

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIK KÜMELER VE BULANIK MANTIĞIN
TEMELLERİ**

34772

Salih KARANFİL

**F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Yavuz AKSOY

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ**

İSTANBUL, 1994

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	
ÖZET	
SUMMARY	
GİRİŞ	1
I. BULANIK KÜMELER	2
1.1. Temel Kavramlar	2
1.2. Bulanık Kümeler ve Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler	3
1.3. Kuramsal Küme İşlemleri	8
II. BULANIK SAYILAR	13
2.1. Bulanık Sayı Kavramı	13
2.2. Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemler	13
2.2.1. Bulanık Sayıların Toplamı	13
2.2.2. Bulanık Sayıların Çıkartımı	16
2.2.3. Bulanık Sayıların Çarpımı	16
2.2.4. Bulanık Sayıların Bölümü	17
III. BULANIK MANTIK	18
3.1. İki Değerli Mantık (Keskin Mantık)	18
3.2. Çok Değerli Mantık	19
3.2.1. $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, ^-)$ ile Birleşmiş Mantık	22
3.2.2. $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, ^-)$ ile Birleşmiş Mantık	25
3.2.3. $(\tilde{P}(X), \hat{+}, \hat{,}, ^-)$ ile Birleşmiş Mantık	30
3.3. Bulanık Değerli Mantıklar	32
3.4. Bulanık Mantığın Uygulama Alanları	34
SONUÇ	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarında ve tezimin hazırlanması sırasında yardımlarını hiçbir zaman eksik etmeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Yavuz AKSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarına ve araştırmalarına katkıda bulunan tüm hocalarıma ve tezimi yazmama yardımcı olan arkadaşım Hasan YÜCEL'e teşekkürlerimi sunarım.

Salih KARANFİL

Haziran, 1994

ÖZET

Bulanık kümeler teorisi belirsizliğin temsili için 1965 yılında Amerika'da Lotfi A. Zadeh tarafından geliştirilmiş ve üzerinde dünyanın her yerinde birçok insan tarafından çalışmalar ve uygulamalar yapılmıştır. Daha sonraları bulanık sayılar ve bulanık mantık teorisi geliştirilmiş ve günümüze kadar büyük gelişmeler kaydedilmiştir.

Tezin giriş bölümünde bulanık kümeler ve bulanık mantığın tarihsel gelişimine yer verildi.

Bölüm I, bulanık küme teorisinin temellerini, bulanık kümeler üzerindeki işlemleri, kuramsal küme işlemlerini ve örnekleri içermektedir.

İkinci bölümde ise bulanık sayılar ve bulanık aritmetiğin genel kavramları üzerinde duruldu.

Bölüm III çok değerli mantık kuramını ve üç farklı birleşmiş mantıkla ilgili özellikleri içermektedir. Ayrıca bu mantıklarla ilgili bağıntılar için doğruluk değer tabloları gösterildi ve bulanık değerli mantık kavramını geliştirmek için L.A.Zadeh tarafından geliştirilen genişletme prensibine yer verildi. Bu bölümün sonunda ise bulanık mantığın uygulama alanları, avantajları ve dezavantajları üzerinde duruldu.

Son olarak da tezden elde edilen sonuçlara yer verildi.

SUMMARY

The theory of fuzzy sets for the representation of inexactness was introduced in 1965 by Lotfi A. Zadeh in the United States, and has been studied and applied by many people in all parts of the world. More recently the theory of fuzzy numbers and fuzzy logics has been introduced and up to now a great development was provided.

Historical development of fuzzy sets and fuzzy logics are given in the introduction of the thesis.

Chapter I covers the fundamentals of fuzzy set theory, operations on fuzzy sets, set-theoretic operations and some examples.

The concept of general fuzzy numbers and fuzzy arithmetic is introduced in the second chapter.

Chapter III covers the multivalent logics and some properties of three different kinds of associated logics. Also truth tables for the connectives of these associated logics are shown. Furthermore in order to develop the concept of a fuzzy-valued logic the extension principle introduced by L.A.Zadeh is given. The application areas of fuzzy logics and advantages and disadvantages of fuzzy logics are mentioned at the end of this chapter.

Finally the conclusions which are obtained from the thesis are given.

GİRİŞ

Araştırmacılar ve pratikçiler, gelişmiş sistemler yapmaya çaba sarfettikleri için insan ilimindeki belirsizliği tartışmak ile uğraşmaktadırlar. Belirsizlik hakkında daha fazla şey öğrendikçe rastgeleliğin tek formda olmadığı anlaşılır. 1965 yılının başlarında L.A. Zadeh (Berkeley-California), belirsizliğin temsili için araç olarak bulanık kümeler (Fuzzy Sets) teorisini geliştirmiş ve bu, bilim dünyası için bir dönüm noktası olmuştur.

Türkçe karşılığı "bulanık", "hayal-meyal" olan "fuzzy" kelimesi civcivlerin tüyleri için kullanılan "fuzz" sözcüğünden türemiştir. Genelde ve özel olarak geçmişte belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler kuramı ile tanımlanmışlardır. Bunun yanısıra son yıllarda gelişen bulanık kümeler kuramı ise belirsizlik ifade eden terimler ve kavramların gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak çok değerli kümeler kuramı ve kapsamı içinde tanımlanmalarına yol açar.

Bulanık kümeler teorisi, adi küme teorisinin ikili lojiğe genişletildiği gibi, çok değerli lojiğe de genişletilmiştir. Bulanık mantık ise temelde çok değerli mantık, olasılık kuramı ve yapay zeka alanları üzerine oturtulmuştur.

Günümüzde 30'dan fazla ülkede bulanık mantık konusunda araştırmalar yapılmakta olup bunlar arasında ABD, Japonya, Çin ve Avrupa ülkeleri gelmektedir. Çin'de bu konuyla uğraşan bilim adamı sayısı onbinin üzerinde olup Çin'in takipçisi olan Japonya ise uygulama açısından belirgin bir şekilde öndedir.

Yine günümüzde bulanık denetimin uygulama alanları çok genişlemiş olup çeşitli endüstriyel süreçleri, asansörleri, metroları ve çeşitli beyaz eşya ve elektronik araç ve gereçleri kapsamına almıştır.

Bulanık denetimin, Kuzey Japonya'nın Sendai kentindeki metro sisteminde çok başarılı bir biçimde kullanılması Japonya'da bir çığır açmış ve bu olay bulanık denetim uygulamalarına büyük bir ivme kazandırmıştır. 1987'de başlayan bu ilerleme 1990'da zirveye ulaşarak bulanık denetimin çok geniş bir alan içerisinde kullanılmasıyla sonuçlanmıştır.

Bulanık denetim kendisine özellikle Japonya'da belirgin bir yer edinmiştir. Bu ülkeden kaynaklanan literatürler bulanık denetimin geleneksel denetime göre genellikle daha iyi sonuçlar verdiği yönündedir. Fakat objektif bir değerlendirmenin yapılabilmesi için yaşanmakta olan bulanık denetim furyasının yavaşlamasını beklemek yerinde olacaktır.

BÖLÜM I BULANIK KÜMELER

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, Zadeh tarafından geliştirilen bulanık kümelerin (Fuzzy Sets) teorisi temel alınmıştır. Fuzzy terimi ilk olarak Zadeh tarafından kullanılmıştır ve "olasılık dağılımları cinsinden tanımlanabilen fuzzy ya da bulanık" niceliklerin matematiği anlamındadır. Bulanık kümeler ile tam doğru olmayan kavramların gösterimini destekleyen sebepler, 1967'de Goguen tarafından verilmiştir. Onun en inandırıcı tartışması, belli aksiyomları sağlayan herhangi bir sistemin bulanık kümelerin bir sistemine eşit olduğunu söyleyen "temsil teoremi" dir. Aksiyomlar tüm tam doğru olmayan kavramların sistemi için sezgisel olarak doğru olur ve bu teorem tam doğru olmayan kavramların bulanık kümeler tarafından gösterilebildiğini görmek için bize yardımcı olur. Temsil teoremi "sistem", "eşitlik", "temsil" kavramları ile verilen kategori teorisindeki kesin matematiksel bir sonuçtur.

