

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

POZİTİF OPERATÖRLERDE DEĞİŞMEZ ALTÖRGÜLER

Matematikçi Münir HAFEZ

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	2
3. BAZI BASİT BİLGİLER.....	8
4. BAZI AYRIK ÖRNEKLER.....	13
5. BAZI ATOMSUZ ÖRNEKLER.....	24
6. BAZI AÇIK PROBLEMLER.....	35
7. SONUÇLAR.....	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	38

SİMGE LİSTESİ

$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$A \mapsto B$	A 'nın görüntüsü B 'dir
$\wedge A$	A kümesinin tüm sonlu en büyük alt sınırlarının kümesi
$\vee A$	A kümesinin tüm sonlu en küçük üst sınırlarının kümesi
B	Band
$\text{Boy}(X)$	X kümesinin boyutu
B^d	B Bandının ayrık tümleyeni
$C(X)$	X kümesindeki tüm sürekli fonksiyonlar kümesi
c	Yakınsak dizi uzayı
c_0	Limiti sıfır olan dizi uzayı
C	Kompleks sayılar kümesi
$\text{cl}\{\cdot\}$	Bir kümenin kapanışı
$\text{çek}(T)$	T 'nin çekirdeği
E_u	u tarafından üretilen ideal
$\bar{f}$	f fonksiyonunun kompleks eşleniği
GCF	En büyük ortak çarpan
$K \setminus U$	Fark kümesi
ℓ_∞	Sınırlı dizi uzayı
ℓ_p	p inci dereceden toplanabilir dizi uzayı
L^p	p inci kuvveti integrallenebilir fonksiyon uzayı
L^∞	Sınırlı olmadığı noktalardaki ölçümü sıfır olan sınırlı fonksiyonların uzayı
L_+^∞	L^∞ uzayının pozitif konisi
N	Doğal sayılar kümesi
Q	Rasyonel sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
R^4	4 boyutlu reel uzay
$\sup$	En küçük üst sınır
T^{-1}	T operatörünün tersi
T^*	T operatörünün eşleniği

$x \vee y$	x ve y 'nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y 'nin infimumu
$x_\alpha \uparrow x$	x_α neti artan ve supremumu x
$x_\alpha \downarrow x$	x_α neti azalan ve infimumu x
x^-	x 'in negatif kısmı
x^+	x 'in pozitif kısmı
$x_n \rightarrow x$	x_n dizisi x 'e yakınsar
X_+	X 'in pozitif konisi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim, arakesit
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
$ \cdot $	Mutlak değer
$\ \cdot\ $	Norm
$\circ$	Bileşke operatör
$\nrightarrow$	Yakınsamaz
$\ni$	Öyle ki

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ömer GÖK'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezimin her aşamasında desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu zamana kadar Banach örgülerindeki (latislerindeki) pozitif operatörlerin aşikar olmayan kapalı değişmez altörgülerinin olduğunu garanti eden pek çok sonuç vardır. Bu özellikle her pozitif kompakt operatör için doğrudur. Bazı genel sonuçların dışında bu çalışmada Banach örgülerinde tanımlı ancak aşikâr olmayan kapalı değişmez bir altörgüsü olmayan pozitif operatörlerle ilgili çeşitli örnekler sunulmuştur. Bu örnekler arasında hem soyut M-uzayı (AM-uzayı) hem de sıra sürekli norma sahip ve atomik ve atomik olmayan Banach örgüleri bulunmaktadır. Tüm bu durumlarda operatörlerin aşikar olmayan kapalı değişmez altuzayları olduğunu garanti edilebilir.

Anahtar kelimeler: Banach örgüleri, pozitif operatör, değişmez altörgü, kompakt operatör, soyut M-uzayı (AM-uzayı).

ABSTRACT

There are, buy now, many results which guarantee that positive operators on Banach lattices have sublattices which are non-trivial closed and invariant. In particular, this is true for every compact operator. Apart from some results of a general nature, in this thesis it is presented that several examples of positive operators on Banach lattices which do not have non-trivial closed invariant sublattices. These examples include both Abstract M-spaces and Banach lattices with an order continuous norm and which are and are not atomic. In all these cases it can be ensured that the operators do possess subspaces which are non-trivial closed and invariant.

Key words: Banach lattices, positive operators, invariant sublattices, compact operator, Abstract M-spaces.

1. GİRİŞ

Konuyla ilgili varılabilinen kısmi neticelerin ardından sıfırdan farklı kapalı değişmez altuzayları olmayan operatörler ilk kez Enflo tarafından geliştirilmiştir (Enflo,1987,1975). Daha sonra ℓ_1 üzerine örnekler Read tarafından üretilmiş olup (Read,1985,1986,1997), de Pagter'in yeni ufuklar açan çalışmasının ardından (de Pagter,1986) Abramovich, Aliprantis ve Burkinshaw 1992'de Banach örgüsünde en az iki boyutlu her pozitif operatörün aşikâr olmayan değişmez kapalı bir altuzayı olduğu varsayımına adanan bir dizi bilimsel çalışmaya başlamışlardır. Çalışmalarıyla ilgili açıklama (Abramovich vd., 2002)'nin 10. bölümünde bulunmaktadır.

Bu tezde mümkün olan en basit örneklerle, yani Banach örgülerindeki pozitif kompakt operatörlerle ilgilenildi. Eğer böyle bir operatör spektral yarıçaplı ise spektral yarıçap bir özdeğerdir ve ona karşılık gelen özvektör de pozitifdir. Böyle bir özdeğerin doğrusal gerdiği uzay bir değişmez altuzay ve bir altörgüdür. Diğer yandan eğer spektral yarıçap sıfır ise operatörün sıfırdan farklı değişmez kapalı bir ideali vardır. Bu yüzden özellikle bir Banach örgüsü üzerindeki her pozitif kompakt operatörün aşikâr olmayan kapalı bir altörgüsü vardır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).Bu çalışma Banach örgüsündeki her pozitif operatörün aşikâr olmayan kapalı değişmez altörgüsü olup olmadığı sorusundan ortaya çıkmıştır. Onların genel varlığını ispatlamak mümkün olmasa da, gösterilen örnekler, sayılabilir boyut durumu ve 3.bölümde gösterilen ayrışmayan Banach örgüsünün olduğu aşikâr olan (çözüm) durum haricinde söz konusu Banach örgüsünde tek bir koşul içeren pozitif sonuçları ortadan kaldırmaktadır. Elimizdeki materyalin çoğunluğu 4. ve 5. kısımdan oluşmaktadır. Pozitif bir özdeğeri ve aşikâr olmayan kapalı herhangi değişmez ideali olmamasına rağmen, aşikâr olmayan kapalı değişmez altörgülere sahip olan bir pozitif operatör örneği ve daha sonra da aşikâr olmayan değişmez kapalı altörgülere sahip değişik pozitif operatör örnekleri verilmiştir. 4. kısımda olanların hepsi atomik yapıda iken 5.kısımda olanların atomu yoktur. Sunulan örnekler reel skalerler bağlamında düzenlenmiş olmasına rağmen, karmaşık skalerler için de geçerliliklerini korumaktadırlar. Son olarak 6. kısımda bazı açık uçlu sorular önerilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmada kullanılan kavramların tanımları, teoremler ve önermeler verilmiştir.

Tanım 2.1

X bir normlu uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisinin bu uzaya ait bir limiti varsa X 'e Banach uzayı denir.

Tanım 2.2

E bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için, $\sup \{x, y\} \in E$ ve $\inf \{x, y\} \in E$ ise E 'ye Riesz uzayı (veya vektör latis) denir. $\sup \{x, y\} = x \vee y$, $\inf \{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca bir $x \in E$ elemanı için x 'in mutlak değeri $|x| = \sup \{x, -x\} = x \vee (-x)$ şeklinde tanımlanır.

Bir Riesz uzayındaki herhangi bir x vektörü için; x 'in pozitif kısmı $x^+ = x \vee 0$, x 'in negatif kısmı $x^- = (-x) \vee 0$ şeklinde tanımlanır.

E bir sıralı vektör uzayı ise $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E 'nin pozitif konisi denir.

Tanım 2.3

$(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $(E, \|\cdot\|, \leq)$ bir sıralı vektör uzayı olsun. $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa E 'ye Banach latis (örgü) denir.

Tanım 2.4

Bir E Riesz uzayının bir vektör alt uzayı olan A 'ya, her $x, y \in A$ için, E 'de alınan supremum ve infimum A 'ya aitse, Riesz alt uzayı (veya vektör alt latis) denir.

Tanım 2.5

X ve Y vektör uzayı olmak üzere, $T: X \rightarrow Y$ dönüşümüne her $x, y \in X$ ve her α, β skalerleri için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ oluyorsa, T 'ye lineer operatör denir.

Tanım 2.6

E ve F Banach latis, $T:E \rightarrow F$ bir operatör olsun. $x \geq 0$ iken $Tx \geq 0$ ise T'ye pozitif operatör denir.

Tanım 2.7

$T:X \rightarrow Y$ bir lineer operatör, X ve Y normlu uzaylar olsun. X'deki her sınırlı $\{X_n\}$ dizisi için $\{TX_n\}$ dizisinin Y'de bir yakınsak alt dizisi varsa, T'ye kompakt operatör denir.

Tanım 2.8

E bir Banach latis olmak üzere, $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken, $\|x \vee y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E'ye bir AM-uzayı (Soyut M-uzayı) denir.

Tanım 2.9

Bir Y sıralı vektör uzayına, eğer her n için $nx \leq y$ ifadesi, $x \leq 0$ olmasını gerektiriyorsa, Archimedean sıralı vektör uzayı denir.

Tanım 2.10

E bir Riesz uzayı olsun. E'nin bir A alt kümesine, $|x| \leq |y|$, $y \in A$ ifadesi, $x \in A$ olmasını gerektiriyorsa solid(katı) denir. E'nin bir solid vektör alt uzayına ideal denir.

Bir E Banach latisi için $0 < u \in E$ olsun. U ile üretilen ideal: $E_u = \{x \in E : \text{bir } \lambda > 0 \text{ için } |x| \leq \lambda u\}$ 'dir. Bir eleman ile üretilen ideale esas ideal denir.

Tanım 2.11

Bir Banach latiste tanımlı, verilen lineer operatör tarafından kendi içine alınan kapalı bir ideale kapalı değişmez ideal denir.

Tanım 2.12

E Archimedean Riesz uzayı olsun. E'nin B gibi bir ideali için, E'de supremuma sahip her $A \subset B$ için $\sup(A) \in B$ ise, o zaman B'ye Band denir.

Tanım 2.13

Bir Riesz uzayında tanımlı bir latis normuna, $x_\alpha \downarrow 0$ ifadesi $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ 'ı sağlıyorsa sıralı sürekli norm denir. Bir Banach latisin normu sıralı sürekli ise, Banach latis sıralı sürekli norma sahiptir denir.

Tanım 2.14

Bir Riesz uzayı üzerindeki bir $\|\cdot\|$ normuna, $|x| \leq |y|$ için, $\|x\| \leq \|y\|$ şartı sağlanıyorsa bir latis norm denir. Bir latis norm ile tanımlı bir Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir.

Tanım 2.15

E bir Riesz uzayı olsun. Bir $\epsilon > 0$ vektörüne, eğer $E_\epsilon = E$ ise yani, her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda \epsilon$ olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ varsa, kuvvetli sıralı birim denir.

Tanım 2.16

F, E vektör uzayının bir alt kümesi olsun. E içindeki her vektör F'nin elemanlarının bir lineer kombinezonu ise, F kümesi E vektör uzayını gerer denir ve $E = \text{span } F$ ile gösterilir.

Tanım 2.17

T bir sınırlı lineer operatör ise $r(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k\|^{1/k}$ ifadesi T operatörünün spektral yarıçapıdır.

Tanım 2.18

Bir $(x, y) \rightarrow xy$ ikili işlemi (bir çarpım) ile bir A vektör uzayına, her $x, y, z \in A$ ve her α skaleri için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa cebir denir.

$$(1) (xy)z = x(yz) \text{ ve } (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

$$(2) x(y+z) = xy+xz \text{ ve } (x+y)z = xz+yz$$

Tanım 2.19

Bir X Banach uzayı için $L(X)$ sınırlı lineer operatörler kümesini ve onun bir alt kümesini göz önüne alalım. Toplama, çarpma ve kompleks sayılarla çarpma altında kapalı kalan bu alt kümesine $L(X)$ 'in bir alt cebiri denir.

Tanım 2.20

$T:E \rightarrow F$ Riesz uzaylarında tanımlı bir pozitif operatör olsun. Her $x \in E$ için $|Sx| \leq T(|x|)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $S:E \rightarrow F$ operatörüne T tarafından kısıtlanan operatör denir.

