stabilite sınırını kesin olarak bulmak mümkün olur. Fakat bu diferansiyel denklemin çözümü sadece belirli yük değerleri ve sonsuz derece küçük eğilmeli denge halleri için mevcuttur.

B) ENERJİ METODU: (YAKLAŞIK ÇÖZÜM)

Pratik bakımdan önemli birçok problemlerde burkulma yüzeyinin diferansiyel denklemini integre etmeksizin yaklaşık bir çözüm bulunabilir. Stabilite probleminin yaklaşık çözümünde enerji metodu çok sık kullanılır.

1.2. PLAKLARDA DEPLASMAN-DEFORMASYON VE ELASTİSİTE

BAĞINTILARI-KESİT TESİRLERİ VE MEMBRAN DENGE

DENKLEMLERİ:

DEPLASMAN-DEFORMASYON BAĞINTILARI:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$K_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$K_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$K_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ELASTİSİTE BAĞINTILARI VE BÜNYE DENKLEMLERİ:

$$\sigma_x = H (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = H (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

(1.2)

$$\tau_{xy} = H \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}$$

Burada: $H = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$ dir.

KESİT TESİRLERİ :

$$N_x = C (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$N_y = C (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$N_{xy} = C \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}$$

(1.3)

$$M_x = D (K_x + \nu K_y)$$

$$M_y = D (K_y + \nu K_x)$$

$$M_{xy} = D (1 - \nu) K_{xy}$$

Burada: $C = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)}$

$D = \frac{Eh^3}{(1 - \nu^2) 12}$ dir.

MEMBRAN DENGİ DENKLEMLERİ:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -P_x$$

(1.4)

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -P_y$$

B Ö L Ü M 2

İZOTROP PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI

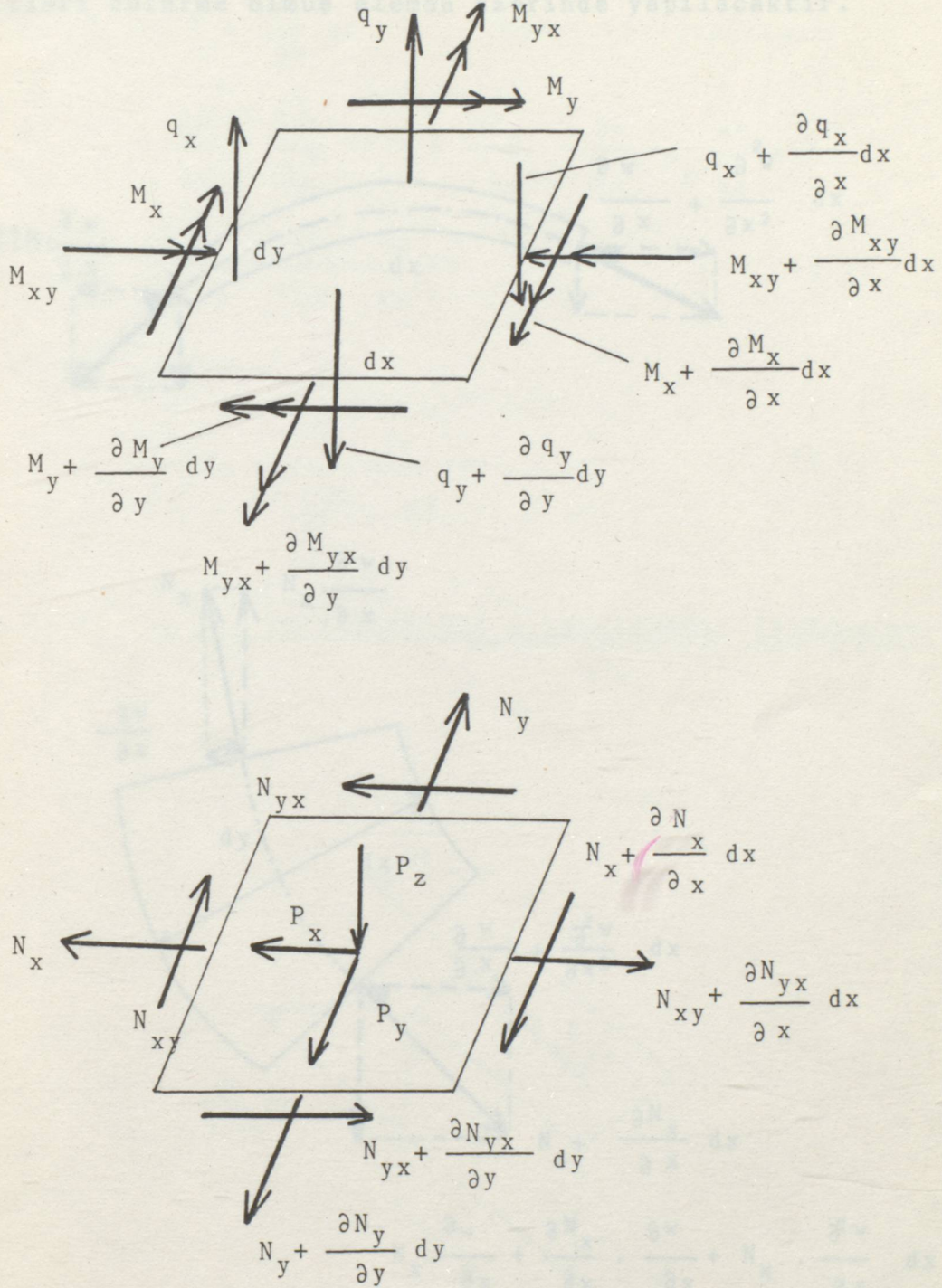
2.1. DENGE MÜLAHAZASINDAN YARARLANARAK BURKULMA YÜZEYİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI :

Kenar kuvvetleriyle levha olarak zorlanan düzlem bir plak göze alalım. Plağın mesnetlenme hali, plak noktalarının ortalama düzleme paralel olarak yer değiştirme yapmalarına mani olmayacak şekilde olmalıdır.

Levha tesirinden dolayı, h plak kalınlığına düzgün olarak yayılan σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri elde edilir. Bunların kesit uzunluğunun birim boyuna isabet eden toplamaları: $N_x = h \cdot \sigma_x$, $N_y = h \cdot \sigma_y$, $N_{xy} = N_{yx} = h \cdot \tau_{xy}$ olsun (2.1)

Plağın kenar kuvvetleri plak stabilite sınırına ulaşmaya kadar arttırılsın. Bu takdirde düzlem denge durumunun yanı sıra, buna sonsuz yakın en az bir $w(x,y)$ denge konumu mevcuttur. Burada son derece küçük eğilmeler söz konusu olduğundan, kubbe şeklindeki denge konumuna geçiş esnasında, plak ortalama yüzeyinin şekil değiştirmeleri ve N_x , N_y , N_{xy} ve N_{yx} kesit kuvvetlerinde meydana gelen değişimler dikkate alınmaz.

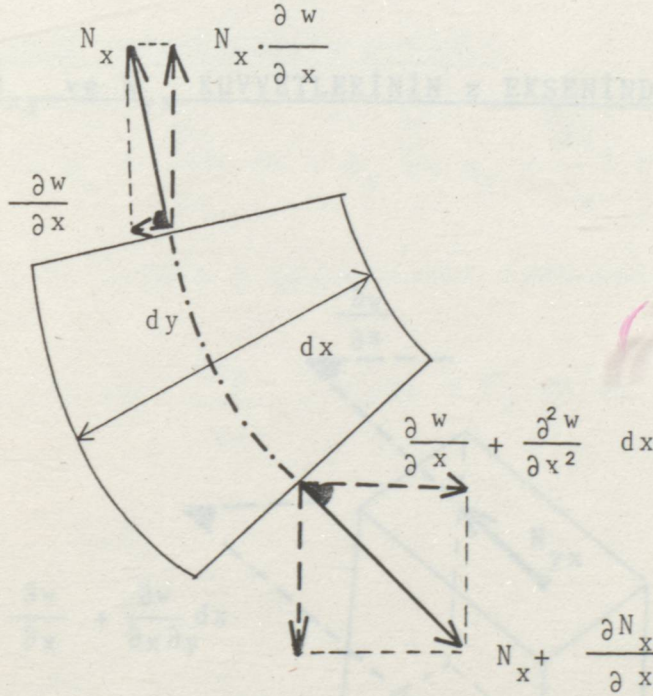
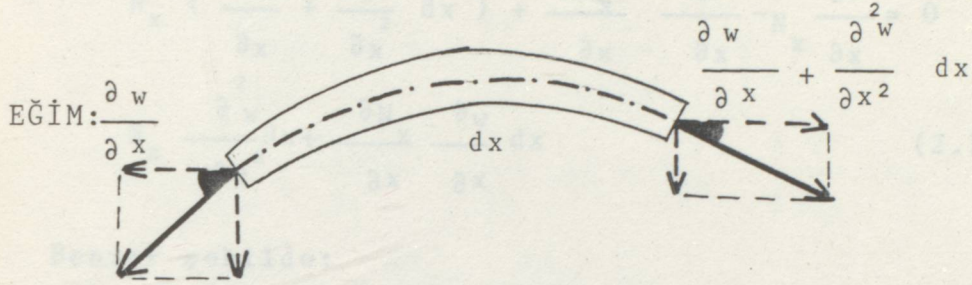
Plak ortalama yüzeyinin eğriliğinden dolayı, (1.3) denklemlerinden görüleceği gibi (M_x, M_y) eğilme momentleri, (M_{xy}, M_{yx}) burulma momentleri ve (q_x, q_y) kesme kuvvetleri teşekkül eder. Bu kesit büyüklükleri, deforme olmamış $dx \cdot dy \cdot h$ plak elemanının ortalama yüzeyindeki gerilme halinin değişmesi dikkate alınarak ŞEKİL 2. de gösterilmiştir.