Bulanık kümeler kuramının amacı belirsizlik ifade eden, tanımlanması güç veya anlamı zor kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmektir. Belirlilik getirme yaklaşımı iki değerli kümeler kuramının, çokdeğerli kümeler kuramına dönüşümünden doğar (Türkşen, 1985).

Modern mantıkta bir kümeyi oluşturan elemanlar, keskin elemanlar olup bir eleman bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Bu tür kümelere de keskin kümeler denir. Bulanık kümeler belirlilik derecesi ya hep ya hiç kavramının ötesinde bir görüşten ortaya çıkar. Çoğunlukla günlük hayatta kesin sayılar ve ifadeler yerine, sınırları "bulanık" sayılar, ifadeler ve nesne sınıfları kullanırız. Keskin kümelerle bulanık kümelerin farkını ayırt edebilmek için örnek olarak yaşlı kavramını ele alıp bu iki kümeyi karşılaştırarak inceleyelim.

Eğer 40 yaşı orta yaş olarak kabul edecek olursak, keskin kümelerde 30 yaşın altındaki kişiler "genç", 30-50 arası "orta yaşlı", 50 yaşın üstü de "yaşlı" kümelerine sokulabilir. Dolayısıyla 29.5 yaşındaki biri "genç" iken 30.5 yaşındaki diğer bir kişi "orta yaşlı" olarak anılacaktır. Bulanık mantık, keskin mantığın açık/kapalı, soğuk/sıcak, hızlı/yavaş gibi ikili

denetim değişkenlerinden oluşan keskin dünyayı, az açık/az kapalı, serin/ılık, biraz hızlı/biraz yavaş gibi gevşek niteleyicilerle yumuşatarak gerçek dünyamıza benzetir. Yaş konusunu ele alacak olursak; 35 yaşındaki bir insana pek orta yaşlı denemeyeceği gibi o kişi pek de genç sayılmaz, duruma göre belki genç, belki de orta yaşlı tanımı daha uygun düşer. Belki de bu kişiyi hem genç hem de orta yaşlı düşünmek isteyebiliriz. İşte bulanık kümeler bu düşünüşü olanaklı kılar. Kümelerin keskin çizgilerle ayrılmamış olması, aralarında belirli bir örtüşüm olması, 35 yaşın hem orta yaşlı hem genç olarak düşünülmesine olanak tanır.

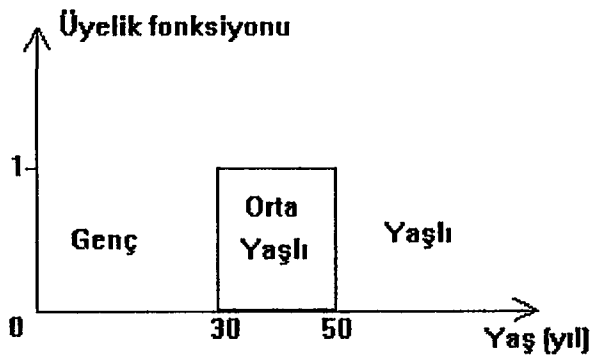
Şekil 1.1.1. ve 1.1.2.'de kullanılan eğriler üyelik fonksiyonu olarak bilinirler ve 0 ile 1 arasında bir ağırlığa sahiptirler. Üyelik ağırlığı belirli bir değerin bir bulanık küme içerisinde yer almasının güvenilirliğinin veya eminliğinin bir işaretidir. Üyelik fonksiyonları biçimsel olarak denetlenen sürecin özelliklerine göre Şekil 1.1.3.'de gösterildiği gibi üçgen, çan veya yamuk şeklindedirler (Kaynak, 1992).

1.2. Bulanık Kümeler ve Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

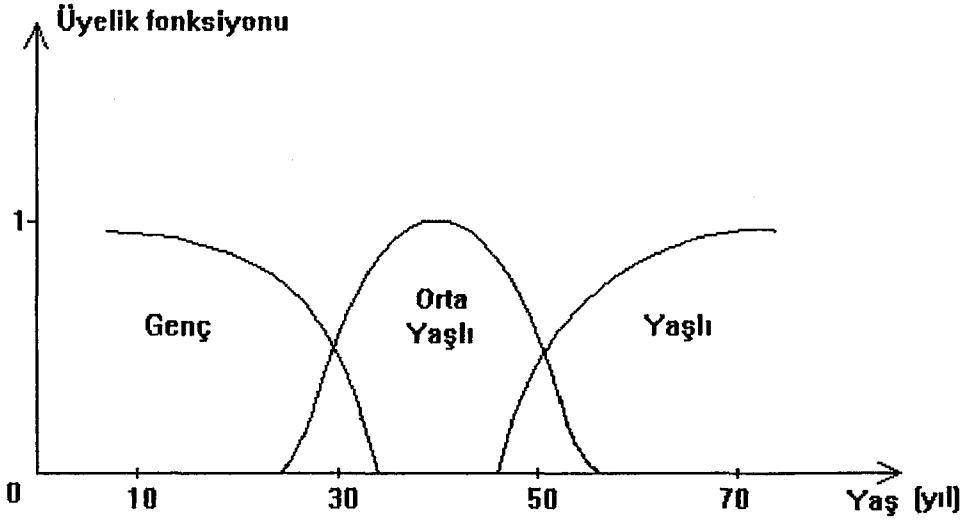
Bulanık kümeler teorisi, X evrenindeki bir A alt kümesiyle ilgilidir. X evreni, elemanların sonlu bir sınıfını örttüğünde bulanık alt kümesi iyi tanımlanmış sınırlara sahip değildir. Elemanların bulanık sınıflarıyla reel dünyada sık sık karşılaşılır. Mesela A, bir X kasabасыndaki güzel kadınların kümesi olabilir. Ya da A, X kasabасыndaki caddelerin bir kümesi olabilir. 1 üyelik derecesi tamamen A'ya ait olan elemanları, 0 ise A'ya ait olmayan elemanları belirtir. $\mu_A(x)$ ile gösterdiğimiz üyelik derecesi kavramını matematiksel olarak tanımlayacak olursak;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \in A \text{ (gerekli ve yeterli ise)} \\ 0, & \text{eğer } x \notin A \text{ (gerekli ve yeterli ise)} \end{cases}$$

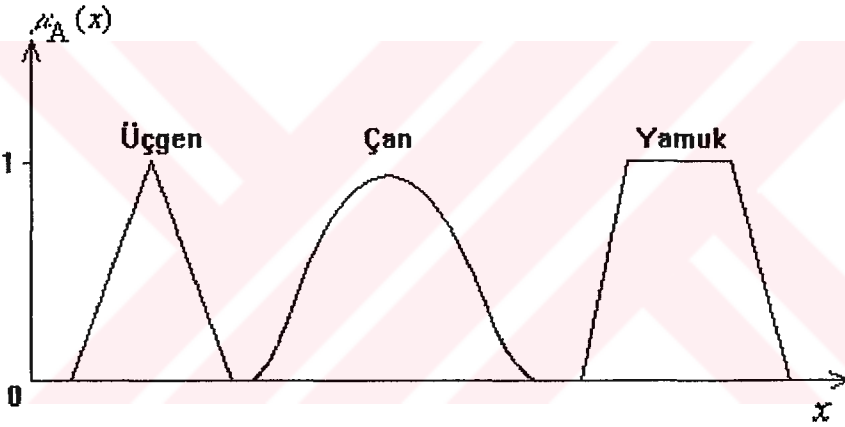
dır.



Şekil 1.1.1. Keskin Kümeler



Şekil 1.1.2. Bulanık Kümeler



Şekil 1.1.3. Çeşitli Biçimde Üyelik Fonksiyonları

Başlı başına elemanların doğası hakkında gözönüne alınmış ya da kabul edilmiş bir özellik yoktur. Örneğin X kümesini uzun caddelerin kümesi olarak tanımlarız. Şimdi "uzun caddelerin sınıfı nedir?" Hepsinden önce bu küme alışılmış durumdaki bir küme midir? Cevaplamadan önce "Ne kadar uzunlukta bir caddedir? Bir mil uzunluğunda mı? Eğer öyleyse, yarım mil cadde ile bir mil cadde arasında herhangi bir fark var mıdır?" v.b sorularını sorabiliriz. Açıkça "uzun cadde" bilgisinde tüm bu soruları nasıl cevaplayacağımızı bilemeyiz. Çünkü uzun caddelerin sınıfı genel durumdaki bir kümeyi oluşturmaz. Gerçekten reel dünyada karşılaşılan elemanların sınıflarının çoğu tam tanımlanmamış tiptedir. Böyle sınıflarda, bir sınıfa ait olmak ya da olmamak bir eleman için gereksizdir; üyelerin ara dereceleri olabilir.