Tanım 2.21

İki Riesz uzayında tanımlı bir $T:E \rightarrow F$ pozitif operatörüne, eğer E 'deki her x ve y için $T(x \wedge y) = T_x \vee T_y$ şartı sağlanıyorsa T (örgü veya Riesz) homomorfizması denir. Bire-bir bir örgü homomorfizmasına örgü izomorfizması denir. İki Banach T arasında tanımlı bir T T latis izomorfizmasına, her $x \in E$ için $\|Tx\| = \|x\|$ oluyorsa, bir latis izometrisi denir. İki Banach latis T latis izometrisi varsa, T latis izometridir denir.

Tanım 2.22

Bir vektör uzayında bir $P:V \rightarrow V$ lineer operatörüne, $P^2 = P$ ise izdüşüm (projeksiyon) denir. Bir E Riesz uzayındaki bir B bandına $E = B \oplus B^\perp$ 'yi sağlıyorsa izdüşüm bandı denir. Bir Riesz uzayında her band izdüşüm bandı ise bu Riesz uzayı izdüşüm özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.23

$T:X \rightarrow X$ lineer operatör ve U bir alt uzay olsun. $U \subset X$ için $TU \subseteq U$ oluyorsa U 'ya T -değişmez operatör denir.

Tanım 2.24

Bir uzayın üstten sınırlı her boş kümeden farklı alt kümesi bir en küçük üst sınıra, (veya benzer şekilde uzayın alttan sınırlı her boş kümeden farklı alt kümesi bir en büyük alt sınıra) sahipse, bu uzaya Dedekind tam uzay denir.

Tanım 2.25

Bir X Banach örgüsünde $\{y \in X; 0 \leq y \leq x\} = \{\lambda x; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ oluyorsa $x > 0$ elemanına X Banach örgüsünün bir atomu denir.

Tanım 2.26

Bir Banach örgüsünün tüm elemanları bir atom ise bu örgüye atomik Banach örgüsü denir. Değilse atomik olmayan Banach örgüsü denir.

Tanım 2.27

Bir topolojik uzayın sayılabilir, yoğun olmayan alt kümelerinin birleşimi olan alt uzayına birinci kategoriden bir küme denir. Birinci kategoriden olmayan bir kümeye ikinci kategoriden bir küme denir.

Tanım 2.28

X bir yerel konveks uzay olsun. Zayıf topoloji $\sigma(x', x), P_x(x') = |< x, x' >|$ iken yarı normlarının ailesi $\{P_x : x \in X\}$ ile üretilen topolojiye denir.

Tanım 2.29

Bir Banach uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi var ise bu Banach uzayı ayrılabilir (ayrışabilir) denir. Aksi durumda ayrılamazdır (ayrışamaz) denir.

Teorem 2.30 (Hahn-Banach)

E bir reel vektör uzayı ve F E 'nin bir özalt uzayı ve $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ bir alt lineer fonksiyonel ve $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyonel, ve her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ olsun. O zaman bir $\hat{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli bulunabilir ki her $x \in E$ için $\hat{f}(x) \leq p(x)$ sağlanır ve her $x \in F$ için $\hat{f}(x) = f(x)$ 'tir (Gök,1997).

Teorem 2.31 (Baire-Kategori)

(X, d) tam bir metrik uzay ve $A_n (n \in \mathbb{N})$ X içinde kapalı alt kümelerin bir dizisi olsun.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümesinin içi boş değilse, en az bir A_n kümesinin içi boş değildir. (Yani, tam bir metrik uzay ikinci kategoridendir). (Gök,1997)

Teorem 2.32 (Kakutani temsil teoremi)

E 'yi e birimli ve $\|\cdot\|_e$ sıralı birim normlu bir M -uzayı kabul edelim. B 'yi

$B = \{x' \in E'_+ : (x', e) = 1\}$ ve $K = \text{ex}(B)$ alalım. Burada $\text{ex}(B)$, B 'nin tüm uç noktalarının

kümesidir. $K, \sigma(E', E)$ -kompakt ve her $x' \in K$ için $f_x(x') = \langle x', x \rangle$ olarak tanımlanan $E \ni x \rightarrow f_x \in C(K)$ dönüşümü bir izometrik örgü izomorfizmasıdır (Meyer, 1991).

3. BAZI BASİT BİLGİLER

Banach uzaylarında sınırlı operatörlerin değişmez altuzayları teorisinde neredeyse aşikâr olan bazı sonuçlar vardır. Ayırışmayan Banach uzayı üzerindeki herhangi sınırlı lineer bir operatörün aşikâr olmayan kapalı değişmez bir altuzayı olduğu açıktır. $x \neq 0$ olduğundan $\{T^n x : n = 0, 1, 2, \dots\}$ 'in gerdiği kapalı lineer uzay değişmez ve ayrışabilir, dolayısıyla aşikâr değildir. Biraz daha ispata ihtiyaç duyulmakla beraber bu durum pozitif operatörlerin değişmez altörgüleri için de hâlâ doğrudur (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

Önerme 3.1 X bir Banach örgüsü ise, bir sayılabilir alt küme ile üretilen vektör altörgüsü sayılabilir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Eğer $\{f_m : m \in N\}$, X 'in sayılabilir bir altkümesi ise, A bu kümeyle üretilen sayılabilir bir Q -vektör altuzayı olsun. $\wedge(\vee A)$ kümesi (Jameson, 1970)'teki ispat 2.2.11'de kullanılan argümanlarla sayılabilir olup, bir Q -vektör uzayı ve altörgüsüdür. Onun norm kapanışı X 'in, $\{f_m : m \in N\}$ ile üretilmiş vektör altörgüsünü kapsayan böylelikle ayrışabilir olan bir R -vektör altörgüsüdür.

Sonuç 3.2 X herhangi bir Banach örgüsü, T , X üzerinde pozitif bir operatör ve $\{f_n : n \in N\}$ X 'te sayılabilir bir aile ise bu aile tarafından üretilen en küçük T -değişmez vektör altörgüsü ayrılabilir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: H_1 , X 'in $\{f_n : n \in N\}$ tarafından üretilmiş ayrılabilir bir altörgüsü olsun. Eğer H_n tanımlı ve ayrılabilir ise, A_n H_n 'nin sayılabilir yoğun altkümesi olsun. H_{n+1} 'i $A_n \cup TA_n$ den üretilmiş X 'in kapalı vektör altörgüsü olarak tanımlayalım. Bir önceki önerme onun ayrılabilir olduğunu garanti etmektedir. Açıkça $TA_n \subset H_{n+1}$ 'dir ve Banach örgülerindeki pozitif operatörlerin sürekli olması ve H_{n+1} kapalı olması gerçeği de $T(H_n) \subset H_{n+1}$ olduğunu doğrulamaktadır. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi X 'in T -değişmez ve açıkça ayrılabilir olan vektör altörgüsüdür, burdan sonuç hemen çıkmaktadır.

Sonuç 3.3 X Banach örgüsünde ayırışmayan bir alt örgü ve T , X üzerinde pozitif bir operatör ise T 'nin aşikâr olmayan kapalı değişmez bir altörgüsü vardır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Sıfırdan farklı olmak üzere $x \in X_+$ seçelim, o zaman önceki önermeye göre x 'i içeren en küçük T -değişmez altörgüsü ayrılabilir olup, kapanışı x 'i içeren en küçük T -değişmez kapalı altörgüsüdür. X ayrılabilir olmadığından bu bir öz altörgüdür.

Şimdi kapalı olmak zorunda olmayan altörgüler sorusuna bakılacaktır. Yine doğrusal durumda X Banach uzayı üzerindeki her lineer T operatörü aşıkâr olmayan bir altuzaya sahiptir, ancak kapalı olmak zorunda değildir. Çünkü sıfıra eşit olmayan bir $x \in X$ dikkate alınırsa $\{T^n x : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ailesinin lineer gerdiği uzayı sayılabilir Hamel boyutludur. Çünkü Baire kategori teoreminden Banach uzaylarının sayılabilir Hamel boyutlu olmadığı görülür. Aslında (Schaefer, 1963) bunun herhangi bir sonlu boyuttaki her lineer operatör için doğru olduğunu göstermişti. Ne Schaefer'in argümanı ne de yukarıda anahatları verilen argüman değişmez altörgülerle ilgilenirken kullanılmamaktadır. Örneğin bir vektör örgüsünün iki elemenından üretilmiş en küçük altörgü bile Hamel boyutlu olmak zorunda değildir. Örneğin $C([0, 1])$ de $x(t) = t$ ile tanımlı x , sabit bir fonksiyonu $\mathbf{1}$ ile üretilmiş örgü, bunların hepsi $[0, 1]$ aralığında parçalı sürekli lineer fonksiyonların tamamından oluşmaktadır. Bu sayılamayan lineer bağımsız $\{x \wedge \lambda \mathbf{1} : \lambda \in (0, 1)\}$ ailesini de içerir ($x \wedge \lambda \mathbf{1}$ 'in tam λ noktasında türevlenemediğine dikkat edelim) (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead, 2007).

Önerme 3.4 Eğer K sonsuz kompakt bir Hausdorff uzayı ve $\{f_n : n \in N\} \subset C(K)$ içerisinde sayılabilir bir aile ise, $C(K)$ içinde bu aile ile üretilmiş bir vektör altörgüsü $C(K)$ 'nin bir öz altörgüsüdür (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead, 2007).

İspat: $p \in K$ olmak üzere izole olmayan bir nokta seçilsin. $c_n \in R$, $g_n(p) = 0$ ve $\mathbf{1}$ K üzerinde sabit bir fonksiyon olmak üzere herbir $f_n = g_n + c_n \mathbf{1}$ i yazılsın. $U = \{k \in K : \exists n \in N \text{ } g_n(k) \neq 0\}$ ve $g_n(k) \neq 0$ olsun. Eğer $p \notin \bar{U}$ ise, o zaman boş kümeden farklı kapalı $K \setminus \bar{U}$ kümesindeki tüm g_n fonksiyonları sıfırdır. $K \setminus \bar{U}$ kümesinde sabit olan tüm fonksiyonlardan oluşan H altörgüsü her bir f_n 'i kapsayan bir vektör öz altörgüsüdür.

$p \in \bar{U}$ olduğu durumda toplam aşağıdaki gibi oluşturulsun:

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|}{\|g_n\|_{\infty} 2^n}$$

(sıfır olan g_n ler ihmal edildiğinde – eğer tamamı sıfır ise o zaman f_n lerin de tamamı sabit olup sonuç aşikâr olacaktır). J ise $C(K)$ da e ile üretilen esas ideali gösterebilir. Bu ideal $I = \{f \in C(K) : f(p) = 0\}$ 'nin tamamı değildir. Bunu görmek için, I 'da uzanan $\sqrt{e}$ fonksiyonu dikkate alınsın. $U = \{k \in K : e(k) > 0\}$ olduğundan $e(u_\gamma) \rightarrow 0$ giderken p 'ye yakınsayan net bir $u_\gamma \in U$ bulmanın mümkün olduğu görülür. Eğer $\sqrt{e} \in J$ ise $t\sqrt{e} \leq \lambda e$ yi sağlayan bir $\lambda \in R$ olacaktır. Böylelikle $\sqrt{e(u_\gamma)} \leq \lambda e(u_\gamma)$ dir ki bundan da $e(u_\gamma) \geq \lambda^{-2} > 0$ olduğu sonucu çıkar ancak bu da $e(u_\gamma) \rightarrow 0$ ile çelişmektedir.

M , $C(K)$ içerisindeki $\mathbf{1}$ ve J nin gerdiği lineer uzay olsun. Biz M 'nin $C(K)$ 'nin altörgüsü olduğu iddia ediliyor. Aslında $j \in J$ ve $\alpha \in R$ ise $|j + \alpha \mathbf{1}|$ fonksiyonu göz önünde bulundurulsun. Genelliği kaybetmeden $\alpha \geq 0$ olduğu varsayılabilir. Eğer $j(k) \geq -\alpha$ ise o zaman $|j + \alpha \mathbf{1}|(k) = j(k) + \alpha$ dir, böylece $(|j + \alpha \mathbf{1}| - \alpha \mathbf{1})(k) = j(k)$ olur. Öte yandan eğer $j(k) < -\alpha$ ise $|j + \alpha \mathbf{1}|(k) = -j(k) - \alpha$ olur ve buna göre $(|j + \alpha \mathbf{1}| - \alpha \mathbf{1})(k) = -j(k) - 2\alpha$ dır ve bu nedenle $|(|j + \alpha \mathbf{1}| - \alpha \mathbf{1})(k)| \leq |j(k)| + 2\alpha \leq 3|j(k)|$ olur. Böylece $||j + \alpha \mathbf{1}| - \alpha \mathbf{1}| \leq 3|j|$ dir, öyle ki $|j + \alpha \mathbf{1}| - \alpha \mathbf{1} \in J$ ve böylece $|j + \alpha \mathbf{1}| \in M$ dir. $M \cap I = J \neq I$, olduğunda $I \not\subset M$ olur ve böylece $M \neq C(K)$. Her $g_n \in J$ olduğundan her $f_n \in M$ dir. Böylece M , $C(K)$ 'nın her bir f_n i içeren bir öz altörgüsü olur bu yüzden $C(K)$ nin f_n ile üretilmiş altörgüsü $C(K)$ nin tamamı değildir.