- ŞEKİL 2 -

(DEFORME OLMAMIŞ dx , dy .h PLAK ELEMANININ GERİLME HALİNİN DEĞİŞMESİ DİKKATE ALINARAK GÖSTERİLMESİ)

Bütün stabilite çalışmalarında olduğu gibi denge şartları deforme olmuş eleman üzerinde yapılacaktır.



$$N_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$$N_x \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

2.1.1. N_x ve N_y KUVVETLERİNİN z EKSENİNDEKİ İZDÜŞÜMLERİ:

$$N_x \text{ ve } N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx$$

Kesit kuvvetlerinden:

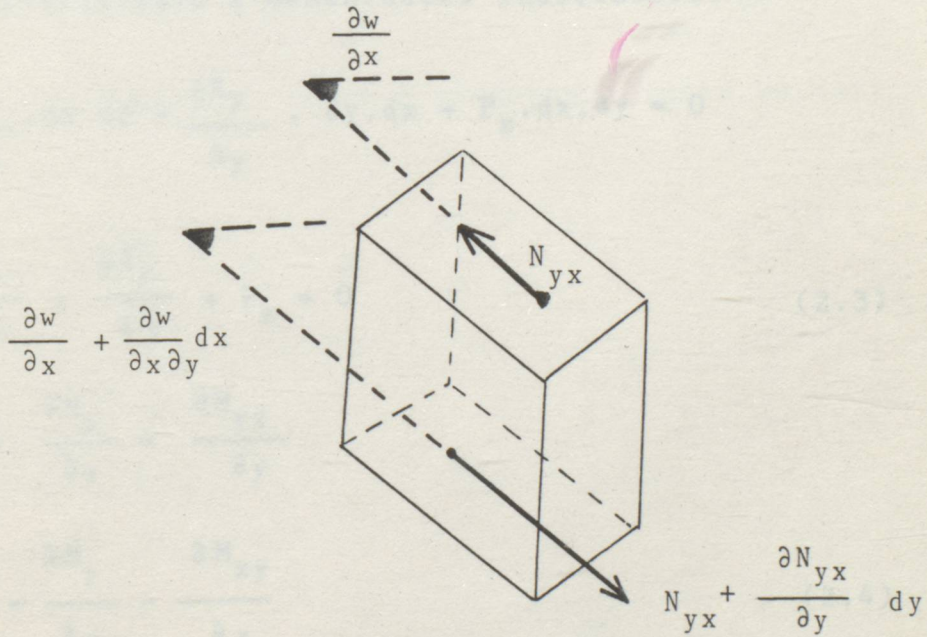
$$N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

Benzer şekilde:

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (2.2)$$

2.1.2. N_{xy} ve N_{yx} KUVVETLERİNİN z EKSENİNDEKİ İZDÜŞÜMLERİ:



ŞEKİL 4

N_{yx} 'in z eksenindeki izdüşümünden $-N_{yx} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ yüzey

kuvveti bulunur.

$$(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot dy) \text{ den ise:}$$

$$(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot dy) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy \right)$$

$$(N_{yx} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot dy + N_{yx} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy)$$

$$N_{yx} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dy$$

N_{xy} 'de benzer şekilde yazılır.

2.1.3. KESME KUVVETLERİNİN ETKİSİ:

$$q_x \text{ ve } q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx, q_y \text{ ve } q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy$$

Kesme kuvvetlerinin z eksenindeki izdüşümleri:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + P_z \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + P_z = 0 \quad (2.3)$$

$$q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.4)$$

(2.4) denklemindeki kesme kuvvetlerini (2.3) de yerine koyarsak:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -P_z$$

$M_{xy} = M_{yx}$ olduğuna göre :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P_z \quad \text{bulunur.} \quad (2.5)$$

2.1.4. TOPLAM DENGİ DENKLEMLERİ :

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy + \left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx + \left(N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dy \right) dx +$$

$$\left(N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dy + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx +$$

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} dx dy = 0$$

(1.4) denklemlerinden; x ve y yönlerinde hacim kuvveti yoksa:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + P_x = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y = 0$$

Dolayısıyla:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

olmalıdır.

Bu takdirde toplam denge şu şekilde olur:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -P_z \quad (2.6)$$

Burada:

$$\beta_x = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\beta_y = - \frac{\partial w}{\partial y}$$

Eğrilik notasyonları kullanırsak:

$$\begin{aligned} & M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy} \\ & -N_x \cdot \beta_{x,x} - N_y \cdot \beta_{y,y} - N_{xy} \cdot \beta_{y,x} - N_{yx} \cdot \beta_{x,y} - P_z \\ & M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy} \\ & -N_x \cdot \beta_{x,x} - N_{xy} (\beta_{y,x} \cdot \beta_{x,y}) - N_y \cdot \beta_{y,y} = -P_z \quad (2.8) \end{aligned}$$

2.2. İZOTROP BİR PLAKDA STABİLİTE DENKLEMİNİN ENERJİ METODU İLE ÇIKARILMASI:

2.2.1. EĞİLME MOMENTLERİ TARAFINDAN YAPILAN İŞ:

$M_x dy$ ve $M_y dx$ momentlerinin yaptıkları işler hesaplanır. Elemanın yüzleri düzlem kaldığından eğilmeden sonra, buna tekabül eden yüzdeki açının çarpımının yarısı alınarak bulunur. (1/2 katsayısı etkinin yavaş yavaş arttığı ve şekil değiştirme ile iç kuvvetler arasında orantılık olduğu için

mevcuttur.)

$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ yaklaşık olarak plağın xz düzlemindeki eğriliği olduğundan, bu momentler tarafından yapılan iş:

$$-\frac{1}{2} M_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \quad (2.9)$$

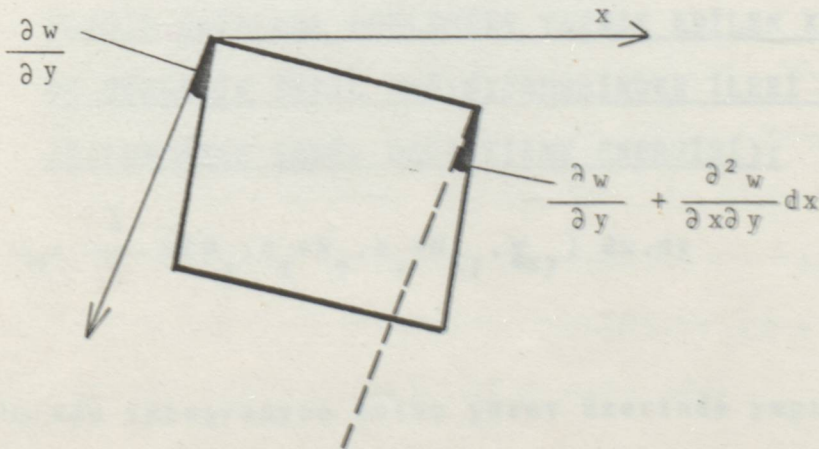
Aynı şekilde $M_y \cdot dx$ momentleri tarafından yapılan işte bu şekilde bulunur. O halde $M_x \cdot dy$ ve $M_y \cdot dx$ momentleri tarafından yapılan toplam iş:

$$-\frac{1}{2} (M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) dx \cdot dy \quad (2.10)$$

(1.1) ve (1.3) denklemlerinden :

$$\begin{aligned} U_{\text{eğilme}} &= \frac{1}{2} \{ D K_x (K_x + \nu K_y) + K_y (K_y + \nu K_x) \} dx \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} D \{ K_x^2 + 2\nu K_x K_y + K_y^2 \} dx \cdot dy \quad (2.11) \end{aligned}$$

2.2.2. $M_{xy} \cdot dy$ BERULMA MOMENTLERİ TARAFINDAN YAPILAN İŞ:



-ŞEKİL 5-

Burulma momentleri tarafından meydana gelen işi ifade ederken; buna tekabül eden açısı: (Şekil 5) den:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx$$

$M_{xy} \cdot dy$ 'den ileri gelen şekil değiştirme enerjisi:

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \cdot dy \quad (2.12)$$

Aynı enerji $M_{yx} \cdot dx$ momentleri tarafından da meydana gelir. O halde $M_{xy} \cdot dy$ ve $M_{yx} \cdot dx$ momentleri tarafından meydana gelen toplam iş:

$$U_{\text{burulma}} = M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \cdot dy \quad (2.13)$$

(1.1) ve (1.3) denklemlerinden:

$$U_{\text{burulma}} = D (1-\nu) K_{xy}^2 \quad (2.14)$$

Toplam eğilme enerjisi:

$$U_B = \frac{D}{2} \iint (K_x^2 + K_y^2 + 2K_x K_y + 2(1-\nu) K_{xy}^2) dx \cdot dy \quad (2.15)$$

Not: Burada integrasyon tüm plak yüzeyi üzerinde yapılacak.