Eğer değerlendirme kümesinin $[0,1]$ gerçekte aralığı olmasına izin verilirse, o zaman A bir bulanık küme olarak tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$ x 'in A 'daki üyelik derecesini verir. $\mu_A(x)$ 'in değeri 1'e yaklaştıkça x 'in A alt kümesindeki üyeliği artar. Başka bir deyişle, A , X 'in sınırları kesinlikle belirli olmayan bir alt kümesidir.

Bulanık küme teorisi, soyut küme teorisinin bir genelleştirmesidir. Başka bir deyişle bulanık küme teorisindeki tanımlar, teoremler ve ispatlar bulanık olmayan kümeler için de daima doğrudur.

Bir bulanık küme, olası kısmi üyelere izin veren bir sınıftır. O takdirde X 'deki bir A bulanık kümesi $A = \{(x, \mu_A(x))\}, x \in X$ sıralı ikililerinin bir kümesidir. $\mu_A(x)$ $[0,1]$ aralığında bir sayıdır. Şimdi bulanık kümelerin değişik örneklerini gözönüne alalım.

Örnek :

İyi tanımlanmış olmayan $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ ve } x > 1\}$ kümesini gözönüne alalım. Bu küme

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1 \text{ için}) \\ \frac{x-1}{x} & (x > 1 \text{ için}) \end{cases}$$

olarak bir üyelik fonksiyonu ile subjektif olarak tanımlanabilir. Bir bulanık kümenin üyelik fonksiyonunun ödevi doğal olarak subjektiftir ve genellikle problemde incelenen tartışmaya yansır. Buna rağmen bir A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu "subjektiftir"; keyfi olarak tayin edilemez. Örneğin yukarıdaki örnekteki üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & (x \leq 1 \text{ için}) \\ 0 & (x > 1 \text{ için}) \end{cases}$$

şeklinde alınırsa tamamen yanlış olacaktır.

$x > 1$ için, x artarken monoton olarak azalan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1 \text{ için}) \\ e^{-(x-1)} & (x > 1 \text{ için}) \end{cases}$$

şeklindeki ya da monoton olarak artan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1 \text{ için}) \\ 1 - e^{-1000(x-1)} & (x > 1 \text{ için}) \end{cases}$$

şeklindeki fakat $x = 1.1$ için yaklaşık olarak 1'e eşit olan $\mu_A(x)$ fonksiyonu, yukarıdaki örnekte istenilenleri sağlamadığından gözönüne alınmaları gerekmez. Bu şekildeki fonksiyonlara, A bulanık kümesinin kabul edilemez fonksiyonları denir. Yukarıdaki örnekte tanımlanmış olan $\mu_A(x)$ fonksiyonuna ve $\forall x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ koşulunu sağlayan kümelerin belirtilmesi ile tutarlı olan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1 \text{ için}) \\ 1 - e^{-0.1(x-1)} & (x > 1 \text{ için}) \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1 \text{ için}) \\ 1 - [\cosh(x-1)]^{-1} & (x > 1 \text{ için}) \end{cases}$$

şeklindeki diğer fonksiyonlara A'nın kabul edilebilir fonksiyonları denilecektir.

X'deki $\mu_A(x) > 0$ noktalarının oluşturduğu kümeye A'nın desteği denir ve X'in olağan bir alt kümesi olan bu küme $\text{Supp}A = \{x | x \in X, \mu_A(x) > 0\}$ ile gösterilir. A'nın yüksekliği ise X üzerindeki $\mu_A(x)$ 'in en küçük üst sınırıdır (supremumudur). Diğer bir ifadeyle A'nın yüksekliği, A'nın üyeliği en üst olan noktasını tanımlar. A'nın çapraz geçiş noktası (crossover noktası) ise A'daki üyelik derecesi 0.5 olan X'in bir noktasıdır. Eğer A'nın yüksekliği 1 ise A'ya normal, aksi takdirde normalaltı denir.

Örnek :

x yaşı ifade etmek üzere $[0,120]$ kapalı aralığı uzay olsun. Yaşlı ile sınıflandırılmış X'in A bulanık alt kümesi, üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 40 \text{ için}) \\ \left(1 + \left(\frac{x-40}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & (40 < x \leq 120 \text{ için}) \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanabilir.

Burada yaşlı'nın desteği (40,120] yarı-açık aralığı, yüksekliği ise 1 ve çapraz geçiş noktası da 45'dir.

Tanım 1.2.1. :

$X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme olsun. X'in bir bulanık kümesi şöyle ifade edilir (Klir et al, 1988):

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i.$$

Tanım 1.2.2. :

Eğer yukarıda tanımlanan X kümesi sonlu değilse, buna ait bir bulanık küme de şöyle ifade edilir (Klir et al, 1988):

$$A = \int_X \mu_A(x)/x.$$

Örnek :

$N = \{x | x \in \mathbb{Z}^+\}$ olsun. Eğer bulanık A alt kümesi "yaklaşık olarak 5'e eşit olan tam-sayıların" kümesi ise, N uzayında bir $X=\{3,4,5,6,7\}$ kümesini seçebiliriz. Böylece bu kümeye ait bir bulanık kümeyi yazabiliriz. X sonlu bir küme olduğundan Tanım 1.2.1.deki formülden A bulanık alt kümesi,

$$A = \mu_A(3)/3 + \mu_A(4)/4 + \mu_A(5)/5 + \mu_A(6)/6 + \mu_A(7)/7$$

olur. Buradan $\mu_A(x) = 1/(1+10(x-5)^2)$ üyelik fonksiyonu yardımı ile

$$A = 0.02/3 + 0.09/4 + 1/5 + 0.09/6 + 0.02/7$$

olarak yazılabilir (Klir et al, 1988).

Örnek :

$X=R=\{x|x \in R\}$ olsun. A "yaklaşık olarak 5 civarında yığılmış reel sayıları" tanımlayan bir bulanık küme ise

$$\mu_A(x) = \left\{ 1 + \left[\frac{1}{4}(x-5) \right]^2 \right\}^{-1}$$

üyelik fonksiyonu yardımı ile, X kümesi sonlu bir küme olmadığından Tanım 1.2.2. deki formül kullanılarak A bulanık alt kümesi

$$A = \int_R \left\{ 1 + \left[\frac{1}{4}(x-5) \right]^2 \right\}^{-1} / x$$

olarak tanımlanabilir.

1.3. Kuramsal Küme İşlemleri

A ve B kümeleri X'in iki bulanık alt kümeleri olsunlar. Şimdi bulanık kümeler için geçerli olan bazı temel işlemleri görelim.

1. Ancak ve ancak

$$\int_X \mu_A(x) / x = \int_X \mu_B(x) / x$$

ya da

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$$

ise A ve B bulanık kümeleri eşittir.

2. Ancak ve ancak

$$\int_X \mu_A(x) / x \leq \int_X \mu_B(x) / x$$

ise A, B tarafından kapsanır. ($A \subseteq B$)

3. A ve B bulanık kümelerinin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve $\vee$ bir maksimum işareti olmak üzere

$$A \cup B = \int_X (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) / x$$

ile tanımlanır.

4. A ve B bulanık kümelerinin arakesiti $A \cap B$ ile gösterilir ve $\wedge$ bir minimum işareti olmak üzere

$$A \cap B = \int_X (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) / x$$

ile tanımlanır.

5. A bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\bar{A} = \int_X (1 - \mu_A(x)) / x$$

ile tanımlanır. Şöyle ki, $\forall x \in X$ için

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

dir.

6. A ve B kümelerinin çarpımı AB ile gösterilir ve

$$AB = \int_X \mu_A(x) \mu_B(x) / x$$

ile tanımlanır. Böylece, α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere A^α

$$A^\alpha = \int_X (\mu_A(x))^\alpha / x$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde, $\alpha \sup_x \mu_A(x) \leq 1$ olacak şekilde α herhangi negatif olmayan bir reel sayı ise

$$\alpha A = \int_X \alpha \mu_A(x) / x$$

dir.

