

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ADOMIAN AYRIŞIM METODU İLE ISI TRANSFERİ
MODELLEMESİ**

YASEMİN KARAGÖZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. FATİH TAŞÇI**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADOMİAN AYRIŞIM METODU İLE ISI TRANSFERİ
MODELLEMESİ

Yasemin KARAGÖZ tarafından hazırlanan tez çalışması 24.09.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Fatih Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Fatih Üniversitesi

Doç. Dr. Nuran GÜZEL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Muhammet KURULAY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Aydın SEÇER
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışma, homojen olmayan malzemede bir ısı transferi modeli olan Reaksiyon Difüzyon denkleminin Adomian ayrışım metodu ile çözümünü içermektedir.

Bu tez çalışmasının hazırlanma sürecinde tez danışmanlığımı kabul edip yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Fatih TAŞÇI'ya, çalışmalarımın yürütülmesi sırasında tavsiyeleriyle yön veren, bilgi birikimi ve desteğiyle teşvik edici olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim ve öğrenim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen canım anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim. Ayrıca yüksek öğrenimim sırasında desteğiyle yanımda olan nişanlım Ahmet KOÇAK'a teşekkür ederim.

Ağustos, 2012

Yasemin KARAGÖZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	5
1.3 Hipotez	5
BÖLÜM 2	
ISI TRANSFERİ ANALİZİ.....	6
2.1 Genel Bilgiler	6
2.2 Isı İletimi (Kondüksiyon).....	8
2.2.1 Isı İletkenliği	11
2.2.2 Isı Yayınımı	13
2.3 Isı Taşınımı (Konveksiyon).....	14
2.4 Isı Işınımı (Radyasyon).....	16
2.5 Eş Zamanlı Mekanizmalar	19
2.5.1 Reaksiyon Difüzyon Denklemi.....	19
2.5.2 Adveksiyon Difüzyon Denklemi	20

BÖLÜM 3

ADOMİAN AYRIŞIM METODU	21
3.1 Adomian Ayrışım Metodunun Analizi	21
3.2 Adomian Polinomlarının Elde Edilmesi	23
3.2.1 Taylor Seri Açılımı	24
3.2.2 Neumann Seri Açılımı.....	28
3.2.3 Parametrizasyon Yöntemi	30
3.3 Modifiye Adomian Ayrışım Metodu	33
3.3.1 Modifiye Adomian Ayrışım Metodu Analizi	34
3.4 Adomian Ayrışım Metodunun Uygulamaları.....	34

BÖLÜM 4

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELERDE REAKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN ADOMİAN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ	51
4.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler	51
4.2 Problemin Geliştirilmesi	53
4.3 Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon Denkleminin Adomian Ayrışım Metodu ile Çözümü	53
4.3.1 Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon Denkleminin t Yönünde Çözümü	55

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	69
KAYNAKLAR	77
EK-A	
YARARLANILAN PROGRAM KODLARI.....	80
ÖZGEÇMİŞ	83

SİMGE LİSTESİ

A	Yüzey alanı
A_n	Adomian polinomları
α_d	Isı yayılım (difüzyon) katsayısı
α_r	Soğurma katsayısı
β	Malzemenin homojenliğini belirleyen parametre
c	Özgül ısı
ΔT	Sıcaklık farkı
$\dot{E}$	Birim zamanda ışıma miktarı
ε	Emissivite sabiti
h	Taşınım katsayısı
k	Isı iletim katsayısı
L_t	t değişkenine bağlı türev operatörü
L_t^{-1}	t değişkenine bağlı integral operatör
L_x	x değişkenine bağlı türev operatörü
L_x^{-1}	x değişkenine bağlı integral operatör
L_{xx}	x değişkenine bağlı 2. mertebeden türev operatörü
L_{xx}^{-1}	x değişkenine bağlı 2- kat integral operatör
$p(x,t)$	Reaksiyon parametresi
$\dot{q}$	Birim hacme düşen enerji miktarı
$\dot{Q}$	Isı transferi miktarı
$\dot{Q}/A$	Isı akısı
ρ	Malzemenin yoğunluğu
ρ_r	Soğurma katsayısı
ρc	Isı kapasitesi
σ	Stefan – Boltzmann sabiti
T_∞	Yüzeyden yeteri kadar uzaktaki akışkanın sıcaklığı
T_s	Yüzey sıcaklığı
τ	Geçirme katsayısı

KISALTMA LİSTESİ

AAM	Adomian Ayrışım Metodu
ARD	Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon
GAAM	Geliştirilmiş Adomian Ayrışım Metodu
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
İAAM	İki-Adım Adomian Ayrışım Metodu
MAAM	Modifiye Adomian Ayrışım Metodu

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Maddednin farklı hallerinde ısı iletimi.....	9
Şekil 2. 2 Katı bir cisimde eş sıcaklık yüzeyleri	10
Şekil 2. 3 Düzlem duvarda ısı iletimi	10
Şekil 2. 4 Zorlanmış taşınım ve doğal taşınım	15
Şekil 2. 5 Cismin yüzeyine gelen ışıının dağılımı	16
Şekil 5. 1 Örnek 4.1'den elde edilen çözümün grafiği	70
Şekil 5. 2 Örnek 4.3'ten elde edilen çözümün grafiği	70
Şekil 5. 3 $\beta = 0.001$, Örnek 4.2, homojen olmayan malzemede Karagöz'ün çözümünün grafiği	73
Şekil 5. 4 $\beta = 0$, homojen malzemede Lesnic'in çözümünün grafiği	73
Şekil 5. 5 $\beta = 0.001$, Örnek 4.4, homojen olmayan malzemede Karagöz'ün çözümünün grafiği	76
Şekil 5. 6 $\beta = 0$, homojen malzemede Lesnic'in çözümünün grafiği	76

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 Bazı malzemelerin 20°C 'de ısı iletkenlikleri	12
Çizelge 2.2 Bazı malzemelerin 20°C 'de yayınım katsayıları	14
Çizelge 2.3 Isı taşınım katsayısının bazı tipik değerleri	16
Çizelge 2.4 Bazı malzemelerin ışıınım yayma katsayıları	18
Çizelge 5.1 $t = 0.5$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.2'den ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic'in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması	71
Çizelge 5.2 $t = 1.0$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.2'den ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic'in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması	72
Çizelge 5.3 $t = 0.25$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.4'ten ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic'in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması	74
Çizelge 5.1 $t = 0.5$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.4'ten ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic'in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması	75

ADOMIAN AYRIŞIM METODU İLE ISI TRANSFERİ MODELLEMESİ

Yasemin KARAGÖZ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatih TAŞÇI

Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde reaksiyon difüzyon denklemi Adomian Ayrışım Metodu (AAM) kullanılarak incelenmiştir. Lineer ve lineer olmayan denklemlere uygulanabilen AAM detaylı bir şekilde çalışıldı ve farklı uygulama örnekleri verildi. Ayrıca ısı transferi olayından da bahsedildi. Bu çalışmanın asıl amacı, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler olarak bilinen homojen olmayan bir malzemede değişken katsayılı reaksiyon difüzyon denklemine AAM'yi uygulamaktır. İlk olarak, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi temsilen malzemenin iletkenliği ve malzemenin homojenliğini belirleyen parametre değişken olarak tanımlandı. Reaksiyon parametresini, $p(x,t)$, içeren kısmın sabit olduğu durumda AAM ile çözüm için bir iterasyon bulundu. Daha sonra, malzemenin homojenliğini belirleyen parametrenin farklı durumları için örnekler verilmişti. Elde edilen bazı sonuçlar grafik ve çizelgeler ile ifade edilerek daha önceki çalışmalarla karşılaştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrışım metodu, Adomian polinomları, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, reaksiyon difüzyon denklemi.

ABSTRACT

HEAT TRANSFER MODELING WITH ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Yasemin KARAGÖZ

Department of Mathematical Engineering
MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Co-Advisor: Asisst. Prof. Dr. Ali ŞAHİN

In this study, the reaction diffusion equation in the functionally graded materials (FGMs) is examined by using Adomian Decomposition Method (ADM). ADM can be applied to linear and non-linear equations and different examples of applications were studied in details. In addition, the heat transfer event mentioned. The main purpose of this study is to apply ADM for the reaction diffusion equation with variable coefficients in the non-homogeneous material known as functionally graded materials. First, conductivity of the material is defined as a function of space variable and a non-homogeneity parameter that represents the effect of functionally graded materials. In the case, which portion of the reaction parameter, $p(x,t)$, is fixed, an iteration model is found for solution via ADM. Then, examples are given for the different states of the nonhomogeneity parameter of the material. Results are plotted and given in figures and compared with previous studies.

Key words: Adomian decomposition method, Adomian polynomials, functionally graded materials, reaction diffusion equation.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Matematik, fizik, biyoloji, kimya ve mühendislik gibi uygulamalı alanlarda problemler, lineer veya lineer olmayan denklem veya denklem sistemleri ile ifade edilir. Bu problemlerin çözümünde farklı birçok yöntem kullanılır. Bu yöntemlerden biri de 1980'li yılların başında George ADOMIAN [1] tarafından tanıtılan Adomian Ayrıştırma Metodudur (AAM). Lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemler ile cebirsel, integral, integro-diferensiyel denklemler ve denklem sistemlerine kolaylıkla uygulanabilmesi ve çözüme ulaşmada gösterdiği yakınsaklık AAM'nin avantajlarından [2]. Ayrıca bu yöntemde doğrusallaştırmaya, kısıtlamaya ve pertürbasyona gerek yoktur. AAM ile çözüm yakınsak kuvvet serisi olarak verilir. Serinin her terimi analitik fonksiyonun kuvvet serisine açılmasıyla elde edilen polinomlarla belirlenir. Bununla birlikte lineer olmayan durumlarda karşılaşılan Adomian polinomları [1] A_n ile gösterilir.

Cherruault [3] AAM'nin yakınsaklığını inceleyen ve bu metodunun genel ilkelerini doğrulayan ilk bilim insanıdır. Cherruault bu çalışmada fonksiyonel denklemler için sabit nokta teoremini kullanmış ve AAM'nin yakınsaklığını göstermiştir. Cherruault ve Adomian [4] yöntemi yakınsaklığı için yeni bir çalışma daha yapmışlardır. Bu çalışmada AAM'nin hızlı yakınsadığına dair sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca, Abbaoui ve Cherruault [5], [6] çalışmalarında diferensiyel denklemleri ele almışlardır. Sabit nokta teoremini kullanarak diferensiyel denkleminin çözümü ve lineer olmayan fonksiyonun köklerinin bulunması ile AAM'nin yakınsaklığını ispatlamışlardır. Bu ispatın ancak uygun başlangıç ve sınır koşulları altında lineer, yarı lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanabilirliğine dair bazı örnekler vermişlerdir. Metodun yakınsaklığına

ilişkin bir başka çalışma da El- Kalla [7] tarafından yapılmıştır. El-Kalla ikinci tür Volterra integral denklemi için belirlediği dönüşümle AAM'nin yakınsaklığını göstermiştir.

AMM'nin yakınsaklığının araştırılması dışında, metodunun daha hızlı yakınsaması, kullanım alanının arttırılması ve işlem yükünün daha da azaltılması için bazı düzenlenmeler yapılmıştır. AMM için ilk düzenleme Wazwaz [8] tarafından yapılan Modifiye Adomian Ayrışım Metodudur (MAAM). Bu çalışmada, Adomian polinomları kullanılmadan sadece iki iterasyonla çözüme ulaşılan bazı örnekler verilmiştir. Bu metodun lineer olmayan bazı durumlarda standart AAM'den daha az işlem yükü ile daha hızlı yakınsadığı sonucuna varılmıştır. AAM'nin düzenlenmesine ait diğer bir çalışma Wazwaz ve El-Sayed [9] tarafından geliştirilen Geliştirilmiş Adomian Ayrışım Metodudur (GAAM). Geliştirilen bu yöntemin bazı örneklerde oldukça etkili olduğu ve lineer olmayan bazı örneklerde de Adomian polinomlarına ihtiyaç duyulmaksızın sadece iki iterasyonla sonuca varıldığı gösterilmiştir. İki-Adım Adomian Ayrışım Metodu (İAAM) olarak adlandırılan diğer bir düzenleme de Luo'ya [10] aittir. Bu metod standart AAM'nin iki adıma ayrılmasına dayanır. Luo vd. [11] standart AAM'yi uygun dönüşümler altında homojen olmayan sınır koşulları içeren problemlere uygulamıştır. İAAM'nin bu problemlerde oldukça etkili olduğunu vurgulamışlardır.

Adomian polinomlarının elde edilmesiyle ilgili de çalışmalar yapılmıştır. Adomian polinomları, ilk olarak Adomian [2] tarafından genelleştirilmiş Taylor serileri kullanılarak verilmiştir. Zhu vd. [12] Adomian polinomlarının hesaplanmasında parametrizasyon yöntemini kullanmışlardır. Bu yöntemde Adomian tarafından verilen yönteme göre daha az formüle ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca, Pourdarvish [13] Adomian polinomlarını Neumann serilerini kullanarak elde etmeyi denemiş ve başarılı olmuştur. Bu yöntemin bilgisayar programları uygulamalarında da kullanabildiğini göstermiştir.

AAM'nin lineer ve lineer olmayan denklemlere kolaylıkla uygulanabilmesi ve hesap yükünün az olması ve sonuca hızlı olan yakınsaması sayesinde birçok akademisyenin ilgisini çekti. Örneğin, Wazwaz [14] çalışmasında kısmi diferensiyel denklemler ile lineer olmayan Klein-Gordon ve Lane-Emden denklemlerini MAAM ile çözdü. Biazar [15] integro-diferensiyel denklem sistemlerine AAM'yi uygulamıştır. Metodunun bazı sistemlere ne kadar kolay uygulandığına dair birkaç örnek vermiştir. Rach [16] AAM ile Picard metodunu karşılaştırmış ve AAM'nin daha üstün bir yöntem olduğu sonucunu

vermiştir. Bu çalışma gibi birçok çalışma, AAM ile klasik bazı metotların karşılaştırılmasını içerir. Abbasbandy [17] integral denklemin çözümü için Homotopy Pertürbasyon Metot (HPM) ile AAM'yi karşılaştırmış ve AAM'nin de bir homotopy olduğunu ve başarılı bir metot olduğunu göstermiştir. Geyikli [18] genelleştirilmiş Korteweg-deVries (KdV) denklemlerinin çözümü için AAM ile sonlu elemanlar yöntemini karşılaştırmıştır. El-Gamel [19] ise başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde AAM ile wavelet-Galerkin metodunu karşılaştırmıştır. Tüm bu çalışmalar AAM'nin geniş bir yelpazede kullanılan güçlü bir yöntem olduğunu göstergesidir. Ayrıca fen ve mühendislik gibi uygulamalı alanlarda önemli bir yere sahip olan ısı denklemi ve ısı denkleminin modellerinin AAM ile çözümüne ait çalışmalar da vardır. Jang [20] bir boyutlu değişken katsayılı homojen olmayan parabolik denklemde AAM'yi çalıştı. Gorguis ve Benny Chan [21] AAM ve değişkenlerine ayırıştırma yöntemini kullanarak ısı denklemleri üzerinde çalışma yaptılar. Daha önceki çalışmalardaki sonuçlar hem analitik hem de sayısal olarak karşılaştırıldı. Bu karşılaştırmalar sonucunda, AAM'nin etkili ve güvenilir bir yöntem olduğunu açıkladılar.

Isı denklemi ve modellerine AAM'yi uygulamak Daniel Lesnic'in de ilgisini çekti. Lesnic [22] çalışmalarına ilk olarak, periyodik sınır şartları içeren, ısı denkleminde AAM'nin yakınsaklığını göstererek başladı. Bir boyutlu durumda AAM, diferensiyel iterasyon metodu ile aynı sonuçları verdi. Fakat AAM'nin yakınsaması diferensiyel iterasyon metoduna göre daha hızlıydı. Lesnic daha sonra karışık türevler içeren ısı denklemi için AAM'yi kullandı ve sonuca ulaştı [23]. Ayrıca, kimya ve biyoloji gibi alanlarda kullanılan ve ısı denklemi modellerinden olan Cauchy Adveksiyon Difüzyon denkleminin AAM ile çözümü de Lesnic [24] tarafından çalışıldı. Akış hızının sabit olduğu durumda türevler kolaylıkla alınabilirken akış hızının değişken olduğu durumlarda sembolik sayısal hesaplamalara ihtiyaç duyuldu. Bu başarılı çalışma AAM'nin hassas örnekleri arasındadır. Lesnic [25] farklı bir ısı modeli olan Reaksiyon Difüzyon denklemini de ele aldı. Bu çalışmada reaksiyon parametresi sadece zamana bağlı olduğu durumda türevler kolaylıkla hesaplanırken diğer durumlarda yine sembolik sayısal hesaplamalara ihtiyaç duyuldu. Verilen örneklerde hiçbir kısıtlama ve yaklaşıma gerek kalmadan sadece birkaç iterasyonla çözüme ulaşılması AAM'nin bir kez daha başarısını ortaya koymuştur. Lesnic tarafından incelenen bu denklemler sabit katsayılı

örneklerdir. Oysaki gelişen bilim ve teknolojik çalışmalar bizi değişken katsayılı denklemlere yönlendirmektedir.

Havacılık, uzay, savunma ve otomotiv gibi endüstrilerdeki hızlı teknolojik gelişim ve artan rekabet, yüksek performansa sahip ürünlerin tasarlanmasına, bu durum da hafif ama aynı zamanda gerilmelere ve sıcaklıklara karşı mukavemeti yüksek malzemelere olan ihtiyacı ortaya koymaktadır. Bu ihtiyaca cevap vermek üzere, mekanik özellikleri metallere göre daha üstün olan kompozit malzemeler üretilmeye başlanmıştır. Yüksek sıcaklığa maruz kalan kompozit malzemelerde dış ve iç yüzeylerinde farklı sıcaklık değerlerine ulaşmaktadır. Bu yüksek sıcaklık farkından dolayı, metaller üzerine çeşitli tekniklerle oluşturulan homojen seramik kaplamalar, metali korozyona, oksitlenmeye ve aşınmaya karşı korusa da sistem yüksek sıcaklıklarda ısı gerilme sorunuyla karşı karşıya kalmaktadır. Yüksek sıcaklıkların bulunduğu ortamlarda ani ve büyük sıcaklık değişimlerinin olmasıyla seramik ve metal malzemelerin ısı genleşme katsayılarının farklılıklarından dolayı yapılarında keskin gerilme dağılımları oluşmaktadır. Bu gerilme yığılmaları ara yüz çatlak ve kırık oluşumunun da önde gelen sebeplerinden biridir [26]. Bu sorunun çözümü olarak, 1984’de Japonya’da bir uzay mekiği projesi sırasında çok yüksek sıcaklık aralığına dayanabilecek bir ısıl bariyer malzemesi önerisi ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) konsepti ortaya çıkmıştır. FDM’ler birbirinden farklı özelliklere sahip homojen iki malzemedен oluşan ve malzeme özellikleri bir yüzeyden diğerine bir konum fonksiyonuna bağlı olarak sürekli veya kademeli bir değişim gösteren yüksek ısıl direnç kapasitesine sahip ileri teknoloji malzemeleridir.

FDM’ler, sıcaklığın yüksek olduğu yüzeyi seramik ve sıcaklığın düşük olduğu yüzeyi metal olacak şekilde ve seramikten metale doğru kademeli veya devamlı derecelendirilmiş bir geçişe sahip biçimde tasarlanmış malzemelerdir. Bu tasarım sayesinde, iki malzeme arasında farklı ısıl genleşme katsayılarından dolayı oluşan ısı gerilmelerle birlikte, fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani değişimlerden dolayı meydana gelebilecek olan diğer olumsuzluklar da minimuma indirilmiş olur. Ayrıca, bu malzemelerin bileşen, mikroyapı ve bazı mekaniksel özelliklerinin yapı boyunca yumuşak bir değişiminin tasarımcıya istenen mekanik ve ısıl özellikte bir malzeme üretimi konusunda büyük yararlar sağladığı görülmüştür. Bu durum FDM’lerin birçok uygulamada tercih edilme sebebi olmaktadır [27].

Isı transferi uygulamalarında da FDM gittikçe önem kazanmaktadır. Şahin ve Karatay [28] FDM’lerde bir boyutlu ısı (difüzyon) denklemini AAM ile çözmüştür. Bu çalışmada genelleştirilmiş Fourier serilerinden yararlanılmıştır. Ayrıca aynı denklemi özfonsiyon açılım metodunu kullanarak da çözmüşlerdir. İki metotta da bulunan çözümler tamamen aynı sonucu vermiş ve başarılı olmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı; homojen olmayan, fonksiyonel derecelendirilmiş, malzemelerde Reaksiyon Difüzyon denkleminin Adomian ayrışım metodu ile çözülebildiğini göstermektir.

1.3 Hipotez

Homojen malzemede Reaksiyon Difüzyon denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemde malzemenin iletkenliği konumun bir fonksiyonu olsun. Bu durumda elde edilen yeni denklem Adomian ayrışım metodu ile çözülebilir.