2.2.3. PLAĞIN ORTALAMA DÜZLEMİNE TATBİK EDİLEN KUVVETLERLE BU DÜZLEMİN ŞEKİL DEĞİŞTİRMESİNDEN İLERİ GELEN ENERJİ: (MEMBRAN ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİ):

$$U_M = \frac{1}{2} \iint (N_x \cdot \epsilon_x + N_y \cdot \epsilon_y + N_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dx \cdot dy \quad (2.16)$$

Not Burada integrasyon bütün yüzey üzerinde yapılacaktır.

(1.3) denklemlerinden:

$$U_M = \frac{C}{2} \iint (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y + \frac{(1-\nu)^2}{2}\gamma_{xy}^2) dx.dy \quad (2.17)$$

2.2.4. TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ:

$$V = U + \Omega \quad (2.18)$$

U=Şekil değiştirme enerjisi

Ω =Dış kuvvetlerin işi

Ortalama düzlemdeki kuvvetlerin tesirine maruz plağın verilmiş sınır şartlarına uygun olan küçük bir yanal eğilme maruz kaldığını kabul ederiz. Böyle bir sınırlı eğilme, ortalama düzlemşekil değiştirmeden hasıl olabilir. Yalnız eğilme enerjisi ve buna tekabül eden kuvvetlerin yaptığı işi göz önüne almak gerekir.

Plağın düzlemde, sonsuz derece az kubbuleşmiş denge konumuna geçişi esnasında, V toplam potansiyel enerjide meydana gelen ΔV değişimi için:

$$V = U + \Omega \quad \Delta V = \Delta(U + \Omega) = 0$$

$$\Delta V = \text{Minimum} \quad (2.19)$$

bağıntıları mevcuttur.

Stabilite problemi bir varyasyon problemi olarak tasvir edilebilir. Orta düzlemde kenar ve hacim kuvvetleri ile yüklü olan bu plağa, düzlem konumu dışında geometrik olarak mümkün fakat çok küçük olan bir yer değiştirme verdirilecek olursa, virtüel yer değiştirmeler prensibine göre: Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş δU işine eşit olur.

$$\Delta V = \Delta (U + \Omega) \quad , \quad \delta V = \delta (U + \Omega) \quad (2.20)$$

Bu denklem plağın düzlem denge durumundan farklı bir virtüel yer değişimi esnasında potansiyel enerjideki değişimin (Yüksek mertebeden sonsuz küçükler ihmal ediliyor) (0) olduğunu ifade eder. Yani sadece başlangıç durumu bir denge durumudur. Fakat stibilite sınırında plağı (sonsuz) yakın bir denge durumuna götüren ve bu arada potansiyel enerjiyi ikinci mertebeden sonsuz küçüklerle kadar değişmeyen en az bir yer değiştirme sistemi için:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V \quad (2.21)$$

Minimum

bağıntısı geçerlidir.

Gerçek sisteme sonsuz yakın ikinci bir konumda, toplam potansiyel enerjinin minimum olması, deplasman ve gerilmele-
rin gerçek denge konumuna karşılık gelen değerler aldığını gösterir.

İşte esas problemde bu toplam potansiyel enerjiyi ext-
rem yapan konumun bulunmasına indirgeniyor.

Özet olarak:

Toplam potansiyel enerjideki değişimin 1. varyasyonu bizi denge denklemine, 2. varyasyonu stabilite denklemine götürür. Toplam potansiyel enerjinin minumum olması için gerekli şart 1. varyasyonun (0), 2. varyasyonun sıfırdan büyük olması gerekir.

$$\left. \begin{array}{l} \delta V = 0 \\ \frac{1}{2!} \delta^2 V > 0 \end{array} \right\} \text{ ise } V \text{ min. dur.}$$

2.2.5. EĞİLME ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİNİN 2. VARYASYONU:

$$U_b = \frac{D}{2} \iint (K_x^2 + K_y^2 + 2K_x K_y + 2(1-\nu) K_{xy}^2) dx \cdot dy$$

$$u \rightarrow u_0 + u_1$$

$$v \rightarrow v_0 + v_1$$

$$w \rightarrow w_0 + w_1$$

(2.22)

u_0, v_0, w_0 Denge konumuna karşılık gelen deplasmanlar.

u, v, w İkinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük virtüel artımlar.

$$K_{x0} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$K_{y0} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$K_{xy0} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

(2.23)

u, v, w deplasmanları yerine (2.22) deki değerlerini koyarak ve (2.23) notasyonlarını kullanarak ikinci konumu elde etmeye çalışalım;

$$U_b + \Delta U_b = \frac{D}{2} \iint [K_{x0}^2 + 2K_{x0} K_{x1} + K_{y0}^2 + 2K_{y0} K_{y1} + K_{y1}^2 + K_{x1}^2 + 2(K_{x0} K_{y0} + K_{x0} K_{y1} + K_{x1} K_{y0} + K_{x1} K_{y1}) + 2(1-\nu)(K_{xy1}^2 + 2K_{xy0} K_{xy1} + K_{xy0}^2)] dx \cdot dy \quad (2.24)$$

Burada :

$\frac{1}{2} \delta^2 U$ değeri (1) indisli kemiyetlerin ikinci derece olan terimlerin toplanmasıyla elde edilir.

$$\frac{1}{2} \delta^2 U_b = \frac{D}{2} \iint [K_{xy1}^2 + K_{y1}^2 + 2K_{x1} K_{y1} + 2(1-\nu) K_{xy1}^2] dx \cdot dy \quad (2.25)$$

2.2.6 MEMBRAN ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİNİN 2. VARYASYONU:

$$U_M = \frac{1}{2} \iint (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}^2) dx \cdot dy \quad (2.25)$$

(1.1) deformasyon-deplasman bağıntılarından yararlanıp gerekli operasyonları yaparsak:

$$\epsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.26)$$

$$\epsilon_y^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x \epsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Bu denklemleri (2.7) de yerlerine koyarsak:

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{C}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \\ &\left. + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2v \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \Big] \\
 & + \frac{1-v}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right. \\
 & + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \\
 & + 2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \\
 & \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] \Big\} dx \cdot dy
 \end{aligned}$$

Yukarıda $u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1$ değerleri yerlerine konarak $U_M + \Delta U_M$ elde edildi. Bundan u_0, v_0, w_0 deplasmanlarından oluşan denge konumundaki değerleri çıkarırsak enerjideki ΔU değişimini elde ederiz. $\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U$

Burada $\frac{1}{2!} \delta^2 U$ 'nun değeri (1) indisli kemiyetlerin 2.

derece olan terimlerin toplanması ile elde edilir. ($w_0 \equiv 0$)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!} \delta^2 U_M &= \frac{C}{2} \int \int \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 2v \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{(1-\nu)}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right] dx \cdot dy \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 U_M = & \frac{C}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \nu \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right. \\ & + \frac{(1-\nu)}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 \right] \Big\} dx \cdot dy \\ & + \frac{C}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)}_{N_{x0}/C} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}_{N_{y0}/C} \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \underbrace{\left(\frac{1-\nu}{2} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right)}_{N_{xy0}/C} \right] dx \cdot dy \quad (2.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \frac{C}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right. \\ & + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 \right] \Big\} dx \cdot dy \\ & + \frac{1}{2} \iint \left[N_{x0} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + N_{y0} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy0} \left(\frac{w_1}{x} \frac{w_1}{y} \right) \right] dx \cdot dy \quad (2.32) \end{aligned}$$

(2.32) denkleminde 2. İntegral dış kuvvetlerin (plak düzlemindeki levha kuvvetlerinin) yaptığı işi göstermektedir. Çünkü kabulumüzdeki orta düzleme dik kuvvet yoktur ve plak kendi düzlemi içindeki kuvvetler tarafından zorlanmaktadır.

0 halde toplam potansiyel enerji ifadesi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \iint (N_{x0} \cdot \beta_{x1}^2 + N_{y0} \cdot \beta_{y1}^2 + 2N_{yxo} \cdot \beta_{x1} \cdot \beta_{y1}) dx \cdot dy + \frac{D}{2} \iint [K_{x1}^2 + K_{y1}^2 + 2\nu K_{x1} \cdot K_{y1} + 2(1-\nu)K_{xy1}^2] dx \cdot dy \quad (2.33)$$

Bu ifade minumum yapılmalıdır.