Sonuç 3.5 X sonsuz boyutlu bir Banach örgüsü ve $\{f_n : n \in N\}$ X 'te sayılabilir bir aile ise, X 'te bu aile tarafından üretilmiş vektör altörgüsü X 'in bir öz altörgüsüdür (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Açık bir biçimde her f_n için $f_n \neq 0$ varsayımı yapılabilir. $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n \|f_n\|}$ alınsın. e ile üretilen ideal her bir f_n i ve dolayısıyla bunlar tarafından üretilen altörgüleri içerir. Bu ideal bir $C(K)$ uzayı ile özdeşleştirilebilir ve böylece Önerme 3.4 bu altörgünün öz altörgü olduğunu söyler.

(Jameson,1970)te 2.2.11'den A , X 'in bir alt uzayı ise A ile üretilen vektör altörgülerin $^{\wedge}(\vee A) = \vee(^{\wedge} A)$ a eşit olduğu göz önüne alınsın.

Teorem 3.6 Eğer T_k ($1 \leq k \leq m$) 1den daha büyük boyutlu bir X Banach örgüsü üzerindeki örgü homomorfizmaları ise X 'in, her bir T_k üzerinde değişmez olan ve dolayısıyla bu T_k larla üretilen cebirdeki bir operatör altında da değişmez kalan, aşıkâr olmayan ve kapalı olmak zorunda olmayan bir H altörgüsü vardır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $T = \sum_{k=1}^m T_k$ yazılsın ve sıfıra eşit olmayan bir $x \in X_+$ seçilsin. (sıfır terimlerini atlayarak) toplam formüle edilsin.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{2^n \|T\|^n} \in X_+ .$$

J, X 'te y ile üretilmiş esas ideali gösterebiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} Ty &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1} x}{2^n \|T\|^n} \\ &= 2 \|T\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1} x}{2^{n+1} \|T\|^{n+1}} \\ &= 2 \|T\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n x}{2^n \|T\|^n} \leq 2 \|T\| y . \end{aligned}$$

olur ve bu yüzden T pozitifliği J nin altında ve dolayısıyla her bir T_k altında değişmez olduğunu açıkça göstermektedir. Eğer $J \neq X$ ise ispat tamamlanmış olur.

y, J için kuvvetli sıralı birimi, eğer $J = X$ ise Kakutani temsil teoremine göre bir vektör örgüsü olarak X 'i bir kompakt Hausdorff K uzayları için $C(K)$ ile tanımlanabilir. Eğer K sonlu bir küme ise o zaman X de sonlu boyutludur ve böylelikle T 'nin spektral yarıçapı $r(T)$ olan özdeğerine karşılık gelen bir x_0 pozitif öz vektörü vardır (Abramovich,1996,Theorem 8.11). x_0 'ın lineer gerdiği uzay X 'in değişmez bir altörgüsüdür. X , 1den fazla boyutlu olduğunda öz altörgüdür.

K 'nin sonsuz bir küme olması durumunda, $\prod, T_k$ operatörlerinin tüm sonlu çarpımlarının ailesini gösteriyor olsun -ki şüphesiz sayılabilir bir kümedir. Herhangi bir $0 \neq x \in X_+$ seçilsin ve $A, \{\pi x : \pi \in \prod\}$ kümesinin lineer gerdiği uzay olsun. Önerme 3.4'e göre $\{\pi x : \pi \in \prod\}$ kümesiyle üretilen vektör örgüsü $C(K)$ 'nin tamamı değildir. Burada bunun $1 \leq k \leq m$ olmak üzere T_k -değişmezi olduğu iddia ediliyor.

Eğer $a \in A$ ise $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $a = \sum_{j=1}^n \alpha_j \pi_j x$ 'i sağlayan a_j reel sayıları ve $\pi_j \in \Pi$ 'ler bulunmaktadır. Her bir j ve k için, $T_k \circ \pi_j \in \Pi$ ve dolayısıyla $T_k(a) \in A$ olmaktadır. Bir diğer deyişle $T_k(A) \subset A$ dir. Her bir T_k bir örgü homomorfizması olduğundan eğer $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ise,

$$T_k(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) = T_k(a_1) \vee T_k(a_2) \vee \dots \vee T_k(a_n) \in {}^\vee(T_k(A)) \subset {}^\vee A$$

ve dolayısıyla $T_k({}^\vee A) \subset {}^\vee A$ olmaktadır. Benzer biçimde $T_k({}^\wedge({}^\vee A)) \subset {}^\wedge({}^\vee A)$ olduğu görülebilir.

Bu altörgünün T_k ile üretilen cebirde (pozitif olmak zorunda değil) herhangi bir operatörün etkisi altında değişmez olacağı açıkça görülmektedir.

Değişmez (kapalı olmak zorunda değil) öz altörgülerin varlığının garanti edildiği operatörler grubu oldukça azdır, ancak bazı durumlarda en azından bazı bilinen operatörleri kapsayacaktır. Örneğin ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) veya c_0 durumunda, bir matrisle temsil edildiğinde sıfırdan farklı girdileri ana köşegen dahil olmak üzere bir banda (veya rastgele bir genişliğe) sınırlandırılmış olan ve (Duren,1963) ile (Grivaux,2002)'nin sonuçlarını anımsatan tüm operatörleri kapsayacaktır. Elbette sıfırdan farklı girdileri sonlu sayıda sütunla sınırlandırılmış matrisler veya bu iki tip matrisin toplamlarını da kapsayacaktır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

4. BAZI AYRIK ÖRNEKLER

Öncelikle sonsuz boyutlarda, bir pozitif operatörün, pozitif bir öz vektörü ve aşikâr olmayan değişmez kapalı bir ideali olmasa bile aşikâr olmayan değişmez kapalı bir altörgüsü olmasının mümkün olduğunu gösteren bir örnekle başlanacaktır. $\ell_p(Z)$ ($1 \leq p < \infty$) veya $c_0(Z)$ 'ın kapalı altörgüleri bir i için $\alpha_i (i \geq 0)$ ve $m_i, n_i \in Z$ 'ye sahip $x_{m_i} = \alpha_i x_{n_i}$ biçimindeki kısıtlamaların bir ailesiyle tanımlıdır. $c_0(Z)$ 'nin durumunda (Kakutani,1941)'in Teorem 3'ünden elde edilir. ℓ_p -durumunda, sonuç bir kapalı $\ell_p(Z)$ altörgüsünün aynı zamanda bir p -toplamsal normu olması ve atomik yapıda olmasından gelmektedir. Eğer tüm atomları orijinal uzayında da atom ise o zaman uzayın tamamı kendisidir, yoksa altörgüdeki bir atoma bakarak kısıtlama aşikârdır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

Örnekten önce bazı yardımcı önermeler verilmiştir.

Lemma 4.1 $H, \ell_p(Z)$ ($1 \leq p < \infty$) veya $c_0(Z)$ nin kapalı bir altörgüsü ve bu altörgünün sadece belirli $m, n \in Z$ için $x_m = x_n$ biçiminde elemanları üzerinde kısıtlaması olan altörgü olsun. Varsayalım ki $p, q, r, s \in Z$ birbirinden farklı tamsayılar ve tüm $x \in H$ için $x_p + x_q = x_r + x_s$ eşitliği sağlanıyor olsun. O zaman tüm $x \in H$ için aşağıda verilen 3 durumdan biri geçerli olacaktır:

- (1) $x_p = x_q = x_r = x_s$.
- (2) $x_p = x_r$ ve $x_q = x_s$.
- (3) $x_p = x_s$ ve $x_q = x_r$ (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $P: \ell_p(Z) \rightarrow R^4$ x 'i (x_p, x_q, x_r, x_s) üzerine tanımlayan örgü homomorfizması olsun. $P(H)$, R^4 nin bir vektör altörgüsüdür ve elemanları üzerindeki muhtemel tek kısıtlama $x_m = x_n$ biçimindedir.

Eğer $x_p = x_q$ ise $2x_p = x_r + x_s$ dir. Bu R^4 'nin bir altörgüsünü tanımlamaz bu nedenle bir kısıtlama daha olması gerekir. Eğer, mesela $x_p = x_r$ olursa o zaman $x_p = x_s$ de olur ve bu da yukarıda verilen (1) durumudur. Eğer $x_r = x_s$ ise $2x_p = 2x_s$ dir. Dolayısıyla yine (1) durumu sağlanmış olur.

Ancak eğer ki kısıtlama $x_p = x_r$ biçimindeyse o zaman bunun anlamı $x_q = x_s$ olur ve dolayısıyla (2) numaralı durum sağlanmış olur. (3) numaralı durum da benzer biçimde açığa çıkmaktadır.

Lemma 4.2 $x \in \ell_p(Z)$ ($1 \leq p < \infty$) veya $x \in c_0(Z)$ olduğunu ve $m > n$ olmak üzere tüm $k \geq 0$ tam sayıları için $x_{m+k} = x_{n+k}$ eşitliğini sağlayan $m, n \in Z$ olduğu kabul edilsin. o zaman $x=0$ olacaktır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{n-1}$ değerlerinin dizisi belirsiz olarak tekrar etmektedir. iddia edilen tüm girdiler sıfır olmadıkça bu x'in normunun sonsuz olduğu anlamına gelir.

Lemma 4.3 T'nin $\ell_p(Z)$ ($1 \leq p < \infty$) veya $c_0(Z)$ üzerinde $(Tx)_k = x_{k-1} + x_{k+1}$ tanımlı olduğunu ve $m > n$ olmak üzere $x_m = x_n$ ve $x_{m+1} = x_{n+1}$ eşitliklerini sağlayan bazı $m, n \in Z$ için H'nin T-değişmez ve kapalı altörgüsü olduğu varsayılınsın. O zaman $H = \{0\}$ 'dır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $0 \leq j \leq k$ olmak üzere, tüm $x \in H$ için $x_{m+j} = x_{n+j}$ ifadesi göz önünde bulundurulsun. Bunun $k = 1$ için doğru olduğu biliniyor. Eğer bir özel k için de doğru olduğu varsayılırsa, o zaman $(Tx)_{m+k} = (Tx)_{n+k}$ öyle ki $x_{m+k-1} + x_{m+k+1} = x_{n+k-1} + x_{n+k+1}$ olur.

$x_{m+k-1} = x_{n+k-1}$ olduğu biliniyor, dolayısıyla $x_{m+k+1} = x_{n+k+1}$ olur. Böylece her $k \in N$ için $x_{m+k} = x_{n+k}$ olur. Lemma 3.2'yi göz önünde bulundurduktan sonra negatif k'lar için de benzer biçimde ispat edilebilir.

Örnek 4.4 $X = \ell_p(1 \leq p < \infty)$ veya $c_0(Z)$ olsun ve T, X üzerinde $Tx = (x_{n-1} + x_{n+1})$ ile tanımlanmış operatör olsun. O zaman

- (1) T nin pozitif bir öz vektörü yoktur.
- (2) T aşikâr olmayan kapalı değişmez idealleri yoktur.
- (3) X'in T-değişmez kapalı altörgüleri tam olarak

$q \in Z$ veya $q - \frac{1}{2} \in Z$ olmak üzere

$H_q = \{x \in X : m+n=2q, x_m = x_n\}$ altörgüleridir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $S(x_n) = (x_{n+1})$ olsun, dolayısıyla S kaydırma operatörüdür. Dikkat edelim ki, eğer $Sx = \lambda x$ ise $x_{n+1} = \lambda x_n$ ifadesi ($|\lambda| \leq 1$ veya $|\lambda| \geq 1$ olsun) $|x_n| \not\rightarrow 0$ olduğunu ve böylece $x \notin X$ olduğunu göstermesi gerçeğinden açıkça $\lambda \neq 0$ olduğu görülür ve bu nedenle $x \notin X$ 'tir. Bundan dolayı S nin özdeğerleri bulunmamaktadır. T operatörlerimiz tam olarak $S + S^{-1}$ dir. Eğer $Tx = \lambda x$ ise o zaman $STx = \lambda Sx$ ve dolayısıyla $S^2x - \lambda Sx + x = 0$ olur. Bir diğer deyişle $\alpha_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ ve $\alpha_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ olmak üzere $(S - \alpha_1)(S - \alpha_2)x = 0$ olur. Ya x için α_2 ye karşılık gelen bir öz vektördür veya $(S - \alpha_2)x = \alpha_1$ öz değerine karşılık gelen S için bir öz vektördür. Her iki durum da imkansızdır. Öyle ki T 'nin hiçbir yerinde öz değerleri yoktur, bu yüzden sadece pozitif olanları alınır.