BÖLÜM 2

ISI TRANSFERİ ANALİZİ

Bu bölümde, ısı transferi olayı, ısı transferi şekilleri ve bu transfer şekillerinin matematiksel ifadeleri incelenecektir. Isı transferi, hayatın her alanında yaygın olarak karşılaşılan bir konudur. Enerjinin olduğu her yerde ısı transferi olayından bahsedilebilir. Isı transferine verilebilecek en basit örnek vücudumuzdur: Yazın sıcak ortama karşı daha ince ve açık renkli giysiler, kışın ise kalın ve koyu renkli giysiler giyilir. Bunun nedeni, vücuttan ortama verilen veya ortamdan vücuda kazanılan ısıyı giysiler yardımıyla kontrol ederek vücudun ısı dengesini sağlamaktır.

Isı transferi kimya, nükleer, metalürji, elektrik ve makine mühendisliği gibi birçok uygulamalı alanın ilgi odağındadır. Ayrıca evlerde kullanılan televizyon, buzdolabı, fırın, ısıtma-soğutma ve havalandırma sistemleri, oto radyatörleri, buhar kazanları, ısı değiştiricileri, güç santralleri, uçaklar, uzay mekikleri, buhar boruları, sıcak su ısıtıcıları, güneş toplayıcılar, duvar, çatı, tavan, pencere yalıtımları ve pek çok kimyasal yöntemler ısı transferi uygulamalarına örnek olarak gösterilebilir. Bütün bu uygulamaların yapılıp yapılamayacağını, kullanılabilirliğinin ve ekonomikliğin tahmin edilmesi detaylı bir ısı transferi analizinin yapılmasını gerektirir [29].

2.1 Genel Bilgiler

Isı, sıcaklık farkı nedeniyle enerjinin maddeden maddeye geçebilen şeklidir. İki sistem veya bir sistem ile çevresi arasında sıcaklık farkı nedeniyle enerji transferini araştıran bilim dalı, ısı transferi olarak adlandırılır. Isı ile enerjinin biçimleri arasındaki ilişkileri inceleyen bilim dalına termodinamik denir. Termodinamik dengedeki sistemlerle ilgilenir ve denge durumundaki değişiklik için gerekli olan enerji miktarını hesaplar. Fakat denge konumu için gerekli ısının nasıl transfer edildiği, yani sıcaklık farkı nedeniyle olan enerji transferinin fiziki mekanizması, hakkında bir fikir vermez.

Halbuki, ısı transferi termodinamiğin temel yasalarından yararlanarak sadece enerjinin nasıl transfer edileceğini değil, aynı zamanda belirli şartlar altında enerji değişim hızına da açıklık getirir.

Isı transferi analizlerinde sıcaklık farkı, cismin geometrisi ve özellikleri arasındaki ilişkiler göz önüne alınarak, çalışmalar teorik ve deneysel ortak temeller üzerine oturtulur. Teorik kısım belli kabuller altında, bir veya daha fazla fiziksel yasaya dayanır.

Tanım 2.1 Fiziksel yasa uygulamada ortamdan bağımsız ise bu yasaya genel yasa denir.

Tanım 2.2 Fiziksel yasa uygulamada ortama bağlı ise bu yasaya özel yasa denir.

Isı transferi ile ilgili tüm analizlerde dört genel yasadandır yararlanılır. Bu yasalar:

- Kütle Korunumu Yasası
- Enerji Korunumu Yasası (Termodinamiğin Birinci Yasası)
- Entropinin Artışı Yasası (Termodinamiğin İkinci Yasası)
- Momentumun Korunumu Yasası (Newton'un İkinci Hareket Yasası)

olarak bilinir. Termodinamiğin İkinci Yasası gereği, ısı geçişi sıcaklığı yüksek olan ortamdan sıcaklığı düşük olan ortama doğrudur.

Isı transferinde bu genel yasalara ek olarak, aşağıda verilen üç özel yasadandır yararlanılır. Bu özel yasalar:

- Fourier Isı İletim Yasası
- Newton'un Soğuma Yasası
- Stefan-Boltzmann Işıma Yasası

şeklindedir.

Isı transferinin fiziki mekanizması ortam sıcaklıklarındaki farka bağlı olduğu kadar, ortamın ve yüzeylerin özelliklerine de bağlıdır. Bu nedenle, ısı transferi mekanizmasını birbirinden farklı üç temel başlık altında incelemek gerekir. Bunlar:

- Isı İletimi (Kondüksiyon)
- Isı Taşınımı (Konveksiyon)
- Isı Işınımı (Radyasyon)

şeklindedir.

Daha önce verilen dört genel yasa “sürekli ortam” kavramı dikkate alınarak ifade edilmiştir. Sürekli ortam kavramında madde sürekli gibi görülmekle birlikte sabit, hareketli ve çarpışan moleküller, atomlar ve elektronlardan meydana gelir. Isı transferi bu parçacıkların aralarında gerçekleştirilen kinetik enerji değişimi sonucu ortaya çıkar. Isı transferi uygulamalarının çoğunda maddenin moleküler davranışı yerine sürekli ortamda davranışının nasıl olacağı dikkate alınır. Isı iletimi için bu yaklaşım basit olup, ele alınan problemin çözümünü için gerekli kolaylığı sağlar.

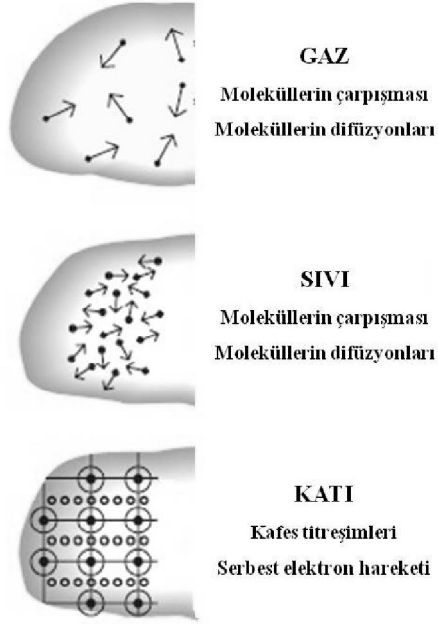
2.2 Isı İletimi (Kondüksiyon)

Isı iletimi, aynı ortamdaki (katı, sıvı veya gaz) farklı bölgeler arasında veya doğrudan fiziki temas durumunda bulunan farklı ortamlar arasında, parçacıkların (atom veya molekül) fark edilebilir bir yer değiştirmesi olmaksızın, doğrudan temasa bağlı olarak sıcaklık farkı nedeniyle oluşan enerji transferidir. Kinetik teori gereği, bir maddenin sıcaklığı bu maddeyi meydana getiren parçacıkların ortalama kinetik enerjileri ile orantılıdır. Ortam içerisinde bir bölgede sıcaklığın yüksek olması o bölgedeki moleküllerin ortalama kinetik enerjilerinin yüksek olduğunu gösterir. Ortalama kinetik enerjileri yüksek olan moleküller daha hızlı hareket ederler. Ortalama kinetik enerjileri yüksek olan moleküller ile ortalama kinetik enerjileri düşük olan moleküller rastgele çarpışırlar. Bu çarpışmalar sonucunda ortalama kinetik enerjileri yüksek olan moleküller enerjilerinin bir kısmını ortalama kinetik enerjileri düşük olan komşu bölgedeki moleküllere iletir. Çarpışma sayısı ne kadar çok olursa o kadar iyi ısı transfer edilir.

Isı iletimi sıvılarda ve gazlarda moleküllerin birbirini takip eden rastgele çarpışmaları veya difüzyonları (yayınma) ile olur. Katılarda ise, moleküllerin veya maddenin yapısını oluşturan kafeslerin titreşimleri veya serbest elektronların hareketi sonucu ısı iletimi olur (Şekil 2.1).

Tanım 2.3 Isı iletiminde genel olarak birim zamanda birim alandan transfer edilen ısı miktarına ısı akısı denir. Isı akısının birimi Watt (W) ’dır.

Isı akısı sıcaklığa ve sıcaklık basamağına (gradyanına) bağlıdır.



Şekil 2.1 Maddenin farklı hallerinde ısı iletimi [30]

Tanım 2.4 Ortamın tüm noktalarına ait anlık sıcaklıkların anlık değerine sıcaklık alanı veya sıcaklık dağılımı denir.

Sıcaklık en genel durumda yere ve zamana bağlıdır.

$$T = T(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

burada, $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ ve $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ da sırasıyla x, y, z yönündeki birim vektörlerdir. Denklem (2.1) sıcaklık alanının matematiksel ifadesidir. Eğer sıcaklık zamana göre değişmez ise, sürekli bir sıcaklık alanı söz konusudur. Bu durumda, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ olacağından

$$T = T(\vec{r}) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

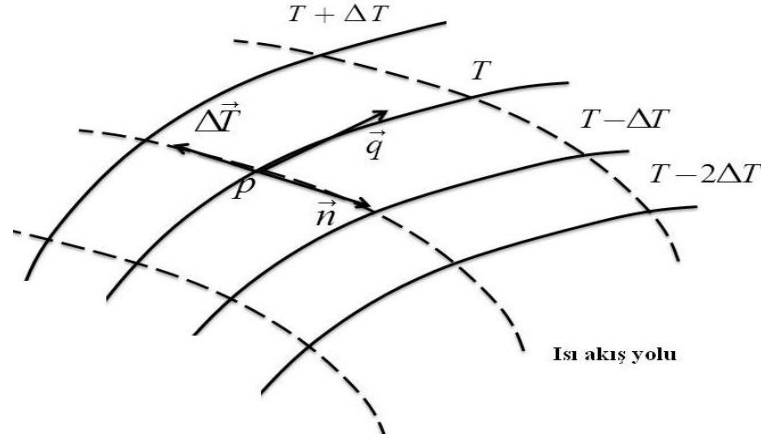
Sürekli veya süreksiz sıcaklık alanı bir veya iki boyutlu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T = (x, t), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$T = (x, y, t), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Tanım 2.5 Bir sıcaklık alanında aynı sıcaklıktaki noktaların birleştirilmesi ile oluşan yüzeylere eş sıcaklık yüzeyleri veya izotermal yüzeyler denir.

Farklı sıcaklıkta olmaları nedeniyle, eş sıcaklık yüzeyleri birbirleriyle kesişmezler. Şekil 2.2’de eş sıcaklık düzlemlerinden bir grup görülmektedir.

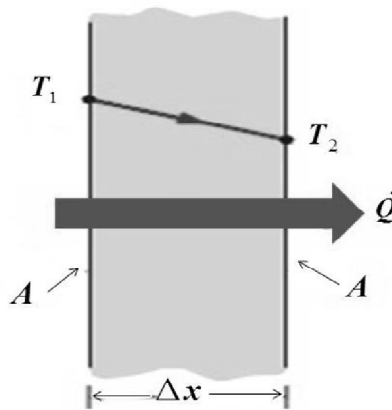


Şekil 2.2 Katı bir cisimde eş sıcaklık yüzeyleri

Bu sistem içerisinde en büyük sıcaklık basamağı (gradyanı) eş sıcaklık yüzeyine dik yöndedir. Buna göre sıcaklık basamağı,

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta n} \right) = \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır. Sıcaklık basamağı eş sıcaklık düzlemine dik bir vektördür. Isı akısı ile sıcaklık gradyanı arasındaki ilişkiyi ifade etmek için Şekil 2.2 göz önüne alınsın.



Şekil 2.3 Düzlem duvarda ısı iletimi

Şekil 2.3’de yüzey sıcaklıkları T_1 ve T_2 ($T_1 > T_2$), kalınlığı $\Delta x = L$ ve yüzey alanı A olan sonsuz düzlem duvar söz konusudur. Farklı T_1 ve T_2 sıcaklıklarında bu duvar üzerinde yapılan deneyler, $\Delta T = T_1 - T_2$ sıcaklık farkı duvarın özelliklerini değiştirecek büyüklükte değilse, sıcaklık da zamanla değişmiyorsa ısı akısının

$$\frac{\dot{Q}}{A} \sim \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (2.6)$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Denklem (2.6)’da gösterildiği gibi ısı akısı, sıcaklık farkı ve yüzey alanıyla doğru orantılı, kalınlıkla ters orantılıdır. Orantı sabiti k , (2.6) denklemi içine yerleştirilirse ısı transferi,

$$\dot{Q}_{\text{iletim}} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Burada k malzemenin bir özelliği olup, ısı iletim katsayısı veya ısı iletkenliği olarak adlandırılır.

$\Delta x \rightarrow 0$ limiti durumunda, (2.7) denklemi aşağıdaki diferensiyel forma indirgenir:

$$\dot{Q}_{\text{iletim}} = -kA \frac{dT}{dx}. \quad (2.8)$$

Denklem (2.8) homojen, izotropik (ısı iletkenliği her noktada ve bütün yönlerde aynı) ortamlar için Fourier Isı İletim Kanunu adını alır. Bu kanun ilk defa Fransız bilim adamı J. B. Fourier [31] tarafından 1822 yılında önerilmiştir. Burada dT/dx , x yönünde sıcaklık gradyanıdır. Isı akısı sıcaklığın azaldığı yönde olduğu için sıcaklık farkı ile ısı akısı ters işaretlidir. Pozitif yönde ısı transferi elde etmek için (2.7) ve (2.8) denklemlerinin önüne $(-)$ işareti konulmuştur.

2.2.1 Isı İletkenliği

Farklı malzemeler farklı miktarlarda ısı depolarlar. Bir malzemenin enerji depolama yeteneğinin ölçüsü, c , özgül ısı olarak adlandırılır. Benzer şekilde ısı iletim katsayısı, k , bir malzemenin ısı iletebilme yeteneğinin ölçüsüdür. Her malzemenin ısı iletebilme yeteneği farklı olduğundan k sayısı da malzemedan malzemeye değişir.

Sabit koşullar altında ısı akısı için verilen (2.8) denklemi, ısı iletkenliği için de belirleyici denklemdir. Buradan,

$$k = \frac{(\dot{Q} / A)}{(\partial T / \partial x)} \quad (2.9)$$

olarak yazılabilir. Isı iletim katsayısı birim kalınlıkta sıcaklık artışı için iletilen ısı transfer hızıdır. Isı akısının birimi Watt(W), ısı transferi olan yüzeyin alanının birimi (m²), sıcaklık gradyanı (°K/m) veya (°C/m) şeklinde ifade edilir. k ısı iletkenliğinin birimi (W/m·°K) veya (W/m·°C)'dir. Isı iletkenliği sıcaklıkla değişir. Basınca göre değişimi, sıcaklığa göre değişiminden az olması nedeniyle, ihmal edilebilir.

Isı iletkenliği değerinin yüksek olması malzemenin iyi bir ısı iletkeni olduğunu gösterir. Aksine, ısı iletkenliği değerinin düşük olması da malzemenin zayıf bir ısı iletkeni veya yalıtkan olduğunu gösterir. Bazı malzemelerin ısı iletkenlikleri Çizelge 2.1'de verilmiştir. Çizelge 2.1'den de anlaşılacağı gibi malzemenin yapısı ne kadar düzenli ise ısı iletkenliği de o denli yüksektir. Bunun bir sonucu olarak bir maddenin ısı iletkenliği katı halde en yüksek, gaz halde en düşüktür.

Çizelge 2.1 Bazı malzemelerin 0°C 'de ısı iletkenlikleri

Malzeme	Isı İletkenlik Katsayısı, W/m·°C
Elmas	2300
Gümüş	410
Bakır	385
Altın	317 (oda sıcaklığı)
Alüminyum	202
Nikel	93
Demir	73
Krom-Nikel Çelik	16.3
Cıva	8.21
Cam	0.78
Su	0.556
Ahşap	0.17
Helyum	0.141
Cam yünü	0.03
Hava	0.024

Gazların ısı iletkenliğinin mutlak sıcaklığın karekökü ile doğru orantılı, mol ağırlığının karekökü ile ters orantılı olduğu deneylerle gözlenmiştir. Örneğin, mol ağırlığı 4 olan Helyumun ısı iletkenliği, mol ağırlığı 29 olan Havanın ısı iletkenliğinden daha yüksektir (Çizelge 2.1).

Sıvıların ısı iletkenlikleri genellikle katılar ile gazların arasındadır. Gazlarda olduğu gibi sıvılarda da malzemenin mol ağırlığı arttıkça ısı iletkenliği azalır. Ancak gazların aksine, su hariç, sıvıların ısı iletkenlikleri sıcaklık arttıkça azalır.

Katılarda ısı iletkenliği yapısındaki kafes bileşenlerine elektronik bileşenlerinin ilavesi ile elde edilir. Saf metallerin yüksek ısı iletkenlikleri nispeten elektronik bileşenlerine bağlıdır. Saf metallerin ısı iletkenliklerinin yüksek olması, bu metallerin alaşımlarının ısı iletkenliklerinin yüksek olmasını gerektirmez. Çizelge 2.1’de verildiği gibi 0°C’de Nikelin ısı iletkenliği 93 W/m·°C iken Krom-Nikel alaşımı çeliğin ısı iletkenliği 0°C’de 16.3 W/m·°C’dir. Görüldüğü gibi saf maddede eser miktarda yabancı molekül o maddenin ısı iletkenliğini etkiler. Ayrıca ısı iletkenliği, malzemenin nem oranına da bağlıdır. Nem oranı arttıkça ısı iletkenliği de artar.

2.2.2 Isı Yayınımı

Isı transferi analizlerinde sık rastlanan ρc ifadesi, bir maddenin ısı kapasitesi olarak adlandırılır. ρ malzemenin yoğunluğudur. Özgül ısı c birim kütlede, ısı kapasitesi ρc birim hacimde ne kadar ısı (enerji) depolanabileceği hakkında bilgi verir.

Bir malzemede iletilen ısı miktarının birim hacimde depolanan ısı miktarına oranı, ısı yayılımı, malzemenin ne kadar hızla ısı yaydığını gösterir. Isı yayılımı (difüzyon) katsayısı α_d ,

$$\alpha_d = \frac{\text{Isı iletim katsayısı}}{\text{Depolanan ısı}} = \frac{k}{\rho c} \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir. Birimi (m^2 / s) ’dır. Burada, k ısı iletim katsayısı bir malzemenin ne kadar ısı ilettiğini, ρc ısı kapasitesi de malzemede birim hacimde ne kadar ısı depolandığını ifade eder. Isı yayılımının yüksek olması, malzemenin ısı iletkenliğinin yüksek olduğunu veya malzemenin ısı depolama kapasitesinin düşük olduğunu gösterir. Bazı malzemelerin 20°C’deki ısı yayılım katsayıları Çizelge 2.2’de verilmiştir. Benzer

özelliğe sahip malzemelerin ısı yayılım katsayıları da birbirine yakındır. Örneğin etin yanı sıra su oranı yüksek olan taze sebze ve meyvelerin de ısı yayılım katsayıları suyun ısı yayılım katsayısına yakındır.

Çizelge 2.2 Bazı malzemelerin 20°C 'deki ısı yayılım katsayıları

Malzeme	Isı Yayılım Katsayısı, α m/s ²
Gümüş	149×10^{-6}
Altın	127×10^{-6}
Bakır	113×10^{-6}
Alüminyum	97.5×10^{-6}
Demir	22.8×10^{-6}
Cıva	4.7×10^{-6}
Cam	0.34×10^{-6}
Cam yünü	0.23×10^{-6}
Su	0.14×10^{-6}
Et	0.14×10^{-6}
Ahşap	0.13×10^{-6}

Isı iletim denklemi aynı zamanda difüzyon denklemi olarak da bilinmektedir. Üç boyutlu iletim (difüzyon) denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.11)$$

ile ifade edilir. Burada $\dot{q}$ malzemede birim hacme düşen enerji miktarıdır. (2.11) denkleminde gereken işlemler yapılırsa,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.12)$$

denklemini elde edilir.

2.3 Isı Taşınımı (Konveksiyon)

Isı taşınımı (konveksiyon), sıcaklıkları farklı katı bir yüzey ile bu yüzeyi çevreleyen akışkan (sıvı veya gaz) arasında gerçekleşen enerji transferidir.

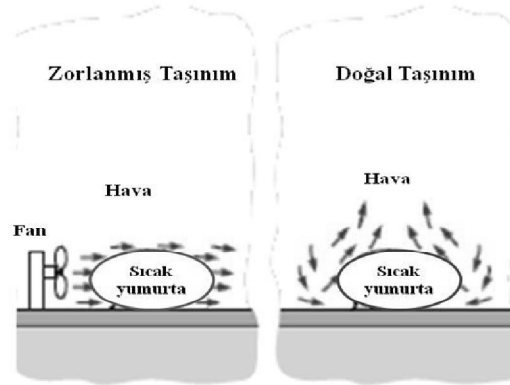
Tanım 2.6 Bir yüzey üzerindeki akışkan hareketi, sıcaklık farkı nedeniyle yoğunluk farkından oluşuyorsa buradaki taşınım doğal (serbest) taşınım denir.

Doğal taşınımın temel dayanak noktası, ısınan akışkanın daha yukarı (yüzeye) çıkmaya yatkın hale gelmesi, yani yükselmesi ve daha soğuk akışkanın aşağı (dibe) hareket etmesidir. Isınan sıcak havanın radyatör yüzeyinden yukarı yükselmesi bu duruma bir örnektir. Ayrıca, yerçekimi ve santrifüj gibi ivme alanları içinde çeşitli sıcaklıklarda, sıcaklık değişimi nedeni ile, gaz veya sıvı genişleme ya da kısılmaya uğradığında doğal taşınım meydana gelir. Yerçekimi olmadığında, yükselme faktörü olmayacağından, doğal taşınım oluşmaz.