(2.33) Toplam potansiyel enerji ifadesini başka şekilde de ifade edebiliriz;

ΔA_i = Şekil değiştirme enerjisi

$$\Delta A_i = A_i' + A_i'' \quad (2.34)$$

$A_i \rightarrow N_x, N_y$ ve N_{xy} iç kuvvetleri ile kubbeleşme esnasında meydana gelen ilave ϵ_x, ϵ_y boy değişimleri ve γ_{xy} açılma değişiminden meydana gelen iş.

$$\Delta A_i' = \iint (N_x \cdot \epsilon_y + N_y \cdot \epsilon_x + N_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dx \cdot dy \quad (2.35)$$

Not: N_x, N_y ve N_{xy} iç kuvvetleri kubbeleşmenin başlangıcında tam değerlerini almış olduğundan 1/2 faktörü silinir.

ϵ_x, ϵ_y ve γ_{xy} yerine (1.1) deki değerlerini yazalım;

$$\Delta A_i' = \iint \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx \cdot dy \quad (2.36)$$

Daha önce eğilme enerjisi ifadesini bulmuştuk. (2.15). Bu ifadeyi düzenlersek:

$$A_i^m = D \iint \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \quad (2.37)$$

İç kuvvetlerin yaptığı iş (2.34)'e göre: (2.36) ve (2.37) denklemlerinin toplamlarından bulunur. Buna göre:

Toplam potansiyel enerji:

$$\begin{aligned} \Delta V = \iint \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx \cdot dy \\ + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy - \Delta A_a = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Burada ΔA_a dış kuvvetlerin işini göstermektedir.

(2.38) denkleminde plağın kubbeleşmesi esnasında meydana gelen ilave düzlem şekil değiştirmelerden dolayı u ve v bilinmeyen yer değiştirme bileşenleri bulunur. Bunları götürmek için düzlem bir virtüel yer değiştirme dikkate alalım. Bu durumda plak noktaları sadece ortalama yüzeye paralel olan u ve v yer değiştirmelerine maruz kalırlar. Yani plak noktaları u, v, (w=0) virtüel yer değişimi yaparlar.

Dolayısıyla:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{olur.}$$

Buradan (2.35)'e göre levha kuvvetlerinden meydana gelen virtüel şekil değiştirme işi:

$$\Delta \bar{A}_i = \iint [N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] dx \cdot dy = \Delta \bar{A}_a \quad (2.39)$$

Virtüel iş prensibinde (2.38) e göre hesaplanan ΔA_a harici işi (2.39) da bulunan ΔA_a işine eşit olmalıdır.

(2.39) ifadesi (2.38) de yerine konulursa:

$$\begin{aligned} \Delta V = \frac{1}{2} \iint \{ N_x (\frac{\partial w}{\partial x})^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y (\frac{\partial w}{\partial y})^2 \\ + \frac{D}{2} \iint \{ (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 - 2(1-\nu) [\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2] \} dx \cdot dy = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2.40) ifadesi, (2.33) ifadesi ile çakışır.

2.2.7. TOPLAM POTANSİYEL ENERJİNİN MİNİMUM OLMA KOŞULU VE EULER DENKLEMİ:

ΔV toplam potansiyel enerjinin extrem bir değer alabilmesi için bu ifadenin 1. varyasyonunun 0 olması gerekir. Varyasyon hesabından bilindiğine göre, sınırlı integralin extrem (minimum) bir değer alabilmesi problemini, daima bir diferansiyel denkleme indirgemek mümkündür.

Varyasyon probleminin euler denklemi:

$$\Delta V = \int_F \Phi(w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) df =: 0(\min) \quad (2.41)$$

$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_y} \right)_x - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_y} \right)_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{xy}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}} \right) = 0 \quad (2.42)$$

Toplam potansiyel enerji denklemi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \iint (N_{x0} \cdot \beta_{x1}^2 + N_{y0} \cdot \beta_{y1}^2 + 2N_{xy0} \cdot \beta_{x1} \cdot \beta_{y1}) dx \cdot dy \quad (2.46)$$

şeklinde

$$\frac{D}{2} \iint [K_{x1}^2 + K_{y1}^2 + 2\nu K_{x1} \cdot K_{y1} + 2(1-\nu) K_{xy1}^2] dx \cdot dy$$

şeklinde idi.

(2.42) deki operasyonları yaparsak:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} [2N_{x0,x} \cdot \beta_x + 2N_{x0} \cdot \beta_{x,x} + 2N_{xy0,x} \cdot \beta_y + 2N_{xy0} \cdot \beta_{x,y} \\ & + 2N_{y0,y} \cdot \beta_y + 2N_{y0} \cdot \beta_{y,y} + 2N_{xy0,y} \cdot \beta_x + 2N_{xy0} \cdot \beta_{x,y} \\ & + \frac{D}{2} [2K_{x1,xx} + 2K_{y1,xx} + 4(1-\nu)K_{xy1,xy} + 2K_{y1,yy} + 2K_{x1,yy}] = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & - [N_{x0} \cdot \beta_{x,x} + N_{y0} \cdot \beta_{y,y} + N_{xy0} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) \\ & + \beta_x (N_{x0,x} + N_{xy0,y}) + \beta_y (N_{y0,y} + N_{xy0,x})] \\ & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_x} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_y} \\ & + D(K_{x1,xx} + K_{y1,yy} + 2K_{xy1,xy}) = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

x ve y yönlerinde hacim kuvvetleri yoktur. ($P_x=0$, $P_y=0$)

0 halde :

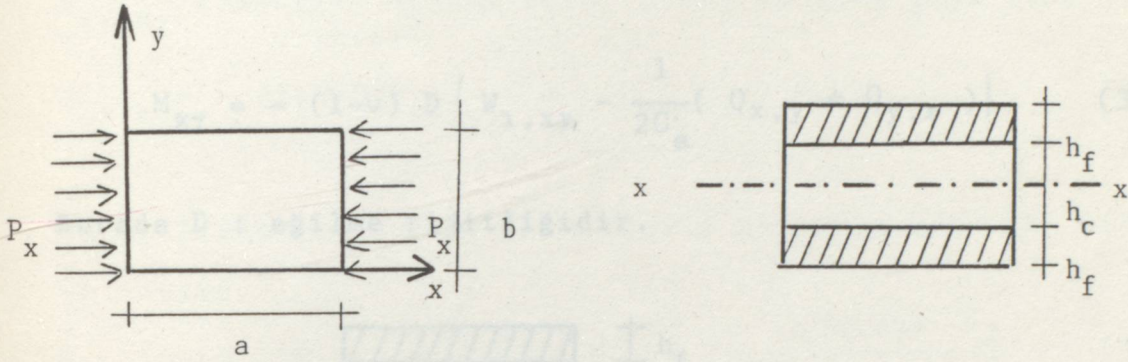
$$\begin{aligned} & D (K_{x1,xx} + 2K_{xy1,xy} + K_{y1,yy}) \\ & - [N_{x0} \cdot \beta_{x,x} + N_{y0} \beta_{y,y} + N_{xy0} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y})] = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Deplasmanlar cinsinden ifade edilirse:

3. SANDVIÇ PLAKLARIN STİBİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI

3.1. SANDVIÇ PLAK ELASTİSİTE SABİTLERİ KULLANARAK PLAKLARIN STİBİLİTE DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI:

3.1.1. Sandviç plak elastisite sabitlerinin bulunması



$$\beta_{xQ} = - \frac{Q_x}{C_Q}$$

Kesme kuvvetinden meydana gelen
dönme: β_{xQ} , β_{yQ}

$$\beta_{yQ} = - \frac{Q_y}{C_Q}$$

$$K_{xQ} = - \frac{Q_{x,x}}{C_Q}, \quad K_{yQ} = - \frac{Q_{y,y}}{C_Q}, \quad K_{xyQ} = - \frac{(Q_{x,y} + Q_{y,x})}{2C_Q}$$

Kesme kuvvetinden meydana gelen eğrilik: K_{xQ} , K_{yQ} , K_{xxQ}

$$K_x = -W_{1xx}, \quad K_y = -W_{1yy}, \quad K_{xy} = -W_{xy}$$

Eğilmeden meydana gelen eğrilik: K_x , K_y , K_{xy}

Toplam eğriliği yazarsak:

$$K_{xm} = - \left(W_{1xx} - \frac{Q_{x,x}}{C_Q} \right), \quad K_{ym} = - \left(W_{1yy} - \frac{Q_{y,y}}{C_Q} \right)$$

$$K_{xym} = - \left(W_{1xy} - \frac{Q_{x,y} + Q_{y,x}}{2C_Q} \right)$$

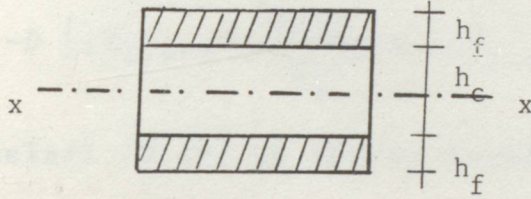
3.1.2. Sandviç plaklarda M_x , M_y , M_{xy} ifadelerinin bulunması:

$$M_x = -D \left[\left(W_{1,xx} - \frac{Q_{x,x}}{C_a} \right) + \nu \left(W_{1,yy} - \frac{Q_{y,y}}{C_a} \right) \right] \quad (3.11)$$

$$M_y = -D \left[\left(W_{1,yy} - \frac{Q_{y,y}}{C_a} \right) + \nu \left(W_{1,xx} - \frac{Q_{x,x}}{C_a} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu) D \left[W_{1,xy} - \frac{1}{2C_a} (Q_{x,y} + Q_{y,x}) \right] \quad (3.13)$$

Burada D : eğilme rijitliğidir.