Özel olarak, yoğunlaşma işlemi

$$\text{CON}(A) = A^2$$

ile tanımlanırken, genişleme işlemi

$$\text{DIL}(A) = A^{0.5}$$

ile ifade edilir.

7. A ve B nin sınırlı toplamı $A \oplus B$ ile gösterilir ve + aritmetik toplam olmak üzere

$$A \oplus B = \int_X 1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(x)) / x$$

ile tanımlanır.

8. A ve B nin sınırlı farkı $A \ominus B$ ile gösterilir ve - aritmetik fark olmak üzere

$$A \ominus B = \int_X 0 \vee (\mu_A(x) - \mu_B(x)) / x$$

ile tanımlanır.

9. A'nın sol karesi 2A ile gösterilir ve

$$V = \{x^2 | x \in X\}$$

olmak üzere

$${}^2A = \int_V \mu_A(x) / x^2$$

ile tanımlanır. Daha genel olarak $V=\{x^\alpha | x \in X\}$ olmak üzere

$${}^\alpha A = \int_V \mu_A(x) / x^\alpha$$

dır.

10. $A_1, \dots, A_k$ X 'in bulanık alt kümeleri ve $\omega_1, \dots, \omega_k$ toplamı 1 olan negatif olmayan ağırlıklar iseler $A_1, \dots, A_k$ nın konveks kombinezonu üyelik fonksiyonu

$$\mu_A = \omega_1 \mu_{A_1} + \dots + \omega_k \mu_{A_k} = \sum_{j=1}^k \omega_j \mu_{A_j}$$

ile ifade edilen A bulanık kümesidir.

11. $A_1, \dots, A_k$ sırasıyla $X_1, \dots, X_k$ ların bulanık alt kümeleri iseler, $A_1, \dots, A_k$ nın kartezyen çarpımı $A_1 \times \dots \times A_k$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_k}(x_1, \dots, x_k) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_k}(x_k)$$

ile ifade edilen $X_1 \times \dots \times X_k$ nın bulanık alt kümesi olarak tanımlanır.

Buna denk olarak,

$$A_1 \times \dots \times A_k = \int_{X_1 \times \dots \times X_k} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_k}(x_k)) / (x_1, \dots, x_k)$$

dır.

Örnek :

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ ve}$$

$$A = 0.8/3 + 1/5 + 0.6/6,$$

$$B = 0.7/3 + 1/4 + 0.5/6$$

olsunlar, bu halde

$$A \cup B = 0.8/3 + 1/4 + 1/5 + 0.6/6$$

$$A \cap B = 0.7/3 + 0.5/6$$

$$\bar{A} = 1/1 + 1/2 + 0.2/3 + 1/4 + 0.4/6 + 1/7$$

$$AB = 0.56/3 + 0.3/6$$

$$A^2 = 0.64/3 + 1/5 + 0.36/6$$

$$0.5A = 0.4/3 + 0.5/5 + 0.3/6$$

$$\text{CON}(B) = 0.49/3 + 1/4 + 0.25/6$$

$$\text{DIL}(B) = 0.84/3 + 1/4 + 0.7/6$$

$$A \oplus B = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6$$

$$A \ominus B = 0.1/3 + 1/5 + 0.1/6$$

$$^2A = 0.8/9 + 1/25 + 0.6/36$$

$$^3A = 0.8/27 + 1/125 + 0.6/216$$

dır.

Örnek :

$$X_1 = X_2 = \{2, 4, 6\} \text{ ve}$$

$$A_1 = 0.5/2 + 1/4 + 0.6/6$$

$$A_2 = 1/2 + 0.6/4$$

olsunlar, bu halde

$$A_1 \times A_2 = 0.5/(2,2) + 1/(4,2) + 0.6/(6,2) + 0.5/(2,4) + 0.6/(4,4) + 0.6/(6,4)$$

dır.

BÖLÜM II

BULANIK SAYILAR

2.1. Bulanık Sayı Kavramı

Bulanık sayıları tanımlamak için bulanık alt küme kavramından yararlanacağız ve bunun için de bulanık alt kümelerin konveks ve normal bulanık alt kümeleri olma özelliklerini kullanacağız. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (Reel sayılar kümesi) için

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2), \forall \lambda \in [0, 1]$$

ise $A \subset \mathbb{R}$ bulanık alt kümesi konvekstir. A bulanık alt kümesi $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\bigvee_n \mu_A(x) = 1$ ise yani $\mu_A(x)$ 'in en büyük değeri 1'e eşitse bir normal bulanık alt kümesidir. Böylece $\mathbb{R}$ deki bir bulanık sayı $\mathbb{R}$ 'de konveks ve normal olan bir bulanık alt kümedir (Kaufmann et al, 1991).

2.2. Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemler

2.2.1. Bulanık Sayıların Toplamı

$A, B \subset \mathbb{R}$ ise $\alpha \in [0, 1]$ seviyesindeki güven aralıkları için

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$B_\alpha = \{x | \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

alt kümelerini tanımlayabiliriz.

$A, B \subset \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{A(+)\mathcal{B}}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

dir. Ayrıca

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha. A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \alpha. [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$$

$$B = \bigcup_{\alpha} \alpha. B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \alpha. [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

$$A_{\alpha}(+)B_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} \alpha. [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}]$$

olarak da ifade edilebilir (Kaufmann et al, 1991).

Örnek :

Üyelik fonksiyonları $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 & x &\leq -5 \\ &= x/3 + 5/3 & -5 &\leq x \leq -2 \\ &= -x/3 + 1/3 & -2 &\leq x \leq 1 \\ &= 0 & x &\geq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0 & x &\leq -3 \\ &= x/7 + 3/7 & -3 &\leq x \leq 4 \\ &= -x/8 + 12/8 & 4 &\leq x \leq 12 \\ &= 0 & x &\geq 12; \end{aligned}$$

olan iki üçgensel bulanık sayının toplamını bulalım.

$$\mu_A(x)'den \quad \alpha = a_1^{(\alpha)}/3 + 5/3 \quad \text{ve} \quad \alpha = -a_2^{(\alpha)}/3 + 1/3 \quad \text{olup}$$

$$A_{\alpha} = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1]$$

ve aynı şekilde

$$B_{\alpha} = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12]$$

olarak bulunur. Buradan

$$A_{\alpha} + B_{\alpha} = [10\alpha - 8, -11\alpha + 13]$$

olup

$$\begin{aligned}\mu_{A(+)B}(x) &= 0 & x \leq -8 \\ &= x/10 + 8/10 & -8 \leq x \leq 2 \\ &= -x/11 + 13/11 & 2 \leq x \leq 13 \\ &= 0 & x \geq 13\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek :

0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.1	0.3	0.8	1	0.7	0.3	0

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.3	0.6	1	0.7	0.2	0.1	0	0

sırasıyla, N doğal sayılar kümesinde nümerik olarak verilmiş A ve B bulanık sayıları olsunlar. Bunların toplamını bulmak için

$$\mu_{A(+)B}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

kullanılarak $C = A(+)B$ toplamı nümerik olarak aşağıdaki şekilde bulunur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0.1	0.3	0.3	0.6	0.8	1	0.7	0.7	0.3	0.2	0.1	0

A ve B, R reel sayılar kümesinde iki bulanık sayı olmak üzere $A(+)B$ toplamı da bir bulanık sayıdır. Ayrıca (+) işlemi komütatif ve asosiyatiftir. Toplama işlemi R'de olduğu gibi Z, R^+ ve N'de de tanımlıdır.

2.2.2. Bulanık Sayıların Çıkarması

$\forall x, y, z \in R$ için

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

ya da $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} A_\alpha(-)B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] - [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] \end{aligned}$$

olacak şekilde bulanık sayılarda çıkarma işlemi tanımlanır (Kaufmann et al, 1991). Bulanık sayılarda çıkarma işlemi ne komütatif ne de asosiyatiftir. Çıkarma işlemi, R reel sayılar kümesinde olduğu gibi Z tamsayılar kümesinde de tanımlıdır. Fakat N doğal sayılar kümesinde ve R^- negatif reel sayılar kümesinde tanımlı değildir. Çünkü bu kümelerde işlem yapılırsa negatif üyelik değerleriyle karşılaşılabilir.