Eğer J, X' teki T -değişmez aşıkâr olmayan kapalı örgü ideali ise o zaman her $x \in J$ için $x_p = 0$ 'ı sağlayan bir $p \in Z$ vardır. $A = \{n \in Z : x_n = 0 \ \forall x \in J\}$ olsun, dolayısıyla mutlaka $p \in A$ olacaktır. Eğer $n \in A$ ve $x \in J_+$ ise o halde $Tx \in J$ ve dolayısıyla $Tx_n = x_{n-1} + x_{n+1} = 0$ olur. $x_{n-1}, x_{n+1} \geq 0$ olduğunda $x_{n-1} = x_{n+1} = 0$ olur. Bu aynı zamanda her $x = x^+ - x^- \in J$ için de geçerli olur ve böylece $n-1, n+1 \in A$ dir. Tümevarım ile $A = Z$ ve böylece $J = \{0\}$ ve en sonunda J aşıkârdır.

Her H_p kapalı örgüsü; $x \in H_q, m > n$ ve $m + n = 2q$ olduğunda $(m+1) + (n-1) = (m-1) + (n+1) = 2q$ olması gibi T -değişmezdir böylece $(Tx)_m = x_{m-1} + x_{m+1} = x_{n+1} + x_{n-1} = (Tx)_n$ ve dolayısıyla $Tx \in H_q$ olur.

Şimdi H 'nin X 'te bir T -değişmez tam kapalı altörgü olduğu kabul edilsin. O hâlde öyle $m, n \in Z$ ($m \neq n$) ve $\alpha > 0$ değerleri vardır ki $x_m = \alpha x_n$ eşitliği tüm $x \in H$ değerleri için geçerli olur. Tüm $x \in H$ değerleri ve tüm $k \geq 0$ tamsayıları için $\sum_{j=m-k}^{m+k} x_j = \alpha \sum_{j=n-k}^{n+k} x_j$ olduğu iddia ediliyor. $k=0$ durumu için öyle olduğu açıkça görülmektedir. Eğer bunun k için de geçerli olduğu varsayılırsa, o zaman özel olarak Tx için de geçerli olacaktır. Böylelikle

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-k}^{m+k} (Tx)_j &= \sum_{j=m-k}^{m+k} x_{j-1} + x_{j+1} \\ &= \sum_{j=m-k-1}^{m+k-1} x_j + \sum_{j=m-k+1}^{m+k+1} x_j \\ &= x_{m-k-1} + 2 \sum_{j=m-k}^{m+k} x_j + x_{m+k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(x_{n-k-1} + 2 \sum_{j=n-k}^{n+k} x_j + x_{n+k+1} \right) \\
&= \alpha \sum_{j=n-k}^{n+k} (Tx)_j \text{ olacaktır.}
\end{aligned}$$

k için varsayılan eşitliği çıkarırsak $k+1$ için gerekli eşitliğe ulaşmış olunur.

Varsayalım ki $n < m$ ve k , $n-k < m-k < n+k < m+k$ yi sağlamaya yetecek kadar büyük olsun. $A_k = \sum_{j=m-k}^{n+k} x_j$, $B_k = \sum_{j=n+k+1}^{m+k} x_j$ ve $C_k = \sum_{j=n-k}^{m-k-1} x_j$ eşitliklerini dikkate alalım.

Böylece $\sum_{j=m-k}^{m+k} x_j = A_k + B_k$ ve $\sum_{j=n-k}^{n+k} x_j = A_k + C_k$ olacaktır. Bu sayede $A_k + B_k = \alpha(A_k + C_k)$ olur. Tüm $\eta > 0$ değerleri için $x \in \ell_p(Z)$ ($1 \leq p < \infty$) olması durumunda $x \in c_0(Z)$ iken tüm $j > n_0$ değerleri için $|x_j|^p < \eta$ eşitsizliğini sağlayan n_0 mutlaka vardır. O halde tüm $j < n_0$ değerleri için $|x_j| < \eta$ eşitsizliğini sağlayan bir n_0 bulunabilir. Her iki durumda $\epsilon > 0$ verildiğinde n_0 'ı $n < n_0$ için $|x_j| < \epsilon$ olacak şekilde seçebiliriz. Eğer k yeterince büyükse B_k her biri en fazla ϵ modüllü $m-n$ terimlerinden oluşur. Eğer ϵ 'u yeterince küçük alabilirsek o zaman $|B_k|$ 'nın isteğe bağlı olarak küçük olacağı görülebilir. Bu nedenle $B_k \rightarrow 0$ (ve benzer şekilde $k \rightarrow \infty$ iken $C_k \rightarrow 0$). Böylece $k \rightarrow \infty$ iken $A_k(1-\alpha) = \alpha C_k - B_k \rightarrow 0$ olur. Eğer $x \in H_+$ alırsak, o zaman $k \rightarrow \infty$ iken $A_k \uparrow$, bu yüzden $\alpha = 1$ olmadıkça $|A_k(1-\alpha)|$ artmakta ve sifıra yaklaşmaktadır, böylece tüm k değerleri için $A_k = 0$ olur. $x = 0$ olduğu durumda $H_+ = \{0\}$ olur dolayısıyla $H = \{0\}$ olacaktır.

Tüm $x \in H$ değerleri için $m > n$ olmak üzere $x_m = x_n$ durumunu sağlayan bütün (m, n) tamsayı çiftlerinin Q koleksiyonunu dikkate alalım. $n+2 \geq m \geq n$ eşitsizliğini sağlayan bir $(m, n) \in Q$ çiftinin var olduğu iddia ediliyor. Açıkçası $m-n$ en küçük farkı vardır. Bu çok küçük farka $m-n > 2$ dolayısıyla $m-1 > n+1$ olduğunda erişilebildiği varsayılıyor. Tüm $x \in H$ değerleri için $(Tx)_m = (Tx)_n$ olması gerçeğinden, yine tüm $x \in H$ değerleri için $x_{m-1} + x_{m+1} = x_{n-1} + x_{n+1}$ olduğu görülüyor. Lemma 4.1'e göre üç olasılık bulunmaktadır. Birincisi $x_{m-1} = x_{m+1} = x_{n-1} = x_{n+1}$ dir ki bunun anlamı $(m-1, n+1) \in Q$ olmasıdır ki bu durum (m, n) seçimiyle çelişen bir durumdur. İkinci durumda $x_{m+1} = x_{n-1}$ ve $x_{m-1} = x_{n+1}$ dir. Böylece yine çelişmeye yol açan $(m-1, n+1) \in Q$ sonucu ortaya çıkmaktadır. Son durumda $x_{m-1} = x_{n-1}$ ve

$x_{m+1} = x_{n+1}$ olmaktadır. $k = 1$ için doğru olduğu bilinen $0 \leq j \leq k$ olmak üzere $x_{m+j} = x_{n+j}$ iddiası dikkate alınsın. Eğer bu k için doğru kabul edilirse o zaman $Tx \in H$ olduğunda,

$$(Tx)_{m+j} = x_{m+j+1} + x_{m+j-1} = x_{n+j+1} + x_{n+j-1} = (Tx)_{n+j} \text{ olur.}$$

$x_{m+j-1} = x_{n+j-1}$ olduğundan $x_{m+j+1} = x_{n+j+1}$ olur. Bu da $k + 1$ için olan iddiayı kanıtlar. Negatif k değeri için de benzer bir ispat tüm k tamsayıları için $x_{m+k} = x_{n+k}$ olduğunu gösterir. Şimdi yardımcı önerme 4.2 tüm $x \in H$ değerleri için $x = 0$ olduğunu söylemektedir ki bu durum H nin öz olmasıyla çelişen bir sonuçtur.

$m - n$ nin minimal olduğu bir $(m, n) \in Q$ ikilisi seçilirse değerlendirilmesi gereken iki durum vardır. $m - n = 2$ olduğu ilk duruma bakılırsa, bu durumda $q = (m + n)/2$ alınıp $x_{q-1} = x_{q+1}$ elde edilir. İddia tüm $k \in N$ değerleri için $x_{q-k} = x_{q+k}$ olduğudur. $1 \leq j \leq k$ olmak üzere $x \in H, x_{q-j} = x_{q+j}$ durumunun tüm $x \in H$ için geçerli olduğu ifadesi göz önünde bulundurulsun. $k = 1$ için bu ifadeyle başlansın. Eğer bunu k için de varsayacak olursak o zaman $Tx \in H$ gerçeğinden yola çıkarak

$$x_{q-k-1} + x_{q-k+1} = (Tx)_{q-k} = (Tx)_{q+k} = x_{q+k-1} + x_{q+k+1}$$

olduğu görülür. $x_{q-k+1} = x_{q+k-1}$ de elde edilmiş olduğundan $k+1$ için iddiayı kurarak $x_{q-k-1} = x_{q+k+1}$, olduğu da görülür. Bu, bu durumda $H \subseteq H_q$ olduğunu göstermektedir. Öte yandan eğer $m - n = 1$ ise $x_{m+1} = x_m$ olacak ve $m - n = 2$ durumuna benzer bir argüman tüm $x \in H$ değerleri için $x_{m-k} = x_{m+1+k}$ olduğunu, bu da $H \subseteq H_{m+\frac{1}{2}}$ olduğunu gösterir.

Geriye H 'nin diğer elemanları üzerinde herhangi bir kısıtlama olmadığını göstermek kalacaktır. Tüm kısıtlamaların $x_m = x_n$ biçiminde olduğu biliniyor. Öncelikle $H \subseteq H_{q+\frac{1}{2}}$

olduğu durumu ele alınsın. $n > q + 1$ olmak üzere (genelliği kaybetmeden)

$x_q = x_{q+1} = x_n$ biçiminde kısıtlamalarımız bulunmaktadır. $(Tx) \in H$ olduğundan

$$(Tx)_q = x_{q-1} + x_{q+1} = (Tx)_n = x_{n-1} + x_{n+1} \text{ ifadesini elde ederiz.}$$

Eğer $n > q + 2$ ise o zaman yardımcı önerme 4.1'in sağladığı üç olasılık dikkate alınsın. Eğer $x_{q-1} = x_{q+1} = x_{n-1} = x_{n+1}$ ise

$x_q = x_{q+1} = x_n = x_{n+1}$ olur. Böylece lemma 4.3 bir çelişme ortaya koyar. Eğer $x_q = x_n$ olduğu

gibi $x_{q-1} = x_{n-1}$ ve $x_{q+1} = x_{n+1}$ ise lemma 4.3 yine çelişen bir durum sergiler. Eğer $x_q = x_n$

olduğu gibi $x_{q-1} = x_{n+1}$ ve $x_{q+1} = x_{n-1}$ ise o zaman $x_q = x_{q+1} = x_n = x_{n-1}$ ifadesini kullanarak

lemma 4.3'ü uygulamak yine çelişme durumu ortaya koyacaktır. Eğer $n = q + 2$ ise tüm

$x \in H$ değerleri için $x_q = x_{q+1} = x_{q+2}$ eşitliği vardır ve alışılmış bir tümevarım argümanı x 'in sabit bir vektör olduğunu söyler ki, $x=0$ olmadıkça bunun olması mümkün değildir. Bu nedenle bu örnekte $H = H_{q+\frac{1}{2}}$ 'dir

$H \subseteq H_q$ olduğu durumda tüm $x \in H$ değerleri için $x_{q-1} = x_{q+1} = x_n$ olduğu varsayılın. Öncelikle (yine genelliği yitirmeden) $n > q+2$ olduğu kabul edilir. Sonra $(Tx)_{q+1} = (Tx)_n$ olacağından tüm $x \in H$ değerleri için elimizde $x_q + x_{q+1} = x_{n-1} + x_{n+1}$ ifadesi olur. Lemma 4.1'i kullanarak üç olasılık elde edilir. (1) $x_q = x_{q+1} = x_{n-1} = x_{n+1}$ dir ve $x_{q+1} = x_n$ olduğundan $x_q = x_{q+1} = x_n = x_{n+1}$ olur ve lemma 4.3 ile bir çelişme ortaya çıkar. (2) $x_{q+1} = x_n$ olduğu gibi $x_q = x_{n-1}$ dir ve yine lemma 4.3'ü uygulanabilir. Son durumda, elimizde $x_{q-1} = x_n$ ile beraber $x_q = x_{n+1}$ vardır ve yine lemma 4.3'ü uygulayabilir. Sonuç olarak eğer $n = q+2$ ise tüm $x \in H$ değerleri için $x_{q-1} = x_{q+1} = x_{q+2}$ eşitliği vardır. Önceki paragrafın argümanları zaten bu ihtimali ortadan kaldırmıştı. Buradan da $H = H_q$ olduğu görülür.