Sadece eksene paralel 2 parçanın atalet momenti

$$D = \frac{E_f \cdot h_f}{2} (h_c + h_f)^2 \text{ şeklinde alınabilir.} \quad (3.14)$$

C_a : Kayma rijitliğidir.

yada:

$$C_a = G_c \cdot h_c \quad (3.15)$$

3.1.3 İfadelerin yerine konulması sonucu sandviç plak diferansiyel denkleminin elde edilmesi:

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_{x_0} W_{1,xx} + 2N_{xy_0} W_{1,xy} + N_{y_0} W_{1,yy} = 0 \quad (3.16)$$

$$Q_y = M_{y,y} + M_{xy,x} \quad (3.17)$$

$$Q_x = M_{x,x} + M_{xy,y} \quad (3.18)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x \cdot W_{1,xx} + 2N_{xy} \cdot W_{1,xy} + N_y \cdot W_{1,yy} = 0$$

$M_{x,xx}$ ifadesini bulmak için (3.11) in x 'e göre iki kere türevi alınır.

$$M_{x,xx} = -D \left[(W_{1,xxxx} - \frac{Q_{x,xxx}}{C_q}) + \nu (W_{1,yyxx} - \frac{Q_{y,yxx}}{C_q}) \right] \quad (3.20)$$

$M_{xy,xy}$ ifadesini bulmak için (3.13) ün xy 'e göre türevi alınır.

$$M_{xy,xy} = - (1-\nu)D \left[W_{xy,xy} - \frac{1}{2C_q} (Q_{x,yxy} + Q_{y,xyx}) \right] \quad (3.21)$$

$M_{y,yy}$ ifadesini bulmak için (3.12) nin y 'ye göre iki kere türevi alınır.

$$M_{y,yy} = -D \left[(W_{1,yyy} - \frac{Q_{y,yy}}{C_q}) + \nu (W_{1,xyy} - \frac{Q_{x,xyy}}{C_q}) \right] \quad (3.22)$$

bu ifadeleri (3.19) da yerine koyalım.

$$\begin{aligned} & -DW_{1,xxxx} + \frac{D \cdot Q_{x,xxx}}{C_q} - D\nu W_{1,yyxx} + D\nu \frac{Q_{y,yxx}}{C_q} - 2DW_{1,xyy} \\ & + \frac{2DQ_{x,xyy}}{2C_q} + \frac{2D}{2C_q} Q_{y,yxx} + 2\nu D \cdot W_{1,xyy} - \frac{2\nu D}{2C_q} Q_{x,xyy} \\ & - \frac{2\nu D}{2C_q} Q_{y,yxx} - DW_{1,yyy} + \frac{DQ_{y,yyy}}{C_q} - \nu DW_{1,yyxx} + \frac{D\nu Q_{x,xyy}}{C_q} \end{aligned}$$

$$+ N_x \cdot W_{1,xx} + 2N_{xy} \cdot W_{1,xy} + N_y \cdot W_{1,yy} = 0 \quad (3.221)$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa:

$$\begin{aligned} & -DW_{1,xxxx} + \frac{DQ_{x,xxx}}{C_q} - 2DW_{1,xyy} - DW_{1,yyy} + \frac{DQ_{y,yyy}}{C_q} + \frac{DQ_{x,xyy}}{C_q} \\ & + \frac{DQ_{y,yxx}}{C_q} + N_x \cdot W_{1,xx} + 2N_{xy} \cdot W_{1,xy} + N_y \cdot W_{1,yy} = 0 \end{aligned} \quad (3.222)$$

$$\nabla^2 W_1 = W_{1,xx} + W_{1,yy} \quad (3.23)$$

$$\nabla^4 W_1 = W_{1,xxxx} + W_{1,yyyy} + 2W_{1,xyxy} \quad (3.24)$$

$$D \nabla^4 W_1 - \frac{D}{C_0} \nabla^2 (Q_{x,x} + Q_{y,y}) - (N_{x_0} \cdot W_{1,xx} + 2N_{xy_0} W_{1,xy} + N_{y_0} \cdot W_{1,yy}) = 0 \quad (3.25)$$

$Q_{x,x} + Q_{y,y}$ ifadesini (3.16) dan

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} = N_{x_0} \cdot W_{1,xx} - 2N_{xy_0} \cdot W_{1,xy} - N_{y_0} W_{1,yy}$$

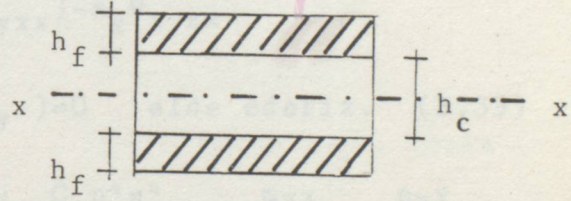
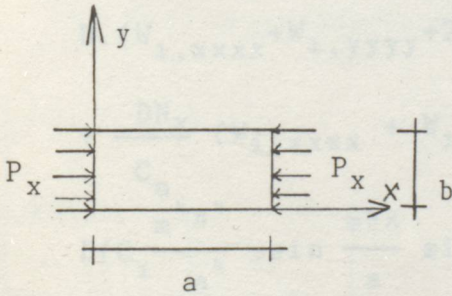
haline getirip (3.25) denkleminde yerine koyarsak:

$$D \nabla^4 W_1 - (1 - \frac{D \nabla^2}{C_0}) (N_{x_0} \cdot W_{1,xx} + 2N_{xy_0} \cdot W_{1,xy} + N_{y_0} \cdot W_{1,yy}) = 0 \quad (3.26)$$

Bu sandviç plakların genel stabilite denklemdir.

3.1.4. Pratik Uygulama

a) Tek doğrultuda etkiyen basınç yükü için:



Sınır şartları:

Dört taraftan basit mesnetli

$$x=0; a \quad W = W_{1,xx} = 0$$

$$y=0, b \quad W = W_{1,yy} = 0$$

$$P_x = -N_{x_0} \cdot b$$

$$N_{x_0} = - \frac{P_x}{b}$$

$$W_1 = C_1 \cdot \sin \frac{M \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

$M, n=1, 2, 3$ pozitif tam sayı

İstenen: Verilen sınır şartları için P_x burkulma kuvveti nedir?

Çözüm:

$$W = C_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.27)$$

$$W_{1,x} = C_1 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.28)$$

$$W_{1,xx} = C_1 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.29)$$

$$W_{1,xxxx} = C_1 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.30)$$

$$W_{1,y} = C_1 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.31)$$

$$W_{1,yy} = -C_1 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.32)$$

$$W_{1,yyyy} = C_1 \frac{n^4\pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.33)$$

$$W_{1,yyxx} = C_1 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.34)$$

(3.26) denklemini sınır şartlarına göre düzenlersek:

$$D \cdot (W_{1,xxxx} + W_{1,yyyy} + 2W_{1,yyxx}) - N_x W_{1,xx} + \frac{DN_x}{C_Q} (W_{1,xxxx} + W_{1,yyyy}) = 0 \quad \text{elde ederiz.} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & D \left(C_1 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{C_1 n^4\pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right. \\ & \left. + 2C_1 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) + N_x C_1 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + \frac{D}{C_Q} N_x \left(C_1 \frac{m^4\pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right. \\ & \left. + C_1 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) = 0 \end{aligned}$$

Burada $C, D \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ ortak terimlerdir.

Sadeleşirse:

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + N_x \left(\frac{m^2 \pi^2}{D a^2} + \frac{m^4 \pi^4}{C_Q a^4} + \frac{m^2 n^2 \pi^4}{C_Q b^2 a^2} \right) = 0 \quad (3.36)$$

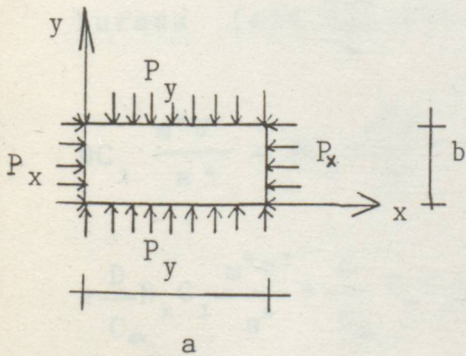
$N_x = - \frac{P_x}{b}$ yerine koyarsak:

$$P_x = \frac{b \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{1}{D} + \frac{m^2 \pi^2}{C_Q a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{C_Q b^2} \right)} \quad (3.37)$$

değişik bir ifadesi yazılırsa:

$$P_x = \frac{b \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{D a^2} + \frac{m^4 \pi^4}{C_Q a^4} + \frac{m^2 n^2 \pi^2}{C_Q a^2 b^2}} \quad (3.38)$$

b) Çift doğrultuda etkiyen basınç yükü için:



Sınır şartları:

Dört tarafından basit mesnetli

$$x=0; a \quad W=W_{xx}=0$$

$$y=0; b \quad W=W_{yy}=0$$

$$N_{x_0} = - \frac{P_x}{b}, \quad N_{xy_0} = 0, \quad N_{y_0} = - \frac{P_y}{a}$$

$N_y = R N_x$ kabul ediliyor.