Kaynama ve yoğunlaşma da ısı taşınım mekanizmasına dahil olmaktadır.

Tanım 2.7 Bir yüzey üzerindeki akışkan hareketi uygulanan basınç farkı nedeniyle oluşuyorsa buradaki taşınım zorlanmış taşınım denir.

Zorlanmış taşınımda akışkan hareketi fan, pompa ya da rüzgar gibi dışarıdan bir kaynak yardımıyla olur. Şekil 2.4 zorlanmış ve doğal taşınım için basit bir örnektir.



Şekil 2.4 Zorlanmış taşınım ve doğal taşınım

Newton 1701 senesinde, katı bir yüzeyle temasta olan hareketli bir akışkan arasındaki ısı transferi için,

$$\dot{Q}_{\text{taşınım}} = hA(T_s - T_{\infty}) \quad (2.13)$$

ifadesini önermiştir. Bu ifade Newton'un Soğuma Yasası olarak adlandırılır. Bu ifadede A ısı transferinin gerçekleştirildiği yüzey alanını, T_s yüzey sıcaklığını ve T_{∞} yüzeyden yeteri kadar uzakta akışkan sıcaklığını ve h taşınım katsayısını ifade etmektedir. h taşınım katsayısının birimi $(\text{W}/\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ veya $(\text{W}/\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K})$ 'dır.

Yüzey ile akışkan arasındaki taşınım mekanizması oldukça karmaşıktır. Bu yüzden ısı taşınım katsayısını belirlemek de zordur. Isı taşınım katsayısı yüzey üzerinde yerel olarak farklı değerler aldığından uygulamada yüzey boyunca ortalama taşınım katsayısı kullanılır. Ortalama taşınım katsayısı,

$$\bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h dA \quad (2.14)$$

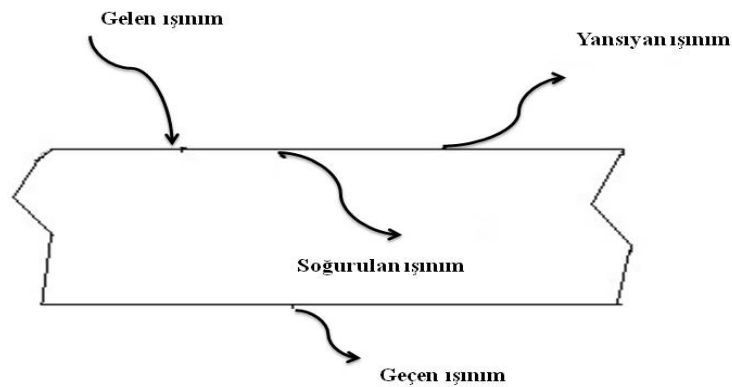
ifadesinden hesaplanılır. Ayrıca, ısı taşınım katsayısı yüzey geometrisine, akışkanın fiziki özelliklerine ve akışkan ile yüzey arasındaki sıcaklık farkına bağlıdır. Bazı tipik ısı taşınım katsayısı değerleri Çizelge 2.3’de verilmiştir.

Çizelge 2.3 Isı taşınım katsayısının bazı tipik değerleri

Taşınım Şekli	Taşınım katsayısı, h $W/m^2 \cdot ^\circ C$
Gazlarda Doğal Taşınım	2-25
Sıvılarda Doğal Taşınım	10-1000
Gazlarda Zorlanmış Taşınım	25-250
Sıvılarda Zorlanmış Taşınım	50-20.000
Kaynama ve Yoğunlaşma	2.500-100.000

2.4 Isı Işınımı (Radyasyon)

Isı ışınımı, herhangi bir transfer ortamı olmaksızın, enerjinin elektromanyetik dalgalar (veya fotonlar) yardımıyla transfer edilmesidir. Işıma terimi genel olarak x-ışınları, gama-ışınları, mikrodalgalar, radyo ve televizyon dalgaları gibi elektromanyetik dalga olayları için de kullanılır. Burada bahsedilmek istenen ışıma, bir cismin sıcaklık nedeniyle yüzeyinden yaydığı ısı (termal) ışımadır.



Şekil 2.5 Cismin yüzeyine gelen ışımanın dağılımı

Tüm cisimler (katı, sıvı veya gaz) değişen sıcaklıkta (özellikle yüksek sıcaklıkta) enerji ışınlırlar. Işınlanan enerjinin yoğunluğu yüzey sıcaklığına ve yüzeyin özelliklerine bağlıdır. Cisimlerin yüzeyine gelen ışıının bir kısmı geri yansır, bir kısmı cisim tarafından soğurılır ve kalan kısmı da yüzeyden geçer (Şekil 2.5).

Tanım 2.7 Soğurulan ışıının iç enerjiye dönüştüğü yüzeylere opak (mat, donuk) yüzeyler denir. Donuk yüzeyler arasındaki ışıınım, yüzey ışıınımı olarak adlandırılır.

Cismin yansıttığı enerjinin üzerine düşen enerjiye oranı ρ_r , cismin soğurduğu enerjinin üzerine düşen enerjiye oranı α_r ve geçirdiği enerjinin üzerine düşen enerjiye oranı τ olmak üzere,

$$\rho_r + \alpha_r + \tau = 1 \quad (2.15)$$

yazılabilir. Buradaki ρ_r yansıma katsayısı, α_r soğurma katsayısı ve τ geçirme katsayısı olarak adlandırılır. Donuk cisimler için $\tau = 0$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.8 Üzerine gelen bütün enerjiyi soğuran cisimlere siyah cisim denir.

Siyah cisim maksimum ışıma hızına sahiptir. Siyah cisme en yakın cisimler siyah karbon ve siyah platindir. Ayrıca, siyah bir cisim için $\alpha_r = 1$ olarak alınır. Bir siyah cismin birim zamanda ışıma ile transfer ettiği enerji miktarı sıcaklığın dördüncü kuvveti ile orantılıdır. Bu ifade [32],

$$\dot{E} = \dot{Q}_{\text{yayılan,maks}} = \sigma A T_s^4 \quad (2.16)$$

ile verilir. 1879'da Stefan tarafından verilen ve 1884'de Boltzmann tarafından teorik olarak elde edilen (2.16) bağıntısı Stefan-Boltzmann Yasası'dır. Burada $\dot{E}$ birim zamanda ışıma ile A yüzey alanından yayılan enerji miktarı, T_s yüzey sıcaklığı ve σ da Stefan-Boltzmann sabitidir. Bu sabitin değeri $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ olarak alınır.

Bir siyah cismin ışıma ile birim alandan, birim zamanda ışıınım yayma gücü,

$$\dot{E}_b = \sigma T_s^4 \quad (2.17)$$

ifadesinden bulunur. Siyah bir cisim ile bu cismi çevreleyen başka bir siyah yüzey arasında birim zamandaki ısı transferi miktarı,

$$\dot{Q} = \sigma A (T_s^4 - T_{\text{çevre}}^4) \quad (2.18)$$

ile bulunur. Bir yüzeyin yaydığı ışıma aynı sıcaklıktaki siyah bir yüzeyin yaydığı ışımandan daha azdır. Gri cisim olarak adlandırılan gerçek cisimlerin birim zamanda birim alandan ışıma ile yaydıkları enerji miktarı,

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{E}_b = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (2.19)$$

ifadesinden hesaplanır. Burada ε yüzeyin emissivite sabiti veya ışıma yayma katsayısı olarak adlandırılır. Işıma yayma katsayısı $0 \leq \varepsilon \leq 1$ aralığındadır. Siyah cisim için ışıma yayma katsayısı $\varepsilon = 1$. Bütün gerçek cisimlerin ışıma yayma katsayısı $\varepsilon < 1$. Çizelge 2.4’de bazı yüzeylerin ışıma yayma katsayıları verilmiştir.

Işımanın diğer önemli bir özelliği de α_r soğurma katsayısıdır. Işıma yayma katsayısı ε gibi, soğurma katsayısı α_r da $0 \leq \alpha_r \leq 1$ aralığındadır. Siyah cisimler yüzeye gelen bütün radyasyonu soğururlar ($\alpha_r = 1$). Bu yüzden siyah cisim mükemmel bir yayıcı yüzey olduğu kadar mükemmel bir soğurucu yüzeydir.

Çizelge 2.4 Bazı malzemelerin ışıma yayma katsayıları

Malzeme	Işıma Yayma Katsayısı, ε
Alüminyum folyo	0.07
Cilalanmış bakır	0.03
Cilalanmış altın	0.03
Cilalanmış gümüş	0.02
Su	0.96
Ahşap	0.82-0.92
Siyah boya	0.98
Beyaz boya	0.90
Beyaz kağıt	0.92-0.97
Toprak	0.93-0.96

Genel olarak, ε ve α_r , yüzeyin sıcaklığına ve yüzeyden yayılan ışımanın dalga boyuna bağlıdır. Pek çok uygulamada ortalama ısınım yayma katsayısı ortalama soğurma katsayısına eşit alınır.

Yüzeye gelen enerji ile yüzeyden soğurulan enerji arasında bir ilgi kurulmak istenirse,

$$\dot{Q}_{\text{soğurulan}} = \alpha_r \dot{Q}_{\text{gelen}} \quad (2.20)$$

ifadesinden yararlanılır. Sıcaklığı T_s olan gerçek bir cisim ile bu cismi çevreleyen $T_{\text{çevre}}$ sıcaklığındaki ortam arasında birim zamandaki ısı transferi miktarı da,

$$\dot{Q} = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_{\text{çevre}}^4) \quad (2.21)$$

ile hesaplanır.

2.5 Eş Zamanlı Mekanizmalar

Bahsedildiği gibi üç farklı ısı transfer mekanizması vardır. Fakat bu üç mekanizma, bir ortamda aynı anda olmayabilir. Örneğin saydam olmayan (opak) katılarda ısı transferi sadece iletimle olmasına karşın yarı saydam katılarda ısı transferi hem iletim hem de radyasyonla olur. Yani, katılarda ısı transferi mekanizması iletim ve radyasyon içermesine rağmen taşınım içermez. Bununla birlikte bir katı akışkan bir yüzey veya diğer bir yüzeye maruz kalırsa ısı transferi konveksiyon ve/ veya radyasyonla olur. Akış halindeki bir sıvıda ısı transferi iletimle, taşınım ve/ veya radyasyonla olur. Özel bir durum olarak, sıvılarda akış hareketi yoksa ısı transferinin iletimle olduğu görülebilir. Bu yüzden akışkanlarda ısı transferi genellikle taşınım veya iletimle olur, fakat her iki transfer biçimi aynı anda olmaz. Ayrıca, istisna olarak, belirli dalga boylarındaki bazı gazlar radyasyonu soğurmaktadır. Bu gazlar şeffaf (saydam) gazlardır. Örneğin, ozon gazı mor ötesi (ultraviyole) radyasyonu kuvvetli bir şekilde soğurur. Öte yandan, sıvılar da kuvvetli radyasyon emicilerdir.

Son olarak, radyasyon için sadece boşluk yeterli iken iletim ve taşınım için bir ortam gereklidir.

2.5.1 Reaksiyon Denklemi

Bazı biyolojik ve kimyasal olaylardaki reaksiyonları ifade etmek için aşağıdaki denklem kullanılır:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = F(u(x,t)) \quad (2.22)$$

Burada görüldüğü gibi $F(x,t)$ fonksiyonu $u(x,t)$ fonksiyonuna bağlıdır.

2.5.2 Adveksiyon Denklemi

Bazı madde transferleri taşınımsal (konveksiyonel) difüzyon (iletim) ile matematiksel olarak modellenmiştir. Bu modellemeye karşılık olarak adveksiyon terimi kullanılmaktadır. Maddede bir akış söz konusu olduğundan, adveksiyon denkleminin matematiksel modellemesi, konveksiyon (taşınım) ile ısı transferinin matematiksel modellemesine benzerdir. Adveksiyon denklemi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = G(u(x,t)_x) \quad (2.23)$$

(2.23) denkleminde de anlaşılabacağı gibi $G(x,t)$ fonksiyonu $u(x,t)$ fonksiyonunun türevini içermektedir.

Difüzyon (iletim), adveksiyon (taşınım) ve reaksiyon olaylarının aynı anda olduğu modeller,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = C \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + F(u(x,t)) \quad \text{Reaksiyon Difüzyon Denklemi} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = C \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + G(u(x,t)_x) \quad \text{Adveksiyon Difüzyon Denklemi} \quad (2.25)$$

ve son olarak da,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = C \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + G(u(x,t)_x) + F(u(x,t)) \quad (2.26)$$

Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon Denklemi'dir.

BÖLÜM 3

ADOMIAN AYRIŞIM METODU

Ayrışım metodu, çeşitli problemlerin çözümleri ve algoritma tasarımı için genel bir terimdir. Ayrışım metodunun temeli problemi alt problemlere ayırmaya dayanır. Akademik çalışmalarda tekil değer ayrışım, fonksiyonel ayrışım, matris ayrışım, bölge ayrışım yöntemleri gibi farklı ayrışım yöntemleri kullanılmaktadır. Bu bölümde matematik, fizik, biyoloji, kimya ve mühendislik gibi uygulamalı alanlarda lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılabilen Adomian Ayrışım (Decomposition) Metodu (AAM) analiz edilecektir [1]. Ayrıca metodunun uygulanmasında kullanılan özel Adomian Polinomları ve bu polinomların farklı yöntemlerle elde edilişleri incelenerek, örnekler verilecektir. Bu metodun amacı; doğrusallaştırma, pertürbasyon, kısıtlama, indirgeme ve Padé yaklaşımı gibi tekniklere ihtiyaç duymadan kesin çözüme ulaşmaktır. Bu yöntem cebirsel, diferensiyel, integral, integro-diferensiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü gibi geniş bir yelpazede kullanılan güçlü bir yöntemdir.

3.1 Adomian Ayrışım Metodunun Analizi

Lineer veya lineer olmayan denklemlere ve denklem sistemlerine uygulanabilen Adomian ayrışım metodu bir seri çözüm yöntemidir. F hem lineer hem de lineer olmayan terimler içeren lineer olmayan adi diferensiyel operatör ve $g(t)$ verilen fonksiyon olmak üzere,

$$Fu = g(t) \quad (3.1)$$

denklemini ele alalım. L tersi var olan lineer operatör ve R lineer operatörün kalan kısmı olsun. $Lu + Ru$ verilen denklemin lineer terimini ve N lineer olmayan operatör

olmak üzere, Nu da verilen denklemin lineer olmayan terimini temsil etsin. O halde (3.1) denklemi,

$$Lu + Ru + Nu = g(t) \quad (3.2)$$

şeklinde ayrıştırılır. L verilen denklemde, tersi var olan, en yüksek mertebeli türev operatörü olarak seçilirse, (3.2) denklemi

$$Lu = g(t) - Ru - Nu \quad (3.3)$$

formunu alır. Her iki tarafa L operatörünün tersi L^{-1} operatörü uygulanırsa, (3.3) denklemi

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(g(t)) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (3.4)$$

denkleme dönüşür. Burada,

$$L = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (3.5)$$

n . mertebeden türev olan diferensiyel operatörü ve bu operatörün tersi de,

$$L^{-1} = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t (\cdot) dt^n \quad (3.6)$$

0'dan t 'ye n -katlı integral operatörü olarak tanımlansın. (3.4) denkleminin sol tarafına L^{-1} operatörü uygulandığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$L^{-1}(Lu) = u(x, t) - u(x, 0) - tu'(x, 0) - \frac{t^2}{2}u''(x, 0) - \cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x, 0) \quad (3.7)$$

(3.7) denklemi (3.4) denkleminde yerine yazılarak $u(x, t)$ çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(x, t) - u(x, 0) - tu'(x, 0) - \cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x, 0) = L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu). \quad (3.8)$$

Burada,

$$f(x, t) = u(x, 0) + tu'(x, 0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(x, 0) \quad (3.9)$$

olmak üzere;

$$u(x, t) = f(x, t) + L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (3.10)$$

şeklinde hesaplanır. AAM, $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonunu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.11)$$

şeklinde u_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) bileşenlerinin toplamı olan sonsuz bir seri kabul eder. Nu lineer olmayan terimi de,

$$Nu = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (3.12)$$

şeklinde sonsuz bir seri ile ifade edilir. Buradaki $u_0, u_1, \dots, u_n$ den oluşan A_n Adomian polinomları özel polinomlar olup farklı yollarla elde edilişleri bir sonraki başlık altında incelenecektir.

Verilen başlangıç koşulu ve (3.10) denklemi göz önüne alındığında,

$$u_0 = f(x, 0) + L^{-1}(g(x, t)), \quad (3.13)$$

$$u_1 = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(Nu_0), \quad (3.14)$$

$$u_2 = -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(Nu_1) \quad (3.15)$$

$\vdots$

ve genelleme yapılırsa,

$$u_{k+1} = -L^{-1}(Ru_k) - L^{-1}(Nu_k), \quad k \geq 0 \quad (3.16)$$

ilişkisi bulunur. Eğer seri uygun bir yol ile yakınsıyor ise, genel çözüm

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) \quad (3.17)$$

olarak hesaplanır.

3.2 Adomian Polinomlarının Elde Edilmesi

Adomian polinomlarının elde edilmesinde farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bunlardan en bilinenleri,

- Taylor Seri Açılımı,
- Neumann Seri Açılımı,

- Parametrizasyon

yöntemleridir.

3.2.1 Taylor Seri Açılımı

George Adomian [2] tarafından verilen Adomian polinomlarının genel formülü A_n ,

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \quad (3.18)$$

Taylor seri açılımına dayanır. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \quad (3.19)$$

ve

$$f(u) = Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (3.20)$$

şeklinde. (3.18) denklemi genişletilsin veya diğer bir deyişle $f(u)$ lineer olmayan terimi $u = u_0$ noktasında Taylor serisine açılsın.

$$f(u) = f(u_0) + f^{(1)}(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(u_0)(u - u_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(u_0)(u - u_0)^3 + \dots \quad (3.21)$$

burada,

$$u - u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (3.22)$$

(3.22) denklemi (3.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f(u) = & f(u_0) + f'(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \dots) + \frac{1}{2!} f''(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 \\ & + \frac{1}{3!} f'''(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa ve düzenlenirse Adomian polinomları,

$$A_0 = f(u_0), \quad (3.24)$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0), \quad (3.25)$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f''(u_0), \quad (3.26)$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f'''(u_0), \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} A_4 = & u_4 f'(u_0) + \left[\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right] f''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 f'''(u_0) \\ & + \frac{1}{4!} u_1^4 f^{IV}(u_0), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} A_5 = & u_5 f'(u_0) + [u_2 u_3 + u_1 u_4] f''(u_0) + \left[\frac{1}{2!} u_1 u_2^2 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_3 \right] f'''(u_0) \\ & + \frac{1}{3!} u_1^3 u_2 f^{IV}(u_0) + \frac{1}{5!} u_1^5 f^V(u_0), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} A_6 = & u_6 f'(u_0) + \left[\frac{1}{2!} u_3^2 + u_2 u_4 + u_1 u_5 \right] f''(u_0) \\ & + \left[\frac{1}{3!} u_2^3 + u_1 u_2 u_3 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_4 \right] f'''(u_0) + \left[\frac{1}{2!} u_1^2 \frac{1}{2!} u_2^2 \frac{1}{3!} u_1^3 u_3 \right] f^{IV}(u_0) \\ & + \frac{1}{4!} u_1^4 u_2 f^V(u_0) + \frac{1}{6!} u_1^6 f^{VI}(u_0), \end{aligned} \quad (3.30)$$

⋮

şeklinde bulunur. Burada görüldüğü gibi, indis toplamaları sıfır olan terimler A_0 'ı, indis toplamaları 1 olan terimler A_1 'i, indis toplamaları 2 olan terimler A_2 'yi oluşturur ve böyle devam eder. Ayrıca, A_0 sadece u_0 'a, A_1 sadece u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlıdır ve bu şekilde devam eder. A_0 , $n \geq 1$ olacak şekilde diğer A_n polinomlarından bağımsız olarak belirlenir ve her zaman $A_0 = Nu_0 = f(u_0)$ 'dır. Aşağıda, Adomian polinomlarının Taylor seri açılımı ile bulunmasına ilişkin bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1 $f(u) = u^3$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.1

$$A_0 = f(u_0) = u_0^3,$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0) = 3u_0^2 u_1,$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f''(u_0) = 3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2,$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f'''(u_0) = 3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3,$$

$$\begin{aligned} A_4 &= u_4 f'(u_0) + \left[\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right] f''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 f'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 f^{IV}(u_0) \\ &= 3u_0^2 u_4 + 3u_2^2 u_0 + 3u_1^2 u_2 + 6u_0 u_1 u_3 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.2 $Nu = u^\alpha$ ve α ondalık sayı olmak üzere A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.2

$$A_0 = u_0^\alpha,$$

$$A_1 = \alpha u_0^{\alpha-1} u_1,$$

$$A_2 = \alpha u_0^{\alpha-1} u_2 + \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) u_0^{\alpha-2} u_1^2,$$

$$A_3 = \alpha u_0^{\alpha-1} u_3 + \alpha (\alpha - 1) u_0^{\alpha-2} u_1 u_2 + \frac{1}{6} \alpha (\alpha - 1) (\alpha - 2) u_0^{\alpha-3} u_1^3,$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \alpha u_0^{\alpha-1} u_4 + \alpha (\alpha - 1) u_0^{\alpha-2} \left(\frac{1}{2} u_2^2 + u_1 u_3 \right) + \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) (\alpha - 2) u_0^{\alpha-3} u_1^2 u_2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \alpha (\alpha - 1) (\alpha - 2) (\alpha - 3) u_0^{\alpha-4} u_1^4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.3 $Nu = uu_x$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.3

$$A_0 = u_0 u_{0_x},$$

$$A_1 = u_{0_x} u_1 + u_0 u_{1_x},$$

$$A_2 = u_{0_x} u_2 + u_{1_x} u_1 + u_{2_x} u_0,$$

$$A_3 = u_{0_x} u_3 + u_{1_x} u_2 + u_{2_x} u_1 + u_{3_x} u_0,$$

$$A_4 = u_{0_x} u_4 + u_{1_x} u_3 + u_{2_x} u_2 + u_{3_x} u_1 + u_{4_x} u_0$$

şeklindedir.