Elbette eğer X , $\ell_\infty(Z)$ veya $c(Z)$ alınmış olsaydı, o zaman T 'nin pozitif bir öz vektörü yani herhangi bir sabit dizisi olacaktı. Benzer şekilde $c_0(Z)$ kapalı değişmez bir ideal olacaktı.

$p \in Z$ ise H_q 'nin elemanlarının

$(..., x_2, x_1, x_0, x_1, x_2, ...)$ biçiminde olduğuna ancak;

eğer $p - \frac{1}{2} \in Z$ ise $(..., x_2, x_1, x_0, x_0, x_1, x_2, ...)$ şeklinde olacağına da dikkat edilsin.

Bu değişmez altörgülerden herhangi ikisinin kesişiminin $\{0\}$ kolaylıkla görülür. Buradan, örneğin T 'nin H_0 'a kısıtlamasının değişmez kapalı aşikâr olmayan altörgüsü olmadığı sonucu çıkar. H_0 , (girdileri negatif olmayan tamsayılarla endekslediğimiz) ℓ_p ile özdeşleştirilebilir ve T ,

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} & n > 0, \\ 2x_1 & n = 0. \end{cases}$$

operatörüyle tanımlanabilir.

Bu neredeyse çok bilinen $S + S^*$ operatörüdür ki S burada tek yönlü kaydırma operatörüdür. Öyle bir durumda aşikâr olmayan kapalı değişmez altörgülerin var olmadığının direkt kendi kendine yeten ispatını verilebilir.

Örnek 4.5 $X = \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) veya c_0 olsun ve T, X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanmış bir operatör olsun.

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} & n > 0 \\ 2x_1 & n = 0 \end{cases}$$

o zaman X 'in aşikâr olmayan kapalı T -değişmez altörgüleri yoktur (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: T 'nin pozitif bir öz vektörü olmadığıyla başlanılır. Her $x \in X$ elemanı bir kompleks düzlem içerisindeki açık birim disk üzerinde analitik olan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ fonksiyonunu tanımlamaktadır. T 'nin X üzerindeki etkisi $f' i z f(z) + (f(z) - f(0))/z$ ifadesine götüren eşlemeye denk gelmektedir. Eğer x pozitif ve $Tx = \lambda x$ ise $\|T\| = 2$ olduğunu kaydederek $2 \geq \lambda \geq 0$ dır. Elimizde,

$$zf(z) + (f(z) - f(0))/z = \lambda f(z)$$

vardır, böylece

$$f(z) = \frac{f(0)}{z^2 - \lambda z + 1} \text{ olur.}$$

Bu nedenle $f(0) = 1$ alınır, $(z^2 - \lambda z + 1)^{-1}$ 'in sıfır civarında Taylor serisinin katsayıları X 'te bulunur. Eğer $\lambda = 2$ ise, o zaman bu seri $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ olur ve katsayıları sınırsızdır.

Böylece X üzerinde bulunmazlar. Eğer $\lambda < 2$ ise o zaman θ , $\cos(\theta) = \lambda/2$ ve

$$\sin(\theta) = +\sqrt{1 - \cos(\theta)^2} \quad \text{ve} \quad w = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \text{kümesiyle} \quad \text{tanımlanırsa,}$$

$$z^2 - \lambda z + 1 = (z - w)(z - \bar{w}) \text{ olur. Bu sayede;}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - \lambda z + 1} &= \frac{-i}{2 \sin(\theta)} \left(\frac{1}{(z - w)} - \frac{1}{(z - \bar{w})} \right) \\ &= \frac{i}{2 \sin(\theta)} \left(\frac{\bar{w}}{1 - \bar{w}z} - \frac{w}{1 - wz} \right) \\ &= \frac{i}{2 \sin(\theta)} \left(\bar{w} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n - w \sum_{n=0}^{\infty} w^n z^n \right) \\ &= \frac{i}{2 \sin(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{w}^{n+1} - w^{n+1}) z^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2\sin(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta) \right) - \left(\cos((n+1)\theta) - i\sin((n+1)\theta) \right) \right] z^n \\
&= \frac{i}{2\sin(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} 2i\sin((n+1)\theta) z^n
\end{aligned}$$

olduğu ve Taylor serisinin katsayılarının, $\sin((n+1)\theta)/\sin(\theta)$ olup ($\theta \neq 0$ olduğundan) sıfıra yakınsamadığını ve dolayısıyla X 'te bulunmadığı görülmüş olur. Bu da pozitif öz vektörlerin yokluğunu kanıtlamaktadır.

Şimdi H , X 'in T -değişmez kapalı aşıkâr olmayan bir altörgüsü olsun. Öncelikle tüm $x \in H$ değerlerini $x_m = 0$ yapan bir m olmadığı gösterilsin. Eğer $m = 0$ ise o zaman tüm $x \in H$ değerleri için $(Tx)_0 = x_1 = 0$ olacaktır. Bu yüzden $m > 0$ olduğu kabul edebilebilir. Eğer böyle bir m değeri varsa, o zaman $x \in H_+$ alınır ve $(Tx)_m = x_{m-1} + x_{m+1} = 0$ olduğu ve dolayısıyla ($x \geq 0$ olduğunda) $x_{m-1} = x_{m+1} = 0$ olduğu görülür. Bu aynı zamanda tüm $x = x^+ - x^- \in H$ için de geçerli olmalıdır. Tümevarımdan devam ederek negatif olmayan tüm p tamsayıları için $x_p = 0$ ve dolayısıyla $H = \{0\}$ olduğu görülür. Diğer yandan eğer, $H \neq X$ ise $m > n$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere, öyle $m, n \geq 0$ değerleri vardır ki tüm $x \in H$ değerleri için $x_m = \alpha x_n$ ifadesi doğru olur. Eğer $x \in H$ ise ve $x_1, x_2, \dots, x_m$ 'ler biliniyorsa x in tek bir şekilde belirlenebileceği iddia edilir. $1 \leq j \leq m$ olmak üzere tüm $k \leq p$ değerleri için x_k 'yi özel olarak x_j terimlerinin lineer bir kombinasyonu olarak gösterebileceğini belirten $P(p)$ ifadesi ele alınsın. Bu $p = m$ için apaçık doğrudur. Şimdi $P(p)$ ifadesinin doğru olduğu varsayılınsın. H , T -değişmez olduğunda, $T^{p+1-m}x \in H$ olduğunu ve $(T^{p+1-m}(x))_m$ nın $k \leq p+1$ ve x_{p+1} teriminin katsayısı 1 olmak üzere x_k ların lineer kombinasyonu olduğuna dikkat edilsin. Benzer şekilde $(T^{p+1-m}(x))_n$, $k \leq p+n+1-m$ olmak üzere x_k ' nın lineer kombinasyonu olacaktır. $(T^{p+1-m}(x))_m = \alpha (T^{p+1-m}(x))_n$ olduğundan $k \leq p$ için x_{p+1} terimi x_k cinsinden çözülebilir. Dolayısıyla x_{p+1} , $1 \leq k \leq m$ olmak üzere x_k nın lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir. Bir diğer deyişle $P(p+1)$ ispatlanmış olur. Buna göre H sonlu boyuttadır. Ancak şimdi (Abramovich,2002,Teorem 8.11)'i bize T 'nin pozitif özdeğer olduğunu söyler ki bunun yanlış olduğu zaten biliniyor.

Dikkat edilir ki $p = 2$ olduğunda T operatörü kendine eşlenik olmaktadır ve dolayısıyla pek çok aşikâr olmayan kapalı değişmez altuzayı olacağı kesindir.

Yine, $X = c$ veya $X = \ell_\infty$ alındığında c_0 aşikâr olmayan değişmez kapalı bir ideal olduğundan iddia yine çökmektedir. Bu sonuç özel ilgi alanında olup M.G. Krein'in $C(K)$ -uzayındaki herhangi pozitif bir T operatörünün eşleniği olan T^* 'in, pozitif bir öz vektörü olduğunu ileri süren (Abramovich,2002,Sonuç 9.46) teoreminden ortaya çıkar. Buradan T nin aşikâr olmayan kapalı değişmez bir altuzayı olduğu ve bunun böyle bir öz vektörün çekirdeği olduğu hemen anlaşılır. Bu nedenle $C(K)$ - uzaylarındaki pozitif operatörlerin aşikâr olmayan kapalı değişmez altöğülleri olduğu tahmin edilebilir. Burada öyle olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir. Önceki örnekte de olduğu gibi bir sonrakinde de pek çok atom vardır.

Örnek 4.6 $X = c$ ve T, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanmış bir operatör olsun.

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_{n+1} + x_0 & n > 0 \\ x_1 + x_0 & n = 0 \end{cases}$$

O zaman X 'in aşikâr olmayan kapalı T -değişmez bir altöğüsü bulunmamaktadır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Öncelikle, $x \in X_+$ 'nin T 'nin bir özvektörü olduğu kabul edilir ve $\lambda \geq 0$ da denk gelen özdeğer olur. Bir önceki ispatta olduğu gibi eğer $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ olarak belirlenirse o zaman benzer biçimde z 'yi $zf(z) + (f(z) - f(0))/z + f(0)/(1-z)$ ifadesine götüren dönüşüm olur ve dolayısıyla

$$zf(z) + (f(z) - f(0))/z + f(0)/(1-z) = \lambda f(z) \text{ dir.}$$

Buradan da aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$f(z) = \frac{(1-2z)f(0)}{(1-z)(z^2 - \lambda z + 1)}$$

Eğer $\lambda > 2$ ise f 'nin $(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4})/2 < 1$ 'de bir kutbu vardır ve bu f 'nin açık birim disk üzerinde analitik olmasıyla çelişmektedir.

$\lambda \leq 2$ olduğu görüldükten sonra dizi görüşüne geri dönülecek olursa, $f = 0$ dan başka $x_0 = f(0) \neq 0$ olduğu zaten biliniyor. $Tx = \lambda x$ olmasından, $(Tx)_0 = x_1 + x_0 = \lambda x_0$ olduğu görülür ki, buradan da $x_1 = (\lambda - 1)x_0$ sonucu çıkar. $(Tx)_1 = x_2 + 2x_0 = \lambda x_1 = \lambda(\lambda - 1)x_0$ ifadesinden

$$x_2 = (\lambda^2 - \lambda - 2)x_0 \quad \text{olduğu}$$

görülür. $(Tx)_2 = x_3 + x_1 + x_0 = x_3 + \lambda x_0 = \lambda x_2 = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2)x_0$ ifadesinden $x_3 = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 3)x_0$ eşitliği elde edilir. $\lambda \leq 2$ olduğu için $\lambda^2 - \lambda - 3 < 0$ olmaktadır. Dolayısıyla $x_3 < 0$ sonucu çıkar ki, bu da $x \geq 0$ ile çelişmektedir. Bu nedenle T 'nin pozitif öz vektörleri yoktur.

H , X 'in T -değişmez kapalı altörgüsü olsun. Öncelikle tüm $x \in H$ değerleri için $x_m = 0$ 'ı sağlayan bir m olmadığı gösterilsin. $m > 1$ ise ve herhangi bir $x \in H_+$ alınırsa, $(Tx)_m = x_0 + x_{m-1} + x_{m+1} = 0$ olur ve (pozitiflikten) tüm $x \in H_+$ değerleri için $x_0 = x_{m-1} = x_{m+1} = 0$ 'dır. Dolayısıyla her $x \in H$ için sağlanmış olur. Tümevarımla devam edilirse tüm p değerleri için $x_p = 0$ olur ($x_2 = 0$ olması, $x_0 = x_1 = x_3 = 0$ ifadesini verir). Eğer $m = 1$ ise $(Tx)_1 = 2x_0 + x_2$ olması benzer şekilde tüm $x \in H$ değerleri için $x_0 = x_2 = 0$ sonucunu verecektir. Şimdi tekrar $m > 1$ olduğu durumuna dönülür. Sonuç olarak eğer $m = 0$ ise $(Tx)_0 = x_0 + x_1$ olur ve bu da her $x \in H$ için $x_1 = 0$ olduğunu gösterir. Yine önceki duruma dönülebilir. Ayrıca tüm $x \in H$ değerleri için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olması da imkânsızdır. Çünkü böyle bir durumda her $x \in H_+$ için,

$$|Sx| \leq T(|x|)$$

olur. Dolayısıyla her $x \in H_+$ için ve böylece her $x \in H$ değeri için $x_0 = 0$ olur. Yine bunun da imkânsız olduğu önceden biliniyor.