R: Boyutsuz bir sabit

İstenen: P_x burkulma yükü.

Çözüm:

(3.26) ifadesinin açarsak

$$D \nabla^4 W_1 - N_x W_{1,xx} + \frac{D}{C_Q} N_x W_{1,xxxx} - N_y W_{1,yy} + D N_x W_{1,xyy} + \frac{D}{C_Q} N_y W_{1,xyy} + \frac{D}{C_Q} N_y W_{1,yyy} = 0$$

burada (3.27) den...3.33 deki) ifadeler yerlerine koyulur-
sa:

$$\begin{aligned} & D C_1 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + D C_1 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + 2 D C_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + N_x C_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + N_y C_1 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{D}{C_Q} N_x C_1 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + \frac{D}{C_Q} N_y C_1 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \end{aligned}$$

burada $(\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b})$ terimi sadeleşirse:

$$\begin{aligned} & D C_1 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + D C_1 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + 2 D C_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + N C_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + N C_1 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \\ & + \frac{D}{C_Q} N_x C_1 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{D}{C_Q} N_y C_1 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \frac{D}{C_Q} C_1 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} (N_x + N_y) = 0 \quad (3.39) \end{aligned}$$

burada $N_y = R \cdot N_x$ yerine koyarsak:

$$\begin{aligned} & D C_1 \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right]^2 = - N_x C_1 \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{D}{C_Q} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{R m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{R D}{C_Q} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \right. \\ & \left. (1+R) \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \right] \end{aligned}$$

, C_1 ve D sadeleşirse:

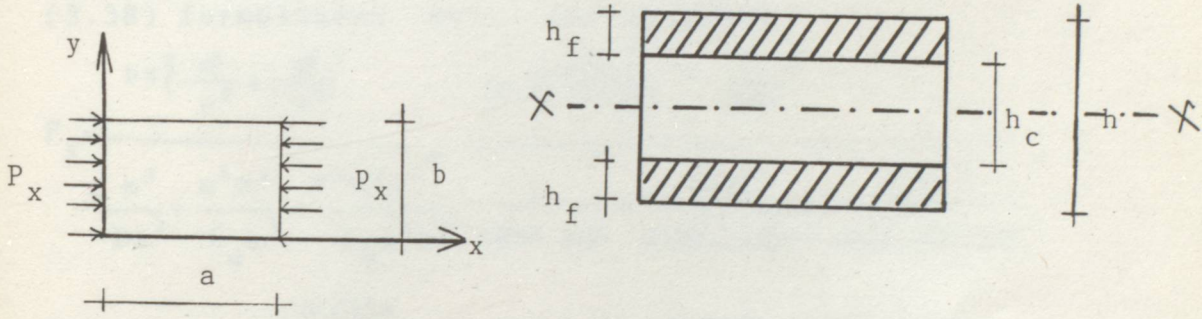
ve $N_x = -\frac{P_x}{b}$ yerine koyarsak,

$$P_x = \frac{\frac{1}{D} \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{C_\phi} \frac{m^4 \pi^2}{a^4} + \frac{R}{D} \frac{n^2}{b^2} + \frac{R}{C_\phi} \frac{n^4 \pi^2}{b^4} + \frac{(1+R)}{D} \frac{m^2 n^2 \pi^2}{a^2 b^2}}{b \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \quad (3.40)$$

BÖLÜM 4

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Soru 1-



Malzeme I Alüminyum

$$h_f = 0,020 \text{ inç}$$

$$E_f = 10 \cdot 10^6 \text{ psi.}$$

$$h = 0,24 \text{ inç}$$

Malzeme II Çelik

$$h_c = 0,200 \text{ inç}$$

$$G_c = 12.000 \text{ psi}$$

$$E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}$$

$$N_x = -\frac{P_x}{b}$$

$$C_\phi = G_c \cdot h_c$$

$$a = 20 \text{ inç}$$

$$b = 10 \text{ inç}$$

$$D = \frac{E_f \cdot h_f \cdot (h_c + h_f)^2}{2}$$

2

$n=1$ ve $m=1,2,3 \dots$ tam sayıdır.

İstenenler: a) Kritik burkulma kuvveti P_x in $n=1, m=1,2,3$

için değerini hesaplayınız.

- b) $n=1$ alınır mı m' nin hangi değeri de kritik burkulma kuvveti P_x min. olmaktadır?
- c) Metrik sistemde hesap ve min P_x burkulma kuvveti ?
- d) Malzeme I kullanıldığında daha önce bulunan min P_x burkulma kuvvetinin taşınacağı izotrop plak kalınlığı nedir?

ÇÖZÜM: 1-

$$a) D = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0,020 (0,200 + 0,020)^2}{2} = 4840 \quad (4.1)$$

$$C_Q = G_c \cdot h_c = 12.000 \cdot 0,200 = 2400 \quad (4.2)$$

(3.38) formülünden $m=1$, $n=1$ alınarak,

$$P_x = \frac{b \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{D a^2} + \frac{m^4 \pi^2}{C_Q a^4} + \frac{\pi^2 m^2 n^2}{C_Q a^2 b^2}} = \frac{10 \cdot 3,14^2 \left(\frac{1}{400} + \frac{1}{100} \right)^2}{\frac{1}{4840 \cdot 400} + \frac{3,14^2}{2400 \cdot 16 \cdot (10)^4} + \frac{3,14^2}{2400 \cdot 400 \cdot 100}}$$

$$P_x = \frac{0,0154}{5,17 (10)^{-7} + 2,57 (10)^{-8} + 1,03 (10)^{-7}} = \frac{0,0154}{6,457 (10)^{-7}} = 23850 \text{ lib.}$$

$m=2$, $n=1$ için :

$$P_x = \frac{10 \cdot 3,14^2 \left(\frac{4}{400} + \frac{1}{100} \right)^2}{\frac{4}{4840 \cdot 400} + \frac{3,14^2 \cdot 16}{2400 \cdot 16 \cdot (10)^4} + \frac{3,14^2 \cdot 4}{2400 \cdot 400 \cdot 100}} = \frac{0,039}{2,07 \cdot 10^{-6} + 4,108 (10)^{-7} + 4,11 (10)^{-7}}$$

$$= \frac{0,039}{2,89 (10)^{-6}}$$

$$P_x = 13.487 \text{ lib.}$$

$m=3$, $n=1$ için:

$$P_x = \frac{10 \cdot 3,14^2 \left(\frac{9}{400} + \frac{1}{100} \right)^2}{\frac{9}{4840 \cdot 100} + \frac{81 \cdot 3,14^2}{2400 \cdot 16 \cdot (10)^4} + \frac{9 \cdot 3,14^2}{2400 \cdot 400 \cdot 100}} = \frac{0,1042}{4,649 (10)^{-6} + 2,08 (10)^{-6} + 9,24 \cdot (10)^{-7}}$$

$$P_x = \frac{0,1042}{7,656 \cdot (10)^{-6}}$$

$$P_x = 13.610 \text{ lib.}$$

b) $m=2, n=1$ için P_x kritik burkulma yükü minimumdur.

$$P_x = 13.487 \text{ lib}$$

$$P_x = 6.208 \text{ kg}$$

c) Metrik sistemde

$$1 \text{ inç} = 2,54 \text{ cm.}$$

$$1 \text{ libre} = 453,59 \text{ g.}$$

$$11 \text{ lb/inç}^2 = 0,07 \text{ kg/cm}^2$$

Veriler:

$$a = 50,8 \text{ cm}$$

$$b = 25,40 \text{ cm}$$

$$h_f = 0,051 \text{ cm}$$

$$h_c = 0,51 \text{ cm}$$

$$h = 0,612 \text{ cm}$$

$$E_f = 700.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_c = 840 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c = 2.100.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$D = \frac{7 \cdot (10)^5 \cdot 0,051 \cdot (0,51 + 0,051)^2}{2} = 5618 \quad (4.3)$$

$$C_a = 840 \cdot 0,51 = 428 \quad (4.4)$$

$m=2$, $n=1$ için P_x burkulma kuvveti minimumdur.