Örnek 3.4 $Nu = \sin u$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.4

$$A_0 = \sin u_0,$$

$$A_1 = u_1 \cos u_0,$$

$$A_2 = u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 \sin u_0,$$

$$A_3 = u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{1}{3!} u_1^3 \cos u_0,$$

$$A_4 = u_4 \cos u_0 - \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) \sin u_0 - \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 \cos u_0 + u_1^4 \sin u_0$$

olarak bulunur.

Örnek 3.5 $Nu = \cosh u$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.5

$$A_0 = \cosh u_0,$$

$$A_1 = u_1 \sinh u_0,$$

$$A_2 = u_2 \sinh u_0 + \frac{1}{2!} u_1^2 \cosh u_0,$$

$$A_3 = u_3 \sinh u_0 + u_1 u_2 \cosh u_0 + \frac{1}{3!} u_1^3 \sinh u_0,$$

$$A_4 = u_4 \sinh u_0 + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) \cosh u_0 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 \sinh u_0 + u_1^4 \cosh u_0$$

şeklinde verilir.

Örnek 3.6 $Nu = e^u$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.6

$$A_0 = e^{u_0},$$

$$A_1 = u_1 e^{u_0},$$

$$A_2 = \left(u_2 + \frac{1}{2!} u_1^2 \right) e^{u_0},$$

$$A_3 = \left(u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3!} u_1^3 \right) e^{u_0},$$

$$A_4 = \left(u_4 + \frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 + \frac{1}{4!} u_1^4 \right) e^{u_0}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.7 $N(x_1, x_2) = e^{-x_1 x_2}$ için A_0, A_1 , ve A_2 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.7

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{1k} \text{ ve } x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{2k} \text{ olmak üzere}$$

$$A_0 = e^{-x_{10} x_{20}},$$

$$A_1 = -(x_{10} x_{21} + x_{11} x_{20}) e^{-x_{10} x_{20}},$$

$$A_2 = -\left((x_{10} x_{22} + x_{11} x_{21} + x_{12} x_{20}) + \frac{1}{2!} (x_{21}^2 x_{10}^2 + x_{11}^2 x_{20}^2) \right) e^{-x_{10} x_{20}}$$

şeklinde bulunur.

3.2.2 Neumann Seri Açılımı

Neumann seri açılım yöntemi hem lineer hem de lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılır. Fonksiyon serilerine dayanan bu yöntem [13], kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

λ parametre olmak üzere, u_λ ifadesi

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \dots + \lambda^n u_n \quad \text{şeklinde sonsuz seriye açılır.}$$

Daha sonra verilen denkleminin lineer olmayan terimi $N(u)$, $N(u_\lambda)$ fonksiyonuna genişletilir. Son olarak, genişletilen $N(u_\lambda)$ fonksiyonunda λ parametresinin kuvvetlerinin katsayıları Adomian polinomları ile eşleştirilir. Örneğin, λ^0 teriminin katsayısı, yani sabit terim A_0 , λ teriminin katsayısı A_1 , λ^2 teriminin katsayısı A_2 , ... polinomları ile ifade edilir. Aşağıda Adomian polinomlarının Neumann seri açılımı ile elde edilmesine iki örnek verilmiştir.

Örnek 3.8 $f(u) = u^3$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.8

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n$$

$$f(u_\lambda) = (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n)^3$$

$$\begin{aligned} f(u_\lambda) &= u_0^3 + \lambda(3u_0^2 u_1) + \lambda^2(3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2) + \lambda^3(3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3) \\ &\quad + \lambda^4(3u_0^2 u_4 + 3u_2^2 u_0 + 3u_1^2 u_2 + 6u_0 u_1 u_3) + \cdots \end{aligned}$$

Adomian polinomları aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_0 = u_0^3,$$

$$A_1 = 3u_0^2 u_1,$$

$$A_2 = 3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2,$$

$$A_3 = 3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3,$$

$$A_4 = 3u_0^2 u_4 + 3u_2^2 u_0 + 3u_1^2 u_2 + 6u_0 u_1 u_3.$$

Örnek 3.9 $Nu = uu_x$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.9

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \cdots + \lambda^n u_n$$

ve

$$u_{\lambda_x} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_x} \lambda^n = u_{0_x} + \lambda u_{1_x} + \lambda^2 u_{2_x} + \cdots + \lambda^n u_{n_x}$$

olmak üzere

$$N(u_\lambda) = (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots + \lambda^n u_n)(u_{0_x} + \lambda u_{1_x} + \lambda^2 u_{2_x} + \cdots + \lambda^n u_{n_x})$$

$$N(u_\lambda) = u_0 u_{0_x} + \lambda(u_{0_x} u_1 + u_0 u_{1_x}) + \lambda^2(u_{0_x} u_2 + u_{1_x} u_1 + u_{2_x} u_0) + \cdots$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^3 (u_{0x} u_3 + u_{1x} u_2 + u_{2x} u_1 + u_{3x} u_0) \\
& + \lambda^4 (u_{0x} u_4 + u_{1x} u_3 + u_{2x} u_2 + u_{3x} u_1 + u_{4x} u_0) + \dots
\end{aligned}$$

Adomian polinomları ile λ parametresinin kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$A_0 = u_0 u_{0x},$$

$$A_1 = u_{0x} u_1 + u_0 u_{1x},$$

$$A_2 = u_{0x} u_2 + u_{1x} u_1 + u_{2x} u_0,$$

$$A_3 = u_{0x} u_3 + u_{1x} u_2 + u_{2x} u_1 + u_{3x} u_0,$$

$$A_4 = u_{0x} u_4 + u_{1x} u_3 + u_{2x} u_2 + u_{3x} u_1 + u_{4x} u_0$$

şeklindedir.

3.2.3 Parametrizasyon Yöntemi

Adomian polinomlarının elde edilmesinde kullanılan diğer bir yöntem parametrizasyon yöntemidir [12]. Bu yöntem lineer olmayan denklemlerde çalışmaya uygundur. Yöntem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

İlk olarak, $u(\lambda) = \sum_{k=0}^n u_k \lambda^k$ ve $N(u) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ olacak şekilde sonlu seriler tanımlanır.

Metoda göre $u(\lambda) = N(u)$, yani $\sum_{k=0}^n u_k \lambda^k = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ kabul edilir. Daha sonra her iki

tarafın n . mertebeden türevi alınır ve bu türevde $\lambda = 0$ değeri yerine yazılarak Adomian polinomları elde edilir.

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k \right) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \dots + \lambda^n u_n) \right|_{\lambda=0}.$$

Aşağıda Adomian polinomlarının parametrizasyon yöntemi ile elde edilmesine iki örnek verilmiştir.

Örnek 3.10 $f(u) = u^3$ için A_0, A_1, A_2, A_3 ve A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.10

$$u(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^n u_k \lambda^k \right)^3 = \left(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots + \lambda^n u_n \right)^3$$

ve

$$f(u) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^n A_n$$

olarak tanımlayalım. $\sum_{k=0}^n u_k \lambda^k = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ kabul edildiğinden,

$n = 0$ için,

$$\Rightarrow A_0 = u_0^3,$$

$n = 1$ için,

$$\left. \frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial (u_0 + \lambda u_1)^3}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow A_1 = 3u_0^2 u_1,$$

$n = 2$ için,

$$\left. \frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^2 (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^3}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow A_2 = 3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2,$$

$n = 3$ için,

$$\left. \frac{\partial^3 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^3 (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)^3}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow A_3 = 3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3,$$

$n = 4$ için,

$$\left. \frac{\partial^4 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \lambda^4 A_4)}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^4 (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \lambda^4 u_4)^3}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow A_4 = 3u_0^2 u_4 + 3u_2^2 u_0 + 3u_1^2 u_2 + 6u_0 u_1 u_3$$

şeklindedir.

Örnek 3.11 $Nu = uu_x$ için A_0, A_1, A_2 ve A_3 Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3.11

$$u(\lambda) = \sum_{k=0}^n u_k \lambda^k = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots + \lambda^n u_n,$$

$$u_x(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^n u_k \lambda^k \right)_x = u_{0_x} + \lambda u_{1_x} + \lambda^2 u_{2_x} + \cdots + \lambda^n u_{n_x}$$

ve

$$N(u) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^n A_n$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = \left(\sum_{k=0}^n u_k \lambda^k \right) \left(\sum_{k=0}^n u_k \lambda^k \right)_x \text{ kabul edelim ve } \lambda = 0 \text{ değeri için türev alalım.}$$

$n = 0$ için, kabulden,

$$\Rightarrow A_0 = u_0 u_{0_x},$$

$n = 1$ için,

$$\frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial \left((u_0 + \lambda u_1)(u_{0_x} + \lambda u_{1_x}) \right)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow A_1 = u_{0_x} u_1 + u_0 u_{1_x},$$

$n = 2$ için,

$$\frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^2 \left((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)(u_{0_x} + \lambda u_{1_x} + \lambda^2 u_{2_x}) \right)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0} \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A_2 = u_{0_x} u_2 + u_{1_x} u_1 + u_{2_x} u_0$$

$n = 3$ için,

$$\left. \frac{\partial^3 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^3 \left((u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3) (u_{0_x} + \lambda u_{1_x} + \lambda^2 u_{2_x} + \lambda^3 u_{3_x}) \right)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow A_3 = u_{0_x} u_3 + u_{1_x} u_2 + u_{2_x} u_1 + u_{3_x} u_0$$

olarak hesaplanır.

3.3 Modifiye Adomian Ayrışım Metodu

Son yıllarda, AAM'nun uygulanabilirliğini arttırmak, hesap yükünü azaltmak ve çözüme daha hızlı yakınsamasını sağlamak amaçlı bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu kısımda bu çalışmalardan olan Modifiye Adomian Ayrışım Metodu (MAAM) incelenecektir [8]. Bu metot da standart AAM gibi hem lineer hem de lineer olmayan denklemlere uygulanabilir. MAAM, standart AAM'una göre daha az hesap yükü ve daha az iterasyonla çözüme daha hızlı yakınsar. Üstelik herhangi bir merteben kısmi türevli diferensiyel denklemlere de uygulanabilir. Bu yöntemde u_0 ve u_1 terimleri temel terim kabul edilir. Çünkü yöntemin başarılı olması bu terimlerin seçimine bağlıdır. $u_0(x)$ fonksiyonu ile belirlenen $f_0(x)$ fonksiyonunun etkili olabilmesi için, $u_0(x)$ fonksiyonu en az terim içerecek şekilde seçilmelidir. Hesap yükünü azaltmak ve yakınsamayı hızlandırmak adına $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ terimlerini en basit şekilde seçmeliyiz.

AAM ve MAAM'un kullanılışı için basit bir karar mekanizması kurulabilir. Verilen problemde ilk yapmamız gereken şey, $f(x)$ fonksiyonunu incelemektir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu sadece bir terimden oluşuyorsa, bu durumda MAAM yerine standart AAM tercih edilmelidir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu birden daha fazla terimden oluşuyorsa, bu durumda MAAM tercih edilmez. Yani, $f(x)$ fonksiyonu $f_0(x)$ ve $f_1(x)$ fonksiyonlarına ayrıştırılıp işlem yapılmalıdır.

3.3.1 Modifiye Adomian Ayrışım Metodunun Analizi

MAAM analizi standart AAM analizine benzemekle beraber bazı farklılıklar söz konusudur. Analize başlamak için,

$$Lu + Ru + Nu = g(x) \quad (3.31)$$

denklemini göz önüne alınsın. Burada $g(x)$ kaynak terimi, R lineer diferansiyel operatörün kalan kısmını, N lineer olmayan terimi ve L de en yüksek mertebeli, tersi var olan, diferansiyel operatörü ifade etmektedir. Standart AAM'una benzer şekilde (3.31) denkleminin her iki yanına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$u(x) = f(x) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (3.32)$$

denklemini elde edilir ki burada $f(x)$ fonksiyonu $g(x)$ kaynak teriminin integrallenmesi sonucu elde edilmiştir. Adomian polinomlarının elde edilmesine gelinirse, standart AAM'unda kullanılan yöntemlerle MAAM'unda kullanılan yöntemlerle aynıdır. Bu iki metot arasındaki farklılık $f(x)$ fonksiyonun kabulünde başlamaktadır. Çünkü standart AAM'unda $f(x) = u_0(x)$ olarak seçilirken, MAAM'unda $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ olacak şekilde ayrıştırılmaktadır. Buradan, $u_0(x) = f_0(x)$ olarak seçilirse,

$$u_0(x) = f_0(x),$$

$$u_1(x) = f_1 - L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(Nu_0),$$

$$u_2(x) = -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(Nu_1),$$

$\vdots$

$$u_{k+2}(x) = -L^{-1}(Ru_{k+1}) - L^{-1}(Nu_{k+1}) \quad k \geq 0$$

tekrarlayan ilişkisi bulunur.

3.4 Adomian Ayrışım Metodunun Uygulamaları

Bölümdeki örneklere çeşitli akademik çalışmalarda rastlanabilir [33].

Örnek 3.12 Aşağıda verilen homojen kısmi türevli diferansiyel denklemi AMM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_x - u_y = 0, \quad u(0, y) = y, \quad u(x, 0) = x. \quad (3.33)$$

Çözüm 3.12

(3.33) denklemi operatör formda yazılırsa,

$$L_x u = u_y \quad (3.34)$$

halini alır. Burada,

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.35)$$

Aynı zamanda L_x tersi var olan operatör olup, L_x^{-1} operatörü

$$L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) dx \quad (3.36)$$

olarak belirlidir.

x - çözümü

(3.34) ile verilen denklemin her iki tarafına L_x^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x u = u(0, y) + L_x^{-1}(u_y) \quad (3.37)$$

haline dönüşür. Verilen $u(0, y) = y$ koşulu da göz önüne alınırsa,

$$u(x, y) = y + L_x^{-1}(u_y) \quad (3.38)$$

elde edilir. AAM gereği bilinmeyen $u(x, y)$ çözüm fonksiyonu

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \quad (3.39)$$

ayrışım serisi ile verilir. (3.39) denklemi (3.38) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = y + L_x^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right)_y. \quad (3.40)$$

$u(x, y)$ fonksiyonunun ayrıştırılmasından birkaç terim düşünülecek olursa, (3.40) denklemi

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = y + L_x^{-1} \left((u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)_y \right) \quad (3.41)$$

denklemine dönüşür. Burada $u_0(x, y) = y$ olup,

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= y, \\ u_{k+1}(x, y) &= L_x^{-1}(u_k)_y, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

tekrarlayan ilişkisi vardır. $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= y, \\ u_1(x, y) &= L_x^{-1}(u_0)_y = \int_0^x (y)_y dx = x, \\ u_2(x, y) &= \int_0^x (u_1)_y dx = \int_0^x (x)_y dx = 0. \end{aligned}$$

Buradan, $u_k(x, y) = 0$, $k \geq 2$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + \dots = u_0(x, y) + u_1(x, y) = y + x \quad (3.43)$$

şeklinde bulunur.

y - çözümü

(3.33) denklemini operatör formda yazılsın:

$$L_y u = u_x \quad (3.44)$$

burada,

$$L_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.45)$$

ve L_y tersi var olan operatör olup, L_y^{-1} operatörü

$$L_y^{-1}(\cdot) = \int_0^y (\cdot) dy \quad (3.46)$$

şeklinde belirlidir.

(3.44) ile verilen denklemin her iki tarafına L_y^{-1} ters operatörü uygulansın. $u(x, 0) = x$ başlangıç koşulu da göz önüne alınırsa,

$$u(x, y) = u(x, 0) + L_y^{-1}(u_x) = x + L_y^{-1}(u_x) \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.39) ayrışım serisi (3.47) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = x + L_y^{-1} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right)_x \right). \quad (3.48)$$

$u(x, y)$ fonksiyonunun ayrıştırılmasından birkaç terim düşünölsün. (3.48) denklemi

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = x + L_y^{-1} \left((u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)_x \right) \quad (3.49)$$

denklemine dönöşür. Burada $u_0(x, y) = x$ olup,

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= x, \\ u_{k+1}(x, y) &= L_y^{-1} (u_k)_x, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

tekrarlayan ilişkisi vardır. $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenleri aşğıdaki gibi belirlenir.

$$u_0(x, y) = x,$$

$$u_1(x, y) = L_y^{-1} (u_0)_x = \int_0^y (x)_y dy = y,$$

$$u_2(x, y) = \int_0^y (u_1)_x dy = 0.$$

Açıkça göröldüğü gibi $u_k(x, y) = 0, \quad k \geq 2$. Çözüm,

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + \cdots = u_0(x, y) + u_1(x, y) = x + y \quad (3.51)$$

şeklindedir.

Örnek 3.13 Aşğıda verilen lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemi MAAM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_t + uu_x = x + xt^2, \quad u(x, 0) = 0. \quad (3.52)$$

Çözüm 3.13

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ olmak üzere, (3.52) denklemi operatör formda yazılsın.

$$Lu_t + uu_x = x + xt^2. \quad (3.53)$$

(3.53) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$u(x, t) - u(x, 0) = xt + \frac{1}{3}xt^3 - L_t^{-1}(uu_x),$$

$$u(x,t) = xt + \frac{1}{3}xt^3 - L_t^{-1}(uu_x). \quad (3.54)$$

AAM gereği, lineer terim $u(x,t)$ ve lineer olmayan terim uu_x aşağıdaki gibi kabul edilir.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t),$$

ve

$$uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Lineer ve lineer olmayan terimler (3.54) denkleminde yerine yazılsın:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = xt + \frac{1}{3}xt^3 - L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Bu noktada, MAAM gereği,

$$f(x,t) = xt + \frac{1}{3}xt^3$$

olmak üzere

$$f_0(x,t) = xt,$$

$$f_1(x,t) = \frac{1}{3}xt^3$$

seçelim. $u_0(x,t) = f_0(x,t) = xt$ olduğundan,

$$u_0(x,t) = xt,$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{3}xt^3 - L_t^{-1}(xt^2) = 0,$$

$$u_{k+2}(x,t) = 0, \quad k \geq 0$$

tekrarlayan ilişkisi bulunur. Çözüm,

$$u(x,t) = xt$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.14 Aşağıda verilen homojen kısmi türevli diferensiyel denklemini AAM ile çözünüz.

$$xu_x + u_y = 3u, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(0, y) = 0. \quad (3.55)$$

Çözüm 3.14

(3.55) denklemini operatör formda yazılırsa,

$$L_y u = 3u - xu_x \quad (3.56)$$

halini alır. Burada L_y operatörü ve L_y^{-1} ters operatörü (3.45) ve (3.46) denklemlerinde verilmiştir. (3.56) denklemini her iki tarafına L_y^{-1} ters operatörü uygulanırsa ve $u(x, 0) = x^2$ başlangıç koşulu göz önünde bulundurulursa,

$$u(x, y) = u(x, 0) + L_y^{-1}(3u - xu_x) = x^2 + L_y^{-1}(3u - xu_x) \quad (3.57)$$

olarak bulunur. (3.39) denklemini ile verilen bilinmeyen fonksiyonun ayrışım serisi (3.57) denkleminde yerine yazılsın:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = x^2 + L_y^{-1} \left[3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) - x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right)_x \right]. \quad (3.58)$$

$u(x, y)$ fonksiyonunun ayrıştırılmasından birkaç terim düşünülürse, (3.58) denklemini,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = x^2 + L_y^{-1} \left(3(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) - x(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)_x \right) \quad (3.59)$$

denklemine dönüşür. Burada $u_0(x, y) = x^2$ olup,

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= x^2, \\ u_{k+1}(x, y) &= L_y^{-1} (3u_k - x(u_k)_x), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

tekrarlayan ilişkisi vardır. $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenleri,

$$u_0(x, y) = x^2,$$

$$u_1(x, y) = \int_0^y (3u_0 - x(u_0)_x) dy = x^2 y,$$

$$u_2(x, y) = \int_0^y (3u_1 - x(u_1)_x) dy = x^2 \frac{y^2}{2!},$$

$$u_3(x, y) = \int_0^y (3u_2 - x(u_2)_x) dy = 0$$

$\vdots$

$$u_k(x, y) = 0, \quad k \geq 3$$

şeklindedir. Çözüm kapalı formda,

$$u(x, y) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots = x^2 \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots \right) = x^2 e^y \quad (3.61)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 3.15 Aşağıda verilen adi türevli diferensiyel denklemi AAM ile çözünüz.