Geriye kalan tek olasılık $H \neq X$ olması, yani öyle m, n ve $\alpha > 0$ değerleri vardır ki $x_m = \alpha x_n$ ifadesini her $x \in H$ için geçerli kılıyor veya öyle m ve $\alpha > 0$ değerleri vardır ki $x_m = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oluyor. Bu durumların ilkinde H 'nin sonlu boyutlu olmasının ispatı aynen önceki örnekteki gibi devam ediyor ve bir çelişkiyle karşı karşıya kalınıyor. İkinci durumda dikkat edilirse bu şekilde sadece bir kısıtlamamız olabilir. Çünkü her $x \in H$ için aynı zamanda $x_p = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ varsa, her $x \in H$ için $x_m = (\alpha / \beta) x_p$ olması gerekir ancak bunun imkânsız olduğu zaten kanıtlanmıştı. Bunun anlamı $x_m = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ şartının H 'nin üzerindeki muhtemel tek kısıtlama olduğudur.

Eğer $m = 0$ ise b , $\alpha = 0$ 'dan başlayan bir dizi olarak düzenlendiğinde, tüm terimleri 1 alınırsa $b \in H$ olacaktır. Fark edilir ki $(Tb)_0 = \alpha$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tb)_n = 3$ olmaktadır. Dolayısıyla $\alpha = 3\alpha$ sonucu çıkar ki bu da $\alpha > 0$ ile çelişmektedir. Eğer $m > 0$ ise $n > m+1$ için tüm diğer $a_n = 0$ olmak üzere $a_m = \alpha$, $a_n = 1$ olacaktır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ta)_n = 3$ iken, $(Ta)_m = 0$ olur. Dolayısıyla $0x\alpha=3$ sonucu çıkmaktadır ki bu da imkânsızdır. Şimdi X 'in kapalı bir öz

altörgüsünde geçerli olabilecek muhtemel tüm kısıtlamalar ortadan kaldırıldığına göre böyle bir kapalı T -değişmez altörgüsünün olamayacağı söylenebilir.

Bu operatörün aynı zamanda Sonuç 3.3'e göre kesin olarak değişmez kapalı bir altörgüsünün bulunduğu, ℓ_∞ 'da da tanımlı olduğu farkedilir ki, c 'nin böyle bir değişmez altörgü olduğu hemen görülebilir.

5. BAZI ATOMSUZ ÖRNEKLER

$C(K)$ -uzayında atomsuz olarak ve bir atomik olmayan L^p -uzayında tanımlı olup aşikâr olmayan kapalı değişmez altörgüleri olmayan pozitif operatörler örnekleri verilecektir.

Γ birim çember ve $C(\Gamma)$ Γ üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli bütün fonksiyonların uzayı olsun. $C(\Gamma)$ ve $\{f \in C[0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$ kümesi tanımlanmıştır. Şimdi α/π bir irrasyonel sayı olacak şekilde $(0, 2\pi)$ aralığından bir α belirlenmiş olup, H , $C(\Gamma)$ içerisinde aşağıdaki biçimde tanımlanmış bir hiperdüzlemdir.

$$H = \left\{ f \in C(\Gamma) : \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \right\}.$$

Bir $f \in C(\Gamma)$ fonksiyonu, tüm $\theta \in [0, 2\pi)$ değerleri için “+” 2π modülünün ilave edilmesi anlamına gelmek üzere, $f(\theta) = g(\theta + \alpha) - g(\theta)$ eşitliğini sağlayan bir $g \in C(\Gamma)$ varsa bu fonksiyona α için toplamsal karşıtsınır denir. Eğer bazı $c \in \mathbb{R}$ değerleri için $f - c$ fonksiyonu bir toplamsal karşıtsınır ise f fonksiyonu α için bir *aşikâr ortak-döngü* dür. C_α tüm α -karşıtsınırlarının kümesi olsun o zaman açıkça $C_\alpha \subset H$ ’dır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead, 2007).

Lemma 5.1 C_α , H içerisinde ikinci kategoriden bir küme olamaz (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead, 2007).

İspat: $D_\alpha g(\theta) = g(\theta + \alpha) - g(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ olsun. D_α ‘nin H ‘den C_α ‘ye sınırlı bir lineer operatör olduğu açıkça anlaşılmaktadır. $D_\alpha : H \rightarrow C_\alpha$ operatörünün birebir ve $D_\alpha H = C_\alpha$ olduğu iddia ediliyor. Gerçekten, eğer $D_\alpha g = 0$ olursa, $n\alpha = (n-1)\alpha + \alpha$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $g(n\alpha) = g(0)$, $n \in \mathbb{N}$ olur. $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $[0, 2\pi)$ aralığında yoğundur çünkü α/π bir irrasyonel sayı ve bu yüzden $g(\theta) \equiv g(0)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Tekrar $\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0$ olduğu hatırlanırsa $g = 0$ elde edilir.

$D_\alpha H = C_\alpha$ olduğunun ispatlanabilmesi için eğer $h \in C_\alpha$ ise, $\theta \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $h(\theta) = g(\theta + \alpha) - g(\theta)$ ‘i sağlayan bir $g \in C(\Gamma)$ ‘nin varlığını dikkate alalım. $\theta \in [0, 2\pi)$

olmak üzere $\tilde{g}(\theta) = g(\theta) - \int_0^{2\pi} g(\lambda) d\lambda$ olsun. O zaman, açıkça $\tilde{g} \in H$ ve $D_\alpha \tilde{g} = h$ olacaktır.

Bu durumda D_α operatörü tersinirdir. Fakat $D_\alpha^{-1}: C_\alpha \rightarrow H$ ters operatörü sınırlı değildir. Aslında, $\delta_{j\alpha}(f) = f(j\alpha)$ olmak üzere $\mu_n = \sum_{j=0}^n \delta_{j\alpha}$ olursa $f \in H$ olur. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ değeri için, $j \in [0:n]$ olmak üzere, $\|f_n\| = 1$ ve $f_n(j\alpha) = 1$ 'i sağlayan bir $f_n \in H$ bulunabilir. Bu yüzden de $\|\mu_n\|_{H^*} = n+1$ 'dir. Öte yandan $\|D_\alpha^* \mu_n\|_{C_\alpha^*} = \|\delta_0 - \delta_{(n+1)\alpha}\|_{C_\alpha^*} \leq 2$ 'dir. Bu nedenle $(D_\alpha^*)^{-1}$ sınırsız olur.

Klasik Banach teoremine göre, örnek için bkz. (Rudin,1973,Teorem 2.11), $C_\alpha = D_\alpha H$, H 'de ikinci kategoriden bir küme olamaz.

Lemma 5.2 H 'nin H 'de ikinci kategori olan bir M alt kümesi vardır ve $p < 2q$ olmak üzere herhangi bir $p, q \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki elde edilir:

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^n f(j\alpha) - \sum_{j=0}^n f\left(p\pi/q + j\alpha\right) \right| = \infty$$

(A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için H 'nin altkümesi H_m aşağıdaki şekilde tanımlanır.

eğer $f \in H$ ve $p < 2q \leq m$ 'i sağlayan $p, q \in \mathbb{N}$ mevcutsa,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^n f(j\alpha) - \sum_{j=0}^n f\left(p\pi/q + j\alpha\right) \right| \leq m \text{ ise } f \in H_m \text{ 'dir.}$$

Açıkçası H_m , H 'nin kapalı bir alt kümesidir. H_m 'nin H 'de hiçbir yerde yoğun olmadığı iddia ediliyor. Bir $f \in H_m$ ve ε pozitif skalerini sabit tutulsun. $\|g\| \leq \varepsilon$ ve $f + g \notin H_m$ olacak şekilde bir $g \in H$ fonksiyonunu oluşturarak devam edilsin.

$Q_m = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{N}, p < 2q \leq m\}$ kümesini ve

$$Q_m^{(1)} = \left\{ (p, q) \in Q_m : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^n f(j\alpha) - \sum_{j=0}^n f\left(p\pi/q + j\alpha\right) \right| \leq m \right\} \text{ ve } Q_m^{(2)} = Q_m \setminus Q_m^{(1)} \text{ olmak üzere}$$

bu kümenin bir bölüntüsü olan $Q_m = Q_m^{(1)} \cup Q_m^{(2)}$ kümesi göz önünde bulundursun. O zaman

herhangi bir $(p, q) \in Q_m^{(2)}$ için aşağıdaki ifadeyi sağlayan bir $n = n(p, q) \in \mathbb{N}$ vardır ve

$$\left| \sum_{j=0}^{n(p,q)} f(j\alpha) - \sum_{j=0}^{n(p,q)} f\left(\frac{p\pi}{q} + j\alpha\right) \right| > m.$$

$N \in \mathbb{N}$, $N\varepsilon > 2m$ ve $N > \max_{(p,q) \in Q_m^{(2)}} n(p, q)$ olmak üzere sabit tutulsun. Buna göre

öyle bir $g \in H$ bulunabilir ki:

$$\|g\| = \varepsilon;$$

$$g(j\alpha) = \varepsilon, j = 0, \dots, N;$$

$$(p, q) \in Q_m^{(1)} \text{ ise } g\left(\frac{p\pi}{q} + j\alpha\right) = 0, j = 0, \dots, N;$$

$$(p, q) \in Q_m^{(2)} \text{ ise } g\left(\frac{p\pi}{q} + j\alpha\right) = \varepsilon, j = 0, \dots, N \text{ 'dir.}$$

α/π 'nin irrasyonel olduğu ve $f + g \notin H_m$ olduğu kolayca görüldüğünden g nin iyi tanımlanmış olduğu görülür.

Sonunda geriye $f \in M = H \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_m$ olduğu kaldığından, f nin (1) i sağladığı görülür.

Sonuç 5.3 X_+ kümesi boş değildir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Aksi takdirde $M \subseteq C_\alpha$ nin lemma 5.1 ile çeliştiği gerçeği ortaya çıkacaktır.

Örnek 5.4 $\alpha \in [0, 2\pi)$ yi α/π bir irrasyonel sayı olacak şekilde alınsın. $f \in M \setminus C_\alpha$,

$w = \exp(f)$ olsun ve $T, C(\Gamma)$ üzerinde $(Th)(x) = w(x)h\left(x + \alpha\right)$ olarak tanımlanan bir

pozitif operatör olarak alınsın. O zaman T operatörünün, $C(\Gamma)$ da aşık olmaya değişmez altörgüsü yoktur (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: İlk olarak T nin pozitif öz vektörlere sahip olmadığı ispat edilir. $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$

olduğu için, bkz. örn. (Abramovich,2002,Teorem 10.52), $\rho(T) = \rho(T^{-1}) = 1$ 'e sahip olunur,

ki burada $\rho(T)$, T nin spektral yarı çapına karşılık gelmekte, böylece $\sigma(T) \subseteq \Gamma$ olmaktadır.

Bu yüzden, eğer g , T için pozitif bir öz vektör ise, g , Γ üzerinde mutlak pozitif ve

$w(x) = g(x)/g\left(x+\alpha\right), x \in [0, 2\pi)$ olduğundan, $Tg = g$ 'dir. Bu yüzden

$f(x) = \ln(g(x)) - \ln\left(g\left(x+\alpha\right)\right), x \in [0, 2\pi)$, bu da $f \notin C_\alpha$ varsayımı ile çelişmektedir.

Farzedilsin ki $X, C(\Gamma)$ 'nin bir aşık ar olmayan T -değişmez norm kapalı altörgüsü olsun.

(Kakutani, 1941, Teorem 3) 'ten iki tane farklı $x, y \in [0, 2\pi)$ noktası ve bir $\lambda \geq 0$ reel sayısı vardır, öyle ki

(2) Her bir $g \in X$ için $g(y) = \lambda g(x)$ dir.

İlk olarak $\lambda > 0$ olduğuna dikkat edilsin. Gerçekten, aksi takdirde tüm $n \in N$ ler için $T^n g(y) = 0$ 'a sahip olunacaktı. Fakat

$$w_n(y) = w(y)w\left(y+\alpha\right) \cdots w\left(y+(n-1)\alpha\right)$$

durumunda $T^n g(y) = w_n(y)g\left(y+n\alpha\right)$ olacaktır.

Bu yüzden $g\left(y+n\alpha\right) = 0, n \in N$ 'dir. Dolayısıyla $g=0$ 'dır.

Genelliği bozmadan $x > y$ olduğu varsayılabılır. İlk olarak X Banach örgüsünün mutlak pozitif bir g fonksiyonu olduğuna dikkat edilsin. $f \geq 0$ fakat $f \not\equiv 0$ olduğu farzedilsin. $c_n > 0$

iken ve c_n skalerleri serilere yakınsamak için yeterince küçük olduğunda, $g = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n f$ olsun. O halde, w ağırlığının mutlak pozitif ve α/π nin irrasyonel, g nin mutlak pozitif oldukları hatırlanırsa, bu anda ayrı ayrı iki durum göz önünde bulundurulur.

(a) $\frac{x-y}{\pi}$ irrasyonel bir sayıdır. Biliniyor ki X , mutlak pozitif bir eleman g yi içermektedir.