2.2.3. Bulanık Sayıların Çarpımı

Burada çarpma işlemini R^+ pozitif reel sayılar kümesi ve N doğal sayılar kümesi üzerinde alacağız. A ve B, R^+ da iki bulanık sayı olmak üzere

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]$$

şeklindedir. Ayrıca bu yine $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

şeklinde de yazılabilir (Kaufmann et al, 1991). Yine $(\cdot)$ işlemi komütatif ve asosiyatif olup $A(\cdot)B$ çarpımı da bir bulanık sayıdır.

2.2.4. Bulanık Sayıların Bölümü

İki bulanık sayının bölümü $\mathbb{R}^+$ da tanımlı olup $b_2^{(\alpha)} > 0$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} / b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} / b_1^{(\alpha)}]$$

ya da $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

olacak şekilde tanımlanır (Kaufmann et al, 1991). Bulanık sayılarda $(\cdot)$ işlemi ne komütatif ne de asosiyatiftir.

BÖLÜM III

BULANIK MANTIK

3.1. İki Değerli Mantık (Keskin Mantık)

XX. yüzyıla yaklaşırken başta bir İngiliz matematikçisi ve mantıkçısı olan George Boole (1815-1864) ve bir Fransız matematikçisi ve mantıkçısı olan De Morgan (1806-1871) gibi daha pek çok bilim adamı ve filozofun meydana getirdiği mantığa Modern Mantık denilmiştir. Bu mantıkta dualist felsefe egemen olmuştur. Bu nedenle Boole ve arkadaşları tarafından ortaya konan bu mantığa iki değerli mantık (keskin mantık) da denilmektedir. Çünkü sadece doğru ve yanlış vardır; başka ara değerler yoktur. Üstelik doğru ve yanlış ancak ve ancak sezgisel olarak kavranabilen; bu sözcükleri kullanmadan tanımlanması olanaksız iki nesnel kavramdır.

İki değerli mantığın önemli bir özelliği, yalnız diğer bilimlerin kullandığı bir metod olmaktan öteye başlı başına bir bilim, bir fen bilimi olmasıdır. İki değerli mantık matematiğin bir kolu durumundadır. Böylece baştan başa matematiksel bir yapıya kavuşmuştur. Bu nedenle iki değerli mantığa "Matematik Lojik" de denilmektedir.

Birden fazla önermenin bir takım bağlaçlarla meydana getirdiği yapıya bileşik önerme denir. Bu bağlaçlar VE, VEYA, YA DA, GEREKTİRME ve ÇİFT GEREKTİRME dir. Bunların sembolik olarak gösterilimleri ise sırasıyla $\wedge$, $\vee$, $\vee$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ şeklindedir.

p ve q iki önerme olsun. Bu iki önermenin VE'li, VEYA'lı, YA DA'lı, GEREKTİRME'li ve ÇİFT GEREKTİRME'li bileşenlerinin doğruluk değer tablosu Tablo 3.1.1. de verilmiştir.

Tablo 3.1.1. Doğruluk Değer Tablosu

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

p , q ve r üç önerme olsun. Yukarıda belirttiğimiz bağlaçlara ait aşağıdaki özellikler bilinmektedir.

$$p \wedge p \equiv p \quad (\wedge \text{ idempotentdir})$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\wedge \text{ komütatiftir})$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad (\wedge \text{ asosiyatiftir});$$

$$p \vee p \equiv p \quad (\vee \text{ idempotentdir})$$

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad (\vee \text{ komütatiftir})$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \quad (\vee \text{ asosiyatiftir});$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (\wedge \vee \text{ üzerine distribütiftir})$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\vee \wedge \text{ üzerine distribütiftir});$$

p ve q önermeleri için kurulmuş olan

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

bağıntılarına De Morgan Denklikleri denir (Aksoy, 1978).

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad (\vee \text{ komütatiftir})$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \quad (\vee \text{ asosiyatiftir});$$

$$p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p;$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q;$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

3.2. Çok Değerli Mantık

Burada kullanılan çok değerli mantık, doğruluk uzayı $[0,1]$ reel aralığı olan sayılamaz değerli mantıklardır. Φ mantıksal bağıntılarla birleştirilmiş elemanter $P, Q, R, \dots$ önermelerini içeren bir önermesel değişken olsun. Φ sembolik olarak

$$\Phi = f(P, Q, R, \dots)$$

şeklinde yazılmış olup, üzerinde 4 dönüşüm tanımlanabilir (Kandel, 1986):

1. Denklik : $I(\Phi) = \Phi$
2. Değilleme : $N(\Phi) = \sim \Phi$
3. Karşılık fonksiyonu : $R(\Phi) = f(\sim P, \sim Q, \sim R, \dots)$
4. Karşılık fonksiyonunun değili : $C(\Phi) = \sim R(\Phi)$

Açık ilişkileri Tablo 3.2.2.'de gösterilen bu dönüşümleri Tablo 3.2.1.'de görebiliriz.

Tablo 3.2.1. Φ Üzerinde Yapılan Dönüşümler

a) $P \vee Q \equiv R(Q|P)$;

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim Q \wedge \sim P$	$P \vee Q$	$R(Q P) = \sim(\sim Q \wedge \sim P)$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

b) $P \leftrightarrow Q \equiv N(Q \leftrightarrow P)$;

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \leftrightarrow Q$	$N(Q \leftrightarrow P) = \sim Q \leftrightarrow \sim P$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

c) $P \text{ ex } Q \equiv C(P \leftrightarrow Q)$;

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \leftrightarrow \sim Q$	$P \text{ ex } Q$	$C(P \leftrightarrow Q) = \sim(\sim P \leftrightarrow \sim Q)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

• totolojiyi, $\vee$ ayrılmayı, $\rightarrow$ karıştırmayı, $\leftrightarrow$ denkliği, $\wedge$ birleşmeyi, $|$ Sheffer bağıntısını, $\downarrow$ Pierce bağıntısını, ex tek ayrılışı, $\circ$ çelişkiyi ifade etmek üzere 16 standart ikili bileşenlerin doğruluk değer tablosu Tablo 3.2.2.'de verilmiştir (Kandel, 1986). ($\sim$ 'nın genel bir ismi yoktur.)

Tablo 3.2.2.Doğruluk Değer Tablosu

P	Q	P^*Q	$P \vee Q$	$Q \rightarrow P$	P	$P \rightarrow Q$	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

P	Q	$P Q$	$P \text{ex} Q$	$\sim Q$	$Q \rightsquigarrow P$	$\sim P$	$P \rightsquigarrow Q$	$P \downarrow Q$	P^*Q
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Bulanık küme teorisinin temelini oluşturan çok değerli mantıkta $v(P)$, P önermesinin doğruluk değerini ifade eder ve $v(P) \in [0,1]$ dir. Aynı zamanda $v(\sim P) = 1 - v(P)$ ve $v(\sim \sim P) = v(P)$ dir.

$$v(P \rightarrow Q) = v(\sim P \vee Q)$$

ve

$$\begin{aligned} v(P \leftrightarrow Q) &= v[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)] \\ &= v[(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)] \end{aligned}$$

şeklinde dir. ex , $|$, $\downarrow$ ve $\rightsquigarrow$ sırasıyla $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ ve $\leftarrow$ bağlaçlarının değerlerini ifade eder.