$$u'(t) - u(t) = t \cos t - t \sin t + \sin t, \quad u(0) = 0. \quad (3.62)$$

Çözüm 3.15

$L = \frac{d}{dt}$ olmak üzere tersi var olan bir lineer operatör olsun ve tersi de $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$

şeklinde ifade edilsin. (3.62) denkleminin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa:

$$L^{-1}(u'(t)) = t \cos t - t \sin t + \sin t + L^{-1}(u(t)),$$

$$u(t) - u(0) = t \cos t - t \sin t + \sin t + L^{-1}(u(t)) \quad (3.63)$$

elde edilir. $u(0) = 0$ koşulu (3.63) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(t) = t \cos t - t \sin t + \sin t + L^{-1}(u(t)) \quad (3.64)$$

olur. Burada $u_0 = t \cos t - t \sin t + \sin t$ seçilirse,

$$u_0 = t \cos t - t \sin t + \sin t, \quad (3.65)$$

$$u_{k+1} = L^{-1}(u_k)$$

tekrarlayan ilişkisi bulunur. $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenleri

$$u_0 = t \cos t - t \sin t + \sin t,$$

$$u_1 = \int_0^t u_0(t) dt = -t \cos t + t \sin t + \sin t + 2 \cos t - 2,$$

$$u_2 = \int_0^t u_1(t) dt = -t \cos t - t \sin t + 3 \sin t - 2 \cos t - 2t + 2$$

$\vdots$

olarak devam eder. Çözüm kapalı formda,

$$u(t) = t \sin t \quad (3.66)$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.16 Aşağıda verilen başlangıç ve sınır değer problemini AAM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (3.67)$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$u(\pi, t) = \pi - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Çözüm 3.16

Problem t yönünde veya x yönünde hiçbir kısıtlamaya gerek kalmadan AAM ile kolaylıkla çözülebilir.

t – çözümü

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ olmak üzere, (3.67) denklemini operatör formda yazılsın:

$$L_t u = u_{xx}. \quad (3.68)$$

(3.68) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} operatörü uygulanırsa

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}(u_{xx}(x, t)). \quad (3.69)$$

olur. Verilen başlangıç koşulu yerine yazılsın:

$$u(x, t) = x + \cos x + L_t^{-1}(u_{xx}(x, t)). \quad (3.70)$$

Burada, ayrışım serisi yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = x + \cos x + L_t^{-1} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right)_{xx} \right) \quad (3.71)$$

elde edilir. Gerekli kabuller yapıldığında,

$$u_0(x, t) = x + \cos x,$$

$$u_1(x, t) = \int_0^t (u_0)_{xx} dt = -t \cos x,$$

$$u_2(x, t) = \int_0^t (u_1)_{xx} dt = \frac{1}{2!} t^2 \cos x,$$

$$u_3(x, t) = \int_0^t (u_2)_{xx} dt = -\frac{1}{3!} t^3 \cos x$$

$\vdots$

şeklinde devam edilir. Seri formda çözüm,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots, \\ &= x + \cos x \left(1 - t + \frac{1}{2!} t^2 - \frac{1}{3!} t^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Çözüm kapalı formda,

$$u(x, t) = x + e^{-t} \cos x \quad (3.72)$$

şeklinde ifade edilir.

x – çözümü

$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ve $L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$ olmak üzere, (3.67) denklemi operatör formda yazılırsa,

$$u_t = L_x u \quad (3.73)$$

elde edilir. (3.73) denkleminin her iki tarafına L_x^{-1} operatörü uygulanırsa ve ilk sınır şartı kullanılırsa,

$$u(x, t) = u(0, t) + x u_x(0, t) + L_x^{-1} u_t = e^{-t} + x h(t) + L_x^{-1} u_t \quad (3.74)$$

elde edilir ki burada $u_x(0, t) = h(t)$. (3.74) denkleminde ayrışım serisi yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = e^{-t} + xh(t) + L_x^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right)_t \quad (3.75)$$

olur. Buradan,

$$u_0(x, t) = e^{-t} + xh(t),$$

$$u_1(x, t) = \int_0^x \int_0^{x_1} (u_0)_t dx_1 dx = -\frac{1}{2!} x^2 e^{-t} + \frac{1}{3!} x^3 h'(t),$$

$$u_2(x, t) = \int_0^x \int_0^{x_1} (u_1)_t dx_1 dx = \frac{1}{4!} x^4 e^{-t} + \frac{1}{5!} x^5 h''(t)$$

⋮

$u_0, u_1, u_2, \dots$ değerleri edilir. Seri formda çözüm,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-t} \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots \right) + xh(t) + \frac{1}{3!} x^3 h'(t) + \dots, \\ &= e^{-t} \cos x + xh(t) + \frac{1}{3!} x^3 h'(t) + \dots \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $h(t)$ fonksiyonunu belirlemek için başlangıç koşulu kullanılarak,

$$u(x, 0) = x + \cos x = e^0 \cos x + xh(0) + \frac{1}{3!} x^3 h'(0) + \dots$$

her iki yandan x 'in kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$h(0) = 0,$$

$$h^{(n)}(0) = 0, \quad n \geq 1 \quad (3.76)$$

elde edilir. Taylor açılımından,

$$h(t) = 1 \quad (3.77)$$

olarak bulunur. Çözüm kapalı formda,

$$u(x, t) = x + e^{-t} \cos x \quad (3.78)$$

şeklinde hesaplanır. Her iki yöndeki çözüm incelenirse; x yönündeki çözümde hem başlangıç hem sınır koşulları kullanılırken, t yönündeki çözümde sadece başlangıç koşulu kullanıldığı görülür.

Örnek 3.17 Aşağıda verilen homojen olmayan başlangıç ve sınır değer problemini AAM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_{tt} = u_{xx} + 6t + 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (3.79)$$

$$u_x(0, t) = t^2 + \sin t, \quad u_x(\pi, t) = t^2 - \sin t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin x.$$

Çözüm 3.17

Problem t yönünde çözülsün.

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ ve tersi de } L_t^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt \text{ olsun. Aynı zamanda } L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ olsun.}$$

(3.79) denklemi operatör formda yazılırsa,

$$L_t u(x, t) = L_x u(x, t) + 6t + 2x \quad (3.80)$$

halini alır. (3.80) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} operatörü uygulansın.

$$u(x, t) - tu_t(x, 0) - u(x, 0) = L_t^{-1} (L_x u(x, t)) + L_t^{-1} (6t + 2x). \quad (3.81)$$

Gerekli işlemler yapılır ve başlangıç koşulları göz önüne alınırsa,

$$u(x, t) = t^3 + xt^2 + t \sin x + L_t^{-1} (L_x u(x, t)) \quad (3.82)$$

olarak bulunur. (3.39) denklemi ile verilen Adomian ayrışım serisi (3.82) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = t^3 + xt^2 + t \sin x + L_t^{-1} \left(L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \quad (3.83)$$

elde edilir. Burada $u_0(x, t) = t^3 + xt^2 + t \sin x$ kabul edilirse,

$$u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1} (L_x u_n(x, t)), \quad n \geq 0$$

tekrarlayan ilişkisi bulunur. O halde,

$$u_1(x, t) = \int_0^t \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) \right) dt dt = -\frac{1}{3!} t^3 \sin x$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x,t) \right) dt dt = -\frac{1}{5!} t^5 \sin x$$

⋮

Buradan,

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots = t^3 + t^2 x + \sin x \left(t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 - \dots \right)$$

olarak bulunur. Kapalı formda çözüm,

$$u(x,t) = t^3 + t^2 x + \sin x \sin t \quad (3.84)$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 3.18 Aşağıda verilen sınır değer problemini AAM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi \quad (3.85)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \sin x \sinh \pi$$

Çözüm 3.18

Problem x yönünde çözülsün.

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ ve tersi de } L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx \text{ olsun. Aynı zamanda } L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ olsun.}$$

(3.85) denklemi operatör formda yazılırsa,

$$L_x u(x, y) = -L_y u(x, y) \quad (3.86)$$

halini alır. (3.86) denkleminin her iki tarafına L_x^{-1} operatörü uygulanırsa,

$$u(x, y) = xh(y) - L_x (L_y u(x, y)) \quad (3.87)$$

elde edilir ki burada $h(y) = u_x(0, y)$. (3.39) denklemi ile verilen Adomian ayrışım serisi (3.87) denkleminde yerine yazılsın:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = xh(y) - L_x \left(L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) \right). \quad (3.88)$$

Burada $u_0(x, y) = xh(y)$ olarak kabul edilirse,

$$u_{k+1}(x, y) = -L_x(L_y u_k(x, y)), \quad k \geq 0$$

tekrarlayan ilişkisi elde edilir. O halde,

$$u_0(x, y) = xh(y),$$

$$u_1(x, y) = -L_x(L_y u_0(x, y)) = -\frac{1}{3!}x^3h''(y),$$

$$u_2(x, y) = -L_x(L_y u_1(x, y)) = \frac{1}{5!}x^5h^{(4)}(y)$$

$\vdots$

Bulunan bileşenler (3.88) denkleminde yerine yazılsın.

$$u(x, y) = xh(y) - \frac{1}{3!}x^3h''(y) + \frac{1}{5!}x^5h^{(4)}(y) - \frac{1}{7!}x^7h^{(6)}(y) + \dots$$

$u(x, \pi) = \sin x \sinh \pi$ sınır koşulu ve $\sin x$ 'in Taylor açılımından yararlanılırsa,

$$xh(\pi) - \frac{1}{3!}x^3h''(\pi) + \frac{1}{5!}x^5h^{(4)}(\pi) - \frac{1}{7!}x^7h^{(6)}(\pi) + \dots = \sinh \pi \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right). \quad (3.89)$$

(3.89) eşitliğinin her iki tarafındaki terimler göz önüne alındığında,

$$h(\pi) = h''(\pi) = h^{(4)}(\pi) = \dots = \sinh \pi \quad (3.90)$$

olarak bulunur. Buradan $h(y) = \sinh y$ sınır koşulu olarak düşünülür. (3.88) ve (3.90) denklemlerinden çözüm,

$$u(x, y) = \sinh y \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right)$$

ya da kapalı formda

$$u(x, y) = \sin x \sinh y \quad (3.91)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.19 Aşağıda verilen lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi AAM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_x^2, \quad (3.92)$$

$$u(x, 0) = 0.$$

Çözüm 3.19

Problem t yönünde çözülsün.

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve tersi de $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ olsun. (3.92) denklemi operatör formda yazılsın.

$$L_t u(x, t) = x^2 + \frac{1}{4}u_x^2. \quad (3.93)$$

(3.93) denkleminin her iki yanına L_t^{-1} operatörü uygulanırsa,

$$u(x, t) = x^2 t + \frac{1}{4} L_t^{-1} u_x^2 \quad (3.94)$$

elde edilir. AAM gereği lineer olmayan terimler Adomian polinomlarıyla ifade edilir.

Başka bir deyişle, buradaki lineer olmayan u_x^2 terimi,

$$u_x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad n \geq 0 \quad (3.95)$$

ile temsil edilir. (3.39) denkleminde verilen Adomian ayrışım serisi ve (3.95) denkleminde verilen lineer olmayan terimin ifadesi (3.94) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = x^2 t + \frac{1}{4} L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (3.96)$$

elde edilir. $u_0(x, t) = x^2 t$ kabul edilirse,

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{1}{4} L_t^{-1} A_n, \quad n \geq 0$$

tekrarlayan ilişkisi bulunur. Lineer olmayan u_x^2 terimi için Adomian polinomları düşünülecek olursa,

$$A_0 = u_{0x}^2,$$

$$A_1 = 2u_{0_x}u_{1_x},$$

$$A_2 = 2u_{0_x}u_{2_x} + u_{1_x}^2,$$

$$A_3 = 2u_{0_x}u_{3_x} + 2u_{1_x}u_{2_x}$$

$\vdots$

şeklindedir. O halde,

$$u_0(x,t) = x^2t,$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4}L_t^{-1}A_0 = \frac{1}{4}L_t^{-1}(4x^2t^2) = \frac{1}{3}x^2t^3,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{4}L_t^{-1}A_1 = \frac{1}{4}L_t^{-1}\left(\frac{8}{3}x^2t^4\right) = \frac{2}{15}x^2t^5,$$

$\vdots$

Buradan,

$$u(x,t) = x^2\left(t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \dots\right)$$

yani çözüm kapalı formda

$$u(x,t) = x^2 \tan t \tag{3.97}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.20 Aşağıda verilen kısmi türevli diferensiyel denklemi AAM'yi kullanarak çözünüz.

$$u_t + u^2u_x = 0,$$

$$u(x,0) = 2x, \quad x \in R, \quad t > 0. \tag{3.98}$$

Çözüm 3.20

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve tersi de $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ olsun. (3.98) denklemi operatör formda yazılsın:

$$Lu_t + u^2u_x = 0. \tag{3.99}$$

(3.99) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörü uygulanırsa ve başlangıç koşulu göz önüne alınırsa,

$$u(x, t) = 2x - L_t^{-1}(u^2 u_x) \quad (3.100)$$

elde edilir. AAM gereği, lineer terim $u(x, t)$ ve lineer olmayan terim uu_x aşağıdaki gibi kabul edilir.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

ve

$$u^2 u_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Lineer ve lineer olmayan terimler (3.100) denkleminde yerine yazılsın.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = 2x - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

A_n Adomain polinomları lineer olmayan $u^2 u_x$ terimini temsil etmek üzere,

$$u_0(x, t) = 2x,$$

$$u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1}(A_k), \quad k \geq 0$$

tekrarlayan ilişkisi elde edilir. $u(x, t)$ seri çözümünün bileşenlerinden bazıları,

$$u_0(x, t) = 2x,$$

$$u_1(x, t) = -\int_0^t (A_0) dt = -\int_0^t (8x^2) dt = -8x^2 t,$$

$$u_2(x, t) = -\int_0^t (A_1) dt = -\int_0^t (-128x^3 t) dt = 64x^3 t^2,$$

$$u_3(x, t) = -\int_0^t (A_2) dt = -\int_0^t (1920x^4 t^2) dt = -640x^4 t^3$$

$\vdots$

ve bu şekilde devam eder. Çözüm seri formda,

$$u(x, t) = 2x - 8x^2 t + 64x^3 t^2 - 640x^4 t^3 + \dots$$

olarak hesaplanır. Burada,

$$t = 0 \text{ için } u(x, t) = 2x,$$

$$t > 0 \text{ için } u(x, t) = \frac{1}{4t}(\sqrt{1+16xt} - 1)$$

ile verilir. Tek bir fonksiyon olarak ifade edilirse, çözüm

$$u(x, t) = \begin{cases} 2x, & t = 0 \\ \frac{1}{4t}(\sqrt{1+16xt} - 1), & t > 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

şeklindedir.

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELERDE REAKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN ADOMİAN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

4.1 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme

Havacılık, uzay, savunma ve otomotiv gibi endüstrilerdeki hızlı teknolojik gelişim ve artan rekabet, yüksek performansa sahip ürünlerin tasarlanmasına, bu durum da hafif ama aynı zamanda gerilmelere ve sıcaklıklara karşı mukavemeti yüksek malzemelere olan ihtiyacı ortaya koymaktadır. Bu ihtiyaca cevap vermek üzere, mekanik özellikleri metallere göre daha üstün olan kompozit malzemeler üretilmeye başlanmıştır. Ancak dış yüzeylerindeki sıcaklık yaklaşık 2100 °K'e ulaşan ve yüzeyler arasındaki sıcaklık farkı 1600 °K civarında olan uzay araçları gibi yüksek sıcaklığa maruz kalan yapılarda metal üzerinde çeşitli tekniklerle oluşturulan homojen seramik kaplamalar, metali korozyona, oksitlenmeye ve aşınmaya karşı korusa da sistem yüksek sıcaklıklarda ısıl gerilme sorunuyla karşı karşıya kalmaktadır. Yüksek sıcaklıkların bulunduğu ortamlarda ani ve büyük sıcaklık değişimlerinin olmasıyla seramik ve metal malzemelerin ısıl genleşme katsayılarının farklılıklarından dolayı yapılarında keskin gerilme dağılımları oluşmaktadır. Bu gerilme yığılmaları ara yüz çatlak ve kırık oluşumunun da önde gelen sebeplerinden biridir [24]. Bu sorunun çözümü olarak, 1984'de Japonya'da bir uzay mekiği projesi sırasında, 10 mm'den ince bir kesit için, 2000 °K seviyesinde bir yüzey sıcaklığına ve 1000 °K'lik bir sıcaklık aralığına dayanabilecek bir ısıl bariyer malzemesi önerisi ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) konsepti ortaya çıkmıştır. FDM'ler birbirinden farklı özelliklere sahip homojen iki malzemedan oluşan ve malzeme özellikleri bir yüzeyden diğerine bir konum fonksiyonuna bağlı olarak sürekli

veya kademeli bir değişim gösteren yüksek ısı direnç kapasitesine sahip ileri teknoloji malzemeleridir.

FDM çalışmaları sonucunda birçok özelliği bir arada bulunduran ideal malzeme kombinasyonları, seramik ve metaller önem kazanmıştır. Seramik düşük yoğunluk, yüksek mukavemet, katılık ve ısı dirence sahip bir malzemedir. Ayrıca metaller de elektrik geçirgenliği, tokluk ve işlenebilirliğe sahip malzemelerdir. FDM'ler, sıcaklığın yüksek olduğu yüzeyi seramik ve sıcaklığın düşük olduğu yüzeyi metal olacak şekilde ve seramikten metale doğru kademeli veya devamlı derecelendirilmiş bir geçişe sahip biçimde tasarlanmış malzemelerdir. Bu tasarım sayesinde, iki malzeme arasında farklı ısı genleşme katsayılarından dolayı oluşan ısı gerilmeleri birlikte, fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani değişimlerden dolayı meydana gelebilecek olan diğer olumsuzluklar da minimuma indirilmiş olur. Ayrıca, bu malzemelerin bileşen, mikroyapı ve bazı mekanik özelliklerinin yapı boyunca yumuşak bir değişiminin tasarımcıya istenen mekanik ve ısı özellikte bir malzeme üretimi konusunda büyük yararlar sağladığı görülmüştür. Bu durum FDM'lerin birçok uygulamada tercih edilme sebebi olmaktadır [27].

FDM'lerde kademeli derecelendirilmiş yapılar teknik olarak yarı kompozit, sürekli olmayan termomekanik özelliklere sahip birbirinden farklı homojen malzemeler içerir. Devamlı derecelendirilmiş yapılarda ise iki önemli özellik vardır. Birincisi; seramiğin kısmi hacmi ara yüzde %0'dan yüzeyde %100'e kadar değiştiğinden, kaplamayla kaplanan arasındaki bağlanma, malzeme uyumluluğu sebebiyle daha iyi olacaktır. İkinci olarak; malzeme özellikleri dağılımlarının düzgün olması sebebiyle FDM kaplı ara katmanda gerilme konsantrasyonları kademeli homojen kaplamalara göre daha düşük olacaktır. Bir malzemenin bileşimi ve yapısı gibi özelliklerinin kısmi değişimi ve sürekli derecelendirilmesi malzemenin çok fonksiyonlu bir malzeme olmasını sağlar. Böyle bir özelliğe sahip olan FDM'lerden nanoteknoloji alanında da yararlanılabilir.

İlk olarak uzay araçları için tasarlanan FDM'ler iyi ısı iletkenlik ve iyi ısı direnç gibi iki zıt özelliğin bir malzemede bulunabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Bu özellikler sayesinde hafiflik, güçlülük ve sağlamlık mümkün olmaktadır. Japonya'daki uzay istasyonu Kiba'da test olarak FDM, bir fişek ve geri kullanılabilir bir roket motoru olarak kullanılmıştır. Roketlerin çoğunun kullanıldıktan sonra atılması ve bununda ülkelere pahalıya mal olması, ülkeleri maliyeti azaltmaya yani geri kullanımlı roketler üzerinde çalışmaya yönlendirmiştir. Yapılan çalışmalar gelecekte uzay mekiklerinin

geri kullanımlı roketler şeklinde üretilebileceklerini göstermiştir. Şu anda yalnızca, Japonlara ait Obita mekiği geri kullanımlıdır. FDM'lerin endüstriyel malzemelerdeki uygulamalarının geliştirilmesi de yine araştırmaların ana hedeflerinden biri olmuştur. Örneğin, derecelendirilmiş kesici kalemlerin geliştirilmesinin sebebi mukavemet ve ısıl direnç bakımından daha iyi malzemelere ihtiyaç duyulmasıdır. Bu alanda, umulan aşınma direnci ve sertlik elde edilmiştir. Kendi kendini yağlama fonksiyonu ve yüksek ısıl dirençlerin kesici kalemlerde elde edilmesinin yanında, bazı derecelendirilmiş kalemler sayesinde yağ kullanılmadan uygulanan kuru kesimler de gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde geliştirilen bir kalem, iç kısmında çelik yoğunlukta, dış kısmına doğru elmas yoğunluktadır. Yüksek hızlı kesici kalemlerde de diğer FDM'lerde olduğu gibi üretim tekniğinden kaynaklanan şekil ve boyutta sınırlamalar bulunmaktadır [34].