(3.38) formülünde veriler yerine konularak;

$$P_x = \frac{25,4 \cdot 3,14^2 \left(\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right)^2}{\frac{4}{5618 \cdot 50,8^2} + \frac{16 \cdot 3,14^2}{428 \cdot 50,8^2} + \frac{4 \cdot 3,14^2}{428 \cdot 50,8 \cdot 25,4^2}}$$
$$= \frac{250,4 \cdot (1,55 \cdot 10^{-3} + 1,55 \cdot 10^{-3})^2}{2,76 \cdot 10^{-7} + 5,54 \cdot 10^{-8} + 5,52 \cdot 10^{-8}} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{3,87 \cdot 10^{-7}}$$

$$P_v = 6.208 \text{ kg.}$$

$m=1, n=1$ için; $P_x=10.971 \text{ kg.}$

$m=3, n=1$ için; $P_x=6.265 \text{ kg.}$

d) Malzeme I Aliminyum

$\nu=0,3$ (hacimsel genleşme katsayısı)

$E_f=700.000 \text{ kg/cm}$

$D = \frac{E_f \cdot h_f^3}{12(1-\nu^2)}$ izotrop plak için eğilme rijitliği (3.41)

$P_x = \frac{D \cdot \pi^2 a^2 b}{m} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$ izotrop plak için P_x burkulma kuvveti (3.42)

$D = \frac{7 \cdot 10^5 \cdot h_f^3}{12(1-0,3^2)}$

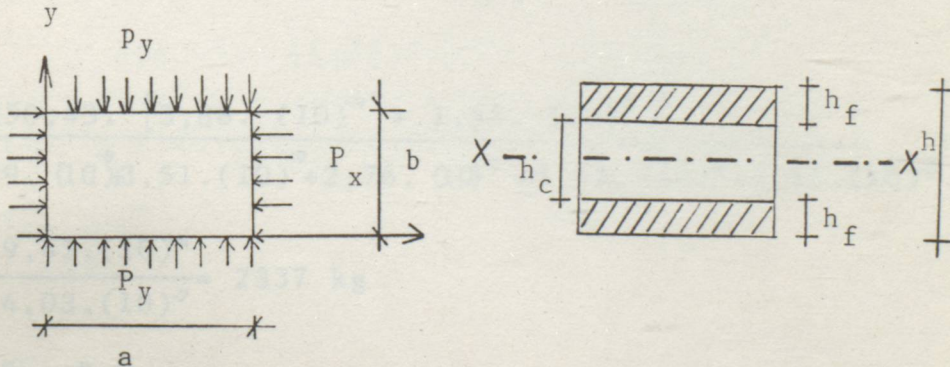
$P_x = 6.208 = \frac{7 \cdot 10^5 \cdot h_f^3}{12(1-0,3^2)} \frac{3,14^2 \cdot 50,8^2 \cdot 25,4}{2} \left(\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right)^2$

$6208 = \frac{h_f^3 \cdot 7 \cdot 10^5}{21,84} \cdot 64 \cdot 6280 (1,55 \cdot 10^3 + 1,55 \cdot 10^3)$

$6208 = h_f \cdot 199063,32$

$6208 = h_f = \left(\frac{6208}{199063,32} \right)^{1/3} = (0,03)^{1/3} = 0,315 \text{ cm}$

Soru 2)



Veriler: $h_f=0,051 \text{ cm}$ $h_c=0,51 \text{ cm}$ $h=0,51+2 \cdot 0,051$
 $a=50,8 \text{ cm}$ $b=25,4 \text{ cm}$ $h=0,612 \text{ cm.}$

$$E_f = 700.000 \text{ kg/cm}$$

$$= 840 \text{ kg/cm}$$

$$E_c = 2.100.000 \text{ kg/cm}$$

$$N_x = - \frac{P_x}{b}$$

$$D = 5618 \text{ (4.3 den)}$$

$$N_y = - \frac{P_y}{a}$$

$$C_Q = 428 \text{ (4.4 den) alınır.}$$

R boyutsuz bir sabit

İstenen: $n=1, m=1,2,3$ $R=1,2,-1, 0,3$ değerleri için

P_x, P_y değerlerini bulunuz.

Çözüm 2)

(3.40) formülünden

$$P_x = \frac{b \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{D \cdot a^2} + \frac{m^4 n^2}{a^4 C_Q} + \frac{R \cdot n^2}{D \cdot b^2} + \frac{R \cdot n^4 \cdot \pi^2}{C_Q b^4} + \frac{(1+R) m^2 n^2 \pi^2}{D a^2 b^2}}$$

$$n=1, m=1, R=1$$

$$D=5618, C_Q=428$$

$$P_x = \frac{25,4 \cdot 3,14^2 \left[\frac{1}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right]^2}{\frac{1}{5618 \cdot 50,8^2} + \frac{1}{50,8^4 \cdot 428} + \frac{1}{5618 \cdot 25,4^2} + \frac{3,14^2}{428 \cdot 25,4^4} + \frac{3,14^2}{5618 \cdot 50,8^2 \cdot 25,4^4}}$$

$$P_x = \frac{250,43 \cdot [3,88 \cdot (10)^{-4} + 1,55 \cdot (10)^{-3}]^2}{6,89 \cdot (10)^{-8} + 3,51 \cdot (10)^{-10} + 2,76 \cdot (10)^{-7} + 5,53 \cdot (10)^{-6} + 2,11 \cdot (10)^{-9}}$$

$$P_x = \frac{9,41 \cdot (10)^{-4}}{4,03 \cdot (10)^{-7}} = 2337 \text{ kg}$$

$$n=1, m=2, R=1$$

$$P_x = \frac{25,4 \cdot 3,14^2 \left[\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right]^2}{\frac{4}{5618 \cdot 50,8^2} + \frac{16}{50,8^4 \cdot 428} + \frac{1}{5618 \cdot 25,4^2} + \frac{3,14^2}{428 \cdot 25,4^4} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 3,14^2}{5618 \cdot 50,8^2 \cdot 25,4^2}}$$

$$P_x = \frac{250.43 \cdot 1,55 \cdot [(10)^3 + 1,55 \cdot (10)^3]^2}{2,76 \cdot (10) + 5,61 \cdot 10 + 2,76 \cdot (10) + 5,53 \cdot (10) + 8,43 \cdot (10)}$$

$$P_x = \frac{2,41 \cdot (10)^3}{6,21 \cdot (10)^7} = 3.879 \text{ kg}$$

$$n=1, \quad m=3, \quad R=1$$

$$P_x = \frac{25,4 \cdot \overline{3,14}^2 \left[\frac{9}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right]^2}{\frac{9}{5618 \cdot \overline{50,8}^2} + \frac{81}{50,8^4 \cdot 428} + \frac{1}{5618 \cdot \overline{25,4}^2} + \frac{\overline{3,14}^2}{428 \cdot \overline{25,4}^4} + \frac{2 \cdot 9 \cdot \overline{3,14}^2}{5618 \cdot \overline{50,8}^2 \cdot \overline{25,4}^2}}$$

$$P_x = \frac{250,43 \cdot [3,49 \cdot (10)^{-3} + 1,55 \cdot (10)^{-3}]^2}{6,21 \cdot (10)^{-7} + 2,84 \cdot (10)^{-8} + 2,76 \cdot (10)^{-7} + 5,53 \cdot (10)^{-8} + 1,90 \cdot (10)^{-8}}$$

$$P_x = \frac{6,36 \cdot (10)^{-3}}{9,997 \cdot (10)^{-7}} = 6.362 \text{ kg.}$$

$$n=1, \quad m=2, \quad R=2$$

$$P_x = \frac{25,4 \cdot \overline{3,14}^2 \left[\frac{4}{50,8} + \frac{1}{25,4} \right]^2}{\frac{4}{5618 \cdot \overline{50,8}^2} + \frac{16}{50,8^4 \cdot 428} + \frac{2}{5618 \cdot \overline{25,4}^2} + \frac{2 \cdot \overline{3,14}^2}{428 \cdot \overline{25,4}^4} + \frac{3 \cdot 4 \cdot \overline{3,14}^2}{5618 \cdot \overline{50,8}^2 \cdot \overline{25,4}^2}}$$

$$P_x = \frac{250,43 \cdot [1,55 \cdot (10)^{-3} + 1,55 \cdot (10)^{-3}]^2}{2,76 \cdot (10)^{-7} + 5,61 \cdot (10)^{-9} + 5,52 \cdot (10)^{-7} + 1,11 \cdot (10)^{-7} + 1,26 \cdot (10)^{-8}}$$

$$P_x = \frac{2,41 \cdot (10)^{-3}}{9,57 \cdot (10)^{-7}}$$

$$P_x = 2.518 \text{ kg.}$$

$$n=1, \quad m=2, \quad R=-1$$

$$P_x = \frac{25,4 \cdot \overline{3,14}^2 \left[\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right]^2}{\frac{4}{5618 \cdot 50,8^2} + \frac{16}{50,8^4 \cdot 428} + \frac{-1}{5618 \cdot 25,4^2} + \frac{-1 \cdot \overline{3,14}^2}{428 \cdot 25,4^4} + \frac{[1+(-1)] \cdot 4 \cdot \overline{3,14}^2}{5618 \cdot 50,8^2 \cdot 25,4^2}}$$

$$P_x = \frac{250,43 \cdot [1,55 \cdot (10)^{-3} + 1,55 \cdot (10)^{-3}]^2}{2,76 \cdot (10)^{-7} + 5,61 \cdot (10)^{-9} - 2,76 \cdot (10)^{-7} - 5,53 \cdot (10)^{-8}}$$

$$P_x = \frac{-2,41 \cdot (10)^{-3}}{4,97 \cdot (10)^{-8}}$$

$$P_x = -48.501 \text{ kg}$$

$$n=1, \quad m=2, \quad R=0$$

Burada y yönünde yükleme olmaz. Ve x yönündeki yüklemeden dolayı min P_x burkulma yükü elde edilmektedir.