Totoloji ve çelişki ise sırasıyla,

$$v(\dot{P}) = v(P \vee \sim P)$$

$$v(\overset{\circ}{P}) = v(P \wedge \sim P)$$

şeklinde tanımlanır. Daha genel olarak,

$$v(P^*Q) = v[(P \vee \sim P) \vee (Q \vee \sim Q)]$$

$$v(P^{\circ}Q) = v[(P \wedge \sim P) \wedge (Q \wedge \sim Q)]$$

dır. Burada 3 durum tanımlanacaktır:

3.2.1. ($\tilde{P}(X), \cup, \cap, \neg$) ile Birleşmiş Mantık

$\cup$ ve $\cap$ işlemlerinin temelini oluşturan ayrılma ve birleşme sırasıyla

$$v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q))$$

$$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$$

dır.

$$v(P \vee Q) = v(Q \vee P)$$

$$v(P \wedge Q) = v(Q \wedge P)$$

($\vee$ ve $\wedge$ komütatiftir);

$$v(P \vee (Q \vee R)) = v((P \vee Q) \vee R)$$

$$v(P \wedge (Q \wedge R)) = v((P \wedge Q) \wedge R)$$

($\vee$ ve $\wedge$ asosiyatiftir);

$$v(P \vee P) = v(P)$$

$$v(P \wedge P) = v(P)$$

($\vee$ ve $\wedge$ idempotentdir);

$$v(P \vee (Q \wedge R)) = v[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

$$v(P \wedge (Q \vee R)) = v[(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$$

($\vee$ ve $\wedge$ birbirleri üzerine distribütiftir);

Ayrıca

$$v(P \vee (P \wedge Q)) = v(P)$$

$$v(P \wedge (P \vee Q)) = v(P) \quad (\text{soğurma özelliği});$$

$$v(\sim (P \wedge Q)) = v(\sim P \vee \sim Q)$$

$$v(\sim (P \vee Q)) = v(\sim P \wedge \sim Q) \quad (\text{De Morgan});$$

$$v[(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)] = v[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)] \quad (\text{denklik})$$

$$v[(\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)] = v[(P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q)] \quad (\text{tek ayrılış})$$

özellikleri vardır. Tablo 3.2.3. $v(P) = p$ ve $v(Q) = q$ ile belirlenen 16 bağlacın değerlendirilmesini verir (Kandel, 1986). $v(P \vee \sim P) \neq 1$ ve $v(P \wedge \sim P) \neq 0$ olduğu durum sağlanamaz.

Tablo 3.2.3. Doğruluk Değer Tablosu

P	Q	$P \circ Q$	$P \vee Q$	$Q \rightarrow P$	P
p	q	$\max(p, 1-p, q, 1-q)$	$\max(p, q)$	$\max(p, 1-q)$	p

P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
p	q	$\max(1-p, q)$	q	$\min(\max(1-p, q), \max(p, 1-q))$	$\min(p, q)$

P	Q	$P Q$	$P \text{ ex } Q$	$\sim Q$	$Q \rightsquigarrow P$
p	q	$\max(1-p, 1-q)$	$\max(\min(1-p, q), \min(p, 1-q))$	$1-q$	$\min(p, 1-q)$

P	Q	$\sim P$	$P \rightsquigarrow Q$	$P \downarrow Q$	$P \circ Q$
p	q	$1-p$	$\min(1-p, q)$	$\min(1-p, 1-q)$	$\min(p, 1-p, q, 1-q)$

Aynı zamanda, aşağıdaki özellikleri elde ederiz.

Karıştırma için;

$$\begin{aligned}v[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] &= v[\sim P \vee (\sim Q \vee R)] \\&= v[(\sim P \vee \sim Q) \vee R] \\&= v[\sim (P \wedge Q) \vee R] \\&= v[(P \wedge Q) \rightarrow R]\end{aligned}$$

Totoloji ve çelişki için;

$$\begin{aligned}v(P \rightarrow P) &= v(\sim P \vee P) \\&= v(\dot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(P \rightarrow \dot{P}) &= v(\sim P \vee \dot{P}) \\&= v(\sim P \vee (P \vee \sim P)) \\&= v(P \vee \sim P) \\&= v(\dot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(\ddot{P} \rightarrow P) &= v(\sim \ddot{P} \vee P) \\&= v(\sim (P \wedge \sim P) \vee P) \\&= v((\sim P \vee P) \vee P) \\&= v(P \vee \sim P) \\&= v(\dot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(P \leftrightarrow \sim P) &= v[(P \rightarrow \sim P) \wedge (\sim P \rightarrow P)] \\&= v[(\sim P \vee \sim P) \wedge (\sim \sim P \vee P)] \\&= v(\sim P \wedge P) \\&= v(\ddot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\dot{P} \rightarrow P) &= v(\sim \dot{P} \vee P) \\ &= v(\sim (P \vee \sim P) \vee P) \\ &= v((\sim P \wedge P) \vee P) \\ &= v(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(P \leftrightarrow P) &= v[(P \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow P)] \\ &= v(P \rightarrow P) \\ &= v(\sim P \vee P) \\ &= v(\dot{P}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(P \rightarrow \dot{P}) &= v(\sim P \vee \dot{P}) \\ &= v(\sim P \vee (P \wedge \sim P)) \\ &= v(\sim P) \end{aligned}$$

Sheffer ve Pierce'in bağıntıları için,

$$\begin{aligned} v(\sim P) &= v(P|P) \\ v(P \rightarrow Q) &= v(P|(Q|Q)) \\ v(\dot{P}) &= v(P|(P|P)) \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz.

3.2.2. $(\tilde{P}(X), \cup, \cap, -)$ ile Birleşmiş Mantık

$\cup$ ve $\cap$ nin temelini oluşturan ayrılma ve birleşme sırasıyla,

$$\begin{aligned} v(P \cup Q) &= \min(1, v(P) + v(Q)) \\ v(P \cap Q) &= \max(0, v(P) + v(Q) - 1) \end{aligned}$$

dir.

$$v(P \vee Q) = v(Q \vee P)$$

$$v(P \wedge Q) = v(Q \wedge P) \quad (\vee \text{ ve } \wedge \text{ komütatiftir });$$

$v(P) = p$, $v(Q) = q$ ve $v(R) = r$ olmak üzere

$$v(P \vee (Q \vee R)) = \min(1, p + \min(1, q + r))$$

$$v((P \vee Q) \vee R) = \min(1, \min(1, p + q) + r)$$

dır. $p + q + r \leq 1$ için her iki ifade $p + q + r$ 'ye, $p + q + r > 1$ için de her iki ifade 1'e eşittir. Böylece,

$$v(P \vee (Q \vee R)) = v((P \vee Q) \vee R)$$

ve aynı zamanda

$$v(P \wedge (Q \wedge R)) = v((P \wedge Q) \wedge R)$$

olup $\vee$ ve $\wedge$ asosiyatiftir.

$v(P \vee P) = \min(1, 2p)$ ve $v(P) = p$ olduğundan bu iki ifade ancak ve ancak $p = 0$ ve $p = 1$ olduğunda birbirine eşit olacağından

$$v(P \vee P) \neq v(P)$$

dir. Aynı şekilde

$$v(P \wedge P) \neq v(P)$$

olup $\vee$ ve $\wedge$ idempotent değildir.

$v(P) = p$, $v(Q) = q$ ve $v(R) = r$ olmak üzere

$$v(P \vee (Q \wedge R)) = \min(1, p + \max(0, q + r - 1))$$

$$v[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)] = \max(0, \min(1, p + q) + \min(1, p + r) - 1)$$

dir. $p+q > 1$, $p+r > 1$ ve $q+r < 1$ olduğu durumda $v[P \vee (Q \wedge R)] = p$ ve $v[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)] = 1$ olup

$$v[P \vee (Q \wedge R)] \neq v[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

dir. Bundan dolayı $\vee$ ve $\wedge$ birbirleri üzerine distribütif değildir. Ayrıca

$$v(\sim(P \wedge Q)) = v(\sim P \vee \sim Q)$$

$$v(\sim(P \vee Q)) = v(\sim P \wedge \sim Q) \quad (\text{De Morgan});$$

$$v(P \vee \sim P) = 1; \quad v(P \wedge \sim P) = 0$$

özellikleri geçerlidir.

Tablo 3.2.4. $v(P) = p$ ve $v(Q) = q$ ile belirlenen 16 bağlacın değerlendirilmesini verir.

$\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $|$, ex , $\sim$, $\downarrow$ bağlaçlarının bu mantıktaki ifadeleri $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\parallel$, $\textcircled{\text{ex}}$, $\approx$, $\downarrow\downarrow$ dir.