Bu bölümde, bir boyutlu zamana bağlı Reaksiyon Difüzyon (RD) denklemi ele alınmış ve bu denklemin katsayıları, FDM özelliği gereği, konumun bir fonksiyonu olarak seçilmiştir. Gerekli işlemler yapıldığında, değişken katsayılı Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon (ARD) denklemi elde edilmiştir. Bu bölüm, değişken katsayılı ARD denkleminin AAM yardımıyla çözümünü kapsamaktadır.

Homojen bir malzemede bir boyutlu RD denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \alpha_d \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + p(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.1)$$

denklemi ile verilmektedir. Burada, $\alpha_d = \frac{k}{\rho c}$ difüzyon katsayısı ve $p(x,t)$ de reaksiyon parametresidir. Başlangıç ve sınır koşulları olarak da,

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

$$u(0,t) = f_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

düşünülebilir.

4.2 Problemin Geliştirilmesi

(4.1) denklemi ile verilen RD denklemini, FDM için geliştirelim. FDM özelliği gereği difüzyon katsayısını konumun bir fonksiyonu olarak alalım. Bu durumda,

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right] + p(x,t)u(x,t) \quad (4.4)$$

denklemini elde ederiz. (4.4) denkleminde $0 \leq \beta \leq 3$ ve $c_0, \rho_0, k_0 \neq 0$ olmak üzere,

$$c(x)\rho(x) = c_0\rho_0e^{\beta x}, \quad (4.5)$$

$$k(x) = k_0e^{\beta x} \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilir. (4.5) ve (4.6) ile verilen ifadeler (4.4) denkleminde yerine yazılırsa, denklem,

$$c_0\rho_0e^{\beta x}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k_0\alpha e^{\beta x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + k_0e^{\beta x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + p(x,t)u(x,t) \quad (4.7)$$

halini alır. $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ ifadesini yalnız bırakmak için (4.7) denkleminin her iki tarafı

$\frac{e^{-\beta x}}{c_0\rho_0}$ ile çarpıldığında:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{k_0}{c_0\rho_0}\beta\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \frac{k_0}{c_0\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \frac{e^{-\beta x}}{c_0\rho_0}p(x,t)u(x,t) \quad (4.8)$$

ifadesi elde edilir. $\frac{k_0}{c_0\rho_0} = C$ sabit bir değer olduğundan, bu değer (4.8) denkleminde

yerine yerleştirilirse,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = C\beta\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + C\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \frac{C}{k_0}e^{-\beta x}p(x,t)u(x,t) \quad (4.9)$$

elde edilir. Son olarak, $q(x,t) = \frac{e^{-\beta x}}{k_0}p(x,t)$ şeklinde seçelim. (4.9) denklemi tekrar düzenlendiğinde,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = C\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \beta\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + q(x,t)u(x,t)\right\} \quad (4.10)$$

denklemini bulunur ki bu denklem Cauchy ARD denklemdir. Başlangıç ve sınır koşullarını,

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.11)$$

$$u(0,t) = f_0(0,t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0,t) = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

şeklinde alarak (4.10) ile verilen ARD denklemini AAM ile çözelim.

4.3 Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon Denkleminin Adomian Ayırışım Metodu ile Çözümü

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ve} \quad L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{operatörleri tersi var olan kısmi diferansiyel}$$

operatörler olsun. Bu operatörlerin tersleri, sırasıyla, $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$, $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ ve

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^s (\cdot) ds d\eta \quad \text{şeklinde tanımlansın. (4.10) ile verilen ARD denkleminin çözümü}$$

(4.11) başlangıç koşuluyla t -yönünde, (4.12) ile verilen sınır koşullarıyla da x -yönünde olmak üzere iki yönden de incelenebilir ve çözüm

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir.

4.3.1 Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon Denkleminin t -Yönünde Çözümü

(4.10) denklemi ve (4.11) başlangıç koşulu karakteristik Cauchy problemi oluşturur. Bu problemin AAM ile çözümü için, (4.10) denklemini operatör formda yazalım:

$$L_t u(x,t) = CL_{xx} u(x,t) + C\beta L_x u(x,t) + Cq(x,t)u(x,t). \quad (4.14)$$

Bu denklemin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörü uygulanır,

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = CL_t^{-1} \{L_{xx} u(x,t) + \beta L_x u(x,t) + q(x,t)u(x,t)\} \quad (4.15)$$

ve sol tarafı,

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) dt = u(x,t) \Big|_0^t = u(x,t) - u(x,0) \quad (4.16)$$

olmak üzere (4.15) denklemi

$$u(x,t) - u(x,0) = C \left\{ \int_0^t L_{xx} u(x,t) dt + \beta \int_0^t L_x u(x,t) dt + \int_0^t q(x,t) u(x,t) dt \right\},$$

$$u(x,t) = u(x,0) + C \left\{ \int_0^t L_{xx} u(x,t) dt + \beta \int_0^t L_x u(x,t) dt + \int_0^t q(x,t) u(x,t) dt \right\} \quad (4.17)$$

şekline dönüşür. (4.13) ile verilen ayrışım serisi ve $u(x,0) = g(x)$ başlangıç koşulu (4.17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) &= g(x) + C \int_0^t L_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) dt + C\beta \int_0^t L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) dt \\ &+ C \int_0^t q(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

olarak bulunur. (4.18) denkleminde, $u_0(x,t) = g(x)$ olarak seçersek, karakteristik Cauchy probleminin çözümü için,

$$u_{n+1}(x,t) = C \int_0^t \{ L_{xx} u_n(x,t) + \beta L_x u_n(x,t) + q(x,t) u_n(x,t) \} dt, \quad n \geq 0 \quad (4.19)$$

şeklinde veya

$$u_{n+1}(x,t) = CL_t^{-1} \{ L_{xx} u_n(x,t) + \beta L_x u_n(x,t) + q(x,t) u_n(x,t) \}, \quad n \geq 0 \quad (4.20)$$

operatör formda tekrarlayan ilişkisi elde edilir.

Burada, $q(x,t) = q_0$ şeklinde bir sabit kabul edelim ve birkaç terim bulalım. Öncelikle

$$u_0(x,t) = u_0, \quad (4.21)$$

ile başlayalım.

$u_1(x,t) = CL_t^{-1} \{ L_{xx} u_0(x,t) + \beta L_x u_0(x,t) + q_0 u_0(x,t) \}$ kabul edelim. Bu ifade düzenlenirse

$$u_1(x,t) = Ct \{ (L_{xx} u_0 + q_0 u_0) + \beta L_x u_0 \}, \quad (4.22)$$

bulunur. Şimdi $u_2(x,t)$ 'yi bulalım:

$$u_2(x,t) = CL_t^{-1} \{ L_{xx} u_1 + q_0 u_1 + \beta L_x u_1 \} \quad (4.23)$$

(4.23) ile verilen denklemi aşağıdaki gibi yazalım.

$$u_2(x,t) = CL_t^{-1} \{ (L_{xx} + q_0) u_1 + \beta L_x u_1 \}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= CL_t^{-1} \left\{ (L_{xx} + q_0) CL_t^{-1} \left\{ (L_{xx} + q_0) u_0 + \beta L_x u_0 \right\} \right. \\
&\quad \left. + CL_t^{-1} \left\{ \beta L_x CL_t^{-1} \left\{ (L_{xx} + q_0) u_0 + \beta L_x u_0 \right\} \right\} \right\} \\
u_2(x,t) &= C^2 \frac{t^2}{2!} \left\{ (L_{xx} + q_0) \left\{ (L_{xx} + q_0) u_0 + \beta L_x u_0 \right\} + \beta L_x \left\{ (L_{xx} + q_0) u_0 + \beta L_x u_0 \right\} \right\} \\
u_2(x,t) &= C^2 \frac{t^2}{2!} \left\{ (L_{xx} + q_0)^2 + (L_{xx} + q_0) \beta L_x + \beta L_x (L_{xx} + q_0) + \beta^2 (L_x)^2 \right\} u_0 \\
u_2(x,t) &= C^2 \frac{t^2}{2!} \left\{ (L_{xx} + q_0)^2 + \underbrace{(L_{xx} + q_0) \beta L_x + \beta L_x (L_{xx} + q_0)}_{L_{xx} \beta L_x + q_0 \beta L_x + \beta L_x L_{xx} + \beta L_x q_0} + \beta^2 (L_x)^2 \right\} u_0 \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Bu kısımda verilen bazı ifadeleri kontrol edelim:

$$\begin{aligned}
\beta L_{xx} L_x &\stackrel{?}{=} \beta L_x L_{xx} \quad \Rightarrow \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \stackrel{?}{=} \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \\
&\Rightarrow \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} = \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3}
\end{aligned}$$

ve

$$\beta q_0 L_x \stackrel{?}{=} \beta L_x q_0 \quad \Rightarrow \beta q_0 \frac{\partial}{\partial x} \stackrel{?}{=} \beta \frac{\partial}{\partial x} q_0,$$

q_0 sabit olduğu sürece bu eşitlik de sağlanmaktadır, yani,

$$\Rightarrow \beta q_0 \frac{\partial}{\partial x} = \beta \frac{\partial}{\partial x} q_0.$$

Bu durumda (4.24) denklemi ile verilen ifade yeni bir hal alacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= C^2 \frac{t^2}{2!} \left\{ (L_{xx} + q_0)^2 + (L_{xx} + q_0) \beta L_x + \beta L_x (L_{xx} + q_0) + \beta^2 (L_x)^2 \right\} u_0 \\
u_2(x,t) &= C^2 \frac{t^2}{2!} \left\{ (L_{xx} + q_0)^2 + 2(L_{xx} + q_0) \beta L_x + \beta^2 (L_x)^2 \right\} u_0 \\
u_2(x,t) &= C^2 \frac{t^2}{2!} \left\{ (L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^2 \right\} u_0 \quad (4.25)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemleri $u_3(x, t)$ için de uygulayalım.

$$u_3(x, t) = CL_t^{-1} \{L_{xx}u_2 + q_0u_2 + \beta L_x u_2\} \quad (4.26)$$

(4.26) denklemini aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= CL_t^{-1} \{(L_{xx} + q_0)u_2 + \beta L_x u_2\} \\ u_3(x, t) &= CL_t^{-1} \left\{ (L_{xx} + q_0) \left[C^2 \frac{t^2}{2!} \{(L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^2\} u_0 \right] \right\} \\ &\quad + CL_t^{-1} \left\{ \beta L_x \left[C^2 \frac{t^2}{2!} \{(L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^2\} u_0 \right] \right\} \\ u_3(x, t) &= C^3 \frac{t^3}{3!} \{(L_{xx} + q_0) \{ (L_{xx} + q_0)^2 + 2(L_{xx} + q_0)\beta L_x + \beta^2 (L_x)^2 \} u_0\} \\ &\quad + C^3 \frac{t^3}{3!} \{ \beta L_x \{ (L_{xx} + q_0)^2 + 2(L_{xx} + q_0)\beta L_x + \beta^2 (L_x)^2 \} u_0 \} \\ u_3(x, t) &= C^3 \frac{t^3}{3!} \{ (L_{xx} + q_0)^3 + 2(L_{xx} + q_0)^2 \beta L_x + (L_{xx} + q_0)\beta^2 (L_x)^2 \} u_0 \\ &\quad + C^3 \frac{t^3}{3!} \{ \beta L_x (L_{xx} + q_0)^2 + 2(L_{xx} + q_0)\beta^2 (L_x)^2 + \beta^3 (L_x)^3 \} u_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Bu kısımda gösterilmesi gereken bazı eşitlikleri gösterelim.

$$\begin{aligned} (L_{xx} + q_0)^2 \beta L_x &\stackrel{?}{=} \beta L_x (L_{xx} + q_0)^2 \\ &\Rightarrow \left((L_{xx})^2 + 2L_{xx}q_0 + q_0^2 \right) \beta L_x \stackrel{?}{=} \beta L_x \left((L_{xx})^2 + 2L_{xx}q_0 + q_0^2 \right) \\ (L_{xx})^2 \beta L_x &\stackrel{?}{=} \beta L_x (L_{xx})^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \stackrel{?}{=} \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &\stackrel{?}{=} \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad \Rightarrow \frac{\partial^5}{\partial x^5} \beta = \beta \frac{\partial^5}{\partial x^5} \end{aligned}$$

Bu eşitlik sağlandı. Diğer eşitlikleri inceleyelim.

$$\begin{aligned} L_{xx}q_0 \beta L_x &\stackrel{?}{=} \beta L_x L_{xx}q_0 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) q_0 \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \stackrel{?}{=} \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) q_0 \\ &\Rightarrow q_0 \beta \frac{\partial^5}{\partial x^5} = \beta q_0 \frac{\partial^5}{\partial x^5} \end{aligned}$$

q_0 sabit olduğu sürece bu eşitlik de sağlanmaktadır.

$$\begin{aligned} q_0^2 \beta L_x &= \beta L_x q_0^2 & \Rightarrow q_0^2 \beta \frac{\partial}{\partial x} &= \beta \frac{\partial}{\partial x} q_0^2 \\ & & \Rightarrow q_0^2 \beta \frac{\partial}{\partial x} &= \beta \frac{\partial}{\partial x} q_0^2 \end{aligned}$$

Son eşitlik de q_0 sabit olduğu sürece sağlandığından (4.27) denklemi yeni bir şekil alır.

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= C^3 \frac{t^3}{3!} \left\{ (L_{xx} + q_0)^3 + 2(L_{xx} + q_0)^2 \beta L_x + \beta^2 (L_x)^2 (L_{xx} + q_0) \right\} u_0 \\ &\quad + C^3 \frac{t^3}{3!} \left\{ \beta L_x (L_{xx} + q_0)^2 + 2(L_{xx} + q_0) \beta^2 (L_x)^2 + \beta^3 (L_x)^3 \right\} u_0 \\ u_3(x, t) &= C^3 \frac{t^3}{3!} \left\{ (L_{xx} + q_0)^3 + 3(L_{xx} + q_0)^2 \beta L_x + 3\beta^2 (L_x)^2 (L_{xx} + q_0) + \beta^3 (L_x)^3 \right\} u_0 \\ u_3(x, t) &= C^3 \frac{t^3}{3!} \left\{ (L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^3 \right\} u_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak bulunur. $u_n(x, t)$ için de aynı işlemleri yapalım.

$$u_n(x, t) = CL_t^{-1} \left\{ L_{xx} u_{n-1} + q_0 u_{n-1} + \beta L_x u_{n-1} \right\} \quad (4.29)$$

(4.29) denklemi daha açık bir şekilde yazalım:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= CL_t^{-1} \left\{ (L_{xx} + q_0) u_{n-1} + \beta L_x u_{n-1} \right\} \\ u_n(x, t) &= CL_t^{-1} \left\{ (L_{xx} + q_0) \left[C^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ (L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^{n-1} \right\} u_0 \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta L_x \left[C^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ (L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^{n-1} \right\} u_0 \right] \right\} \\ u_n(x, t) &= C^n \frac{t^n}{n!} \left\{ (L_{xx} + q_0) \left[\binom{n-1}{0} (L_{xx} + q_0)^{n-1} + \binom{n-1}{1} (L_{xx} + q_0)^{n-2} \beta L_x \right] \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-1}{2} (L_{xx} + q_0)^{n-3} \beta^2 (L_x)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{n-1}{n-1} (L_{xx} + q_0)^{n-n} \beta^n (L_x)^n \right\} u_0 \end{aligned}$$

$$+ C^n \frac{t^n}{n!} \left\{ \beta L_x \left[\begin{aligned} &\left(\binom{n-1}{0} (L_{xx} + q_0)^{n-1} + \binom{n-1}{1} (L_{xx} + q_0)^{n-2} \beta L_x \right. \\ &+ \binom{n-1}{2} (L_{xx} + q_0)^{n-3} \beta^2 (L_x)^2 + \dots \\ &\left. \dots + \binom{n-1}{n-1} (L_{xx} + q_0)^{n-n} \beta^n (L_x)^n \right) \end{aligned} \right] u_0 u_0 \right\} \quad (4.30)$$

(4.30) denklemi incelendiğinde,

$$u_n(x, t) = C^n \frac{t^n}{n!} \left\{ (L_{xx} + q_0 + \beta L_x)^n \right\} u_0 \quad (4.31)$$

olarak bulunur. Çözüm için,

$$u_n(x, t) = C^n \frac{t^n}{n!} \left\{ ((L_{xx} + q_0) + \beta L_x)^n \right\} u_0, \quad n \geq 0 \quad (4.32)$$

şeklinde bir iterasyon elde edilir. Çalışmamızı birkaç örnekle pekiştirelim.

Örnek 4.1 Çözümü $u(x, t) = e^{-x} e^{-t}$ olmak üzere, $C = 1$, $\beta = 1$ ve $q(x, t) = -1$ olan Adveksiyon Reaksiyon Difüzyon denklemini AAM ile çözelim.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - u(x, t) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-x} \\ u(0, t) &= e^{-t}, \quad u_x(0, t) = -e^{-t}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Çözüm 4.1

Problemin çözümünü AAM gereği bir seri çözüm olarak ele alalım. O halde çözüm,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

şeklindedir. $u_0(x, t) = u(x, 0) = e^{-x}$ ve (4.32) denkleminden

$$u_n(x, t) = 1^n \frac{t^n}{n!} \left\{ (L_{xx} - 1) + 1 \cdot L_x \right\}^n u_0$$

olarak belirlidir. İterasyona başlayalım.

$$u_0(x, t) = e^{-x},$$

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= t \left\{ (L_{xx} - 1) + 1 \cdot L_x \right\} u_0 = t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 + \frac{\partial}{\partial x} \right\} e^{-x} \\
&= t \left\{ e^{-x} - e^{-x} - e^{-x} \right\}
\end{aligned}$$

$$u_1(x,t) = -te^{-x},$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= \frac{t^2}{2!} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \right\}^2 e^{-x} \\
&= \frac{t^2}{2!} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right\} e^{-x} \\
&= \frac{t^2}{2!} \left\{ e^{-x} - 2e^{-x} - e^{-x} + 2e^{-x} + e^{-x} \right\}
\end{aligned}$$

$$u_2(x,t) = \frac{t^2}{2!} e^{-x},$$

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) &= \frac{t^3}{3!} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \right\}^3 e^{-x} \\
&= \frac{t^3}{3!} \left\{ \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^5}{\partial x^5} - 3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right\} e^{-x} \\
&= \frac{t^3}{3!} \left\{ e^{-x} - 3e^{-x} - 3e^{-x} + 2e^{-x} + 3e^{-x} - e^{-x} \right\}
\end{aligned}$$

$$u_3(x,t) = -\frac{t^3}{3!} e^{-x},$$

⋮

Şimdi bulduğumuz değerleri seri çözümde yerine yazalım:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= e^{-x} - te^{-x} + \frac{t^2}{2!} e^{-x} - \frac{t^3}{3!} e^{-x} + \dots \\
&= e^{-x} \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Çözüm kapalı formda,

$$u(x,t) = e^{-x} e^{-t}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi kesin çözüm AAM ile kolayca hesaplanmıştır. Bu örneğin çözümüne ait grafik Bölüm 5'te "Sonuç ve Öneriler" başlığı altında verilmiştir.