$$P_x = 6.208 \text{ kg.}$$

$$n=1, \quad m=2, \quad R=3$$

$$P_x = \frac{25,4 \cdot \overline{3,14}^2 \left[\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right]^2}{\frac{4}{5618 \cdot 50,8^2} + \frac{16}{50,8^4 \cdot 428} + \frac{3}{5618 \cdot 25,4^2} + \frac{3 \cdot \overline{3,14}^2}{428 \cdot 25,4^4} + \frac{4 \cdot 4 \cdot \overline{3,14}^2}{5618 \cdot 25,4^2 \cdot 50,8^2}}$$

$$P_x = \frac{2,41 \cdot (10)^{-3}}{2,76 \cdot (10)^{-7} + 5,61 \cdot (10)^{-9} + 8,28 \cdot (10)^{-7} + 1,66 \cdot (10)^{-7} + 1,69 \cdot (10)^{-8}}$$

$$P_x = \frac{2,41 \cdot (10)^{-3}}{1,29 \cdot (10)^{-6}}$$

$$P_x = 1.868 \text{ kg.}$$

T a b l o I :

a ve b boyutlarına sahip sandviç kesitli bir
plakda değişik dalga boyları için $P_{x_{kr}}$ değerleri

m	n	a cm	b cm	$P_{x_{kr}}$ (kg)
1	1	50,8	25,40	10.971
2	1	50,8	25,40	6.208 (min)
3	1	50,8	25,40	6.265

TABLO II Genel Sonuçlar

M a l z e m e	R	m	n	X			Y		
				P _x (kg)	N _y / cm kg / cm	σ _x kg/cm ²	P _y (kg)	N _y / cm kg / cm	σ _y kg/cm ²
Gövde çelik levha, Alt üst Alüminyum levha. h=0,612 cm	1	1	1	2337	92,01	150,34	4674,11	92,01	150,34
Gövde çelik levha, Alt ve üst Alüminyum levha, h=0,612 cm	1	2	1	3879	152,72	249,54	7758,18	152,72	249,54
"	2	2	1	2518	99,13	161,98	10071,61	198,26	323,95
"	3	2	1	1868	73,54	120,16	11207,50	220,62	360,49
"	-1	2	1	-48.501	-1909,49	-3120	97002,1	1909,49	3120,08
"	1	3	1	6362	250,47	409,26	12723,8	250,47	409,26
"	0	2	1	6208	244,41	399,36	—	—	—
İzotrop Plak Alüminyum, h=0,315 cm	0	2	1	6208	244,41	77,59	—	—	—
İzotrop Plak Alüminyum, h=0,102 cm	0	2	1	211,26	8,32	81,54	—	—	—
Gövde çelik levha Alt ve üst kontrplak	0	2	1	1548	60,90	99,58	—	—	—

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

1) Seriler ile yapılan çözümlerde; 3. bölümde sandviç plak elastisite sabitleri kullanılarak stabilite hesabı yapılmıştır. Verilen kenar şartlarına göre her seferinde uygun bir seri seçilmekte bu serinin yardımı ile sandviç plak stabilite denklemi çözülmektedir.

2) Tablo I'de özetlendiği gibi; a ve b boyutlarına sahip bir sandviç plakta önce kritik burkulma yükünün değişik dalga boyları için değeri hesaplanmıştır. Bu değer n=1, m=2 için min olduğu tesbit edilmiştir. Burada kullanılan malzeme; gövde çelik levha, alt ve üstte Alüminyum levha ile birlikte çalışmaktadır.

Daha sonra gövde Alüminyum levha alt ve üstten çelik levha ile takviye edilmek suretiyle kullanılıyor. Görülüyor ki; bulunan min P_x burkulma yükü ilk malzemede daha yüksek bulunmaktadır. Yani gövde çelik alt, üst kenarlar Alüminyum levha'dan meydana gelen malzeme hem daha stabil hemde daha ekonomiktir.

3) Bulunan min. burkulma kuvvetini ($P_x=6.208$ kg) Malzeme izotop iken (Alüminyum), elde edebilmemiz için kullanılan izotop plak levha kalınlığı $h=0,315$ cm bulunmaktadır. Oysa sandviç kesitte kullanılan Alüminyum levha kalınlığı $0,102$ cm. dir. Gerçi stabilite $1,95$ katı artmaktadır. Ama ekonomik değildir.

4) Sandviç malzemede kullandığımız Alüminyum levhaları izotop plak olarak çalıştırdığımızda

$$h=0,102 \text{ cm}$$

$$D = \frac{7 \cdot (10)^5 \cdot \overline{0,102}^2}{12 \cdot (1 - \overline{0,3}^2)} = 68$$

(3.41) den

$$P_{kr} = \frac{68 \cdot 3,14^2 \cdot 25,4}{2} \cdot \left(\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right)^2 \quad (3.42) \text{ den}$$

$$P_{x_{kr}} = 211,26 \text{ kg}, \quad \sigma_x = 81,54 \text{ kg/cm}^2$$

Bulunan yük ve stabilite sandviç kesitli plak için bulunan stabilite'nin 1/5 kadar olmaktadır.

5) Kullanılan malzeme gövde çelik, alt ve üst'lerden kontrol plak olması durumunda ise;

Veriler

Malzeme I Maple 5-ply

Malzeme II Çelik için önceki (sorul.c) veriler geçerli

$$E_x = 1,87 \cdot (10)^6 \text{ psi}$$

$$E_y = 0,60 \cdot (10)^6 \text{ psi}$$

$$G = 0,159 \cdot (10)^6 \text{ psi}$$

$$n=1, m=2$$

$$c=428$$

$$(4.4) \text{ den}$$

Toplam

$$h=0,102 \text{ cm}$$

$$D = \frac{1,87 \cdot (10)^6 \cdot 0,02 \cdot (0,24)^2}{2} = 1077 \quad (3.41) \text{ de8}$$

$$P_{x_{kr}} = \frac{10 \cdot 3,14^2 \left[\frac{4}{50,8^2} + \frac{1}{25,4^2} \right]^2}{\frac{4}{1077 \cdot 50,8^2} + \frac{16 \cdot 3,14^2}{428 \cdot 50,8^4} + \frac{4 \cdot 3,14^2}{428 \cdot 50,8^2 \cdot 25,4^2}}$$

$$P_{x_{kr}} = \frac{2,4 \cdot (10)^{-3}}{1,44 \cdot (10)^{-6} + 5,54 \cdot (10)^{-8} + 5,52 \cdot (10)^{-8}}$$

$$P_{x_{kr}} = \frac{2,4 \cdot (10)^{-3}}{1,55 \cdot (10)^{-6}} = 1.548 \text{ kg}$$

bulunan yük önceki min $P_{x_{kr}}$ ($P_{x_{kr}} = 6.208 \text{ kg}$) yükünün 1/4 üne eşit olmaktadır.

6) Görülüyor ki; değişik uygulamalarını gördüğümüz sandviç kesitli plakların kullanmaya uygun olanı; gövdenin çelik levha alt ve üstlerinde Alüminyum levha olanıdır.

7) Bu sefer sandviç kesitli malzeme Y yönünde de aynı yüklemeye maruz kaldığında ise; stabilite $n=1$, $m=3$ değerleri için max olmaktadır.

8) Tablo II genel sonuçların dökümleri yapılmıştır. Burada görülen başka bir olayda Y yönünde birim boya gelen kuvvet olarak eşit uygulanan basınç kuvveti, P_x kritik burkulma yükünü küçültmekte, X yönünde ve birim boya gelen kuvvet olarak uygulanan çekme kuvveti P_y kritik yükünü artırmaktadır.

K A Y N A K L A R

- 1) FLUGGE W. Stresses in Shells
Springer-Verlag-New York-1967
- 2) GIRKMANN K. Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler
İ. T. Ü 1964
- 3) İNAN M. Cisimlerin Mukavemeti
İ. T. Ü 1967
- 4) TIMOSHENKO Elastik Stabilite Teorisi

ÖZGEÇMİŞ

Sinan Akgün Rize'de 1965 yılında doğmuştur. İlk okul tahsilini Fatih Yavuz Selim İlkokulu, Orta Okul ve Lise tahsilini Özel Tarhan Lisesi (Beyoğlu)'nde tamamladıktan sonra 1980-1981 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesine girip, 1985 yılında iyi derece ile mezun olmuştur.