Tablo 3.2.4. Doğruluk Değer Tablosu

P	Q	P^*Q	$P \vee Q$	$Q \Rightarrow P$	P
p	q	1	$\min(1, p+q)$	$\min(1, p+1-q)$	p

P	Q	$P \Rightarrow Q$	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
p	q	$\min(1, 1-p+q)$	q	$1 - p - q $	$\max(0, p+q-1)$

P	Q	$P \parallel Q$	$P \textcircled{\text{ex}} Q$	$\sim Q$	$Q \approx P$
p	q	$\min(1, 1-p+1-q)$	$ p - q $	$1 - q$	$\max(0, p-q)$

P	Q	$\sim P$	$P \approx Q$	$P \downarrow\downarrow Q$	P^*Q
p	q	$1 - p$	$\max(0, q-p)$	$\max(0, 1-p-q)$	0

Tablodaki $P \Leftrightarrow Q$ nun doğruluk değerinin nasıl bulunduğunu görelim.

$$\begin{aligned} v(P \Leftrightarrow Q) &= v[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] \\ &= v[(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)] \\ &= \max(0, \min(1, 1 - p + q) + \min(1, 1 - q + p) - 1) \\ &= \max(0, \min(1, 1 - (p - q)) + \min(1, 1 + (p - q)) - 1) \end{aligned}$$

$$v(P \Leftrightarrow Q) = \begin{cases} 1 - (p - q) & (p - q > 0 \text{ için}) \\ 1 + (p - q) & (p - q < 0 \text{ için}) \end{cases}$$

$$v(P \Leftrightarrow Q) = 1 - |p - q|$$

olarak bulunur. Aynı şekilde $P \textcircled{\text{ex}} Q$ nun doğruluk değerini bulalım.

$$\begin{aligned} v(P \textcircled{\text{ex}} Q) &= v(\sim (P \Leftrightarrow Q)) \\ &= v[\sim ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))] \\ &= v[\sim ((\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P))] \\ &= v[(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)] \\ &= \min(1, \max(0, p + 1 - q - 1) + \max(0, q + 1 - p - 1)) \\ &= \min(1, \max(0, p - q) + \max(0, -(p - q))) \end{aligned}$$

$$v(P \textcircled{\text{ex}} Q) = \begin{cases} p - q & (p - q > 0 \text{ için}) \\ -(p - q) & (p - q < 0 \text{ için}) \end{cases}$$

$$v(P \textcircled{\text{ex}} Q) = |p - q|$$

olarak bulunur.

Bunlardan başka totoloji ve çelişki için aşağıdaki özellikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} v(P \Rightarrow P) &= v(\sim P \vee P) \\ &= v(\dot{P}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(P \Rightarrow \dot{P}) &= v(\sim P \vee \dot{P}) \\&= v(\sim P \vee (P \vee \sim P)) \\&= v(P \vee \sim P) \\&= v(\dot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(\ddot{P} \Rightarrow \dot{P}) &= v(\sim \ddot{P} \vee \dot{P}) \\&= v[\sim (P \wedge \sim P) \vee (P \vee \sim P)] \\&= v[(\sim P \vee P) \vee (P \vee \sim P)] \\&= v(P \vee \sim P) \\&= v(\dot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(\dot{P} \Rightarrow P) &= v(\sim \dot{P} \vee P) \\&= v(\sim (P \vee \sim P) \vee P) \\&= v((\sim P \wedge P) \vee P) \\&= v(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(P \Leftrightarrow P) &= v[(P \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow P)] \\&= v(P \Rightarrow P) \\&= v(\dot{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(P \Rightarrow \ddot{P}) &= v(\sim P \vee \ddot{P}) \\&= v(\sim P \vee (P \wedge \sim P)) \\&= v(\sim P)\end{aligned}$$

Aynı zamanda

$$v(P \rightarrow Q) = v(\sim P \vee (P \wedge Q))$$

ve

$$v(P \Rightarrow Q) = v(\sim P \vee (P \wedge Q))$$

dir.

3.2.3. $(\tilde{P}(X), \hat{+}, \cdot, -)$ ile Birleşmiş Mantık

$\hat{+}$ ile $\cdot$ 'nin temelini oluşturan ayrılma ve birleşme sırasıyla,

$$v(P \gamma Q) = v(P) + v(Q) - v(P) \cdot v(Q),$$

$$v(P \& Q) = v(P) \cdot v(Q)$$

dir.

$v(P \gamma Q) = v(Q \gamma P)$ ve $v(P \& Q) = v(Q \& P)$ olup γ ve $\&$ komütatiftir. $v(P) = p$, $v(Q) = q$ ve $v(R) = r$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v(P \gamma (Q \gamma R)) &= p + q + r - qr - p(q + r - qr) \\ &= p + q + r - qr - pq - pr + pqr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v((P \gamma Q) \gamma R) &= p + q - pq + r - r(p + q - pq) \\ &= p + q - pq + r - rp - rq + pqr \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$v(P \gamma (Q \gamma R)) = v((P \gamma Q) \gamma R)$$

bulunur. Aynı şekilde

$$v(P \& (Q \& R)) = pqr$$

$$v((P \& Q) \& R) = pqr$$

olup

$$v(P \& (Q \& R)) = v((P \& Q) \& R)$$

dır. Böylece γ ve $\&$ 'nın asosiyatif olduğunu göstermiş olduk.

$$v(P \gamma P) = p + p - p^2 = 2p - p^2$$
$$v(P) = p$$

olup $v(P \gamma P) \neq v(P)$ dir. ($p = 0$ ya da $p = 1$ ise eşitlik sağlanır .)

Aynı şekilde, $v(P \& P) \neq v(P)$ dir. Öyleyse γ ve $\&$ idempotent değildir. Benzer işlemlerle

$$v(P \gamma (Q \& R)) \neq v[(P \gamma Q) \& (P \gamma R)]$$
$$v(P \& (Q \gamma R)) \neq v[(P \& Q) \gamma (P \& R)]$$

elde edilir. Bu da γ ve $\&$ nın birbirleri üzerine distribütif olmadığını gösterir. γ ve $\&$

$$v(\sim (P \& Q)) = v(\sim P \gamma \sim Q)$$
$$v(\sim (P \gamma Q)) = v(\sim P \& \sim Q) \quad (\text{De Morgan});$$

formüllerini sağlarlar.

Aynı zamanda $v(P) = p$, $v(Q) = q$ olmak üzere;

Karıştırma : $v(P \rightarrow Q) = 1 - p + pq$

Totoloji : $v(\dot{P}) = 1 - p(1 - p)$

Çelişki : $v(\dot{P}) = p(1 - p)$

dir. Açık olarak

$$v(P \& Q) = v(P \wedge Q)$$

dır. Yani ancak ve ancak P'nin ya da Q'nun doğruluk değeri 0'a ya da 1'e eşitse

$$pq = \min(p, q)$$

dır. Aynı şartlar altında

$$v(P \gamma Q) = v(P \vee Q)$$

olduğuna dikkat edilirse bu eşitlik

$$v(P \& Q) = v(P \wedge Q)$$

ve

$$v(P \gamma Q) = v(P \vee Q)$$

için de aynıdır. Bundan başka, v her u durumdaki latis değerlendirmedir. Yani

$$\begin{aligned} v(P) + v(Q) &= v(P \wedge Q) + v(P \vee Q) \\ &= v(P \& Q) + v(P \gamma Q) \end{aligned}$$

dır.

3.3. Bulanık Değerli Mantıklar

Bir bulanık değerli mantık, doğruluk uzayı $[0,1]$ reel aralığı üzerindeki bulanık sayıların kümesi olan bir çok değerli mantıktır (Kandel, 1986). Yani bir önermenin doğruluk değerı, desteği $[0,1]$ tarafından içerilmiş bir bulanık sayısıdır. Böyle bulanık sayıları, "doğru", "ok doğru", "şüpheli", "yanlış" vb. doğruluk değerleri ile dil bilimde adlandırılabilir. Bulanık değerli mantık kavramını geliştirmek için Zadeh tarafından geliştirilen genişletme prensibini kullanacağız.