Örnek 4.2 $C = 1$, $\beta = 0.001$ ve $q(x, t) = -1$ olmak üzere, aşağıda verilen ARD denklemini AAM ile çözelim.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 0.001 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - u(x, t) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-x} + x \\ u(0, t) &= 1, \quad u_x(0, t) = e^{-t} - 1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Çözüm 4.2

Problemin çözümünü AAM gereği bir seri çözüm olarak alalım. Bu durumda çözüm,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

şeklinde ifade edilir. $u_0(x, t) = u(x, 0) = x + e^{-x}$ ve (4.32) denkleminden

$$u_n(x, t) = 1^n \frac{t^n}{n!} \left\{ (L_{xx} - 1) + 10^{-3} \cdot L_x \right\}^n u_0$$

olarak belirlidir. O halde, birkaç terimi belirlemek için iterasyona başlayalım.

$$u_0(x, t) = x + e^{-x},$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= t \left\{ (L_{xx} - 1) + 10^{-3} \cdot L_x \right\} u_0 = t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 + 10^{-3} \frac{\partial}{\partial x} \right\} (x + e^{-x}) \\ &= t \left\{ e^{-x} - x - e^{-x} + 10^{-3} - 10^{-3} e^{-x} \right\} \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = -xt - e^{-x} 10^{-3} t + 10^{-3} t,$$

$$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) + 10^{-3} \frac{\partial}{\partial x} \right\}^2 (x + e^{-x})$$

$$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot 10^{-3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 10^{-6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \cdot 10^{-3} \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right\} (x + e^{-x})$$

$$u_2(x,t) = x \frac{t^2}{2!} + e^{-x} (10^{-3})^2 \frac{t^2}{2!} - 2 \cdot 10^{-3} \frac{t^2}{2!},$$

$$u_3(x,t) = \frac{t^3}{3!} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right) + 10^{-3} \frac{\partial}{\partial x} \right]^3 (x + e^{-x})$$

$$u_3(x,t) = \frac{t^3}{3!} \left[\frac{\partial^6}{\partial x^6} - 3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] (x + e^{-x}) + 3 \frac{t^3}{3!} \left[10^{-6} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 10^{-6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] (x + e^{-x}) \\ + 3 \frac{t^3}{3!} \left[10^{-3} \frac{\partial^5}{\partial x^5} - 2 \cdot 10^{-3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 10^{-3} \frac{\partial}{\partial x} \right] (x + e^{-x}) + \left[10^{-9} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right] (x + e^{-x})$$

$$u_3(x,t) = \frac{t^3}{3!} \{ e^{-x} - 3e^{-x} + 3e^{-x} - x - e^{-x} + 3 \cdot 10^{-6} e^{-x} - 3 \cdot 10^{-6} e^{-x} \} \\ + \frac{t^3}{3!} \{ -3 \cdot 10^{-3} e^{-x} + 6 \cdot 10^{-3} e^{-x} + 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3} e^{-x} - 10^{-9} e^{-x} \}$$

$$u_3(x,t) = -x \frac{t^3}{3!} - e^{-x} (10^{-3})^3 \frac{t^3}{3!} + 3 \cdot 10^{-3} \frac{t^3}{3!},$$

⋮

şeklinde hesaplanır. Bulduğumuz bu değerleri çözüm serisinde yerine yazalım:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots$$

$$u(x,t) = x + e^{-x} - xt - e^{-x} \cdot 10^{-3}t + 10^{-3}t + x \frac{t^2}{2!} + e^{-x} \cdot (10^{-3})^2 \frac{t^2}{2!} \\ - 2 \cdot 10^{-3} \frac{t^2}{2!} - x \frac{t^3}{3!} - e^{-x} \cdot (10^{-3})^3 \frac{t^3}{3!} + 3 \cdot 10^{-3} \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (4.37)$$

(4.37) denklemi düzenlenirse,

$$u(x,t) = x - xt + x \frac{t^2}{2!} - x \frac{t^3}{3!} + e^{-x} - e^{-x} \cdot 10^{-3}t + e^{-x} \cdot (10^{-3})^2 \frac{t^2}{2!} \\ - e^{-x} \cdot (10^{-3})^3 \frac{t^3}{3!} + 10^{-3}t - 2 \cdot 10^{-3} \frac{t^2}{2!} + 3 \cdot 10^{-3} \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (4.38)$$

elde edilir. Çözüm sadeleştirme yapılırsa,

$$u(x,t) = xe^{-t} + e^{-x} e^{-10^{-3}t} + 10^{-3}t - 2 \cdot 10^{-3} \frac{t^2}{2!} + 3 \cdot 10^{-3} \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (4.39)$$

ifadesine benzemektedir. Yukarıda ele alınan ((4.39)) sonuçtan da grldğ gibi elde edilen değrler, Lesnic’e ait çalışmada ($w(x,t) = xe^{-t} + e^{-x}$) elde edilen sonuçları sağlamaktadır. Basitçe Lesnic’in çalışmasında kullanılan malzeme homojen malzeme olduğundan $\beta = 0$ alınırsa elde ettiğimiz sonuçlarının birebir tuttuğu görülür [25]. Ayrıca Lesnic’in çalıştığı,

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t) - w(x,t) \quad (4.40)$$

(4.40) denklemi özel bir denklem olup, Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov (KPP) denklemi olarak adlandırılmaktadır [35]. Bazı değrler için yapılan karşılaştırmalar Bölüm 5’te ‘‘Sonuç ve öneriler’’ başlığı altında verilmiştir.

şimdi de $q = q(t)$ olan iki rneği inceleyelim:

rnek 4.3 Kapalı zm $u(x,t) = e^{-x}e^{t^2}$ olan

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + 2tu(x,t) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= e^{-x} \\ u(0,t) &= e^{t^2}, \quad u_x(0,t) = -e^{t^2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

denklemini AAM ile çözünüz.

zm 4.3

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operatörleri tersi var olan kısmi diferansiyel operatörler olsun. Bu operatörlerin tersleri, sırasıyla, $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$, $L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$ ve $L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^s (\cdot) ds d\eta$ şeklinde tanımlansın. şimdi (4.41) denklemini operatör formda yazalım.

$$L_t u = L_{xx} u - L_x u + 2t \cdot u \quad (4.43)$$

(4.43) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$L_t^{-1} L_t u = L_t^{-1} L_{xx} u - L_t^{-1} L_x u + L_t^{-1} (2t \cdot u)$$

$$u(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} \{L_{xx} - L_x\}u + L_t^{-1} \{2t \cdot u\} \quad (4.44)$$

elde edilir. AAM gereği çözüm

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

sonsuz bir seri ile ifade edilir. Bu seri (4.44) denkleminde yerine yazılınsın:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1} \{L_{xx} - L_x\} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) + L_t^{-1} \left\{ 2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right\}. \quad (4.45)$$

$u_0(x,t) = u(x,0)$ olarak alındığında, aşağıdaki tekrarlayan ilişki elde edilir.

$$u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1} \{L_{xx} - L_x\} u_n(x,t) + L_t^{-1} \{2t \cdot u_n(x,t)\}, \quad n \geq 0. \quad (4.46)$$

İterasyona $u_0(x,t) = e^{-x}$ ile başlayalım.

$$u_1(x,t) = L_t^{-1} \{L_{xx} - L_x\} u_0 + L_t^{-1} \{2t \cdot u_0\}$$

$$u_1(x,t) = L_t^{-1} \left\{ \underbrace{e^{-x} - e^{-x}}_{=0} \right\} + L_t^{-1} \{2t \cdot e^{-x}\}$$

$$u_1(x,t) = t^2 e^{-x},$$

$$u_2(x,t) = L_t^{-1} \{L_{xx} - L_x\} u_1 + L_t^{-1} \{2t \cdot u_1\}$$

$$u_2(x,t) = L_t^{-1} \{ \{L_{xx} - L_x\} t^2 e^{-x} \} + L_t^{-1} \{2t \cdot t^2 e^{-x}\}$$

$$u_2(x,t) = L_t^{-1} \{ t^2 e^{-x} - t^2 e^{-x} \} + L_t^{-1} \{2t^3 e^{-x}\}$$

$$u_2(x,t) = \frac{(t^2)^2}{2!} e^{-x},$$

$$u_3(x,t) = L_t^{-1} \{L_{xx} - L_x\} u_2 + L_t^{-1} \{2t \cdot u_2\}$$

$$u_2(x,t) = L_t^{-1} \left\{ \{L_{xx} - L_x\} \frac{(t^2)^2}{2!} e^{-x} \right\} + L_t^{-1} \left\{ 2t \cdot \frac{(t^2)^2}{2!} e^{-x} \right\}$$

$$u_3(x,t) = L_t^{-1} \left\{ \frac{(t^2)^2}{2!} e^{-x} - \frac{(t^2)^2}{2!} e^{-x} \right\} + L_t^{-1} \{ t^5 e^{-x} \}$$

$$u_3(x,t) = \frac{(t^2)^3}{3!} e^{-x},$$

⋮

Bu şekilde devam edilir. O halde çözüm,

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots$$

$$u(x,t) = e^{-x} + t^2 e^{-x} + \frac{(t^2)^2}{2!} e^{-x} + \frac{(t^2)^3}{3!} e^{-x} + \dots \quad (4.47)$$

(4.47) düzenlendiğinde

$$u(x,t) = e^{-x} \left[1 + t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} + \frac{(t^2)^3}{3!} + \dots \right] = e^{-x} e^{t^2} \quad (4.48)$$

olarak hesaplanır ki bu çözüm kesin çözümdür. Bu çözüme ait grafik Bölüm 5'te "Sonuç ve Öneriler" başlığı altında verilmiştir.

Örnek 4.4 Aşağıda verilen ARD denklemini AAM ile çözünüz.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - 0.001 \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + 2tu(x,t) \quad (4.49)$$

$$u(x,0) = e^x$$

$$u(0,t) = e^{t+t^2}, \quad u_x(0,t) = e^{t+t^2} \quad (4.50)$$

Çözüm 4.4

Diferensiyel operatörler ve tersleri Örnek 4.3'teki gibi kabul edilsin. O halde, (4.49) denklemi operatör formda

$$L_t u = L_{xx} u - 10^{-3} L_x u + 2t \cdot u \quad (4.51)$$

şeklinde ifade edilir. (4.51) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörü uygulanırsa,

$$L_t^{-1}L_t u = L_t^{-1}L_{xx}u - 10^{-3}L_t^{-1}L_x u + L_t^{-1}(2t \cdot u)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}u + L_t^{-1}\{2t \cdot u\} \quad (4.52)$$

bulunur. AAM gereği çözüm

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

sonsuz bir seri ile ifade edilir. Bu ifade (4.52) denkleminde yerine yazılsın:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) + L_t^{-1}\left\{2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)\right\}. \quad (4.53)$$

$u_0(x, t) = u(x, 0)$ olarak alındığında,

$$u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}u_n(x, t) + L_t^{-1}\{2t \cdot u_n(x, t)\}, \quad n \geq 0 \quad (4.54)$$

tekrarlayan ilişkisi bulunur. $u_0(x, t) = e^x$ olmak üzere birkaç terimi bulalım.

$$u_1(x, t) = L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}u_0(x, t) + L_t^{-1}\{2t \cdot u_0(x, t)\}$$

$$u_1(x, t) = L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}e^x + L_t^{-1}\{2t \cdot e^x\}$$

$$u_1(x, t) = te^x + t^2e^x - 10^{-3}te^x$$

$$u_1(x, t) = \frac{999}{1000}e^xt + e^xt^2,$$

$$u_2(x, t) = L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}u_1(x, t) + L_t^{-1}\{2t \cdot u_1(x, t)\}$$

$$u_2(x, t) = L_t^{-1}\left\{\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}(0.999te^x + t^2e^x)\right\} + L_t^{-1}\{2t \cdot (0.999te^x + t^2e^x)\}$$

$$u_2(x, t) = \frac{998001}{2000000}e^xt^2 + \frac{999}{1000}e^xt^3 + \frac{1}{2}e^xt^4,$$

Bir de $u_3(x, t)$ terimini hesaplayalım.

$$u_3(x, t) = L_t^{-1}\{L_{xx} - 10^{-3}L_x\}u_2(x, t) + L_t^{-1}\{2t \cdot u_2(x, t)\}$$

$$u_3(x,t) = L_t^{-1} \left\{ \left\{ L_{xx} - 10^{-3} L_x \right\} \left(\frac{998001e^x t^2}{2000000} + 0.999e^x t^3 + \frac{e^x t^4}{2} \right) \right\} \\ + L_t^{-1} \left\{ 2t \cdot \left(\frac{998001e^x t^2}{2000000} + 0.999e^x t^3 + \frac{e^x t^4}{2} \right) \right\}$$

$$u_3(x,t) = \frac{332334333}{2000000000} e^x t^3 + \frac{998001}{2000000} e^x t^4 + \frac{999}{2000} e^x t^5 + \frac{1}{6} e^x t^6$$

İlk birkaç terim göz önüne alındığında,

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots$$

$$u(x,t) = e^x \left(1 + \frac{999}{1000} t + \frac{2998001}{2000000} t^2 + \frac{2330334333}{2000000000} t^3 \right. \\ \left. + \frac{8324005998667}{8000000000000} t^4 + \frac{1331334333}{2000000000} t^5 + \dots \right) \quad (4.55)$$

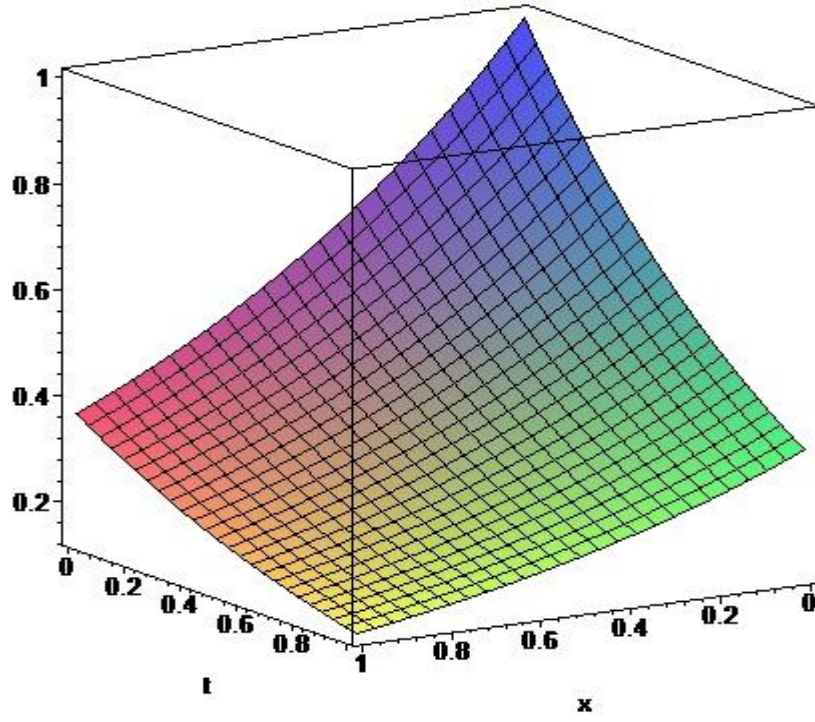
olarak bulunur. Yukarıda ele alınan ((4.55)) çözümden elde edilen değerler, Lesnic'e ait çalışmadaki ($w(x,t) = e^{x+t+t^2}$) çözümle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma Bölüm 5'te "Sonuç ve Öneriler" başlığı altında verilmiştir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Isı transferi olayı ve ısı transferi şekillerinin genel hatlarıyla incelendiği bu çalışmada, AAM analizi yapılmıştır. Ardından, ileri teknoloji ürünü olan FDM fikrini ortaya çıkışından günümüze gelişi hakkında bilgi verilmiştir. FDM, homojen olmayan ve malzeme özelliği bir yüzeyinden diğerine bir konum fonksiyonuna bağlı olarak sürekli veya kademeli bir değişim gösteren yüksek ısı direnç kapasitesine sahip malzemelerdir.

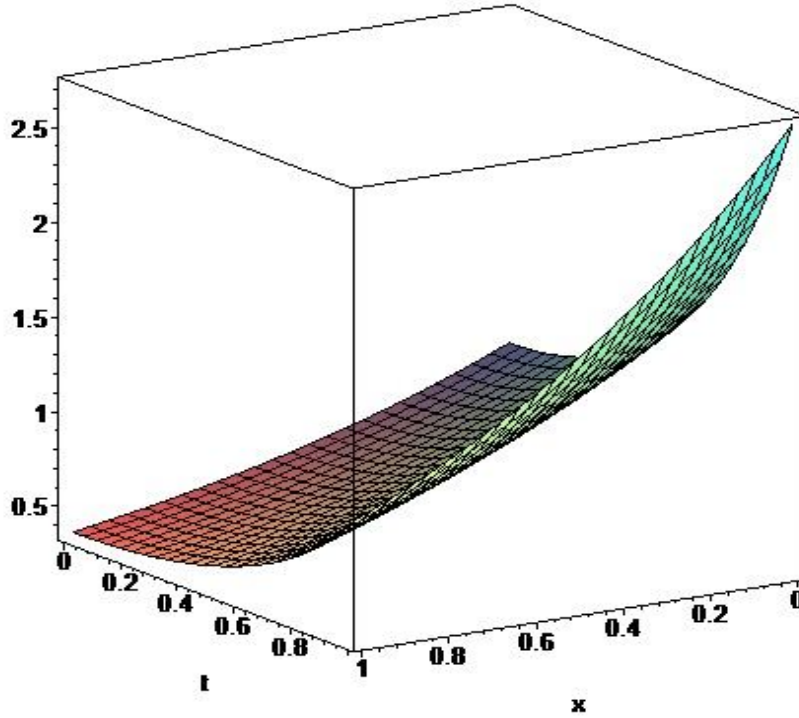
Bu çalışmada, homojen olmayan malzemede, FDM, Reaksiyon Difüzyon denkleminin AAM ile çözümü ele alınmıştır. Reaksiyon parametresini içeren kısmın $q = \text{sabit}$ ve $q = q(t)$ olduğu örnekler verilmiştir. Örnek 4.2 ve Örnek 4.4 için malzemenin homojenliğini belirleyen β sabitinin yeterince küçük olduğu durumda Lesnic [25] tarafından çalışılan homojen malzemede ($\beta = 0$) Reaksiyon Difüzyon denklemi sonuçları ile bizim çalışmamızdaki sonuçlar Çizelge 5.1, Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4’de verilmiştir. Bununla birlikte, Ayrıca Örnek 4.1, Örnek 4.2, Örnek 4.3 ve Örnek 4.4’e ait sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir. Çizelgelerden ve grafiklerden de anlaşılacağı gibi uygun başlangıç ve sınır şartları altında, yeterince küçük β değeri için AAM sonuca ulaşmada başarılı olmuştur. Çizimler ve grafikler için Maple 13 programından yararlanılmıştır. Bu programa ait kodlar Ek-A’da verilmiştir.

İleriki çalışmalarda AAM, $q = q(x)$ ve $q = q(x, t)$ durumları için homojen olmayan malzemede Reaksiyon Difüzyon denklemine uygulanabilir.



Şekil 5.1 Örnek 4.1'den elde edilen çözümün grafiği

Karşılaştırmalara geçmeden önce Örnek 4.3'ten elde edilen çözümün grafiği de aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 5.2 Örnek 4.3'den elde edilen çözümün grafiği

Şimdi karşılaştırmalara geçelim.

Çizelge 5.1 $t = 0.5$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.2’den ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic’in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması

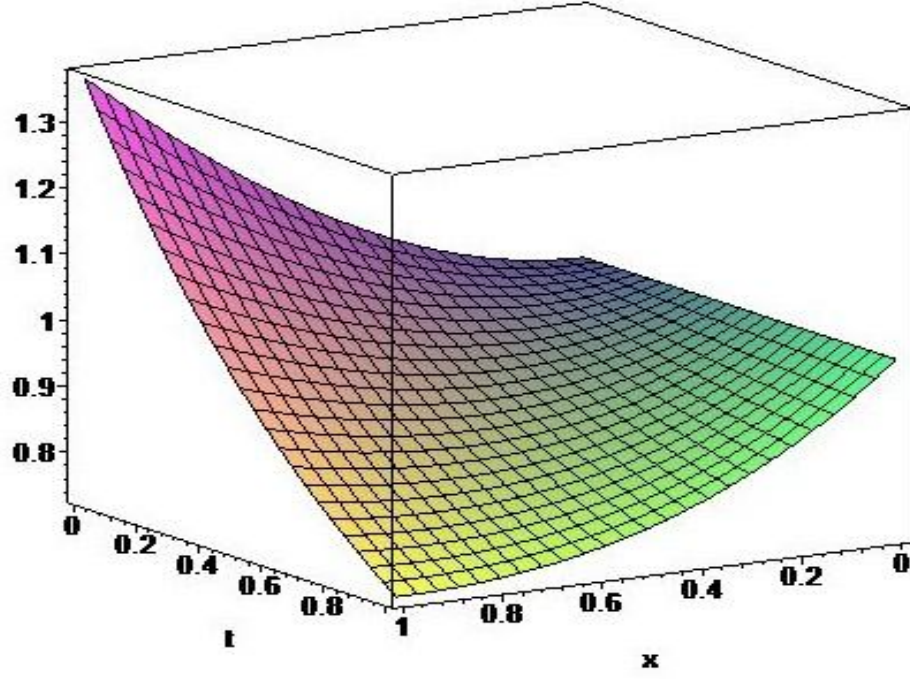
	Karagöz	Lesnic [25]
$x = 0$	0.9998	1.000
$x = 0.1$	0.9654	0.9655
$x = 0.2$	0.9399	0.9400
$x = 0.3$	0.9227	0.9228
$x = 0.4$	0.9129	0.9129
$x = 0.5$	0.9098	0.9098
$x = 0.6$	0.9128	0.9127
$x = 0.7$	0.9212	0.9212
$x = 0.8$	0.9346	0.9346
$x = 0.9$	0.9526	0.9524
$x = 1.0$	0.9746	0.9744

Çizelge 5.1’den görüldüğü gibi $t = 0.5$ durumunda yeterince küçük β değeri için bulduğumuz çözüm homojen malzemedeki çözümle örtüşmektedir. Görsel olarak yapılan karşılaştırma için Şekil 5.3 ve Şekil 5.4’e bakınız.