Farzedilsin ki h, X 'ten diğer bir pozitif eleman olsun. h ve g fonksiyonlarının orantılı oldukları ispatlanacaktır. Gerekliğinde h yerine $g+h$ 'ı göz önüne alınarak, h 'nin de mutlak pozitif olduğu farz edilebilir. (2) den her bir $n \in N$ için aşağıdaki çıkarımlara sahip olunur :

$$\frac{g}{h}\left(y+n\alpha\right) = \frac{g}{h}\left(x+n\alpha\right), n \in N$$

den

$$w_n(y)g\left(y+n\alpha\right) = \lambda w_n(x)g\left(x+n\alpha\right)$$

ve

$$w_n(y)h\left(y+n\alpha\right)=\lambda w_n(x)h\left(x+n\alpha\right) \text{ dir.}$$

$\{n\alpha : n \in N\}$ kümesinin $[0, 2\pi)$ de yoğun olduğu hatırlanarak

$$(3) \quad \frac{g}{h}\left(y+\theta\right)=\frac{g}{h}\left(x+\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

ifadesi elde edilir.

Fakat $\{n(x-y) : n \in N\}$ kümesi $[0, 2\pi)$ de yoğun olduğundan, $\frac{x-y}{\pi}$ irrasyoneldir ve bu

yüzden (3), $\frac{g}{h}$ fonksiyonunun Γ üzerinde sabit olduğunu ifade etmektedir.

X Banach örgüsünün tüm pozitif elemanları orantılı olduğu için X bir boyutludur. Bu halihazırda ispatlanmış olan T nin pozitif öz vektörlere sahip olamayacağı gerçeği ile çelişmektedir.

(b) $p, q \in N$ ve $p < 2q$ olmak üzere $x-y = \frac{p}{q}\pi$ dir. Yine, g , X den mutlak pozitif bir

fonksiyon olarak alınsın. Böylece her bir $m, n \in N$ için $m > n$ olacak şekilde

$$(4) \quad \frac{w_n\left(y+(m-n)\alpha\right)}{w_n\left(y+\frac{p}{q}\pi+(m-n)\alpha\right)} = \frac{g\left(y+\frac{p}{q}\pi+m\alpha\right)g\left(y+(m-n)\alpha\right)}{g\left(y+\frac{p}{q}\pi+(m-n)\alpha\right)g\left(y+m\alpha\right)}$$

den

$$w_m(y)g\left(y+m\alpha\right)=\lambda w_m\left(y+\frac{p}{q}\pi\right)g\left(y+\frac{p}{q}\pi+m\alpha\right)$$

ve

$$w_{m-n}(y)g\left(y+(m-n)\alpha\right)=\lambda w_{m-n}\left(y+\frac{p}{q}\pi\right)g\left(y+\frac{p}{q}\pi+(m-n)\alpha\right)$$

ye sahip olunur.

Her bir sabit $n \in N$ için $\{(m-n)\alpha : m \in N, m > n\}$ kümesi $[0, 2\pi)$ de yoğundur. Bu yüzden

(4), $C = \|g\|^2 \|1/g\|^2$ den tüm $\theta \in [0, 2\pi)$ ve $n \in N$ ler için

$$(5) \quad \frac{1}{C} \leq \frac{w_n(\theta)}{w_n\left(\theta+\frac{p}{q}\pi\right)} \leq C,$$

ifadesini gerektirir.

Geriye (5) in $w = \exp(f)$ ve $f \notin M$ gerçeği ile açık bir şekilde çeliştiğini kaydetmek kalır.

Tabii ki, Krein'in teoremi yine T nin aşık ar olmayan değışmez alt uzayı olduğunu garanti edecektir. Teorem 3.6 nın, T nin bir örgü izomorfizması olduğundan, T nin aşık ar olmayan değışmez bir alt kümeye sahip olacağı görülür. Tabi ki bu alt küme kapalı olmayacaktır.

$f \in M \cap C_\alpha$ ve $w = \exp(f)$ alınır sa, o zaman buna tekabül eden T ağırlıklı rotasyon operatörü sadece bir tane bir boyutlu aşık ar olmayan norm-kapalı örgüye sahip olacak, $f \notin C_\alpha$ yi $f(\theta + \pi) = f(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ olacak şekilde alındığında, ilgili T operatörü ne pozitif öz vektörlere ne de aşık ar olmayan sabit değışmez ideallere sahip olacak, bununla birlikte bir değışmez norm-kapalı bir

$$X = \left\{ g \in C(\Gamma) : g(\theta + \pi) = g(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

altörgüsüne sahip olacaktır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

Sıra sürekli normlu saf atomik-olmayan bir Banach örgüsü için aşık ar olmayan değışmez altörgülere sahip olmayan pozitif bir operatörün desteklenmesinin mümkün olabileceğini göstermek için bir örnek verilecektir. Bu, bu noktadan itibaren hem gerç ek hem de kompleks skalerlerle çalışıldığında bazı hesaplamaları basitleştirecektir. Yine örnek verilmeden önce bazı ön hazırlıklara da ihtiyaç duyulmaktadır. Yukarıda olduğu gibi, Γ 'yı birim çember olarak alırsak, $1 \leq p < \infty$ ve X , $L^p(\Gamma)$ nin bir altuzayı ise

$$M(X) = \{ f \in L^\infty(\Gamma) : fX \subseteq X \}$$

kümesi tanımlanmış olsun.

Lemma 5.5 Eğer X , $L^p(\Gamma)$ nin kapalı bir altörgüsüyse, o zaman $M(X)$, $L^\infty(\Gamma)$ nin bir $\sigma(L^\infty, L^1)$ -kapalı altcebiri ve altörgüsüdür (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Açıkça $M(X)$, $L^\infty(\Gamma)$ nin sabitler içeren norm-kapalı bir altcebidir. Bu yüzden skalerlerin cismi R olduğunda, $M(X)$ otomatikman L^∞ nin bir altkümesi olacaktır. Skalerlerin cismi C ve $f \in M(X)$ ise, o zaman her bir $x \in X$ için $\bar{f}x = \bar{f} \bar{x} \in X$ 'e sahip olunur, ki burada $\bar{f}$, $\bar{f} \in M(X)$ den dolayı f nin kompleks eşleniği anlamına gelir.

$M(X)$ in $\sigma(L^\infty, L^1)$ -kapalı olduğunu ispatlamak için bir $f_\alpha \in M(X)$ netini (ağ) $f_\alpha \xrightarrow{\sigma(L^\infty, L^1)} f$, $f \in L^\infty(\Gamma)$ olacak şekilde düşünüp, $g \in L^q(\Gamma)$ alınsın. Öyle ki $L^q(\Gamma)$, $L^p(\Gamma)$ 'nin eşleniği

ve her bir $x \in X$ için $g(x) = 0$ olsun. Herhangi bir $x \in X$ ve herhangi bir α alacak olunduğunda $\int_0^{2\pi} f_\alpha x \bar{g} d\theta = 0$ 'a sahip olunur. Fakat $x\bar{g} \in L^1(\Gamma)$ dir, böylece $\int_0^{2\pi} f x \bar{g} d\theta = 0$ olur ve bu yüzden $f x \in X$ 'tir.

Lemma 5.6 X ve Y $1 \leq p < \infty$ iken $L^p(\Gamma)$ nin norm-kapalı vektör altörgüleri olsun. Öyle ki $Y \subseteq X$ ve Y^{dd} , $L^p(\Gamma)$ da Y ile genelleştirilmiş band olarak alındığında $Y^{dd} = L^p(\Gamma)$ olsun. O zaman $M(Y) \subseteq M(X)$ tir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat : Y ayrılabilir bir L^p uzayı olduğundan, $y \in Y_+$ olan bir $\{y\}^{dd} = Y^{dd} = L^p(\Gamma)$ vardır. $f \in M(Y)$ ve $x \in X_+$ olsun. $z = x + y$ ve I, J yi sırasıyla z ve y den üretilen, ayrı ayrı X ve Y deki esas idealler olarak alınsın. Kakutani'nin teoremi vasıtasıyla genelliği bozmaksızın I nin $C(Q)$ nun düzgün kapalı bir altörgüsü olduğu varsayılabilir, ki burada Q , $L^\infty(\Gamma)$ nin hiperstonean kompaktıdır, ve bu z **1** fonksiyonu ile temsil edilmektedir. $g \in L^\infty(\Gamma)$ ise $u(p) = u(q)$, $u \in I$ olmak üzere $p, q \in Q$ alındığında, $g(p) = g(q)$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter koşulun $gI \subseteq I$ olması gerektiğine dikkat edilsin. $n \in \mathbb{N}$ olduğu sabitlensin ve $Q_n = cl \left\{ t \in Q : \frac{1}{n} < y(t) < n \right\}$ olsun. Çünkü I projeksiyon özelliğine sahiptir ve $z_n = X_{Q_n} z \in I$ 'dır. Şayet tüm $u \in I$ lar için $t_1, t_2 \in Q_n$ ve $u(t_1) = u(t_2)$ ise, o zaman tüm $v \in J$ ler için $v(t_1) = v(t_2)$ olacaktır ve $y(t_1) = y(t_2) \neq 0$ olduğundan, $f(t_1) = f(t_2)$ ye sahip olunur ($f \in M(Y)$ olduğu hatırlansın). Bu yüzden $f z_n \in X$ tir. Ancak $\|z - z_n\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ olduğundan $f z \in X$ olacaktır ki bu yüzden $f x = f z - f y \in X$ tir.

Lemma 5.7 $Tx(\theta) = w(\theta)x\left(\theta + \alpha\right)$, $L^p(\Gamma)$ da ($1 \leq p < \infty$) ağırlıklandırılmış bir rotasyon operatörü olarak alınsın. Burada $w \in L_+^\infty$ tersinir ve α/π irrasyonel bir sayıdır. Eğer X , $L^p(\Gamma)$ nin norm-kapalı T-değişmez bir vektör altörgüsü ise, o zaman $M(X)$ bir $\sigma(L^\infty, L^1)$ -kapalı, rotasyon değişmez altcebir ve L^∞ nin bir altörgüsüdür (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Lemma 5.5 'ten sadece $M(X)$ in rotasyon değişmez olduğu ispat edilmelidir.

$T_\alpha x(\theta) = x\left(\theta + \alpha\right)$ yazılsın, böylece $T = wT_\alpha$ olur. $X \subseteq T^{-1}X$ ve T nin bir örgü

izomorfizma olmasından dolayı $T^{-1}X$ in $L^p(\Gamma)$ nn bir kapalı vektör altörgüsü olduğunu

kaydedelim. Ayrıca $x \in X_+$, $x \neq 0$ ise o zaman $z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{2^n \|T^n x\|} \in X$ ve $\{z\}^{dd} = L^p(\Gamma)$ 'dır.

Bu yüzden lemma 5.6 'dan $M(X) \subseteq M(T^{-1}X)$ tir. $f \in M(X)$ ve $x \in X$ olsun. O zaman

$TfT^{-1}x \in X$ olacaktır. $T^{-1}x(\theta) = w^{-1}\left(\theta + (-\alpha)\right)x\left(\theta + (-\alpha)\right)$ olduğunu kaydedelim. Böylece

$$\begin{aligned} TfT^{-1}x(\theta) &= w(\theta) f\left(\theta + \alpha\right) w^{-1}\left(\theta + (-\alpha) + \alpha\right) x\left(\theta + (-\alpha) + \alpha\right) \\ &= w(\theta) f\left(\theta + \alpha\right) w^{-1}(\theta) x(\theta) \\ &= f\left(\theta + \alpha\right) x(\theta) \end{aligned}$$

olur.

Bundan dolayı da $T_\alpha f \in M(X)$ olur. $M(X)$ bir cebir olduğundan, tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için

$T_\alpha^n f \in M(X)$ tir. Geriye $n \in \mathbb{N}$ için $n\alpha$ kümesinin Γ da yoğun ve

$\beta \mapsto T_\beta f : \Gamma \rightarrow (L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ eşleştirmesinin sürekli oldukları kaydetmek kalır.

Lemma 5.8 $L^\infty(\Gamma)$, kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$ boyunca değerlendirilsin. M , L^∞ nin

$\sigma(L^\infty, L^1)$ -kapalı bir altcebiiri olarak alınsın. İlaveten M kompleks eşlenik altında kapalı

farzedilsin ve buradan M rotasyon değişmezdir. O zaman negatif-olmayan bir m tamsayısı

vardır, öyle ki M , $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ de $\{e^{imn\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin kapalı lineer gerdiği uzay ile

çelişmektedir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $f \in X$ ve c_n ler f nin kompleks Fourier katsayıları olsun. O zaman Cesàro

$$\sigma_n(\theta) = \sum_{j=-n}^n c_j \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ij\theta}$$

ifadesinin $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ 'da f ye yakınsadığını belirtir. (Edwards,1979,Teorem 6.1.1) Her

bir $\beta \in [0, 2\pi)$ için

$T_\beta f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\beta \sigma_n \quad \sigma(L^\infty, L^1)$ da

ve

$$T_\beta \sigma_n(\theta) = \sum_{j=-n}^n c_j \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ij\beta} e^{ij\theta}$$

olur.