X evrenlerin $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ şeklinde bir kartezyen çarpımı olsun ve $A_1, \dots, A_r$ sırasıyla $X_1, \dots, X_r$ cinsinden r bulanık kümeleri olsunlar. $A_1, \dots, A_r$ 'in kartezyen arpımı

$$A_1 \times \dots \times A_r = \int_{X_1 \times \dots \times X_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)) / (x_1, \dots, x_r)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $f, y = f(x_1, \dots, x_r)$ olacak şekilde $X_1 \times \dots \times X_r$ den Y evrenine bir betimleme olsun. Genişletme prensibi

$$\mu_B(y) = \sup_{y=f(x_1, \dots, x_r)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r))$$

ve

$$f^{-1}(y) = \emptyset \text{ ise } \mu_B(y) = 0$$

olacak şekilde f fonksiyonunu, r tane A_r bulanık kümesinden Y deki bir B bulanık kümesine betimlememize yardımcı olur.

Burada $f^{-1}(y)$, y 'nin ters görüntüsü ve $\mu_B(y)$ r 'li $(x_1, \dots, x_r)$ üyelik değerleri arasında en büyük olanıdır. Genişletme prensibinin kullanılmasına basit bir örnek vermek için, f fonksiyonunun $X_1 = \{a, b, c\}$ ve $X_2 = \{x, y\}$ deki sıralı ikililerin $Y = \{p, q, r\}$ kümesine bir betimlemesi olduğunu kabul edelim. f aşağıdaki matrisle tanımlanmış olsun;

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} p & p \\ q & r \\ r & p \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_1 = 0.3/a + 0.9/b + 0.5/c$$

ve

$$A_2 = 0.5/x + 1/y$$

olacak şekilde A_1 , X_1 üzerinde tanımlı bir bulanık küme ve A_2 , X_2 üzerinde tanımlı diğer bir bulanık küme olsun. p, q ve r 'nin $B = f(A_1, A_2) \in \tilde{P}(Y)$ bulanık kümesindeki üyelik değerleri genişletme prensibi kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mu_B(p) = \max[\min(0.3, 0.5), \min(0.3, 1), \min(0.5, 1)] = 0.5$$

$$\mu_B(q) = \max[\min(0.9, 0.5)] = 0.5$$

$$\mu_B(r) = \max[\min(0.5, 0.5), \min(0.9, 1)] = 0.9.$$

Böylece, genişletme prensibinden

$$f(A_1, A_2) = 0.5/p + 0.5/q + 0.9/r$$

elde edilir (Klir et al, 1988).

3.4. Bulanık Mantığın Uygulama Alanları

Bulanık mantığın ilk uygulama alanları çimento sanayii ve su arıtma sistemlerinde olmuştur. Daha sonra buhar türbini, nükleer reaktör, asansör ve vinç denetimi gibi değişik alanlarda da bulanık mantıktan yararlanılmıştır. Özellikle Japonya'da çok geniş uygulama alanları bulmuştur. Bir metro sisteminde kullanılan bulanık mantık çok başarılı olmuş ve bu olaydan sonra Japonya'da bulanık mantık çok rağbet görmüştür. 1990'da bulanık mantık fotoğraf makinalarından ev aletlerine ve hatta borsaya kadar çok değişik alanlarda kullanılmıştır. Günümüzde bulanık mantık uygulamalarına yönelik yazılım ve donanımlar piyasada hazır şekilde kullanıcılara sunulmuştur. Panasonic firmasının dizayn ettiği video kayıt cihazının, elle tutulması durumunda çekim sırasındaki sarsıntıları ortadan kaldırması, Subaru ve Nissan firmalarının birlikte gerçekleştirdikleri otomobil vites sisteminde, araba kullanış stilinin ve motor yükünün sezilerek uygun dişli oranının seçimi, yine Nissan tarafından gerçekleştirilen ABS fren sistemleri, Fujitsu, Toshiba, Hitachi ve Mitsubishi'nin gerçekleştirdikleri büyük asansör denetim sistemleri, Matsushita firmasının dizayn ettiği çamaşır makinasında çamaşırın kirliliğine, ağırlığına ve kumaşın cinsine göre yıkama programı seçen sistemler bulanık mantığın kullanıldığı ilginç örneklerdir.

NASA'da bir grup araştırmacı, bulanık mantıktan yararlanılarak, uzay mekiğinin yakıt tüketimini üç kat azaltmayı ve sistem güvenilirliğinin artmasını sağlamışlardır. Bunların dışında ısıtmayı kullanan suyun miktar ve sıcaklığına göre ayarlayan su ısıtıcılarının, ortam koşullarını sezerek en iyi çalışma durumunu sezen, odaya birisi girerse soğutmayı artıran klima cihazlarının, yerin durumunu ve kirliliğini sezerek motor gücünü buna uygun bir şekilde ayarlayan elektrik süpürgelerinin dizaynlarında bulanık mantıktan yararlanılmıştır.

Bugün ABD, Japonya, Çin ve Batı Avrupa ülkeleri başta olmak üzere otuza yakın ülke bulanık mantık üzerine araştırmalar yapmaktadır. Uygulama açısından ise Japonya belirgin bir şekilde öndedir.

Bulanık mantığın insan düşünüş tarzına yakın olması, matematiksel modele ihtiyaç duyması, uygulamalarının hızlı ve ucuza mal olması avantajlarındandır. Bulanık mantık uygulamalarında kullanılan kuralların mutlaka uzman deneyimlerine bağlı olarak koyulması gereksinimi, üyelik fonksiyonları deneme ile bulunduğu için zaman kaybının olabileceği ve bulanık mantık ile oluşturulan bir sistemin kararlılık analizinin yapılamaması dezavantajlarındandır (Başbuğ, 1994).

SONUÇ

Tezimde ülkemizde yeni yeni araştırılmaya başlanan bulanık mantığa temel olması için temel kavramları vererek, bulanık kümeleri, bulanık sayıları ve bazı temel bulanık mantık kurallarını vermeye çalıştım.

Bu çalışmamın bu konuyla ilgilenen ya da ilgilenmek isteyenlere iyi bir kaynak olacağı kanısındayım. Yaptığım çalışmalar temel çalışmalar olduğundan daha da geliştirilebilir.

İlk olarak L.A.Zadeh tarafından geliştirilen bulanık kümeler zaman içerisinde bulanık mantığın oluşmasına öncülük etmiştir. Bununla birlikte pek çok alanda bulanık mantık sonuçları kullanılarak gelişmiş sistemler elde edilmesi bulanık mantık çalışmalarına ivme kazandırmıştır. Bunların sonucunda da bilim adamları bulanık mantık konusunda pek çok eserler vermişlerdir.

Sonuç olarak, önümüzdeki yıllarda sıkça bulanık mantıktan söz edilecek diyebiliriz. Pek çok bilgisayar firması bulanık bilgisayarları geliştirmek için hazırlıklara başlamış durumda ama bulanık bilgisayarların nasıl bir şey olacağı da ayrı bir merak konusudur.

Dileğim ülkemizde de bulanık mantık üzerinde çalışan bilim adamı sayısının artması ve bulanık mantık kullanılarak ülkemizde de gelişmiş sistemlerin elde edilmesidir.

KAYNAKLAR

- 1-AKSOY Y., 1978. Matematik Lojik: 1-27.
- 2-BAŞBUĞ A., Şubat 1994. Byte Türkiye, Bulanık Teknoloji: 147-151.
- 3-KANDEL A., 1986. Fuzzy Mathematical Techniques with Applications: 1-13,123-135.
- 4-KAUFMANN A., and GUPTA M.M., 1991. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and Applications: 1-35.
- 5-KAYNAK O., 1992. Şişe Cam Semineri-Bulanık Denetim ve Endüstriyel Uygulamaları: 1-14.
- 6-KLIR G.J., and FOLGER T.A., 1988. Fuzzy Sets, Uncertainty and Information: 1-33.
- 7-TÜRKŞEN İ.B., 1985. Yöneylem Araştırma Dergisi, Cilt:4, Sayı:1, Bulanık Kümeler Kuramı ve Uygulamaları: 1-15.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Salih Karanfil
Doğum Tarihi : 26 Haziran 1970
Doğum Yeri : Gökağaç/KIBRIS
İlk Öğrenimi : 1982 yılında Yeşilyurt İlkokulundan mezun oldu.
Orta Öğrenimi : 1988 yılında Lefkoşa Türk Maarif Kolejinden mezun oldu.
Yüksek Öğrenimi: 1988 yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1992 yılında tamamladı.
Görevi : Y.T.Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.