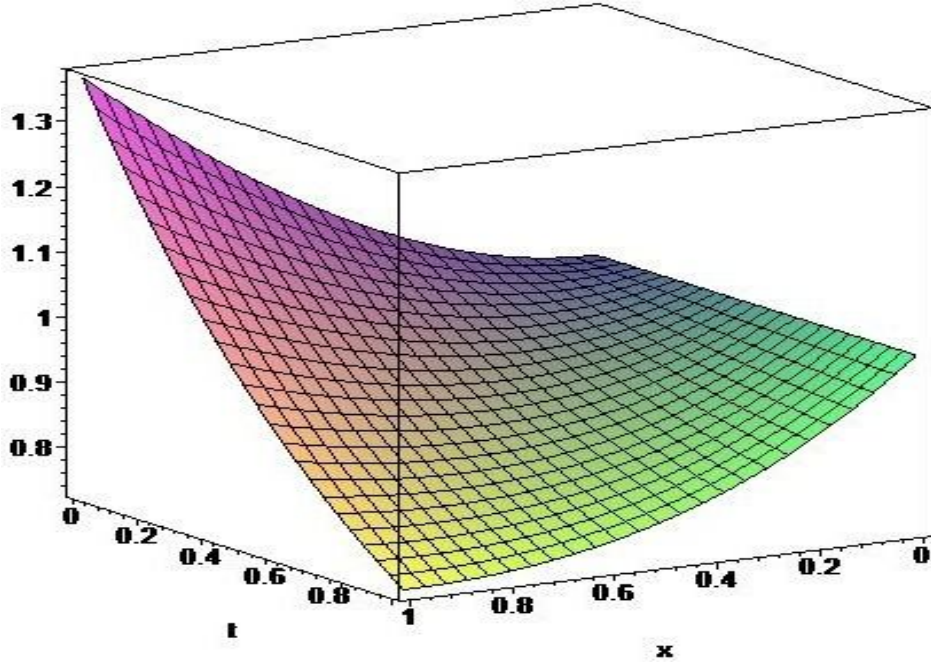
Çizelge 5.2 $t = 1.0$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.2’den ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic’in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması

	Karagöz	Lesnic [25]
$x = 0$	0.9995	1.000
$x = 0.1$	0.9412	0.9416
$x = 0.2$	0.8920	0.8923
$x = 0.3$	0.8509	0.8512
$x = 0.4$	0.8173	0.8175
$x = 0.5$	0.7904	0.7905
$x = 0.6$	0.7695	0.7605
$x = 0.7$	0.7541	0.7541
$x = 0.8$	0.7437	0.7436
$x = 0.9$	0.7378	0.7377
$x = 1.0$	0.7359	0.7358

Çizelge 5.2’den de anlaşılacağı gibi $t = 1.0$ durumunda yeterince küçük β değeri için bulduğumuz çözüm homojen malzemedeki çözüm ile örtüşmektedir. Görsel olarak yapılan karşılaştırma için Şekil 5.3 ve Şekil 5.4’e bakınız.



Şekil 5.3 $\beta = 0.001$, Örnek 4.2, homojen olmayan malzemedeki Karagöz'ün çözümünün grafiği



Şekil 5.4 $\beta = 0$, homojen malzemedeki Lesnic'in çözümünün grafiği

Şekil 5.3'te ve Şekil 5.4'te çizilen grafikler birbirinin aynıdır.

Şimdi de Örnek 4.4 ile Lesnic'in çalışmasına ait bir karşılaştırma için gerekli çizelge ve grafikler verilsin.

Çizelge 5.3 $t = 0.25$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.4'den ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic'in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması

	Karagöz	Lesnic [25]
$x = 0$	1.3665	1.3668
$x = 0.1$	1.5102	1.5106
$x = 0.2$	1.6690	1.6695
$x = 0.3$	1.8445	1.8450
$x = 0.4$	2.0385	2.0391
$x = 0.5$	2.2529	2.2535
$x = 0.6$	2.4899	2.4905
$x = 0.7$	2.7517	2.7525
$x = 0.8$	3.0411	3.0420
$x = 0.9$	3.3610	3.3619
$x = 1.0$	3.7145	3.7155

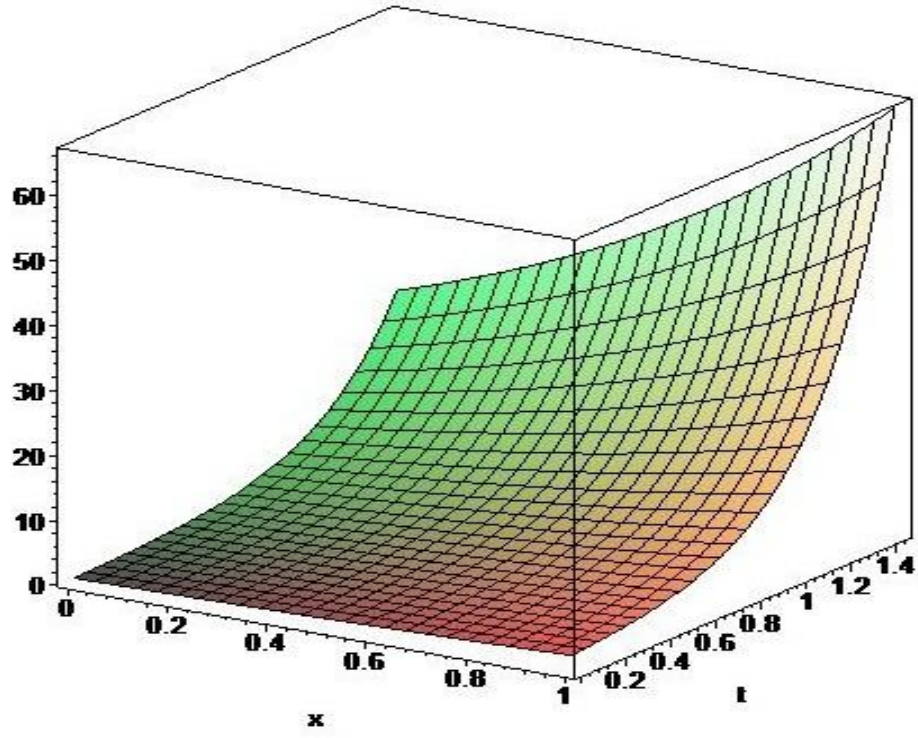
Çizelge 5.3 incelendiğinde iki çözümden elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülür. Bu sonuçlara ait görsel karşılaştırmalar Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 ile verilmiştir.

Çizelge 5.4 $t = 0.5$ durumunda $\beta = 0.001$ değeri için Örnek 4.4'den ve $\beta = 0$ değeri için Lesnic'in çalışmasından elde edilen sonuçların karşılaştırılması

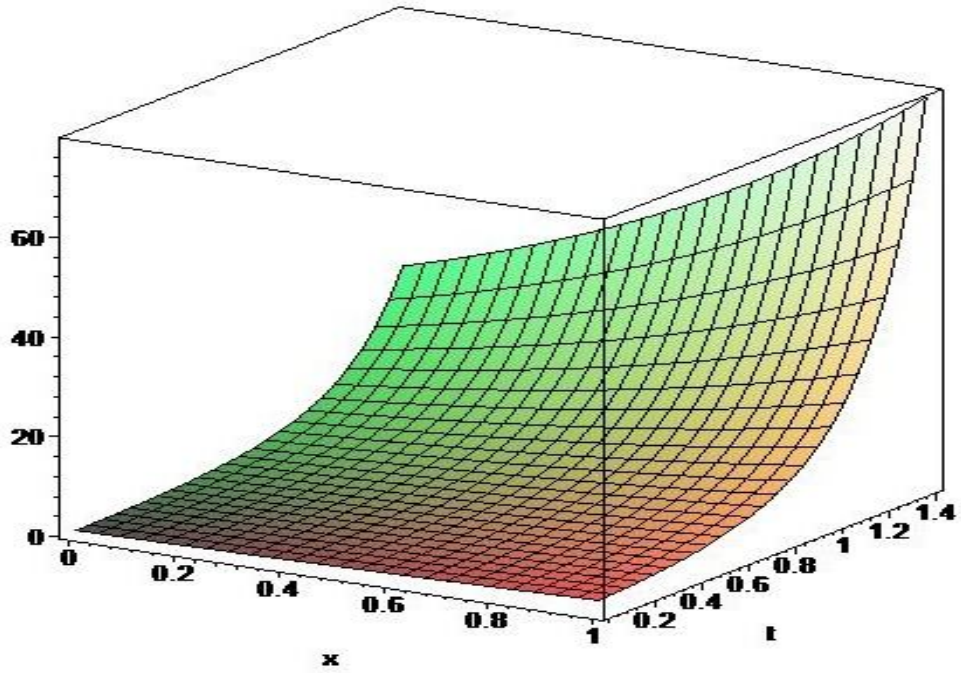
	Karagöz	Lesnic [25]
$x = 0$	2.1137	2.1170
$x = 0.1$	2.3360	2.3396
$x = 0.2$	2.5817	2.5857
$x = 0.3$	2.8532	2.8577
$x = 0.4$	3.1533	3.1582
$x = 0.5$	3.4849	3.4903
$x = 0.6$	3.8514	3.8574
$x = 0.7$	4.2565	4.2631
$x = 0.8$	4.7041	4.7115
$x = 0.9$	5.1989	5.2070
$x = 1.0$	5.7456	5.7546

Çizelge 5.4 incelendiğinde bulunan değerlerinin birbirine ne kadar yakın olduğu görülmektedir. Bu karşılaştırmaya ait görsel çalışmalar Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'dır. Ayrıca belirtilmesi gereken önemli bir nokta vardır: $t \geq 1$ için Örnek 4.4'te elde edilen çözüm ıraksaktır. Bu yüzden t , 1 değerine yaklaştıkça sonuçlar da değişecektir.

Şimdi de Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 verilsin.



Şekil 5.5 $\beta = 0.001$, Örnek 4.4, homojen olmayan malzemedeki Karagöz'ün çözümünün grafiği



Şekil 5.6 $\beta = 0$, homojen malzemedeki Lesnic'in çözümünün grafiği

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 dikkatlice incelendiğinde grafiklerin benzer olduğu görülmektedir.

-
- [1] Adomian, G., (1983). Stochastic Systems, Academic Press, London.
 - [2] Adomian, G., (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.
 - [3] Cherruault, Y., (1989). "Convergence of Adomian's Method", Kybernetes, 18 (2): 31-38.
 - [4] Cherruault, Y. ve Adomian, G., (1993). "Decomposition methods: A new proof of convergence", Math. Comput. Model., 18: 103-106.
 - [5] Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (1994a). "Convergence of Adomian method applied to nonlinear equations", Math. Comput. Model., 20: 60-73.
 - [6] Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (1994b). "Convergence of Adomian method applied to differential equations", Math. Comput. Model., 28: 103-109.
 - [7] El-Kalla, I. L., (2008). "Convergence of Adomian method applied to class of nonlinear integral equations", Appl. Math. Lett., 21: 372-376.
 - [8] Wazwaz, A. M., (1999). "A reliable modification of Adomian decomposition method", Appl. Math. Comput., 102: 77-86.
 - [9] Wazwaz, A. M. ve El-Sayed, S. M., (2001). "A new modification of Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators", Appl. Math. Comput., 122: 393-405.
 - [10] Luo, X. G., (2005). "A two-step Decomposition Method", Appl. Math. Comput., 170: 570-583.
 - [11] Zhang, B. Q., Wu, Q. B. ve Luo, X. G., (2006). "Experimentation with two-step Adomian decomposition method to solve evolution models", Appl. Math. Comput., 175: 1495-1502.
 - [12] Zhu, Y., Chang, Q. ve Wu, S., (2005). "A new algorithm for calculating Adomian polynomials", Appl. Math. Comput., 169: 402-416.
 - [13] Pourdarvish, A., (2006). "A reliable symbolic implementation of algorithm for calculating Adomian polynomials", Appl. Math. Comput., 172: 545-550.
 - [14] Wazwaz, A. M., (2006). "The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations", Appl. Math. Comput., 173: 165-176.
 - [15] Biazar, J., (2005). "Solutions of systems of integral-differential equation by Adomian decomposition method", Appl. Math. Comput., 168: 1232-1238.
 - [16] Rach, R., (1987). "On the Adomian Decomposition Method and Comparisons with Picard's Method", J. Math. Anal. And Appl., 128: 480-483.

- [17] Abbasbandy, S., (2006). "Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method", Appl. Math. Comput., 173: 493-500.
- [18] Geyikli, T. ve Kaya, D., (2005). "Comparison of the solutions obtained by B-spline FEM and ADM of KdV equation", Appl. Math. Comput., 169: 146-156.
- [19] El-Gamel, M., (2007). "Comparison of the solutions obtained by Adomian decomposition and wavelet-Galerkin methods of boundary – value problems", Appl. Math. Comput., 186: 652- 664.
- [20] Jang, B., (2007). "Exact solutions to one – dimensional non – homogeneous parabolic problems by the homogeneous ADM", Appl. Math. Comput., 186: 969-979.
- [21] Gorguis, A. ve Benny Chan, W. K., (2008). "Heat equation and its comparative solutions", Comput. Math. Appl., 55: 2973-2980.
- [22] Lesnic, D., (2002). "Convergence of ADM: Periodic temperature", Comput. Math. Appl., 44: 13-24.
- [23] Lesnic, D., (2004). "Heat conduction with mixed derivatives", International Journal of Computer Mathematics, 81: 971-977.
- [24] Lesnic, D., (2005). "The Decomposition Method for Cauchy Advection – Diffusion Problems", Comput. Math. Appl., 49: 525-537.
- [25] Lesnic, D., (2007). "The decomposition method for Cauchy reaction – diffusion problems", Appl. Math. Lett., 20: 412-418.
- [26] Yıldırım, B. ve Dimitoka, K., (2003). "Katlamalı ve Derecelendirilmiş Malzemelerden Yapılmış Termal Bariyer Kaplamalardaki Termal Gerilimlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Hesaplanması", Mühendis ve Makina, 525: 34-42.
- [27] Alagöz, H., Gülgeç, M. ve Konez, A., (2004). "Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler ve Kullanım Alanları", Mühendis ve Makina, 45: 532-541.
- [28] Şahin, A. ve Karatay, İ., (2011). "Diffusion in graded materials by decomposition method", Scientific Research and Essays, 7 (13).
- [29] Altınışık, K., (2003). Uygulamalarla Isı Transferi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [30] Çengel, Y. A., (2008). Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer, Second Edition, The McGraw-Hill Companies, New York.
- [31] Fourier, J. B. , (1822). "Theorie analytique de la Chaleur", Paris.
- [32] Kakaç, S. ve Yüncü, H., (1999). Temel Isı Transferi, Bilim Kitabevi, Ankara.
- [33] Wazwaz, A. M., (2002). Partial Differential Equations, Method and Applications, A. A. Belkema Publishers, Tokyo.
- [34] Uymaz, B., (2008). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Dikdörtgen Plakların Üç Boyutlu Serbest Titreşim Analizi, Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne.

- [35] Kolmogorov, A. N., Petrowski, I. ve Piscounov, N., (1937). “étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique”, Mosc. Univ. Bull. Math., A1, 1-25.

YARARLANILAN PROGRAM KODLARI

Bu bölümde, tez çalışmasının bazı aşamalarında kullanılan Maple 13 programına ait kodlar verilecektir. Bu kodlardan özellikle Bölüm 4'te ve Bölüm5'te yararlanılmıştır. Örnek 4.1'in çözümüne bir iki iterasyonla kolayca ulaşıldığından sadece grafiğine ait kodlama verilecektir. Bu kod,

```
restart;
```

```
u:=exp(-x)*exp(-t);
```

$$u := e^{(-x)} e^{(-t)}$$

```
plot3d(u,x=0..1,t=0..1);
```

şeklinde. Son kodun RUN edilmesiyle grafik çizilir.

Örnek 4.2'nin çözümünü bulmak için daha önce belirlediğimiz iterasyondan yararlanıldı. Çizelge 5.1 için;

```
restart;
```

```
t:=0.5;
```

$$t := 0.5$$

```
x:=0.1;
```

$$x := 0.1$$

```
u:=x*exp(-t)+exp(-x)*exp(-0.001*t)+0.001*t-  
2*0.001*(t^2/2!)+3*0.001*(t^3/3!);
```

$$u := 0.9653506784$$

```
w:=exp(-x)+x*exp(-t);
```

$$w := 0.9654904840$$

kodları kullanılmıştır. Değişen x değerleri için çizelge oluşturulmuştur. Çizelge 5.2 için ise yine aynı kodlar kullanıldı fakat bu defa $t:=1.0$ alındı ve aynı işlemler uygulandı. Karagöz'ün, $u(x,t)$, çözüm grafiği ile Lesnic'in, $w(x,t)$, çözüm grafiğinin çizilmesi için kullanılan kod,

```
restart;
```

```
u:=x*exp(-t)+exp(-x)*exp(-0.001*t)+0.001*t-  
2*0.001*(t^2/2!)+3*0.001*(t^3/3!);
```

$$u := x e^{(-t)} + e^{(-x)} e^{(-0.001 t)} + 0.001 t - 0.001000000000 t^2 + 0.0005000000000 t^3$$

```
plot3d(u,x=0..1,t=0..1);
```

```
w:=exp(-x)+x*exp(-t);
```

$$w := e^{(-x)} + x e^{(-t)}$$

```
plot3d(w,x=0..1,t=0..1);
```

ile basitçe verilir.

Örnek 4.3'ün çözümünün bulunmasında ilk 4 terimin belirlenmesi yeterli oldu. Bu örneğin grafiği için de

```
restart;
```

```
u:=exp(-x)*exp(t^2);
```

$$u := e^{(-x)} e^{(t^2)}$$

```
plot3d(u,x=0..1,t=0..1);
```

kodları kullanıldı.

Örnek 4.4 diğer örneklerle göre işlem yükü daha fazla olan bir örnektir. Bu örneğin çözümünün bulunmasında kullanılan kod,

```
restart;
```

```
g(x):=exp(x);
```

$$g(x) := e^x$$

```
u0:=g(x);
```

$$u0 := e^x$$

```
u0:=unapply(g(x),x,t);
```

$$u0 := (x, t) \rightarrow e^x$$

```
U0:=exp(x);
```

$$U0 := e^x$$

```
U1:=int(diff(u0(x,t),x$2)-10^(-  
3)*diff(u0(x,t),x)+2*u0(x,t)*t,t=0..t);
```

$$U1 := \frac{999}{1000} e^x t + e^x t^2$$

```
u1:=unapply(collect(U1,{exp,t}),x,t);
```

$$u1 := (x, t) \rightarrow \left(\frac{999}{1000} t + t^2 \right) e^x$$

```
U2:=int(diff(u1(x,t),x$2)-10^(-
3)*diff(u1(x,t),x)+2*u1(x,t)*t,t=0..t);
```

$$U2 := \frac{1}{2} e^x t^4 + \frac{999}{1000} e^x t^3 + \frac{998001}{2000000} e^x t^2$$

```
u2:=unapply(collect(U2,{exp,t}),x,t);
```

$$u2 := (x, t) \rightarrow \left(\frac{1}{2} t^4 + \frac{999}{1000} t^3 + \frac{998001}{2000000} t^2 \right) e^x$$

```
U3:=int(diff(u2(x,t),x$2)-10^(-
3)*diff(u2(x,t),x)+2*u2(x,t)*t,t=0..t);
```

$$U3 := \frac{1}{6} e^x t^6 + \frac{999}{2000} e^x t^5 + \frac{998001}{2000000} e^x t^4 + \frac{332334333}{2000000000} e^x t^3$$

```
u3:=unapply(collect(U3,{exp,t}),x,t);
```

$$u3 := (x, t) \rightarrow \left(\frac{1}{6} t^6 + \frac{999}{2000} t^5 + \frac{998001}{2000000} t^4 + \frac{332334333}{2000000000} t^3 \right) e^x$$

```
U4:=int(diff(u3(x,t),x$2)-10^(-
3)*diff(u3(x,t),x)+2*u3(x,t)*t,t=0..t);
```

$$U4 := \frac{1}{24} e^x t^8 + \frac{333}{2000} e^x t^7 + \frac{998001}{4000000} e^x t^6 + \frac{332334333}{2000000000} e^x t^5 + \frac{332001998667}{8000000000000} e^x t^4$$

```
u4:=unapply(collect(U4,{exp,t}),x,t);
```

$$u4 := (x, t) \rightarrow \left(\frac{1}{24} t^8 + \frac{333}{2000} t^7 + \frac{998001}{4000000} t^6 + \frac{332334333}{2000000000} t^5 + \frac{332001998667}{8000000000000} t^4 \right) e^x$$

```
un:=U0+U1+U2+U3+U4;
```

$$\begin{aligned} un := & e^x + \frac{999}{1000} e^x t + \frac{2998001}{2000000} e^x t^2 + \frac{8324005998667}{8000000000000} e^x t^4 + \frac{2330334333}{2000000000} e^x t^3 \\ & + \frac{4994003}{12000000} e^x t^6 + \frac{1331334333}{20000000000} e^x t^5 + \frac{1}{24} e^x t^8 + \frac{333}{2000} e^x t^7 \end{aligned}$$

şeklinde dir. İlk 5 terim belirlenerek yaklaşık bir çözüm bulunmuştur. Çizelgeler oluşturulurken x ve t değişkenlerine değerler daha önceki kodlarda olduğu gibi atanmıştır. Son olarak Karagöz'ün çözüm, $u(x,t)$, grafiği ile Lesnic'in çözüm, $w(x,t)$, grafiği

```
plot3d(un,x=0..1,t=0..1.5);
```

```
w:=exp(x+t+t^2);
```

$$w := e^{(x+t+t^2)}$$

```
plot3d(w,x=0..1,t=0..1.5);
```

kodlarının bir önceki kodlara eklenmesiyle çizildi.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yasemin KARAGÖZ
Doğum Tarihi ve Yeri : 21.04.1988 - Kırklareli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : yaseminkaragoz88@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Kırklareli Anadolu Lisesi	2006

SERTİFİKALAR

Sertifika Adı	Kurum	Tarih
Pedagojik Formasyon	İstanbul Üniversitesi	2010