Her bir $j \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ij\beta} T_\beta \sigma_n d\beta &= \int_0^{2\pi} e^{-ij\beta} \left(\sum_{k=-n}^n c_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik\beta} e^{ik\theta} \right) d\beta \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ij\theta} \end{aligned}$$

olur ve tabi ki integral M 'de bulunur. Şimdi $\int_0^{2\pi} e^{-ij\beta} T_\beta f d\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-ij\beta} T_\beta \sigma_n d\beta = 2\pi c_j e^{ij\theta}$

olur. Böylece $c_j \neq 0$ (her bir $f \in M$ için) olduğunda, $\theta \mapsto e^{ij\theta}$ fonksiyonu M de olacaktır.

Hemen akabinde M , $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z}, e^{in\theta} \in M\}$ kümesinin $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ içinde kapalı lineer gerdiği uzay olduğu ortaya çıkar.

Şayet M sadece sabit fonksiyonlardan oluşuyorsa sonuç açıktır. Aksi taktirde, bir, $n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$ vardır, öyle ki $e^{in\theta} \in M$ dir. Çünkü M , $e^{-in\theta} \in M$ kompleks eşlenik altında kapalıdır. $m = GCF \{n \in \mathbb{N} : e^{in\theta} \in M\}$ olsun. M nin bir cebir olduğunu hatırlayarak ve Öklit algoritmasını kullanarak, yardımcı özelliğin sürmesi nedeniyle $e^{im\theta} \in M$ olduğu görülür.

Lemma 5.9 X , $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\Gamma)$ nın bir kapalı aşıkır olmayan T -değişmez altörgüsü olsun. O zaman ya $\text{boy}(M(X)) = 1$ ya da $m \in \mathbb{N}$ olacaktır, öyle ki tüm $f \in M(X)$ ler için $m > 1$ ve $T_{2\pi/m} f = f$ tir (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: $L^p(\Gamma)$ ve X , $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cisminde değerlendirilecek olduğunda, ifade direkt olarak lemma 5.7 ve 5.8 i takip etmektedir. Skalerlerin cismi $\mathbb{R}$ ise, bu yardımcı özellikleri $L^p(\Gamma)$ ve X in standart kompleksleştirmelerine uygulayarak sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.10 X , $1 \leq p < \infty$ aralığında $L^p(\Gamma)$ nın bir kapalı aşıkır olmayan T -değişmez altörgüsü olsun. O zaman ya $\text{boy}(X) = 1$ olacak ya da ölçülebilir bir $\lambda \in L^0(\Gamma)$ fonksiyonu ve

tüm $x \in X$ ve $\theta \in [0, 2\pi)$ ler için $x\left(\theta + 2\pi/m\right) = \lambda(\theta)x(\theta)$ ifadesini sağlayan artı değerli bir m tamsayısı olacaktır (A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,2007).

İspat: Her bir $j \in N$ için, x_j, X de pozitif bir eleman olarak alınsın. Öyle ki bunların lineer kombinasyonları X te yoğun olsun.

$$z = \sum_{j \in N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x_j}{2^{j+n} \|T^n x_j\|}$$

olarak alınsın.

I, z ile X 'te üretilen esas ideal olsun. O zaman $TI \subseteq I$ olduğu ve I nın $Z(I)$ merkezinin $M(X)$ ile çakıştığı apaçık görülecektir. Yardımcı özellik 5.8 ve 5.9 a göre üç ihtimal bulunmaktadır.

- (1) $\text{boy}(I) = 1$ ve böylece $\text{boy}(X) = 1$ olduğundan $\text{boy}(M(X)) = 1$ dir.
- (2) Sonucun hipoteziyle $X = L^p(\Gamma)$ çelişkide olduğundan $Z(I) = L^\infty(\Gamma)$ dır.
- (3) Bir, $m \in N$ $m > 1$ durumu vardır, öyle ki tüm $f \in Z(I)$ ler için $T_{2\pi/m} f = f$ dir.

Bu noktadan itibaren (3) durumu ile ilgilenilmesi gerekir. $x \in X$, $0 \leq x \leq z$ olacak şekilde alınsın. I Dedekind tam olduğundan $x = hz$ olan bir $h \in Z(I)$ vardır. Bu yüzden

$$x\left(\theta + 2\pi/m\right) = \frac{z\left(\theta + 2\pi/m\right)}{z(\theta)} x(\theta)$$

oldüğundan

$$T_{2\pi/m} x = T_{2\pi/m} h T_{2\pi/m} z = h T_{2\pi/m} z \text{ dir.}$$

$$\lambda(\theta) = \frac{z\left(\theta + 2\pi/m\right)}{z(\theta)} \text{ fonksiyonu } \{z\}^{dd} = L^p(\Gamma) \text{ olduğundan ölçülebilirdir. Şimdi sonucun}$$

ifadesi I nın X te yoğun olduğu gerçeğini takip etmektedir.

Sonra (Baggett,1996) dan bir sonuca gereksinim duyulur.

Teorem 5.11 ν , trigonometrik bir polinom olmayan, $(0, 1)$ açık aralığında entegre edilebilir, reel analitik bir fonksiyon olarak alınsın. O zaman U kümesi, ν 'nin aşikar ortak döngüsü olduğu irrasyonellerin kümesi birinci kategoridendir (Baggett,1996, Teorem 1).

Şu anda $1 \leq p < \infty$ olacak şekilde $L^p(\Gamma)$ üzerinde, aşikar olmayan kapalı değişmez altörgüler olmadan bir sınırlı pozitif lineer operatör örneği oluşturulabilir.

Örnek 5.12 $v, L^\infty(\Gamma)$ dan bir reel analitik fonksiyon olarak alınsın, ki bu bir trigonometrik polinom olmasın. $w = \exp(v)$ olsun. $[0, 2\pi)$ de ikinci kategoriden bir V altkümesi vardır, öyle ki her bir $\alpha \in V$ için $\frac{\alpha}{2\pi}$ sayısı irrasyoneldir ve $T = wT_\alpha$ operatörü $L^p, 1 \leq p < \infty$ de aşıkâr olmayan kapalı değişmez altörgülere sahip değildir.

İspat: Teorem 5.11 den irrasyonellerden (modül 2π) oluşan bir V kümesi vardır, öyle ki $V, [0, 2\pi)$ de ikinci kategoridendir ve her bir $\alpha \in V$ için $v, v_2, v_3, \dots$ fonksiyonlarının hiçbirini, burada $v_m(\theta) = v\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right) - v(\theta)$, α için aşıkâr ortak döngü değildir.

Bir $\alpha \in V$ sabit tutulsun. $T = wT_\alpha$ olsun ve X de $L^p(\Gamma)$ nın bir kapalı T -değişmez altörgüsü olsun. Sonuç 5.10 dan iki olasılık ortaya çıkar:

(1) $\text{boy}(X) = 1$. O zaman v , seçilen α ile çalışmakta olan bir aşıkâr ortak döngüdür.

(2) Ölçülebilir bir $\lambda \in L^0(\Gamma)$ fonksiyonu ve bir m pozitif tamsayısı vardır, öyle ki tüm $x \in X$

ve tüm $\theta \in [0, 2\pi)$ ler için $x\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right) = \lambda(\theta)x(\theta)$ dir. X, T -değişmez olduğundan aynı

zamanda $Tx\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right) = \lambda(\theta)Tx(\theta)$ dir. Böylece

$$w\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right)x\left(\theta + \frac{2\pi}{m} + \alpha\right) = \lambda(\theta)w(\theta)x\left(\theta + \alpha\right),$$

$$x\left(\theta + \frac{2\pi}{m} + \alpha\right) = \lambda\left(\theta + \alpha\right)x\left(\theta + \alpha\right)$$

ifadelerine sahip olunur ve

$$\frac{w\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right)}{w(\theta)} = \frac{\lambda(\theta)}{\lambda(\theta + \alpha)}$$

öyle ki

$$v_m(\theta) = v\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right) - v(\theta)$$

$$= \log\left(w\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right)\right) - \log(w(\theta))$$

$$= \log(\lambda(\theta)) - \log\left(\lambda\left(\theta + \alpha\right)\right) \text{ dir, bu da göstermektedir ki } v_m \text{ bir ortak sınırdır ve}$$

böylece α 'nın seçimini çeliştiren bir aşıkâr ortak döngüdür.

6. BAZI AÇIK PROBLEMLER

Yukarıda oldukça geniş bir pozitif operatörler sınıfının aşıkak olmayan değışmez (kapalı olması gerekmeyen) altörgölere sahip olduğu belirtildi.

Soru 6.1 X Banach örgüsü üzerinde herhangi bir pozitif operatörün aşıkak olmayan değışmez (kapalı olması gerekmeyen) bir vektör altörgüsüne sahip olduğu doğru mudur?

Soru 6.2 Her bir T pozitif operatörünün X üzerinde aşıkak olmayan değışmez kapalı bir altörgüye sahip olduğu sonsuz-boyutlu ayrılabilir bir X Banach örgüsü var mıdır?

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada Banach örgüsündeki her pozitif operatörün aşikar olmayan kapalı değişmez altörgüsü olup olmadığı sorusundan yola çıkılmıştır. Genel olarak bunun ispatı henüz mümkün olmamış olsa da, sayılabilir boyut durumu ve 3. bölümde gösterilen ayrışmayan Banach örgüsünün olduğu aşikar olan çözüm haricinde, söz konusu Banach örgüsünde tek bir koşul içeren pozitif sonuçları ortadan kaldırdığı gösterilmiştir.

Pozitif bir özdeğeri ve aşikar olmayan kapalı herhangi değişmez ideali olmamasına rağmen, aşikar olmayan, kapalı değişmez altölgülere sahip olan bir pozitif operatör örneği ve aşikar olmayan, değişmez kapalı altölgülere sahip, değişik pozitif operatör örnekleri verilmiştir. Bu örneklerin arasında hem soyut M -uzayı hem de sıra sürekli norma sahip, atomik ve atomik olmayan Banach örgüleri de ele alınmıştır. Tüm bu durumlarda operatörlerin aşikar olmayan, kapalı ve değişmez altuzayları olabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y.A. ve Aliprantis, C.D.,(2002), “An Initiation to Operator Theory”, Amer.Soc.Graduate Studies in Math., vol.50, Providence,RI.
- A.K.Kitover ve A.W.Wickstead,(2007),Invariant Sublattices for Positive Operators Indag.Mathem.,N.S.,18(1),39-60
- Baggett L.W., Medina H.A. ve Merrill K.D., (1996), “On Functions that are Trivial Cocycles for a set of Irrationals”, II, Proc. Amer. Soc. **124** 89-93.
- Davie A.M., (1974), “Invariant Subspaces for Bishop’s Operators”,Bull.London Math. Soc. **6** 343-348.
- de Pagter B., (1986), “Irreducible Compact Operators”, Math. Z. **192** 149-153
- Duren P.L., (1963), “Invariant Subspaces of Tridiagonal Operators”, Duke Math. J. **30** 239-248.
- Edwards R.E., (1979), “Fourier Series”, A Modern Introduction, Vol. I, Springer, New York.
- Enflo P., (1987), “On The Invariant Subspace Problem for Banach Spaces,” Acta Math. **158** 213-313,Seminaire Maurey-Schwarz.
- Gök,Ö.,(1997),Fonksiyonel Analiz,Yıldız Teknik Üniversitesi, Basım-Yayın Merkezi Matbaası,İstanbul
- Grivaux S., (2002), “Invariant Subspaces for Tridiagonal Operators”, Bull. Sci. Math. **126** 681-691.
- Jameson G.J.O.,(1970), “Ordered Linear Spaces”, Springer-Verlag,Berlin
- Kakutani S., (1941), “Concrete Representations of Abstract (M)- spaces”, Ann.Math. **42** 994-1024.
- Meyer-Nieberg,P.,(1991), Banach Lattices, Springer-Verlag,Berlin ve New York
- Read C.J.,(1985), “A Solution to the Invariant Subspace Problem on the Space ℓ_1 ”, J. London Math. Soc. **17** 305-317.
- Read C.J.,(1986), “A Short Proof Concerning the Invariant Subspace Problem”, J. London Math. Soc. **34** 335-348.
- Read C.J.,(1997), “Quasinilpotent Operators and the Invariant Subspace Problem”, J. London Math. Soc. **56** 595-606.
- Rudin W., (1973), “Functional Analysis”, McGraw-Hill, New York.
- Schaefer H.H., (1963), “Spaktraleigenschaften Positiver Linearer Operatoren”, Math. Z. **82** 303-313.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi:	30.07.1975	
Doğum Yeri:	İstanbul	
Lise:	1989 - 1992	Özel Fatih Lisesi
Lisans:	1992 - 1996	Yıldız Teknik Üniversitesi